مکانیک سازهها و شارهها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۴/ صفحه ۱۱–۲۲



محله علمى بژومش مكانيك سازه باو شاره با



DOI: 10.22044/jsfm.2017.866

آنالیز دینامیکی تیر تیموشنکوی پیشتنیده بهکمک روش المان محدود طیفی بر پایهی تبدیل موجک

علی مختاری^۱، حمیدرضا میردامادی^{۲،*} و مصطفی غیور^۳ ^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران ^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران ^۳ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۶ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۷/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱

چکیدہ

در این پژوهش، فرمول بندی روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای آنالیز زمانی و بسامدی (فرکانسی) تیر تیموشنکوی زیر نیروی کششی یا فشاری محوری ثابت (پیش تنیده) ارایه میشود. معادلههای دیفرانسیل، پارهای وابسته به مکان و زمان حاکم بر این سامانه، به کمک تابعهای مقیاس داوبچیز، به معادلههای دیفرانسیل معمولی کوپله و وابسته به مکان تبدیل میشوند. این معادلهها، به کمک آنالیز مقدارهای ویژه، دکوپله میشوند. از حل دقیق این معادلهها در سامانههای یک بعدی، برای استخراج تابعهای شکل دینامیکی و ماتریس سختی دینامیکی بهره گرفته میشوند. از حل دقیق این معادلهها در سامانههای یک بعدی، برای استخراج تابعهای شکل دینامیکی المان تقسیم شود، ولی در روش المان محدود کلاسیک، المانهای بیشتری به کار گرفته میشود. دقت پاسخهای بهدست آمده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، با پاسخهای روش المان محدود کلاسیک، راستیآزمایی (صحهگذاری) میشوند. نتیجههای عددی، گویای برتری این روش در کاهش تعداد المانها و افزایش دقت، در مقایسه با روش المان محدود کلاسیک است. این برتری در سامانههای با محتوای بسامدی بالاتر، نمایانتر است؛ همچنین، تاثیر نیروی کششی یا فشاری محدوری بایت روی پاسخهای دینامیکی و می سامانههای با محتوای بسامدی بالاتر، نمایانتر است؛ همچنین، تاثیر نیروی کششی یا فشاری محوری ثابت روی پاسخهای دینامیکی و سامانههای با محتوای بسامدی بالاتر، نمایان است؛ همچنین، تاثیر نیروی کششی یا فشاری محوری بعرانی نیز بررسی میشود.

كلمات كليدى: المان محدود طيفى بر پايه تبديل موجك؛ تير تيموشنكو؛ تابع مقياس موجك داوبچيز؛ ناپايدارى ديورژانس؛ پيشتنيده.

Dynamic Analysis of Prestressed Timoshenko Beam by using Wavelet-Based Spectral Finite Element Method

A. Mokhtari¹, H.R. Mirdamadi^{2,*}, M. Ghayour² ¹M.Sc., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran. ²Assoc. Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran. ³ Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran.

Abstract

In this article, wavelet-based spectral finite element (WSFE) is formulated for time domain and wave domain dynamic analysis of Timoshenko beam subjected to a uniform axial tensile or compressive force (prestressed). Daubechies wavelet basis functions transform the time and space-dependent governing partial differential equations into a set of coupled space-dependent ordinary differential equations (ODE). The resulting ODEs are decoupled through an eigenvalue analysis and then solved exactly to obtain the shape functions and dynamic stiffness matrix. In the WSFE model, a beam can be divided into only a single element, but larger number of elements may be used in a finite element (FE) model. The accuracy of present WSFE model is validated by comparing its results with those of FE method. The results display advantages of WSFE model compared to FE one in reducing number of elements as well as increasing numerical accuracy. These advantages are more visible in higher frequency content excitations. In addition, the effects of axial tensile or compressive force on time domain analysis and system natural frequencies are investigated. Divergence instability of beam subjected to critical axial compressive force is investigated.

Keywords: Wavelet-Based Spectral Finite Element; Timoshenko Beam; Daubechies Wavelet Basis Function; Divergence Instability; Prestressed.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۳۳۹۱۵۲۴۸ -۳۳۱، فکس: ۳۳۹۱۲۶۲۸ آدرس یست الکترونیک: hrmirdamadi @cc.iut.ac.ir

۱– مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی تیر تحت نیروی کشش یا فشار محوری در زمینههای مهندسی عمران، مکانیک، و هوا-فضا، از اهمیت ویژهای برخوردار است. استخراج بسامدهای طبیعی و شکل مودها در طراحی برخی سازههای زیر نیروی پیش-کشش یا پیش-فشار در طراحی وسایل نقلیه فضایی ضروری است. از دیگر نمونهها، می توان به سازههای تحت نیروی گرانش، مانند سازههای حفاری و سازههای انتقال نفت و گاز از زیر دریا به کشتیهای نفتکش اشاره کرد. در بسیاری از این سازهها، حل دقیقی برای بررسی رفتار دینامیکی آنها وجود ندارد. به همین دلیل، از روشهای عددی مانند روش ريلى-ريتز، گالركين، المان محدود كلاسيك'، المان محدود ديناميكي ، و المان محدود طيفي جهره گرفته شده است. بوكيان، بسامدهاى طبيعى تير اويلر-برنولى تحت نيروى فشاری محوری [1] و کششی محوری [۲] را با استفاده از يك حل بسته[†] ارايه كرد. يوكوياما [٣]، از روش المان محدود کلاسیک برای بررسی ارتعاش تیرهای آویزان اویلر-برنولی و تیموشنکو بهره گرفت. هاشمی و ریچارد [۴]، ارتعاش آزاد تیر خمشی-پیچشی اویلر-برنولی تحت نیروی محوری را با استفاده از روش المان محدود دینامیکی مطالعه کردند. روش المان محدود ديناميكي، روشي بين روش المان محدود کلاسیک و روش سختی دینامیکی است. ناگولسواران [۵]، بسامدهای طبیعی تیر اویلر-برنولی تحت نیروی کششی و فشارى محورى كه بهصورت خطى تغيير مىكند را با استفاده از چهار سری توانی بهدست آورد. کاویان پور و همکاران [۶]، تاثیر نیروی کششی محوری بر رفتار ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی آزاد-آزاد را بهصورت آزمایشگاهی و تحلیلی، مورد مطالعه و ارزیابی قرار دادند. سونسون [۷]، پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و اویلر-برنولی تحت نیروی محوری فشاری را به کمک سری فوریه سینوسی استخراج کرد. می و همکاران [۸]، ارتعاشات آزاد و واداشته تیر تیموشنکوی ترکدار زیر نیروی محوری را بهکمک دیدگاه موج (طیفی) بررسی کردند. ویولا و همکاران [۹]، ارتعاشات

