مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۴/ صفحه ۱۱-۲۲

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2017.866

آنالیز دینامیکی تیر تیموشنکوی پیش‌تنیده به‌کمک روش المان محدود طیفی بر پایه‌ی تبدیل موجک

علی مختاری[۱]، حمیدرضا میردامادی[۲،*] و مصطفی غیور[۳]

[۱] کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

[۳] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۷/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱

چکیده

در این پژوهش، فرمول‌بندی روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای آنالیز زمانی و بسامدی (فرکانسی) تیر تیموشنکوی زیر نیروی کششی یا فشاری محوری ثابت (پیش‌تنیده) ارایه می‌شود. معادله‌های دیفرانسیل، پاره‌ای وابسته به مکان و زمان حاکم بر این سامانه، به‌کمک تابع‌های مقیاس داوبچیز، به معادله‌های دیفرانسیل معمولی کوپله و وابسته به مکان تبدیل می‌شوند. این معادله‌ها، به کمک آنالیز مقدارهای ویژه، دکوپله می‌شوند. از حل دقیق این معادله‌ها در سامانه‌های یک بعدی، برای استخراج تابع‌های شکل دینامیکی و ماتریس سختی دینامیکی بهره گرفته می‌شود. این سامانه به‌کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، می‌تواند تنها به یک المان تقسیم شود، ولی در روش المان محدود کلاسیک، المان‌های بیشتری به کار گرفته می‌شود. دقت پاسخ‌های به‌دست آمده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، با پاسخ‌های روش المان محدود کلاسیک، راستی‌آزمایی (صحه‌گذاری) می‌شوند. نتیجه‌های عددی، گویای برتری این روش در کاهش تعداد المان‌ها و افزایش دقت، در مقایسه با روش المان محدود کلاسیک است. این برتری در سامانه‌های با محتوای بسامدی بالاتر، نمایان‌تر است؛ هم‌چنین، تاثیر نیروی کششی یا فشاری محوری ثابت روی پاسخ‌های دینامیکی و بسامدهای طبیعی سامانه، بررسی می‌شود. ناپایداری دیورژانس سامانه، زیر نیروی فشاری محوری بحرانی نیز بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک؛ تیر تیموشنکو؛ تابع مقیاس موجک داوبچیز؛ ناپایداری دیورژانس؛ پیش‌تنیده.

Dynamic Analysis of Prestressed Timoshenko Beam by using Wavelet-Based Spectral Finite Element Method

A. Mokhtari[1], H.R. Mirdamadi[2,*], M. Ghayour[2]

[1] M.Sc., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran.

[2] Assoc. Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran.

[3] Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran.

Abstract

In this article, wavelet-based spectral finite element (WSFE) is formulated for time domain and wave domain dynamic analysis of Timoshenko beam subjected to a uniform axial tensile or compressive force (prestressed). Daubechies wavelet basis functions transform the time and space-dependent governing partial differential equations into a set of coupled space-dependent ordinary differential equations (ODE). The resulting ODEs are decoupled through an eigenvalue analysis and then solved exactly to obtain the shape functions and dynamic stiffness matrix. In the WSFE model, a beam can be divided into only a single element, but larger number of elements may be used in a finite element (FE) model. The accuracy of present WSFE model is validated by comparing its results with those of FE method. The results display advantages of WSFE model compared to FE one in reducing number of elements as well as increasing numerical accuracy. These advantages are more visible in higher frequency content excitations. In addition, the effects of axial tensile or compressive force on time domain analysis and system natural frequencies are investigated. Divergence instability of beam subjected to critical axial compressive force is investigated.

Keywords: Wavelet-Based Spectral Finite Element; Timoshenko Beam; Daubechies Wavelet Basis Function; Divergence Instability; Prestressed.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۱-۳۳۹۱۵۲۴۸؛ فکس: ۰۳۱-۳۳۹۱۲۶۲۸

آدرس پست الکترونیک: hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

۱- مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی تیر تحت نیروی کشش یا فشار محوری در زمینه‌های مهندسی عمران، مکانیک، و هوا-فضا، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. استخراج بسامدهای طبیعی و شکل مودها در طراحی برخی سازه‌های زیر نیروی پیش-کشش یا پیش-فشار در طراحی وسایل نقلیه فضایی ضروری است. از دیگر نمونه‌ها، می‌توان به سازه‌های تحت نیروی گرانش، مانند سازه‌های حفاری و سازه‌های انتقال نفت و گاز از زیر دریا به کشتی‌های نفت‌کش اشاره کرد. در بسیاری از این سازه‌ها، حل دقیقی برای بررسی رفتار دینامیکی آن‌ها وجود ندارد. به همین دلیل، از روش‌های عددی مانند روش ریلی-ریتز، گالرکین، المان محدود کلاسیک[1]، المان محدود دینامیکی[2]، و المان محدود طیفی[3] بهره گرفته شده است. بوکیان، بسامدهای طبیعی تیر اویلر-برنولی تحت نیروی فشاری محوری [۱] و کششی محوری [۲] را با استفاده از یک حل بسته[4] ارایه کرد. یوکویاما [۳]، از روش المان محدود کلاسیک برای بررسی ارتعاش تیرهای آویزان اویلر-برنولی و تیموشنکو بهره گرفت. هاشمی و ریچارد [۴]، ارتعاش آزاد تیر خمشی-پیچشی اویلر-برنولی تحت نیروی محوری را با استفاده از روش المان محدود دینامیکی مطالعه کردند. روش المان محدود دینامیکی، روشی بین روش المان محدود کلاسیک و روش سختی دینامیکی است. ناگولسواران [۵]، بسامدهای طبیعی تیر اویلر-برنولی تحت نیروی کششی و فشاری محوری که به‌صورت خطی تغییر می‌کند را با استفاده از چهار سری توانی به‌دست آورد. کاویان‌پور و همکاران [۶]، تاثیر نیروی کششی محوری بر رفتار ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی آزاد-آزاد را به‌صورت آزمایشگاهی و تحلیلی، مورد مطالعه و ارزیابی قرار دادند. سونسون [۷]، پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و اویلر-برنولی تحت نیروی محوری فشاری را به‌کمک سری فوریه سینوسی استخراج کرد. می و همکاران [۸]، ارتعاشات آزاد و واداشته تیر تیموشنکوی ترک‌دار زیر نیروی محوری را به‌کمک دیدگاه موج (طیفی) بررسی کردند. ویولا و همکاران [۹]، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی ترک‌دار تحت نیروی محوری را به‌کمک روش ماتریس سختی دینامیکی بررسی کردند. لی‌جون و همکاران [۱۰]، ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی زیر نیروی محوری را به‌کمک روش ماتریس سختی دینامیکی بررسی کردند. یوزیک‌لی و همکاران [۱۱]، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی پیش‌تنیده با حرکت محوری را به‌کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه بررسی کردند. یوزیک‌لی و جانگ [۱۲]، مدل المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه تیر تیموشنکوی کامپوزیتی تحت نیروی محوری را ارایه کردند. چن [۱۳]، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی با میرایی محلی کلوین-ویت و تحت نیروی محوری را به‌کمک المان محدود کلاسیک بررسی کرد.

روش المان محدود کلاسیک، شناخته شده‌ترین روش عددی در تحلیل دینامیکی سازه‌هاست. این روش، به‌دلیل توانمندی بالای آن در برنامه‌نویسی کامپیوتری، در شاخه‌های گوناگون مهندسی، کاربرد فراوانی یافته است. روش المان محدود کلاسیک، بر پایه بخش‌بندی سازه به المان‌های متعدد و استخراج ماتریس‌های سختی و جرم استوار است. باید اشاره داشت که دقت این روش تا جایی است که طول موج، از طول هر المان بزرگ‌تر باشد. با افزایش بسامد، طول موج کاهش یافته، در نتیجه برای افزایش دقت روش المان محدود کلاسیک، باید اندازه المان‌ها کوچک و کوچک‌تر شود. هم‌چنین، روش المان محدود کلاسیک، به استخراج ماتریس‌های سختی و جرم منجر می‌شود که این ماتریس‌ها از تابع‌های شکل استاتیکی به‌دست می‌آیند؛ در نتیجه، این تابع‌ها بدون تغییر و مستقل از بسامد هستند؛ بنابراین، در روش المان محدود کلاسیک در بسامدهای بالا، باید اندازه المان‌ها کوچک و در نتیجه تعداد آن‌ها افزایش یابد تا دقت بیشتر شود که این از نقص‌های عمده این روش به شمار می‌آید. بخش‌بندی سازه به المان‌های بسیار ریز، سبب افزایش تعداد درجه‌های آزادی سیستم شده، در نتیجه زمان و هزینه انجام محاسبات نیز افزایش می‌یابد؛ بنابراین، بسیاری از پژوهشگران به فکر یافتن جایگزین‌های مناسب برای این روش افتادند. روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه، از جمله روش‌های نوین برای جایگزینی روش المان محدود کلاسیک است. این روش، در دو دهه اخیر، در بررسی دینامیکی رفتار سازه‌ها مورد توجه و استقبال پژوهشگران قرار گرفته است.

[1] Finite Element (FE)
[2] Dynamic Finite Element (DFE)
[3] Spectral Finite Element (SFE)
[4] Closed Form Solution

روشی که می‌تواند پاسخ‌های دقیق و مناسب را حتی برای مساله‌های بارگذاری در بسامد بالا، ارایه کند. به‌طور کلی، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه به حل معادله‌های حاکم بر سیستم در حوزه‌بسامد می‌پردازد. این روند حل، به‌صورت دقیق صورت می‌گیرد (در صورت وجود) و معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای وابسته به مکان و زمان با استفاده از تابع تبدیل فوریه سریع، به معادله‌های دیفرانسیل معمولی وابسته به مکان تبدیل می‌شوند. تکیه این روش بر حل دقیق سبب می‌شود که برخلاف روش المان محدود کلاسیک، این روش نیاز چندانی به بخش‌بندی سازه به المان‌های ریز نداشته باشد؛ در نتیجه، دست‌یابی به پاسخ‌های دقیق، تنها با یک یا دو المان نیز امکان پذیر می‌شود.

از دیگر روش‌های جدید، برای جایگزینی روش المان محدود کلاسیک و طیفی بر پایه تبدیل فوریه، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک است که امروزه برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها کاربرد دارد. در این روش، معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای وابسته به مکان و زمان با استفاده از تابع‌های مقیاس داوبچیز، به معادله‌های دیفرانسیل معمولی کوپله وابسته به مکان تبدیل می‌شوند که با روش آنالیز مقدارهای ویژه، دکوپله می‌گردند. برخلاف روش المان محدود کلاسیک که در آن از تابع‌های شکل استاتیکی، بهره برده می‌شود، تابع‌های شکل دینامیکی، از حل دقیق معادله‌های دیفرانسیل معمولی دکوپله وابسته به مکان به‌دست می‌آیند. ماتریس سختی دینامیکی نیز، بر پایه تابع‌های شکل دینامیکی ساخته می‌شود. این ماتریس به طور هم‌زمان، در بردارنده ویژگی‌های جرم و سختی المان است. حل دقیق معادله‌های حاکم بر سازه و بهره‌گیری از تابع‌های شکل دینامیکی، در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، سبب افزایش دقت پاسخ‌ها در مقایسه با روش المان محدود کلاسیک است که از فرض‌هایی مانند، تابع‌های شکل استاتیکی بهره می‌برد؛ هم‌چنین، عدم نیاز به در نظر گرفتن تعداد المان زیاد، سبب از بین رفتن خطاهای مربوط به بخش‌بندی سازه می‌شود و زمان و هزینه محاسبات نیز کاهش می‌یابد؛ هم‌چنین، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، برخلاف روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه که برای پاسخ‌های زمانی نیاز به پاسخ‌های بسامدی دارد، نیاز به نگاشت پاسخ‌ها در حوزه‌های گوناگون، از جمله حوزه بسامد ندارد. روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه در سازه‌های نامیرا و یا با میرایی ناچیز با مشکل روبروست که روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، این نقایص را برطرف می‌سازد؛ همچنین، باید اشاره داشت که این روش، تمامی مزیت‌های روش المان محدود طیفی بر پایه‌تبدیل فوریه سریع را داراست. مقاله‌های [۱۴-۱۷]، بهره-گیری از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک را ارایه داده‌اند.

در این پژوهش، تیر تیموشنکوی پیش‌تنیده به‌کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای آنالیز زمانی و بسامدی فرمول‌بندی می‌شود. ابتدا، آنالیز بسامدی با روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک متناوب[۱] انجام می‌شود. پس از آن، با در نظر گرفتن نیروی ضربه در وسط سازه با شرایط تکیه‌گاهی دو سر لولا، آنالیز زمانی به-کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نامتناوب[۲] با دو المان طیفی بررسی می‌شود.

آنالیز زمانی و بسامدی تیر تیموشنکوِی پیش‌تنیده، بررسی ناپایداری دیورژانس و استخراج نیروی فشاری بحرانی با بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک (با در نظر گرفتن تنها دو المان)، از نوآوری‌های این پژوهش به شمار می‌آیند. به گفته دیگر، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک که از دید نویسندگان تاکنون برای تیر تیموشنکوی پیش‌تنیده به‌کار گرفته نشده است، دست‌آورد پژوهشی این پژوهش محسوب می‌شود.

۲- استخراج معادله‌های حاکم بر سازه

شکل ۱، تیر تیموشنکوی یکنواخت تحت نیروی کششی ثابت N_x، با سختی خمشی EI و سختی برشی κGA، جرم در واحد طول ρA، و گشتاور اینرسی جرمی ρI را نشان می‌دهد؛ هم-چنین، طول تیر L است.

از اصل همیلتون برای استخراج معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر سازه، رابطه‌های (۱) و (۲) و شرایط مرزی، رابطه (۳)، بهره گرفته می‌شود.

[1] Periodic Wavelet-Based Spectral Finite Element (PWSFE)
[2] Non-Periodic Wavelet-Based Spectral Finite Element (NPWSFE)

$$\kappa GA\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,t)=0 \tag{۱}$$

$$EI\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\kappa GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)-\rho I\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}=0 \tag{۲}$$

$$\begin{cases} Q(0,t)=-Q_{n\_1}(t)-N_x\dfrac{\partial w(0,t)}{\partial x} \\ M(0,t)=-M_{n\_1}(t) \\ Q(L^e,t)=Q_{n\_2}(t)-N_x\dfrac{\partial w(L^e,t)}{\partial x} \\ M(L^e,t)=M_{n\_2}(t) \end{cases} \tag{۳}$$

$f(x,t)$ نیروی برانگیزش خارجی، Q_{n_1} و Q_{n_2} به‌ترتیب، نیروهای برشی عرضی اعمال شده در $x=0$ و $x=L^e$، و M_{n_1} و M_{n_2} به ترتیب، گشتاورهای خمشی اعمال شده در $x=0$ و $x=L^e$ است و در شکل ۲ نشان داده شده است. یادآوری می‌شود که L^e طول یک المان است.

$Q(x,t)$ و $M(x,t)$ به ترتیب، نیروی برشی و گشتاور خمشی هستند که رابطه‌های (۴) و (۵) برای آن‌ها بیان شده است.

$$Q(x,t)\triangleq \kappa GA(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta) \tag{۴}$$

$$M(x,t)\triangleq EI\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{۵}$$

درستی رابطه‌های (۱) تا (۵) به‌کمک مقایسه با مقاله یوزیک‌لی و همکاران [۱۱]، با صرف‌نظر از حرکت محوری، اثبات می‌شود.