آزاد تیر تیموشنکوی ترکدار تحت نیروی محوری را بهکمک روش ماتریس سختی دینامیکی بررسی کردند. لیجون و همکاران [۱۰]، ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی زیر نیروی محوری را به کمک روش ماتریس سختی دینامیکی بررسی کردند. یوزیکلی و همکاران [۱۱]، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی پیشتنیده با حرکت محوری را بهکمک روش المان محدود طيفي بر پايه تبديل فوريه بررسي كردند. یوزیکلی و جانگ [۱۲]، مدل المان محدود طیفی بر پایه تبديل فوريه تير تيموشنكوى كامپوزيتى تحت نيروى محورى را ارایه کردند. چن [۱۳]، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی با میرایی محلی کلوین-ویت و تحت نیروی محوری را به کمک المان محدود كلاسيك بررسي كرد.

روش المان محدود كلاسيك، شناخته شدهترين روش عددی در تحلیل دینامیکی سازههاست. این روش، بهدلیل توانمندی بالای آن در برنامهنویسی کامپیوتری، در شاخههای گوناگون مهندسی، کاربرد فراوانی یافته است. روش المان محدود کلاسیک، بر پایه بخش بندی سازه به المان های متعدد و استخراج ماتریسهای سختی و جرم استوار است. باید اشاره داشت که دقت این روش تا جایی است که طول موج، از طول هر المان بزرگتر باشد. با افزایش بسامد، طول موج کاهش یافته، در نتیجه برای افزایش دقت روش المان محدود کلاسیک، باید اندازه المانها کوچک و کوچکتر شود. هم-چنین، روش المان محدود کلاسیک، به استخراج ماتریسهای سختی و جرم منجر می شود که این ماتریس ها از تابعهای شکل استاتیکی بهدست میآیند؛ در نتیجه، این تابعها بدون تغيير و مستقل از بسامد هستند؛ بنابراين، در روش المان محدود كلاسيك در بسامدهاى بالا، بايد اندازه المانها کوچک و در نتیجه تعداد آن ها افزایش یابد تا دقت بیشتر شود که این از نقصهای عمده این روش به شمار میآید. بخشبندی سازه به المانهای بسیار ریز، سبب افزایش تعداد درجههای آزادی سیستم شده، در نتیجه زمان و هزینه انجام محاسبات نیز افزایش مییابد؛ بنابراین، بسیاری از پژوهشگران به فكر يافتن جايگزينهاى مناسب براى اين روش افتادند. روش المان محدود طيفي بر پايه تبديل فوريه، از جمله روشهای نوین برای جایگزینی روش المان محدود کلاسیک است. این روش، در دو دهه اخیر، در بررسی دینامیکی رفتار سازهها مورد توجه و استقبال پژوهشگران قرار گرفته است.

¹ Finite Element (FE)

² Dynamic Finite Element (DFE)

³ Spectral Finite Element (SFE) ⁴ Closed Form Solution

روشی که میتواند پاسخهای دقیق و مناسب را حتی برای مسالههای بارگذاری در بسامد بالا، ارایه کند. بهطور کلی، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه به حل معادله-های حاکم بر سیستم در حوزهبسامد میپردازد. این روند حل، بهصورت دقیق صورت میگیرد (در صورت وجود) و معادلههای دیفرانسیل پارهای وابسته به مکان و زمان با استفاده از تابع تبدیل فوریه سریع، به معادلههای دیفرانسیل معمولی وابسته به مکان تبدیل میشوند. تکیه این روش بر معمولی وابسته به مکان تبدیل میشوند. تکیه این روش بر ملاسیک، این روش نیاز چندانی به بخش بندی سازه به المانهای ریز نداشته باشد؛ در نتیجه، دستیابی به پاسخهای دقیق، تنها با یک یا دو المان نیز امکان پذیر میشود.

از دیگر روشهای جدید، برای جایگزینی روش المان محدود كلاسيك و طيفى بر پايه تبديل فوريه، روش المان محدود طيفي بر پايه تبديل موجک است که امروزه براي تحلیل دینامیکی سازهها کاربرد دارد. در این روش، معادله-های دیفرانسیل پارهای وابسته به مکان و زمان با استفاده از تابعهای مقیاس داوبچیز، به معادلههای دیفرانسیل معمولی کوپله وابسته به مکان تبدیل میشوند که با روش آنالیز مقدارهای ویژه، دکوپله می گردند. برخلاف روش المان محدود کلاسیک که در آن از تابعهای شکل استاتیکی، بهره برده می شود، تابع های شکل دینامیکی، از حل دقیق معادله های ديفرانسيل معمولي دكوپله وابسته به مكان بهدست ميآيند. ماتریس سختی دینامیکی نیز، بر پایه تابعهای شکل دینامیکی ساخته میشود. این ماتریس به طور همزمان، در بردارنده ویژگیهای جرم و سختی المان است. حل دقیق معادلههای حاکم بر سازه و بهره گیری از تابعهای شکل دینامیکی، در روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، سبب افزایش دقت پاسخها در مقایسه با روش المان محدود کلاسیک است که از فرضهایی مانند، تابعهای شکل استاتیکی بهره میبرد؛ همچنین، عدم نیاز به در نظر گرفتن تعداد المان زیاد، سبب از بین رفتن خطاهای مربوط به بخشبندی سازه میشود و زمان و هزینه محاسبات نیز كاهش مىيابد؛ همچنين، روش المان محدود طيفى بر پايه تبديل موجك، برخلاف روش المان محدود طيفي بر پايه تبدیل فوریه که برای پاسخهای زمانی نیاز به پاسخهای بسامدی دارد، نیاز به نگاشت پاسخها در حوزههای گوناگون،

از جمله حوزه بسامد ندارد. روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه در سازههای نامیرا و یا با میرایی ناچیز با مشکل روبروست که روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، این نقایص را برطرف میسازد؛ همچنین، باید اشاره داشت که این روش، تمامی مزیتهای روش المان محدود طیفی بر پایهتبدیل فوریه سریع را داراست. مقالههای [۱۴–۱۷]، بهره-گیری از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک را ارایه دادهاند.