۳- گسسته‌سازی زمانی

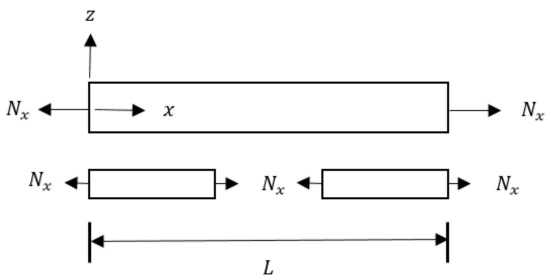
روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، روشی عددی است که پاسخ $w(x,t)$ و $\theta(x,t)$ را به صورت گسسته در نقطه‌های نمونه‌برداری ارایه می‌دهد. به‌کمک رابطه (۶)، پنجره زمانی t در n نقطه گسسته‌سازی می‌شود. t مدت زمان آنالیز سامانه است.

$$t=\tau\Delta t, \qquad \tau=0,1,2,\dots,n-1 \tag{۶}$$

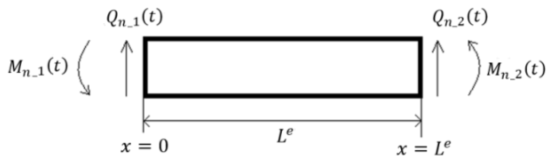
Δt فاصله زمانی بین دو نقطه‌ی نمونه‌برداری است. مطابق با رابطه (۷)، تابع $w(x,t)$ به‌کمک تابع مقیاس‌سازی داوبچیز[1] $\varphi(\tau)$ در هر نقطه نمونه تخمین زده می‌شود [۱۴].

$$w(x,t)=w(x,\tau)=\sum_{\mathcal{H}} w(x,\mathcal{H}\Delta t)\varphi(\tau-\mathcal{H}) = \sum_{\mathcal{H}} w_{\mathcal{H}}(x)\varphi(\tau-\mathcal{H}), \qquad \mathcal{H}\in\mathbb{Z} \tag{۷}$$

[1] Daubechiesscaling Function



شکل ۱- تیر تیموشنکوی تحت نیروی کشش ثابت N_x



شکل ۲- یک المان تیر تیموشنکوی تحت نیروی کشش ثابت N_x

که $\mathcal{H}$ یک شمارنده برای انتخاب مقادیر مختلف گسسته‌سازی شده تابع داخل سری است. این عبارت برای سایر تابع‌های وابسته به مکان و زمان، از جمله $\theta(x,t)$ و $f(x,t)$ برقرار است. این تخمین‌ها در معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر سازه جایگذاری می‌شوند و رابطه‌های (۸) و (۹) به‌دست می‌آید.

$$\kappa GA\sum_{\mathcal{H}}\left(\frac{d^2 w_{\mathcal{H}}}{dx^2}-\frac{d\theta_{\mathcal{H}}}{dx}\right)\varphi(\tau-\mathcal{H}) +N_x\sum_{\mathcal{H}}\frac{d^2 w_{\mathcal{H}}}{dx^2}\varphi(\tau-\mathcal{H})+\sum_{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}\varphi(\tau-\mathcal{H}) -\frac{1}{\Delta t^2}\rho A\sum_{\mathcal{H}} w_{\mathcal{H}}\frac{d^2\varphi(\tau-\mathcal{H})}{d\tau^2}=0 \tag{۸}$$

$$EI\sum_{\mathcal{H}}\frac{d^2\theta_{\mathcal{H}}}{dx^2}\varphi(\tau-\mathcal{H}) +\kappa GA\sum_{\mathcal{H}}\left(\frac{dw_{\mathcal{H}}}{dx}-\theta_{\mathcal{H}}\right)\varphi(\tau-\mathcal{H}) -\frac{1}{\Delta t^2}\rho I\sum_{\mathcal{H}}\theta_{\mathcal{H}}\frac{d^2\varphi(\tau-\mathcal{H})}{d\tau^2}=0 \tag{۹}$$

تابع‌های مقیاس داوبچیز، دارای ویژگی تعامد هستند که در رابطه (۱۰) بیان شده است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau-\mathcal{H})\varphi(\tau-j)\,d\tau=0 \quad \text{for } j\neq\mathcal{H} \tag{۱۰}$$

تابع‌های مقیاس داوبچیز، دارای دو ویژگی مهم هستند. اول این‌که متعامد هستند که پیش‌تر در رابطه (۱۰) بیان شد. دوم این‌که بیشتر انرژی آن‌ها در بازه کوچکی متمرکز شده است و به سرعت میرا می‌شوند یا به‌عبارت دیگر، به‌شکل

کارآمدی کران‌دار هستند. این تابع‌ها به این دو دلیل، موجک‌های متعامد با محمل فشرده[1] نامیده می‌شوند. مطابق رابطه (۱۱)، انتگرال‌گیری روی ضرب دو تابع مقیاس داوبچیز و تابع مشتق اول آن، ضریب‌های ارتباط درجه اول[2] $\Omega^{1}_{j-\mathcal{H}}$ را ایجاد می‌کند. با جایگذاری مشتق دوم تابع مقیاس داوبچیز به‌جای مشتق اول آن در رابطه (۱۱)، ضریب‌های ارتباط درجه دوم[3] $\Omega^{2}_{j-\mathcal{H}}$ مطابق با رابطه (۱۲) ایجاد می‌شود. این ضریب‌ها فقط در گستره $\mathcal{H} = [j-N+2 \quad j+N-2]$ ناصفر هستند که N درجه موجک داوبچیز است. جزییات دقیق محاسبه آن‌ها، توسط بیکلین [۱۸] بیان شده است.

$$\Omega^{1}_{j-\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(\tau-\mathcal{H})}{d\tau}\,\varphi(\tau-j)\,d\tau \tag{۱۱}$$

$$\Omega^{2}_{j-\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2}\varphi(\tau-\mathcal{H})}{d\tau^{2}}\,\varphi(\tau-j)\,d\tau \tag{۱۲}$$

که $j = 0,1,2,\dots,n-1$ است. به‌کمک این ویژگی‌ها، دو طرف معادله‌های دیفرانسیل تخمینی در $\varphi(\tau-j)$ ضرب می‌شود و رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) به‌دست می‌آیند.

$$\kappa GA\left(\frac{d^{2}w_j}{dx^{2}} - \frac{d\theta_j}{dx}\right) + N_x\frac{d^{2}w_j}{dx^{2}} - \frac{1}{\Delta t^{2}}\rho A \sum_{\mathcal{H}=j-N+2}^{j+N-2} \Omega^{2}_{j-\mathcal{H}} w_{\mathcal{H}} + f_j = 0 \tag{۱۳}$$

$$EI\frac{d^{2}\theta_j}{dx^{2}} + \kappa GA\left(\frac{dw_j}{dx} - \theta_j\right) - \frac{1}{\Delta t^{2}}\rho I \sum_{\mathcal{H}=j-N+2}^{j+N-2} \Omega^{2}_{j-\mathcal{H}} \theta_{\mathcal{H}} = 0 \tag{۱۴}$$

به همین ترتیب، نیروی برشی و گشتاور خمشی به صورت رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) گسسته‌سازی می‌شوند.

$$M_j = EI\frac{d\theta_j}{dx} \tag{۱۵}$$

$$Q_j = \kappa GA\left(\frac{dw_j}{dx} - \theta_j\right) \tag{۱۶}$$

با دقت در رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) مشاهده می‌شود که تعدادی از w_jها و θ_jها خارج از بازه‌ی $j = 0,1,2,\dots,n-1$ قرار می‌گیرند. به این مشکل، مشکل مقدار مرزی[4] گویند. دو روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک متناوب و نامتناوب برای حل این مشکل در نظر گرفته شده است [۱۴-۱۷]. روش متناوب، فقط توانایی آنالیز بسامدی برای سازه را دارد، در حالی که روش نامتناوب، توانایی آنالیز زمانی و بسامدی برای سازه را به طور هم‌زمان دارا است. روی‌هم‌رفته، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برخلاف روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه، نیازی به تغییر حوزه (مانند تبدیل حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی بسامد) ندارد. در این پژوهش، برای آنالیز بسامدی سازه، روش متناوب به دلیل حجم کمتر محاسبات در نظر گرفته می‌شود. در روش متناوب، رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) به فرم رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) بیان می‌شوند.

$$\kappa GA\left\{\frac{d^{2}w_j}{dx^{2}} - \frac{d\theta_j}{dx}\right\} - (\rho A\Lambda^{2})\{w_j\} + N_x\left\{\frac{d^{2}w_j}{dx^{2}}\right\} + \{f_j\} = 0,\quad j = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{۱۷}$$

$$EI\left\{\frac{d^{2}\theta_j}{dx^{2}}\right\} + \kappa GA\left\{\frac{dw_j}{dx} - \theta_j\right\} - (\rho I\Lambda^{2})\{\theta_j\} = 0,\quad j = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{۱۸}$$

Λ^{1} و Λ^{2} ماتریس‌های گردشی[5] $n \times n$ هستند و ماتریس‌های ضریب ارتباط درجه اول و دوم[6] حاصل از روش متناوب نامیده می‌شوند.