در این پژوهش، تیر تیموشنکوی پیش تنیده به کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای آنالیز زمانی و بسامدی فرمول بندی می شود. ابتدا، آنالیز بسامدی با روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک متناوب^۱ انجام می شود. پس از آن، با در نظر گرفتن نیروی ضربه در وسط سازه با شرایط تکیه گاهی دو سر لولا، آنالیز زمانی به-کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نامتناوب^۲ با دو المان طیفی بررسی می شود.

آنالیز زمانی و بسامدی تیر تیموشنکوِی پیشتنیده، بررسی ناپایداری دیورژانس و استخراج نیروی فشاری بحرانی با بهره گیری از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک (با در نظر گرفتن تنها دو المان)، از نوآوریهای این پژوهش به شمار میآیند. به گفته دیگر، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک که از دید نویسندگان تاکنون برای تیر تیموشنکوی پیشتنیده به کار گرفته نشده است، دستآورد پژوهشی این پژوهش محسوب میشود.

۲- استخراج معادلههای حاکم بر سازه

شکل ۱، تیر تیموشنکوی یکنواخت تحت نیروی کششی ثابت N_x، با سختی خمشی EI و سختی برشی KGA، جرم در واحد طول pA، و گشتاور اینرسی جرمی pI را نشان میدهد؛ هم-چنین، طول تیر L است.

از اصل همیلتون برای استخراج معادلههای دیفرانسیل حاکم بر سازه، رابطههای (۱) و (۲) و شرایط مرزی، رابطه (۳)، بهره گرفته می شود.

¹ Periodic Wavelet-Based Spectral Finite Element (PWSFE) ² Non-Periodic Wavelet-Based Spectral Finite Element (NPWSFE)



شکل ۱- تیر تیموشنکوی تحت نیروی کشش ثابت N_x



که \mathcal{H} یک شمارنده برای انتخاب مقادیر مختلف گسسته-سازی شده تابع داخل سری است. این عبارت برای سایر تابع-های وابسته به مکان و زمان، از جمله (\mathbf{x}, \mathbf{t}) و $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ برقرار است. این تخمینها در معادلههای دیفرانسیل حاکم بر سازه حایگذاری م شوند و رابطههای (۸) و (۹) به دست م آید.

$$\kappa GA \sum_{\mathcal{H}} \left(\frac{d^2 w_{\mathcal{H}}}{dx^2} - \frac{d\theta_{\mathcal{H}}}{dx} \right) \varphi(\tau - \mathcal{H}) + N_x \sum_{\mathcal{H}} \frac{d^2 w_{\mathcal{H}}}{dx^2} \varphi(\tau - \mathcal{H}) + \sum_{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}} \varphi(\tau - \mathcal{H}) - \frac{1}{\Delta t^2} \rho A \sum_{\mathcal{H}} w_{\mathcal{H}} \frac{d^2 \varphi(\tau - \mathcal{H})}{d\tau^2} = 0$$
(A)
$$EI \sum_{\mathcal{H}} \frac{d^2 \theta_{\mathcal{H}}}{dx^2} \varphi(\tau - \mathcal{H}) + \kappa GA \sum_{\mathcal{H}} \left(\frac{dw_{\mathcal{H}}}{dx} - \theta_{\mathcal{H}} \right) \varphi(\tau - \mathcal{H}) - \frac{1}{\Delta t^2} \rho I \sum_{\mathcal{H}} \theta_{\mathcal{H}} \frac{d^2 \varphi(\tau - \mathcal{H})}{d\tau^2} = 0$$
(9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau - \mathcal{H}) \varphi(\tau - j) \, d\tau = 0 \quad \text{for } j \neq \mathcal{H}$$
 (1.)

تابعهای مقیاس داوبچیز، دارای دو ویژگی مهم هستند. اول اینکه متعامد هستند که پیشتر در رابطه (۱۰) بیان شد. دوم اینکه بیشتر انرژی آنها در بازه کوچکی متمرکز شده است و به سرعت میرا میشوند یا بهعبارت دیگر، بهشکل

$$cGA\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) = 0$$
⁽¹⁾

$$EI\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{2}} + \kappa GA\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right) - \rho I\frac{\partial^{2}\theta}{\partial t^{2}} = 0 \tag{(7)}$$

$$\begin{cases}
Q(0,t) = -Q_{n_{-1}}(t) - N_{x}\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} \\
M(0,t) = -M_{n_{-1}}(t) \\
Q(L^{e},t) = Q_{n_{-2}}(t) - N_{x}\frac{\partial w(L^{e},t)}{\partial x} \\
M(L^{e},t) = M_{n_{-2}}(t)
\end{cases}$$

 $p_{n_2}(x,t)$ نیروی برانگیزش خارجی، Q_{n_2} و Q_{n_2} بهترتیب، f(x,t) و $X = L^e$ و x = 0 و x = 0 و M_{n_1} و M_{n_2} و M_{n_1} به ترتیب، گشتاورهای خمشی اعمال شده در M_{n_2} و M_{n_1} و x = 0 و $x = L^e$ و x = 0 است و در شکل ۲ نشان داده شده است. یادآوری می شود که L^e طول یک المان است.

Q(x,t) و M(x,t) به ترتیب، نیروی برشی و گشتاور خمشی هستند که رابطههای (۴) و (۵) برای آنها بیان شده است.

$$Q(x,t) \triangleq \kappa GA(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta)$$
^(*)

$$M(x,t) \triangleq EI \frac{\partial 0}{\partial x}$$
 (Δ)

درستی رابطههای (۱) تا (۵) به کمک مقایسه با مقاله یوزیکلی و همکاران [۱۱]، با صرفنظر از حرکت محوری، اثبات می شود.

۳- گسستهسازی زمانی

روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، روشی عددی است که پاسخ (w(x,t) و θ(x,t) را به صورت گسسته در نقطههای نمونهبرداری ارایه میدهد. به کمک رابطه (۶)، پنجره زمانی t در n نقطه گسسته سازی می شود. t مدت زمان آنالیز سامانه است.

$$t = \tau \Delta t,$$
 $\tau = 0, 1, 2, ..., n - 1$ (۶)
 Δt فاصله زمانی بین دو نقطهی نمونهبرداری است. مطابق با
رابطه (۲)، تابع $w(x,t)$ به کمک تابع مقیاس سازی داوبچیز $\phi(\tau)$
 $\phi(\tau)$ در هر نقطه نمونه تخمین زده می شود [۱۴].

$$\begin{split} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{\mathcal{H}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathcal{H}\Delta \mathbf{t}) \boldsymbol{\varphi}(\tau - \mathcal{H}) \\ &= \sum_{\mathcal{H}} \mathbf{w}_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varphi}(\tau - \mathcal{H}), \qquad \mathcal{H} \in \mathbb{Z} \end{split} \tag{Y}$$

¹ Daubechiesscaling Function

روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک متناوب و نامتناوب برای حل این مشکل در نظر گرفته شده است [۱۴– ۱۷]. روش متناوب، فقط توانایی آنالیز بسامدی برای سازه را دارد، در حالی که روش نامتناوب، توانایی آنالیز زمانی و بسامدی برای سازه را به طور همزمان دارا است. رویهمرفته، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برخلاف روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل فوریه، نیازی به تغییر حوزه (مانند تبدیل حوزهی زمان به حوزهی بسامد) ندارد. در این پژوهش، برای آنالیز بسامدی سازه، روش متناوب به دلیل حجم کمتر محاسبات در نظر گرفته میشود. در روش متناوب، رابطههای (۱۳) و (۱۴) به فرم رابطههای (۱۷) و (۱۸) بیان میشوند.

$$\kappa GA \left\{ \frac{d^2 w_j}{dx^2} - \frac{d\theta_j}{dx} \right\} - (\rho A \Lambda^2) \{ w_j \}$$
$$+ N_x \left\{ \frac{d^2 w_j}{dx^2} \right\} + \{ f_j \} = 0, \ j = 0, 1, 2, ..., n - 1 \qquad (Y)$$

$$EI\left\{\frac{d^{2}\theta_{j}}{dx^{2}}\right\} + \kappa GA\left\{\frac{dw_{j}}{dx} - \theta_{j}\right\} - (\rho I\Lambda^{2})\left\{\theta_{j}\right\}$$

= 0, j = 0, 1, 2, ..., n - 1 (1A)

 Λ^{2} و Λ^{2} ماتریسهای گردشی $n \times n^{a}$ هستند و ماتریسهای ضریب ارتباط درجه اول و دوم ٔ حاصل از روش متناوب نامیده می شوند.

$$\kappa GA \left\{ \frac{d^2 w_j}{dx^2} - \frac{d\theta_j}{dx} \right\} - (\rho A \Gamma^2) \{ w_j \} + N_x \left\{ \frac{d^2 w_j}{dx^2} \right\} + \{ f_j \} = 0, \quad j = 0, 1, 2, ..., n-1$$

$$EI \left\{ \frac{d^2 \theta_j}{dx^2} \right\} + \kappa GA \left\{ \frac{dw_j}{dx} - \theta_j \right\} - (\rho I \Gamma^2) \{ \theta_j \}$$
(19)

$$= 0, \quad j = 0, 1, 2, ..., n - 1$$

$$(Y^{*})$$

¹¹ و ² ماتریسهای $n \times n$ هستند و ماتریسهای ضریب ارتباط درجه اول و دوم حاصل از روش نامتناوب نامیده می-شوند. باید گفت که ماتریسهای ضریب ارتباط ¹٦، ²٦ و ¹٨، Λ^2 مستقل از سامانه میباشند و فقط به درجه موجک داوبچیز N وابسته هستند. بهاینترتیب، معادلههای دیفرانسیل پارهای وابسته به مکان و زمان حاکم بر سازه، به معادلههای دیفرانسیل معمولی کوپله وابسته به مکان تبدیل شدند. کارآمدی کراندار هستند. این تابعها به این دو دلیل، موجکهای متعامد با محمل فشرده^۱ نامیده می شوند. مطابق رابطه (۱۱)، انتگرال گیری روی ضرب دو تابع مقیاس داوبچیز و تابع مشتق اول آن، ضریبهای ارتباط درجه اول Γ_{J-H}^{1} را ایجاد می کند. با جایگذاری مشتق دوم تابع مقیاس داوبچیز بهجای مشتق اول آن در رابطه (۱۱)، ضریبهای ارتباط درجه دوم Γ_{J-J}^{2} مطابق با رابطه (۱۱) ایجاد می شود. این ضریبها فقط در گستره $[2 - N + 2 \quad j + N - 1] = H$ ناصفر هستند که N درجه موجک داوبچیز است. جزییات دقیق محاسبه آنها، توسط بیکلین [۱۸] بیان شده است.

$$\Omega_{j-\mathcal{H}}^{1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\tau - \mathcal{H})}{d\tau} \varphi(\tau - j) d\tau$$
(11)

$$\Omega_{j-\mathcal{H}}^{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2}\varphi(\tau - \mathcal{H})}{d\tau^{2}} \varphi(\tau - j) d\tau \qquad (17)$$

که j = 0, 1, 2, ..., n - 1 است. به کمک این ویژگیها، دو طرف معادلههای دیفرانسیل تخمینی در $((\tau - j))$ ضرب می شود و رابطههای (۱۳) و (۱۴) به دست می آیند. $(d^2w_i \quad d\theta_i) \qquad d^2w_i$

$$\kappa GA\left(\frac{d^{-}w_{j}}{dx^{2}} - \frac{d\theta_{j}}{dx}\right) + N_{x}\frac{d^{-}w_{j}}{dx^{2}} - \frac{1}{\Delta t^{2}}\rho A\sum_{\mathcal{H}=j-N+2}^{j+N-2}\Omega_{j-\mathcal{H}}^{2}w_{\mathcal{H}} + f_{j} = 0$$

$$d^{2}\theta_{i} \qquad (1\%)$$

$$EI\frac{d^{2}\theta_{j}}{dx^{2}} + \kappa GA\left(\frac{dw_{j}}{dx} - \theta_{j}\right) - \frac{1}{\Delta t^{2}}\rho I\sum_{\mathcal{H}=j-N+2}^{j+N-2}\Omega_{j-\mathcal{H}}^{2}\theta_{\mathcal{H}} = 0$$
(14)