در روش نامتناوب، رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) به فرم رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) بیان می‌شوند.

$$\kappa GA\left\{\frac{d^{2}w_j}{dx^{2}} - \frac{d\theta_j}{dx}\right\} - (\rho A\Gamma^{2})\{w_j\} + N_x\left\{\frac{d^{2}w_j}{dx^{2}}\right\} + \{f_j\} = 0,\quad j = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{۱۹}$$

$$EI\left\{\frac{d^{2}\theta_j}{dx^{2}}\right\} + \kappa GA\left\{\frac{dw_j}{dx} - \theta_j\right\} - (\rho I\Gamma^{2})\{\theta_j\} = 0,\quad j = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{۲۰}$$

Γ^{1} و Γ^{2} ماتریس‌های $n \times n$ هستند و ماتریس‌های ضریب ارتباط درجه اول و دوم حاصل از روش نامتناوب نامیده می‌شوند. باید گفت که ماتریس‌های ضریب ارتباط Γ^{1}، Γ^{2} و Λ^{1}، Λ^{2}، مستقل از سامانه می‌باشند و فقط به درجه موجک داوبچیز N وابسته هستند. به‌این‌ترتیب، معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای وابسته به مکان و زمان حاکم بر سازه، به معادله‌های دیفرانسیل معمولی کوپله وابسته به مکان تبدیل شدند.

[1] Orthogonal Compactly Supported Wavelets
[2] First Order Connection Coefficients
[3] Second Order Connection Coefficients
[4] Boundary Value Problem (BVP)
[5] Circulant Matrix
[6] First and Second Order Connection Coefficient Matrices

با این‌که Γ^2 و Λ^2 به‌طور مستقل محاسبه می‌شوند، اما برای کاهش حجم محاسبات، آن‌ها را از رابطه (۲۱) بر اساس Γ^1 و Λ^1 به‌دست می‌آورند [۱۴].

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 = [\Lambda^1]^2, \qquad \boldsymbol{\Gamma}^2 = [\Gamma^1]^2 \tag{۲۱}$$

ماتریس‌های ضریب ارتباط، به‌کمک رابطه‌های (۲۲) و (۲۳) قطری‌سازی می‌شوند. از این قطری‌سازی برای دکوپله کردن معادله‌های دیفرانسیل (۱۷) تا (۲۰) استفاده می‌شود.

$$[\Gamma^1] = \boldsymbol{\Phi\Pi\Phi}^{-1} \tag{۲۲}$$

$$[\Gamma^2] = \boldsymbol{\Phi\Pi^2\Phi}^{-1} \tag{۲۳}$$

در رابطه‌های قطری‌سازی (۲۲) و (۲۳)، $\boldsymbol{\Phi}$ ماتریس دربردارنده بردارهای ویژه $[\Gamma^1]$، $\boldsymbol{\Pi}$ ماتریس قطری شامل $i\gamma_j$، و $\boldsymbol{\Pi}^2$ ماتریس قطری شامل $-\gamma_j{}^2$ است. $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. $i\gamma_j$ مقدارهای ویژه‌ی ماتریس $[\Gamma^1]$ است. همین بیان برای ماتریس‌های $[\Lambda^1] = \boldsymbol{\Psi\Xi\Psi}^{-1}$ و $[\Lambda^2] = \boldsymbol{\Psi\Xi^2\Psi}^{-1}$ اجرا می‌شود. ماتریس $[\Lambda^1]$ در رابطه (۲۴) نشان داده شده است.

$$\boldsymbol{\Lambda}^1 = \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} \Omega_0^1 & \Omega_{-1}^1 & \cdots & \Omega_{-N+2}^1 & \cdots & \Omega_{N-2}^1 & \cdots & \Omega_1^1 \\ \Omega_1^1 & \Omega_0^1 & \cdots & \Omega_{-N+3}^1 & \cdots & 0 & \cdots & \Omega_2^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Omega_{-1}^1 & \Omega_{-2}^1 & \cdots & 0 & \cdots & \Omega_{N-3}^1 & \cdots & \Omega_0^1 \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

مقدارهای ویژه‌ی α_j و بردارهای ویژه‌ی $\mathbf{v}_p$ متناظر با این ماتریس در [۱۹] به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است.

$$\alpha_j = i\lambda_j = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-N+2}^{N-2}\Omega_k^1 e^{-2\pi ijk/n} = \frac{-2i}{\Delta t}\sum_{k=1}^{N-2}\Omega_k^1 \sin(2\pi jk/n), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{۲۵}$$

$$v_{jp} = \frac{1}{\Delta t\sqrt{n}}e^{-2\pi ijk/n}, p = 1, 2, \dots, n \tag{۲۶}$$

هم‌چنین، $\boldsymbol{\Xi}$ ماتریس قطری شامل α_j، $\boldsymbol{\Xi}^2$ ماتریس قطری شامل $-\lambda_j{}^2$، و $\boldsymbol{\Psi} = [v_{jp}]$ است.

به‌این‌ترتیب، n معادله دیفرانسیل معمولی طبق رابطه-های (۲۷) تا (۲۹) به‌دست می‌آیند که هرکدام از آن‌ها باید در یک qی مشخص، $q = 0, 1, 2, \dots, n-1$، حل شوند.

$$(\kappa GA + N_x)\frac{d^2\hat{w}_q}{dx^2} + \gamma_q{}^2\rho A\hat{w}_q - \kappa GA\frac{d\hat{\theta}_q}{dx} + \hat{f}_q = 0 \tag{۲۷}$$

$$EI\frac{d^2\hat{\theta}_q}{dx^2} - (\kappa GA - \gamma_q{}^2\rho I)\hat{\theta}_q + \kappa GA\frac{d\hat{w}_q}{dx} = 0 \tag{۲۸}$$

$$\{\hat{w}_q\} = \Phi^{-1}\{w_q\}, \{\hat{\theta}_q\} = \Phi^{-1}\{\theta_q\}, \{\hat{f}_q\} = \Phi^{-1}\{f_q\} \tag{۲۹}$$

با همین بیان، گشتاور خمشی و نیروی برشی در هر q طبق رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) به‌دست می‌آیند.

$$\hat{M}_q = EI\frac{d\hat{\theta}_q}{dx} \tag{۳۰}$$

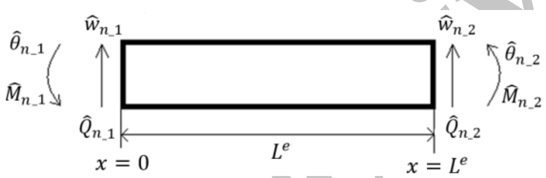
$$\hat{Q}_q = \kappa GA\left(\frac{d\hat{w}_q}{dx} - \hat{\theta}_q\right) \tag{۳۱}$$

روی‌هم‌رفته، همه رابطه‌های مربوط به روش‌های نامتناوب و متناوب، فرمول‌بندی یکسانی دارند، جز این‌که γ_q به λ_q تبدیل می‌شود. برای سادگی در این نوشتار، فقط فرمول‌بندی روش نامتناوب بیان می‌شود، به جز در حوزه بسامد و موردهایی که یادآوری می‌شود.