به همین ترتیب، نیروی برشی و گشتاور خمشی به صورت رابطههای (۱۵) و (۱۶) گسستهسازی میشوند.

$$M_{j} = EI \frac{d\theta_{j}}{dx}$$
(12)

$$Q_{j} = \kappa GA \left(\frac{dw_{j}}{dx} - \theta_{j} \right)$$
(19)

با دقت در رابطههای (۱۳) و (۱۴) مشاهده میشود که j = 0,1,2,...,n – 1 تعدادی از ₍wal و _θها خارج از بازهی j = 0,1,2,...,n قرار میگیرند. به این مشکل، مشکل مقدار مرزی[†] گویند. دو

⁵ Circulant Matrix

⁶ First and Second Order Connection Coefficient Matrices

¹ Orthogonal Compactly Supported Wavelets

² First Order Connection Coefficients

³ Second Order Connection Coefficients

⁴ Boundary Value Problem (BVP)

با این که Γ^2 و Λ^2 به طور مستقل محاسبه می شوند، اما Γ^2 برای کاهش حجم محاسبات، آنها را از رابطه (۲۱) بر اساس Γ^1 و Λ^1 بهدست می آورند [۱۴]. $\Gamma^2 = [\Gamma^1]^2$ $\Lambda^2 = [\Lambda^1]^2,$ (۲۱) ماتریس های ضریب ارتباط، به کمک رابطه های (۲۲) و (۲۳) قطریسازی می شوند. از این قطری سازی برای دکوپله کردن معادلههای دیفرانسیل (۱۷) تا (۲۰) استفاده می شود. $[\Gamma^1] = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Pi} \mathbf{\Phi}^{-1}$ (۲۲) $[\Gamma^2] = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Pi}^2 \mathbf{\Phi}^{-1}$ (۲۳) در رابطههای قطریسازی (۲۲) و (۲۳)، Φ ماتریس ، $i\gamma_i$ دربردارنده بردارهای ویژه [Γ^1]، Π ماتریس قطری شامل و Π^2 ماتریس قطری شامل γ_i^2 است. $i = \sqrt{-1}$ میباشد. مقدارهای ویژهی ماتریس [Γ^1] است. همین بیان برای i γ_j ماتریس های $[\Lambda^2] = \Psi \Xi^2 \Psi^{-1}$ و $[\Lambda^1] = \Psi \Xi \Psi^{-1}$ اجرا می شود. ماتریس [۸¹] در رابطه (۲۴) نشان داده شده است. $\Lambda^1 =$ (14) Δt مقدارهای ویژه α_{j} و بردارهای ویژه \mathbf{v}_{p} متناظر با این α_{j} ماتریس در [۱۹] بهصورت تحلیلی بهدست آمده است. $\alpha = i\lambda = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-2} O_n^1 e^{-2\pi i j k/n}$

$$\begin{aligned} u_{j} &= h_{ij} = \Delta t \sum_{k=-N+2}^{N-2} \Omega_{k}^{1} \sin(2\pi j k/n), \\ &= \frac{-2i}{\Delta t} \sum_{k=1}^{N-2} \Omega_{k}^{1} \sin(2\pi j k/n), \\ &j = 0, 1, 2, ..., n-1 \end{aligned}$$
 (YΔ)

$$v_{jp} = \frac{1}{\Delta t \sqrt{n}} e^{-2\pi i j k/n}, p = 1, 2, ..., n$$
 (Y9)

هم چنین، Ξ ماتریس قطری شامل α_j ، Ξ^2 ماتریس قطری شامل λ_j^2 ، و $[v_{jp}] = \Psi$ است.

$$(\kappa GA + N_x) \frac{d^2 w_q}{dx^2} + \gamma_q^2 \rho A \widehat{w}_q$$
$$-\kappa GA \frac{d \widehat{\theta}_q}{dx} + \widehat{f}_q = 0 \tag{YV}$$

$$\operatorname{EI}\frac{d^{2}\hat{\theta}_{q}}{dx^{2}} - (\kappa GA - \gamma_{q}^{2}\rho I)\hat{\theta}_{q} + \kappa GA\frac{d\hat{w}_{q}}{dx} = 0 \qquad (\Upsilon \Lambda)$$

$$\{ \widehat{w}_{q} \} = \Phi^{-1} \{ w_{q} \}, \{ \theta_{q} \} = \Phi^{-1} \{ \theta_{q} \},$$

$$\{ \widehat{f}_{q} \} = \Phi^{-1} \{ f_{q} \}$$
(79)

با همین بیان، گشتاور خمشی و نیروی برشی در هر p طبق رابطههای (۳۰) و (۳۱) بهدست میآیند.

$$\widehat{M}_{q} = EI \frac{d\widehat{\theta}_{q}}{dx} \tag{(7.)}$$

$$\widehat{Q}_{q} = \kappa GA \left(\frac{d\widehat{w}_{q}}{dx} - \widehat{\theta}_{q} \right) \tag{(7.)}$$

روی همرفته، همه رابطه های مربوط به روش های γ_q نامتناوب و متناوب، فرمول بندی یکسانی دارند، جز این که γ_q به λ_q تبدیل می شود. برای سادگی در این نوشتار، فقط فرمول بندی روش نامتناوب بیان می شود، به جز در حوزه بسامد و موردهایی که یادآوری می شود.

همان طور که بیان شد، همه ماتریسهای ضریب ارتباط، مستقل از سامانه و فقط وابسته به درجه موجک داوبچیز N هستند؛ بنابراین، آنالیز مقدارهای ویژه برای قطریسازی، یک بار و برای همیشه انجام و ذخیرهسازی می شود. این کار سبب کاهش حجم محاسبات می شود.

۴- گسستهسازی مکانی

شکل ۳ یک المان طیفی تیر با دو گره، دو درجه آزادی عرضی \widehat{W}_q و چرخشی $\widehat{\theta}_q$ ، نیروی برشی گرهی \widehat{Q}_q و گشتاور خمشی گرهی \widehat{M}_q را نشان میدهد.



فرمول بندی ماتریس سختی دینامیکی برای یک المان تیر که 4×4 است، در ادامه بیان می شود. از این پس، زیرنویس p برای راحتی نوشته نمی شود. با حل معادلههای دیفرانسیل (۲۷) و (۲۸) به صورت همگن ($\hat{f}_q = 0$)، تابع دقیق درونیابی مطابق با رابطه (۳۲) به دست می آید.

 $\widehat{w}(x) = a e^{-ikx}, \qquad \widehat{\theta}(x) = b e^{-ikx} \tag{(YY)}$

در رابطه تابعهای درونیابی، k عدد موج المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک است. با جایگذاری این تابعها در

www.SID.ir

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{w}(x)}{dx} &= -i[k_1k_2k_3k_4]diag\{e^{-ik_rx}\} \begin{cases} a_1\\a_2\\a_3\\a_4 \end{cases} \\ &= [R_3][D(x)]\{a\}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \qquad (\texttt{f}\texttt{f}) \\ &\text{, rel, index index$$

$$\{ \hat{\mathbf{F}}^{e} \} = \begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{n_{-1}}^{-} \\ \widehat{\mathbf{Q}}_{n_{-2}} \\ \widehat{\mathbf{M}}_{n_{-2}} \end{cases} = \begin{cases} -\widehat{\mathbf{M}}(0) \\ \widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{L}^{e}) + \mathbf{N}_{x} \frac{d\widehat{\mathbf{w}}}{dx} \Big|_{x=\mathbf{L}^{e}} \\ \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{L}^{e}) \end{cases}$$
$$= \begin{bmatrix} -([\mathbf{R}'_{1}] + \mathbf{N}_{x}[\mathbf{R}_{3}])[\mathbf{D}(0)] \\ -[\mathbf{R}'_{2}][\mathbf{D}(0)] \\ ([\mathbf{R}'_{1}] + \mathbf{N}_{x}[\mathbf{R}_{3}])[\mathbf{D}(\mathbf{L}^{e})] \\ [\mathbf{R}'_{2}][\mathbf{D}(\mathbf{L}^{e})] \end{cases} \\ \{ \mathbf{a} \} = [\mathbf{T}_{2}] \{ \mathbf{a} \}$$
($\boldsymbol{f} \Delta$)

با حذف {a} از بردارهای جابهجاییها و نیروهای گرهی، ماتریس سختی دینامیکی یک المان $[\widehat{R}^{e}]$ ، طبق رابطه (۴۶) بهدست میآید. (۴۶) $\{\widehat{r}^{e}\} = [T_2][T_1]^{-1}\{\widehat{u}^{e}\} = [\widehat{R}^{e}]\{\widehat{u}^{e}\}$ بعد از محاسبه ماتریس سختی دینامیکی برای یک المان، همانند روش المان محدود کلاسیک، سرهمبندی در pهای مختلف طبق رابطه (۴۷)، بهصورت عددی انجام و شرطهای مرزی برآوردهسازی میشوند. (۴۷)

بعد از محاسبه پاسخها در سامانه جهانی {û^g}، از پاسخ-های یک المان {û^e} برای دستیابی به ضریبهای ثابت {a}، طبق رابطه (۴۸)، استفاده میشود. فرمول بندی همگن رابطه های (۲۷) و (۲۸)، مساله مقدار ویژه رابطه (۳۳) بدست میآید. $\begin{bmatrix}
 X_{11} & X_{12} \\
 X_{21} & X_{22}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a \\
 b
 \end{bmatrix}
 =
 \\
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$ (۳۳) (۳۳) $X_{11} = -(\kappa GA + N_x)k^2 + \gamma^2 \rho A,$ $X_{22} = -EIk^2 - (\kappa GA - \gamma^2 \rho I),$ $X_{12} = -X_{21} = i\kappa GAk$ (۳۴) Iین مساله مقدار ویژه، رابطه پراکنش (۳۵) را ایجاد می کند. $c_4k^4 + c_3k^3 + c_2k^2 + c_1k + c_0 = 0$ (۳۵)

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_4 &= (\mathrm{EI})(\kappa \mathrm{GA} + \mathrm{N}_{\mathrm{x}}), \\ \mathbf{c}_3 &= 0, \\ \mathbf{c}_2 &= \kappa \mathrm{GAN}_{\mathrm{x}} - \gamma^2 \rho \mathrm{I}(\kappa \mathrm{GA} + \mathrm{N}_{\mathrm{x}}) - \gamma^2 \mathrm{EI} \rho \mathrm{A}, \\ \mathbf{c}_1 &= 0, \\ \mathbf{c}_0 &= -\gamma^2 \rho \mathrm{A}(\kappa \mathrm{GA} - \gamma^2 \rho \mathrm{I}) \end{aligned} \tag{(79)}$$

$$k_{1} = -k_{2} = \sqrt{\frac{-c_{2} + \sqrt{c_{2}^{2} - 4c_{4}c_{0}}}{2c_{4}}},$$

$$k_{3} = -k_{4} = \sqrt{\frac{-c_{2} - \sqrt{c_{2}^{2} - 4c_{4}c_{0}}}{2c_{4}}}$$
(^WV)

$$b_{r} = \frac{-(\kappa GA + N_{x})k_{r}^{2} + \gamma^{2}\rho A}{-i\kappa GAk_{r}}a_{r} = \zeta_{r}a_{r},$$

$$r = 1, 2, 3, 4$$
(7A)

به این ترتیب، تابعهای میانیابی بهصورت ماتریسی در رابطههای (۳۹) و (۴۰) بازنویسی میشوند.

$$\widehat{w}(\mathbf{x}) = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \text{diag} \{ e^{-ik_r \mathbf{x}} \} \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{cases}$$
$$= [R_1] [D(\mathbf{x})] \{a\}, \qquad r = 1, 2, 3, 4 \qquad ()^{a_1} \}$$

$$\hat{\theta}(x) = [\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4] \text{diag} \left\{ e^{-ik_r x} \right\} \begin{cases} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{cases}$$
$$= [R_2] [D(x)] \{a\}, \ r = 1, 2, 3, 4 \qquad (\pounds \cdot)$$

بردار جابهجایی گرهی با برآوردهسازی درجههای آزادی در دو مرز، در رابطه (۴۱)، بهدست میآید. $\{\hat{u}^{e}\} = \begin{cases} \widehat{w}_{n,1} \\ \widehat{\theta}_{n,1} \\ \widehat{w}_{n,2} \\ \widehat{w$

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_{n_2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{\theta}(L^e) \end{pmatrix} \quad \lfloor [R_2][D(L^e)] \end{bmatrix}$$
$$= [T_1]\{a\}$$

(۴1)

 $\{a\} = [T_1]^{-1}\{\hat{u}^e\}$ (۴۸) اگر در همه رابطهها، از $N_x - N_x$ استفاده شود، معادلههای حاکم بر تیر تیموشنکو تحت نیروی فشاری ثابت بهدست میآید.