همان‌طور که بیان شد، همه ماتریس‌های ضریب ارتباط، مستقل از سامانه و فقط وابسته به درجه موجک داوبچیز N هستند؛ بنابراین، آنالیز مقدارهای ویژه برای قطری‌سازی، یک بار و برای همیشه انجام و ذخیره‌سازی می‌شود. این کار سبب کاهش حجم محاسبات می‌شود.

۴- گسسته‌سازی مکانی

شکل ۳ یک المان طیفی تیر با دو گره، دو درجه آزادی عرضی $\hat{w}_q$ و چرخشی $\hat{\theta}_q$، نیروی برشی گرهی $\hat{Q}_q$ و گشتاور خمشی گرهی $\hat{M}_q$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳- یک المان طیفی تیر همراه با نیروها و جابه‌جایی-های گرهی

فرمول‌بندی ماتریس سختی دینامیکی برای یک المان تیر که ۴×۴ است، در ادامه بیان می‌شود. از این پس، زیرنویس q برای راحتی نوشته نمی‌شود. با حل معادله‌های دیفرانسیل (۲۷) و (۲۸) به صورت همگن ($\hat{f}_q = 0$)، تابع دقیق درون‌یابی مطابق با رابطه (۳۲) به‌دست می‌آید.

$$\hat{w}(x) = ae^{-ikx}, \qquad \hat{\theta}(x) = be^{-ikx} \tag{۳۲}$$

در رابطه تابع‌های درون‌یابی، k عدد موج المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک است. با جایگذاری این تابع‌ها در

فرمول‌بندی همگن رابطه‌های (۲۷) و (۲۸)، مساله مقدار ویژه رابطه (۳۳) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۳۳)$$

که پارامترهای این مساله‌ی مقدار ویژه (۳۴) است

$$\begin{aligned} X_{11} &= -(\kappa GA + N_x)k^2 + \gamma^2 \rho A, \\ X_{22} &= -EIk^2 - (\kappa GA - \gamma^2 \rho I), \\ X_{12} &= -X_{21} = i\kappa GAk \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

این مساله مقدار ویژه، رابطه پراکنش (۳۵) را ایجاد می‌کند.

$$c_4k^4 + c_3k^3 + c_2k^2 + c_1k + c_0 = 0 \qquad (۳۵)$$

که

$$\begin{aligned} c_4 &= (EI)(\kappa GA + N_x), \\ c_3 &= 0, \\ c_2 &= \kappa GAN_x - \gamma^2 \rho I(\kappa GA + N_x) - \gamma^2 EI\, \rho A, \\ c_1 &= 0, \\ c_0 &= -\gamma^2 \rho A(\kappa GA - \gamma^2 \rho I) \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

می‌باشد.

بنابراین، عدد موج k از رابطه پراکنش در رابطه (۳۷) به‌دست می‌آید.

$$k_1 = -k_2 = \sqrt{\frac{-c_2 + \sqrt{{c_2}^2 - 4c_4c_0}}{2c_4}}, \quad k_3 = -k_4 = \sqrt{\frac{-c_2 - \sqrt{{c_2}^2 - 4c_4c_0}}{2c_4}} \qquad (۳۷)$$

از سطر اول ماتریس رابطه (۳۳)، رابطه بین ضریب‌های a و b در رابطه (۳۸) به‌دست می‌آید.

$$b_r = \frac{-(\kappa GA + N_x)k_r^2 + \gamma^2 \rho A}{-i\kappa GAk_r} a_r = \zeta_r a_r, \quad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (۳۸)$$

به این ترتیب، تابع‌های میان‌یابی به‌صورت ماتریسی در رابطه‌های (۳۹) و (۴۰) بازنویسی می‌شوند.

$$\hat{w}(x) = [1\ 1\ 1\ 1]\mathrm{diag}\{e^{-ik_rx}\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [R_1][D(x)]\{a\}, \qquad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (۳۹)$$

$$\hat{\theta}(x) = [\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4]\mathrm{diag}\{e^{-ik_rx}\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [R_2][D(x)]\{a\}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (۴۰)$$

بردار جابه‌جایی گرهی با برآورده‌سازی درجه‌های آزادی در دو مرز، در رابطه (۴۱)، به‌دست می‌آید.

$$\{\hat{u}^e\} = \begin{Bmatrix} \hat{w}_{n\_1} \\ \hat{\theta}_{n\_1} \\ \hat{w}_{n\_2} \\ \hat{\theta}_{n\_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{w}(0) \\ \hat{\theta}(0) \\ \hat{w}(L^e) \\ \hat{\theta}(L^e) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_1][D(0)] \\ [R_2][D(0)] \\ [R_1][D(L^e)] \\ [R_2][D(L^e)] \end{bmatrix} \{a\} = [T_1]\{a\} \qquad (۴۱)$$

به‌طور مشابه، نیروی برشی و گشتاور خمشی به‌صورت ماتریسی در رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) بازنویسی می‌شوند.

$$\hat{Q}(x) = \kappa GA[ik_1 + \zeta_1 \quad ik_2 + \zeta_2 \quad ik_3 + \zeta_3 \quad ik_4 + \zeta_4] \times \mathrm{diag}\{e^{-ik_rx}\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [R_1'][D(x)]\{a\}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (۴۲)$$

$$\hat{M}(x) = -iEI[k_1\zeta_1 \quad k_2\zeta_2 \quad k_3\zeta_3 \quad k_4\zeta_4] \times \mathrm{diag}\{e^{-ik_rx}\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [R_2'][D(x)]\{a\}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (۴۳)$$

برای برآورده‌سازی نیروهای درونی در دو مرز، $d\hat{w}/dx$ در رابطه‌ی (۴۴) محاسبه می‌شود.

$$\frac{d\hat{w}(x)}{dx} = -i[k_1k_2k_3k_4]\mathrm{diag}\{e^{-ik_rx}\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [R_3][D(x)]\{a\}, \qquad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (۴۴)$$

بردار نیروهای گرهی با برآورده‌سازی نیروهای درونی در دو مرز، در رابطه (۴۵)، به‌دست می‌آید.

$$\{\hat{F}^e\} = \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{n\_1} \\ \hat{M}_{n\_1} \\ \hat{Q}_{n\_2} \\ \hat{M}_{n\_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{Q}(0) - N_x \left.\frac{d\hat{w}}{dx}\right|_{x=0} \\ -\hat{M}(0) \\ \hat{Q}(L^e) + N_x \left.\frac{d\hat{w}}{dx}\right|_{x=L^e} \\ \hat{M}(L^e) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -([R'_1] + N_x[R_3])[D(0)] \\ -[R'_2][D(0)] \\ ([R'_1] + N_x[R_3])[D(L^e)] \\ [R'_2][D(L^e)] \end{bmatrix} \{a\} = [T_2]\{a\} \qquad (۴۵)$$

با حذف {a} از بردارهای جابه‌جایی‌ها و نیروهای گرهی، ماتریس سختی دینامیکی یک المان $[\hat{K}^e]$، طبق رابطه (۴۶) به‌دست می‌آید.

$$\{\hat{F}^e\} = [T_2][T_1]^{-1}\{\hat{u}^e\} = [\hat{K}^e]\{\hat{u}^e\} \qquad (۴۶)$$

بعد از محاسبه ماتریس سختی دینامیکی برای یک المان، همانند روش المان محدود کلاسیک، سرهم‌بندی در qهای مختلف طبق رابطه (۴۷)، به‌صورت عددی انجام و شرط‌های مرزی برآورده‌سازی می‌شوند.

$$\{\hat{F}^g\} = [\hat{K}^g]\{\hat{u}^g\} \qquad (۴۷)$$

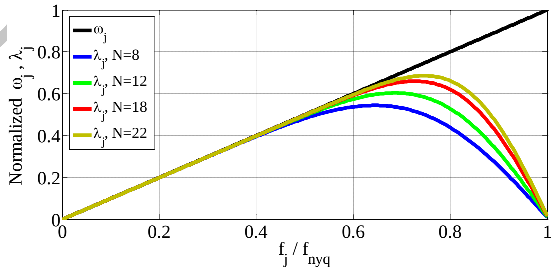
بعد از محاسبه پاسخ‌ها در سامانه جهانی $\{\hat{u}^g\}$، از پاسخ‌های یک المان $\{\hat{u}^e\}$ برای دست‌یابی به ضریب‌های ثابت {a}، طبق رابطه (۴۸)، استفاده می‌شود.

$$\{a\} = [T_1]^{-1}\{\hat{u}^e\} \qquad (۴۸)$$

اگر در همه رابطه‌ها، از $-N_x$ به جای N_x استفاده شود، معادله‌های حاکم بر تیر تیموشنکو تحت نیروی فشاری ثابت به‌دست می‌آید.