۵– آنالیز بسامدی

مختاری و همکاران [۱۷] و میترا و گوپالاکریشنان [۱۹]، نشان دادند که در یک Δt مشخص، i تا کسر معلومی از بسامد نایکوییست ($\Delta t = 1/2\Delta t$), به درستی با سامد نایکوییست ($\omega_t = 1/2\Delta t$), به درستی با مستقیم از المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک در حوزه بسامد سود جست. این کسر معلوم را با n شان می-دهندکه وابسته به درجه موجک داوبچیز است. n را میتوان از شکل ۴ استخراج کرد که با توجه به این شکل، هرچه درجه موجک بالاتر باشد، کسر معلوم نیز بزرگتر است. برای نمونه، n موجک درجه ۲، تقریباً برابر با 8/ و برای درجه نمونه، n موجک درجه (۲۵) ترسیم شده است.



مختلف داوبچيز

بنابراین، در این روش، عدد موج و بسامدهای طبیعی تا بسامد $f_N = p_N f_{nyq}$ دقیق خواهد بود. بسامدهای طبیعی در این روش، از حل مقدارهای ویژه ماتریس سختی دینامیکی (صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی طبق رابطه (۴۹) و محاسبه Λ های مربوط به آن) بهدست میآید. (۴۹)

این معادله، رابطه مقدار ویژه غیر جبری را نتیجه میدهد و برای محاسبه این بسامدها، از روش عددی دو نیم کردن بهره برده میشود. بهطوری که بسامد بهعنوان یک ورودی

وارد رابطه غیر جبری حاصل از رابطه (۴۹) شده، به ازای آن مقادیری از بسامد که سمت راست رابطه صفر شود، بسامدهای جواب که همان بسامدهای طبیعی هستند، به-دست خواهند آمد.

۶- آنالیز پایداری

برای آنالیز پایداری سازه، باید بسامدهای طبیعی سازه محاسبه شود؛ در صورتی که بسامدهای طبیعی مقدار حقیقی محض باشند، سازه در حالت پایدار قرار دارد. زمانی که بسامد طبیعی به مقدار صفر برسد، سازه وارد ناحیه ناپایدار دیورژانس می شود.

۷– مثال عددی

یک تیر تیموشنکو با شرایط تکیه گاهی دو سر لولا به طول ۵ متر، مدول یانگ ۲۱۰ گیگا پاسگال، مدول برشی ۸۰/۷۶۹ گیگا پاسگال، سطح مقطع به عرض ۵/۰ متر و ارتفاع ۷/۰ متر، چگالی ۷۸۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب و فاکتور تصحیح سطح مقطع ۸۵/۰، تحت نیروی ضربهی عرضی شکل ۵ در وسط آن، در نظر گرفته شده است. هدف، محاسبه بسامدهای طبیعی، استخراج نیروی فشاری بحرانی و پاسخ دینامیکی وسط تیر است. بسامدهای طبیعی و پاسخ دینامیکی تیر با دو روش المان محدود کلاسیک و المان محدود طیفی، بر پایه تبدیل موجک محاسبه و مقایسه میشود. نیروی کششی در همهجا ۲۰ کیلونیوتن است، مگر اینکه اندازه آن بیان شود؛ همچنین، درجه موجک داوبچیز ۲۲ در نظر گرفته میشود.



۷-۱- آنالیز بسامدی

با استفاده از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک متناوب و با انتخاب (میکروثانیه) $\Delta t = 10/709$ ، بسامدهای

محاسبه و با روش تحليلى [٢٠] مقايسه شده است. براى اعتبارسنجى (جدول ٢)، تيرى با مشخصات مقاله [١١] و بدون سرعت در نظر گرفته مىشود. به اين ترتيب، شرايط تكيه گاهى دو سر لولا، طول (m) L = L، ضخامت سطح مقطع (m) h = 0.03 (m) ممان L = 1 (m) مقطع (m) h = 0.03 (m) ممان L = 4, مخامت سطح مقطع (m) h = 0.03 (m) ممان اينرسى جرم بر واحد طول (kg/m) $\rho A = 0.84$ (kg/m) مان اينرسى جرمى بر واحد طول (kg/m) $\rho A = 0.84$ (kg/m) سختى جرمى بر واحد طول (kg/m) $\rho A = 0.84$ (kg/m) مان براى اينرسى $\kappa GA = 6.75 \times 7 = 10^{\circ}$, سختى خمشى (N) h = 0.01 (m) h = 0.84 (kg/m) $\kappa GA = 6.75 \times 10^{-5} \times EA$ (N) m^2 (N) h = 0.6 (N) h = 0.01 (m) h = 0.64 (kg/m) h = 0.64 (kg طبيعى محاسبه شده تا بسامد نزديک به ۱۹۶۶۰/ هرتز f_{nyq} و ۲۲۷۶۸ همان p_N و p_N همان p_N و ۲۲۷۶۸ همان p_{nyq} و ۲۲۷۶۸ همان p_{nyq} همان معتبر خواهند بود. نه بسامد طبيعى اول سازه تحت نيروى کششى ۲۰ کيلونيوتن، در جدول ۱ نمايش داده شده است. در روش المان محدود کلاسيک، با افزايش تعداد المانها، پاسخها به نتيجههاى بدست آمده از روشهاى المان محدود طيفى بر پايه تبديل موجک نزديک مى شوند. اختلاف مين اين دو روش در بسامدهاى بالاتر، بيشتر به چشم مى خورد؛ به اين معنى که روش المان محدود کلاسيک، بوش مى کند؛ مى موبود نزديک مى شوند. اختلاف معمولاً براى مسايل با بسامد بالاتر ضعيف تر عمل مى کند؛ هم چنين، بسامد پنجاهم براى سازه بدون پيش کشش