۵- آنالیز بسامدی

مختاری و همکاران [۱۷] و میترا و گوپالاکریشنان [۱۹]، نشان دادند که در یک Δt مشخص، λ_j تا کسر معلومی از بسامد نایکوییست $f_{nyq} = (1/2\Delta t)$، به درستی با $\omega_j = (2\pi j/n\Delta t)$ برابر خواهد بود؛ بنابراین، می‌توان به‌طور مستقیم از المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک در حوزه بسامد سود جست. این کسر معلوم را با p_N نشان می‌دهندکه وابسته به درجه موجک داوبچیز است. p_N را می‌توان از شکل ۴ استخراج کرد که با توجه به این شکل، هرچه درجه موجک بالاتر باشد، کسر معلوم نیز بزرگ‌تر است. برای نمونه، p_N موجک درجه ۲۲، تقریباً برابر با ۰/۶ و برای درجه ۸ تقریباً برابر با ۰/۴۵ می‌شود. نمودار ارایه شده برای λ در شکل ۴، به‌کمک رابطه (۲۵) ترسیم شده است.



شکل ۴- مقایسه‌ی بین ω_j،λ_j برای درجه‌های مختلف داوبچیز

بنابراین، در این روش، عدد موج و بسامدهای طبیعی تا بسامد $f_N = p_N f_{nyq}$ دقیق خواهد بود. بسامدهای طبیعی در این روش، از حل مقدارهای ویژه ماتریس سختی دینامیکی (صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی طبق رابطه (۴۹) و محاسبهλهای مربوط به آن) به‌دست می‌آید.

$$\det([\hat{K}^g(\lambda)]) = 0 \qquad (۴۹)$$

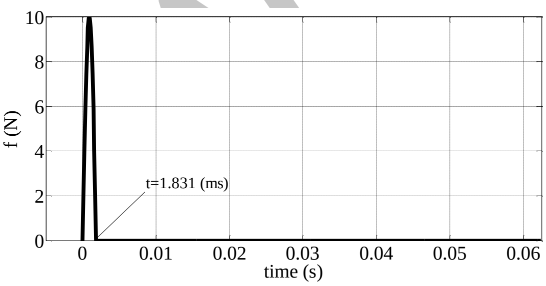
این معادله، رابطه مقدار ویژه غیر جبری را نتیجه می‌دهد و برای محاسبه این بسامدها، از روش عددی دو نیم کردن بهره برده می‌شود. به‌طوری که بسامد به‌عنوان یک ورودی وارد رابطه غیر جبری حاصل از رابطه (۴۹) شده، به ازای آن مقادیری از بسامد که سمت راست رابطه صفر شود، بسامدهای جواب که همان بسامدهای طبیعی هستند، به‌دست خواهند آمد.

۶- آنالیز پایداری

برای آنالیز پایداری سازه، باید بسامدهای طبیعی سازه محاسبه شود؛ در صورتی که بسامدهای طبیعی مقدار حقیقی محض باشند، سازه در حالت پایدار قرار دارد. زمانی که بسامد طبیعی به مقدار صفر برسد، سازه وارد ناحیه ناپایدار دیورژانس می‌شود.

۷- مثال عددی

یک تیر تیموشنکو با شرایط تکیه‌گاهی دو سر لولا به طول ۵ متر، مدول یانگ ۲۱۰ گیگا پاسگال، مدول برشی ۸۰/۷۶۹ گیگا پاسگال، سطح مقطع به عرض ۰/۵ متر و ارتفاع ۰/۷ متر، چگالی ۷۸۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب و فاکتور تصحیح سطح مقطع ۰/۸۵، تحت نیروی ضربه‌ی عرضی شکل ۵ در وسط آن، در نظر گرفته شده است. هدف، محاسبه بسامدهای طبیعی، استخراج نیروی فشاری بحرانی و پاسخ دینامیکی وسط تیر است. بسامدهای طبیعی و پاسخ دینامیکی تیر با دو روش المان محدود کلاسیک و المان محدود طیفی، بر پایه تبدیل موجک محاسبه و مقایسه می‌شود. نیروی کششی در همه‌جا ۲۰ کیلونیوتن است، مگر اینکه اندازه آن بیان شود؛ هم‌چنین، درجه موجک داوبچیز ۲۲ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵- نیروی ضربه وارد بر وسط تیر

۷-۱- آنالیز بسامدی

با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک متناوب و با انتخاب (میکروثانیه) ۱۵/۲۵۹ =Δt، بسامدهای

طبیعی محاسبه شده تا بسامد نزدیک به ۱۹۶۶۰/۸ هرتز (۰/۶×۳۲۷۶۸ که ۰/۶ همان p_N و ۳۲۷۶۸ همان f_{nyq} است) معتبر خواهند بود. نه بسامد طبیعی اول سازه تحت نیروی کششی ۲۰ کیلونیوتن، در جدول ۱ نمایش داده شده است. در روش المان محدود کلاسیک، با افزایش تعداد المان‌ها، پاسخ‌ها به نتیجه‌های بدست آمده از روش‌های المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نزدیک می‌شوند. اختلاف بین این دو روش در بسامدهای بالاتر، بیشتر به چشم می‌خورد؛ به این معنی که روش المان محدود کلاسیک، معمولاً برای مسایل با بسامد بالاتر ضعیف‌تر عمل می‌کند؛ هم‌چنین، بسامد پنجاهم برای سازه بدون پیش‌کشش محاسبه و با روش تحلیلی [۲۰] مقایسه شده است. برای اعتبارسنجی (جدول ۲)، تیری با مشخصات مقاله [۱۱] و بدون سرعت در نظر گرفته می‌شود. به‌این‌ترتیب، شرایط تکیه‌گاهی دو سر لولا، طول $L = 1\ (m)$، ضخامت سطح مقطع $h = 0.01\ (m)$، عرض سطح مقطع $b = 0.03\ (m)$، جرم بر واحد طول $\rho A = 0.84\ (kg/m)$، ممان اینرسی جرمی بر واحد طول $\rho I = 7 \times 10^{-6}\ (kg.m)$، سختی خمشی $EI = 180\ (N.m^2)$، سختی برشی $\kappa GA = 6.75 \times 10^6\ (N)$، نیروی محوری $N_x = 4.63 \times 10^{-5} \times EA\ (N)$ و بسامد طبیعی بی‌بعد شده $\Omega = \omega/\left(\sqrt{EI/\rho A}/L^2\right)$ در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱- نه بسامد طبیعی اول تیر پیش‌تنیده با شرط مرزی دو سر لولا

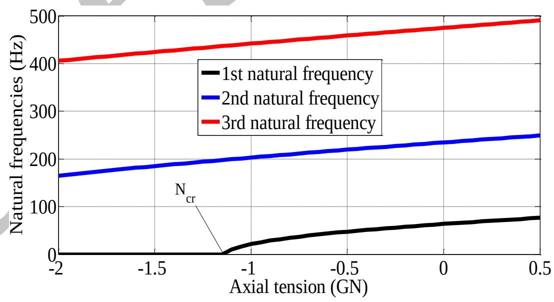
بسامدهای طبیعی (هرتز)	المان محدود طیفی موجک (۱ المان)	المان محدود کلاسیک (۵۰۰ المان)	المان محدود کلاسیک (۵ المان)	روش تحلیلی [۲۰]
یکم	۶۳/۶۰۳	۶۳/۶۰۳	۶۳/۶۵۷	-
دوم	۲۳۴/۶۵۰	۲۳۴/۶۵۱	۲۳۷/۲۵۷	-
سوم	۴۷۴/۸۴۱	۴۷۴/۸۴۳	۴۹۵/۵۰۸	-
چهارم	۷۵۳/۴۷۸	۷۵۳/۴۸۶	۸۲۹/۱۷۰	-
پنجم	۱۰۵۲/۱۹۵	۱۰۵۲/۲۱۶	۱۵۳۴/۴۸۹	-
ششم	۱۳۶۰/۹۵۴	۱۳۶۰/۹۹۸	۱۹۴۱/۱۳۶	-
هفتم	۱۶۷۴/۳۵۷	۱۶۷۴/۴۴۱	۲۵۱۰/۸۴۷	-
هشتم	۱۹۸۹/۵۰۳	۱۹۸۹/۴۴۴	۲۸۱۳/۸۱۲	-
نهم	۲۳۰۴/۸۳۷	۲۳۰۵/۰۵۶	۲۸۵۰/۸۶۱	-
پنجاهم (بدون پیش‌کشش)	۱۴۶۸۹/۴۲۱	۱۵۰۴۹/۸۷۰	-	۱۴۶۸۹/۴۲۱

جدول ۲- اعتبارسنجی بسامدهای طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده ازروش ارایه‌شده در مقاله حاضر با مقاله [۱۱]

بسامدهای طبیعی بی‌بعد شده	المان محدود طیفی موجک (۱ المان)	مقاله [۱۱]
یکم	۱/۹۶	۱/۹۶
دوم	۶/۷۱	۶/۷۱
سوم	۱۴/۵۵	۱۴/۵۵
چهارم	۲۵/۵۱	-
پنجم	۳۹/۵۴	۳۹/۵۴
ششم	۵۶/۶۷	-
هفتم	۷۶/۸۱	-
هشتم	۹۹/۸۸	-
نهم	۱۲۵/۹۶	-
دهم	۱۵۴/۹۰	۱۵۴/۹۰

توجه شود که این مشخصات فقط برای اعتبارسنجی در آنالیز بسامدی است. از این‌جا به بعد، مشخصات ذکر شده در ابتدای بخش ۷ استفاده می‌شود.

شکل ۶، تاثیر نیروی محوری (کششی و فشاری) روی سه بسامد طبیعی اول سازه را نشان می‌دهد؛ در حالی که نیروی کششی، سبب افزایش بسامدهای طبیعی می‌شود، نیروی فشاری سبب کاهش آن‌ها می‌شود. نیروی فشاری که بسامد طبیعی اول در آن به صفر می‌رسد و باعث نخستین ناپایداری دیورژانس می‌شود، نیروی محوری بحرانی اول N_{cr} نامیده می‌شود (شکل ۶ مشاهده شود). هم‌چنین، بسامدهای طبیعی دوم و سوم در ناحیه $N_x > N_{cr}$ تقریباً به صورت خطی تغییر می‌کند. این بسامدها در نیروهای محوری بحرانی بعدی نیز به صفر خواهند رسید؛ ولی اهمیت بیشتر نیروی محوری بحرانی اول، سبب بررسی آن در شکل ۶ است.



شکل ۶- تاثیر نیروی محوری بر روی سه بسامد طبیعی اول سازه

۷-۲- آنالیز زمانی گذرا

در این بخش، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نامتناوب (با دو المان و ۵۱۲ نقطه نمونه در پنجره زمانی ۰/۰۶۲۵ ثانیه) و روش المان محدود کلاسیک (با ۵۰، ۸۰، و ۱۰۰ المان)، برای آنالیز زمانی جابجایی عرضی وسط تیر در نظر گرفته می‌شود. روش‌های عددی تفاضل محدود، θ ویلسون، نیومارک، رانگ و کوتا و غیره برای بخش گسسته‌سازی زمانی در روش المان محدود کلاسیک قابل استفاده هستند که روش نیومارک به‌دلیل دقت بالا برای این پژوهش انتخاب شده است. مقایسه بین روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک و روش المان محدود کلاسیک، برای راستی‌آزمایی و نمایش برتری‌های روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک انجام می‌شود. ناپایداری دیورژانس در نیروی محوری بحرانی اول N_{cr} در شکل ۷ نشان داده شده است که در روش المان محدود کلاسیک، با افزایش تعداد المان‌ها، پاسخ‌ها به نتیجه‌های به‌دست آمده از روش‌های المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نزدیک می‌شوند.

هم‌چنین، جابجایی عرضی وسط تیر تحت نیروی کششی ۲۰ کیلونیوتن در شکل ۸ نشان داده شده است. در شکل ۹، بخشی از شکل ۸ بزرگ‌نمایی شده است. دقت بالا به ازای تعداد المان‌های کمتر این روش نسبت به روش المان محدود کلاسیک، در این شکل نمایان‌تر است. هرچه نیروی کششی افزایش یابد، سختی سازه افزایش می‌یابد؛ درنتیجه اندازه پاسخ دینامیکی تیر کاهش می‌یابد. مقایسه بیشترین دامنه - پاسخ‌های شکل‌های ۷ و ۸ نشان‌دهنده همین واقعیت هستند.

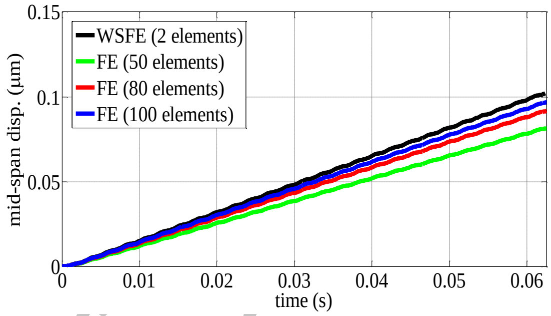
۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تیر تیموشنکوی پیش‌تنیده با روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای آنالیز در حوزه‌های زمان و بسامد فرمول‌بندی شد. مقایسه با روش المان محدود کلاسیک با انگیزه راستی‌آزمایی و بزرگ‌نمایی برتری‌های روش المان محدود طیفی بر پایه‌تبدیل موجک انجام شد. دقت بالای روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک با مقایسه با روش دیگر، نشان داد که می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش المان محدود کلاسیک باشد. تعداد المان‌های بسیار کم، سرعت و دقت بالا در محاسبه پاسخ‌ها از ویژگی-های روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک است.

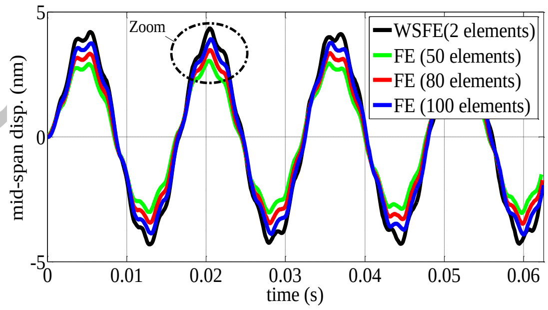
بیان شد که در حوزه بسامد، ویژگی‌های بسامدی موج مانند بسامدهای طبیعی، عدد موج و غیره از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک تا کسر معلومی از بسامد نایکوییست قابل استخراج است. اندازه‌ی Δt روی بسامد نایکوییست تاثیرگذار است؛ بنابراین، انتخاب اندازه Δt در آنالیز بسامدی این روش اهمیت ویژه‌ای دارد.

پایداری سازه و تاثیر اندازه نیروی محوری روی بسامدهای طبیعی و پاسخ‌ها نیز به‌دست آمد. حل‌های عددی نشان داد که نیروی کششی محوری، رابطه مستقیم با سختی سازه و بسامدهای طبیعی دارد؛ هم‌چنین، رابطه‌ی وارونی با

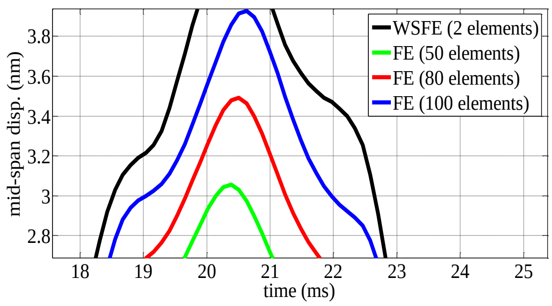
دامنه پاسخ‌های دینامیکی دارد؛ در حالی که نیروی فشاری محوری، رابطه‌ی وارون با سختی سازه و بسامدهای طبیعی دارد. این نتیجه‌ها و پارامترها از روش‌های المان محدود کلاسیک و طیفی بر پایه تبدیل موجک بر پایه تبدیل موجک به‌دست آمد، با این تفاوت که دقت روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، بسیار بیشتر و تعداد المان‌ها کمتر بود.



شکل ۷- پاسخ وسط تیر در نیروی محوری بحرانی اول، N_{cr}



شکل ۸- پاسخ وسط تیر در نیروی محوری ۲۰= N_x (کیلونیوتن)



شکل ۹- بزرگ‌نمایی بخشی از شکل ۸

۹- فهرست نمادها

۹-۱- نمادهای لاتین

A	سطح مقطع (m^2)
E	مدول یانگ (Pa)
$f(x,t)$	نیروی برانگیزش خارجی (N)
$F(x,\tau)$	تبدیل مقیاس نیروی برانگیزش خارجی (N)
$\{\hat{F}^e\}$	بردار نیروهای گرهی
f_{nyq}	بسامد نایکوییست (Hz)
G	مدول برشی (Pa)
I	گشتاور اینرسی سطح مقطع (m^4)
$[\hat{K}^e]$	ماتریس سختی دینامیکی یک المان
k	عدد موج (rad/m)
L	طول تیر (m)
L^e	طول المان (m)
$M(x,t)$	گشتاور خمشی (Nm)
$\mathcal{M}(x,\tau)$	تبدیل مقیاس گشتاور خمشی (Nm)
N_x	نیروی کششی محوری ثابت (N)
N	درجه‌ی موجک داوبچیز
N_{cr}	نیروی محوری بحرانی اول (N)
n	تعداد نقاط به‌کار رفته در تبدیل مقیاس
$Q(x,t)$	نیروی برشی (N)
$\mathcal{Q}(x,\tau)$	تبدیل مقیاس نیروی برشی (N)
t	زمان (s)
$\{\hat{u}^e\}$	بردار جابه‌جایی گرهی
$w(x,t)$	جابه‌جایی عرضی (m)
$W(x,\tau)$	تبدیل مقیاس جابه‌جایی عرضی (m)
x	مختصه مکان (m)

۹-۲- نمادهای یونانی

$i\gamma$	مقدارهای ویژه ماتریس ضریب‌های ارتباط درجه یکم حاصل از روش نامتناوب (rad/s)
$i\lambda$	مقدارهای ویژه ماتریس ضریب‌های ارتباط درجه یکم حاصل از روش متناوب (rad/s)
$\theta(x,t)$	جابه‌جایی چرخشی (rad)
κ	فاکتور تصحیح سطح مقطع
ρ	چگالی جرمی (kg/m^3)
$\varphi_{m,\mathcal{H}}(t)$	تابع مقیاس داوبچیز در هر مقیاس دلخواه m
ω	بسامد نمونه برداری (rad/s)

$\mathbf{\Gamma^2}, \mathbf{\Gamma^1}$	ماتریس‌های ضریب‌های ارتباط درجه اول و دوم حاصل از روش نامتناوب
Δt	فاصله زمانی بین دو نقطه نمونه (s)
$\Theta(x,\tau)$	تبدیل مقیاس جابه‌جایی چرخشی(rad)
$\mathbf{\Lambda^1}$ و $\mathbf{\Lambda^2}$	ماتریس‌های ضریب‌های ارتباط درجه اول و دوم حاصل از روش متناوب
$\Omega^1_{j-\mathcal{H}}$ و $\Omega^2_{j-\mathcal{H}}$	ضریب‌های ارتباط موجک داوبچیز

۱۰- مراجع

[1] Bokaian A (1988) Natural frequencies of beams under compressive axial loads. J Sound Vib 126(1): 49-65.

[2] Bokaian A (1990) Natural frequencies of beams under tensile axial loads. J Sound Vib 142(3): 481-498.

[3] Yokayama T (1990) Vibrations of a hanging Timoshenko beam under gravity. J Sound Vib 141(2): 245-258.

[4] Mohammad Hashemi S, Richard Marc J (2000)Free vibrational analysis of axially loaded bending-torsion coupled beams: a dynamic finite element. Comput Struct 77: 711-724.

[5] Naguleswaran S (2004) Transverse vibration of an uniform Euler–Bernoulli beam under linearly varying axial force. J Sound Vib 275: 47-57.

[6] Kavyanpoor M, Islaminejhad V, Malekzadeh K (2012) Effect of axial tensile force on the free vibration of Euler-Bernoulli beam. Iranian Society of Acoustics and Vibration 2. (In Persion)

[7] Svensson I (2002) Dynamic response of constrained axially loaded beam. J Sound Vib 252(4): 739-749.

[8] Mei C, Karpenko Y, Moody S, Allen D (2006) Analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked Timoshenko beams. J Sound Vib 291: 1041-1060.

[9] Viola E, Ricci P, Aliabadi M.H (2007)Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method. J Sound Vib 304: 124-153.

[10] Jun L, Hongxing H,Rongying S (2008), Dynamic stiffness analysis for free vibrations of axially loaded laminated composite beams. Compos Struct 84: 87-98.

[11] Lee U, Kim J, Oh H (2004) Spectral analysis for the transverse vibration of an axiallymoving Timoshenko beam. J Sound Vib 271: 685-703.

[12] Lee U, Jang I (2010) Spectral element model for axially loaded bending–shear–torsion coupled composite Timoshenko beams. Compos Struct 92: 2860-2870.

[13] Chen W (2011) Bending vibration of axially loaded Timoshenko beams with locally distributed Kelvin–Voigt damping. J Sound Vib 330: 3040-3056.

[14] Mitra M, Gopalakrishnan S (2005)Spectrally formulated wavelet finite element for wave propagation and impact force identification in connected 1-D waveguides. Int J Solids Struct 42: 4695-4721.

[15] Mitra M,Gopalakrishnan S (2006) Extraction of wave characteristics from wavelet-based spectral finite element formulation. Mech Syst Signal Pr 20: 2046–2079.

[16] Mitra M, Gopalakrishnan S (2006) Wavelet based spectral finite element for analysis of coupled wave propagation in higher order composite beams. Compos Struct 73: 263–277.

[17] Mokhtari A, Mirdamadi H.R, Ghayour M, Sarvestan V (2016) Time/wave domain analysis for axially moving pre-stressed nanobeam by wavelet-based spectral element method. Int J Mech Sci 105: 58-69.

[18] Beylkin G (1992) On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. SIAM J Numer Anal 6(6): 1716-1740.

[19] Gopalakrishnan S, Mitra M (2010) Wavelet methods for dynamical problems, Taylor & Francis Group.

[20] Blevins R.D (1979) Formulas for natural frequencies and mode shape. Van Nostrand Reinhold Company, New York.