روش تحلیلی [۲۰]	المان محدود كلاسيك	المان محدود كلاسيك	المان محدود طيفي موجك	
	(۵ المان)	(۵۰۰ المان)	(۱ المان)	بسامدهای طبیعی (هرنز)
-	83/8DV	۶۳/۶۰ ۳	881/808	یکم
_	TTV/TDV	224/801	224/80.	دوم
_	490/0.1	fyf/Xfr	474/241	سوم
_	٨٢٩/١٧٠	VDT/FAS	۷۵۳/۴۷۸	چهارم
-	1034/479	1.02/218	1.02/190	پنجم
-	1941/188	١٣۶٠/٩٩٨	188./904	ششم
-	۲۵۱۰/۸۴۷	1844/441	1846/204	هفتم
-	۲۸۱۳/۸۱۲	1974/444	۱۹۸۹/۵۰۳	هشتم
-	220-1251	۲۳۰۵/۰۵۶	۲۳۰ ۴/۸۳۷	نهم
14889/421	-	10.49/21.	14889/421	پنجاهم (بدون پيشكشش)

ی تیر پیش تنیده با شرط مرزی دو سر لولا	جدول ۱- نه بسامد طبيعي اول
---	----------------------------

جدول ۲- اعتبارسنجی بسامدهای طبیعی بیبعد بهدست آمده ازروش ارایه شده در مقاله حاضر با مقاله [۱۱]

[13].0:	المان محدود طيفي موجك	
	(۱ المان)	بسامدهای طبیعی بیبعد سده
1/9۶	١/٩۶	یکم
۶/۷۱	۶/۷۱	دوم
۱۴/۵۵	۱۴/۵۵	سوم
-	۲۵/۵۱	چهارم
۳۹/۵۴	۳۹/۵۴	پنجم
-	۵۶/۶۷	ششم
_	۲ ۶/۸۱	هفتم
_	۹۹/۸۸	هشتم
_	۱۲۵/۹۶	نهم
۱۵۴/۹۰	۱۵۴/۹۰	دهم

توجه شود که این مشخصات فقط برای اعتبارسنجی در آنالیز بسامدی است. از اینجا به بعد، مشخصات ذکر شده در ابتدای بخش ۷ استفاده می شود.

شکل ۶، تاثیر نیروی محوری (کششی و فشاری) روی سه بسامد طبیعی اول سازه را نشان میدهد؛ در حالی که نیروی کششی، سبب افزایش بسامدهای طبیعی میشود، نیروی فشاری سبب کاهش آنها میشود. نیروی فشاری که بسامد طبیعی اول در آن به صفر میرسد و باعث نخستین ناپایداری دیورژانس میشود، نیروی محوری بحرانی اول N_{cr} نامیده میشود (شکل ۶ مشاهده شود). همچنین، بسامدهای طبیعی دوم و سوم در ناحیه N_{cr} × مرچنین، بسامدهای خطی تغییر میکند. این بسامدها در نیروهای محوری بحرانی بعدی نیز به صفر خواهند رسید؛ ولی اهمیت بیشتر نیروی محوری بحرانی اول، سبب بررسی آن در شکل ۶ است.



۲-۲- آنالیز زمانی گذرا

در این بخش، روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نامتناوب (با دو المان و ۵۱۲ نقطه نمونه در پنجره زمانی ۲۰۶۴/۰ ثانیه) و روش المان محدود کلاسیک (با ۵۰، ۸۰، و ۱۰۰ المان)، برای آنالیز زمانی جابجایی عرضی وسط تیر در نظر گرفته میشود. روشهای عددی تفاضل محدود، θ ویلسون، نیومارک، رانگ و کوتا و غیره برای بخش گسسته سازی زمانی در روش المان محدود کلاسیک قابل استفاده هستند که روش نیومارک به دلیل دقت بالا برای این پژوهش انتخاب شده است. مقایسه بین روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک و روش المان محدود کلاسیک، برای راستی آزمایی و نمایش برتریهای روش المان محدود

طیفی بر پایه تبدیل موجک انجام میشود. ناپایداری دیورژانس در نیروی محوری بحرانی اول *N*cr در شکل ۷ نشان داده شده است که در روش المان محدود کلاسیک، با افزایش تعداد المانها، پاسخها به نتیجههای بهدست آمده از روشهای المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک نزدیک میشوند.

همچنین، جابجایی عرضی وسط تیر تحت نیروی کششی ۲۰ کیلونیوتن در شکل ۸ نشان داده شده است. در شکل ۹، بخشی از شکل ۸ بزرگنمایی شده است. دقت بالا به ازای تعداد المانهای کمتر این روش نسبت به روش المان محدود کلاسیک، در این شکل نمایانتر است. هرچه نیروی کششی افزایش یابد، سختی سازه افزایش مییابد؛ درنتیجه اندازه پاسخ دینامیکی تیر کاهش مییابد. مقایسه بیشترین دامنه -پاسخهای شکلهای ۲ و ۸ نشاندهنده همین واقعیت هستند.

۸- نتیجهگیری

در این پژوهش، تیر تیموشنکوی پیشتنیده با روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک برای آنالیز در حوزههای زمان و بسامد فرمول بندی شد. مقایسه با روش المان محدود کلاسیک با انگیزه راستیآزمایی و بزرگنمایی برتریهای روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک انجام شد. مقایسه با روش دیگر، نشان داد که میتواند جایگزین مناسبی مقایسه با روش دیگر، نشان داد که میتواند جایگزین مناسبی برای روش المان محدود کلاسیک باشد. تعداد المانهای بسیار کم، سرعت و دقت بالا در محاسبه پاسخها از ویژگی-های روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک است.

بیان شد که در حوزه بسامد، ویژگیهای بسامدی موج مانند بسامدهای طبیعی، عدد موج و غیره از روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک تا کسر معلومی از بسامد نایکوییست قابل استخراج است. اندازهی Δ روی بسامد نایکوییست تاثیرگذار است؛ بنابراین، انتخاب اندازه Δ در آنالیز بسامدی این روش اهمیت ویژهای دارد.

پایداری سازه و تاثیر اندازه نیروی محوری روی بسامدهای طبیعی و پاسخها نیز بهدست آمد. حلهای عددی نشان داد که نیروی کششی محوری، رابطه مستقیم با سختی سازه و بسامدهای طبیعی دارد؛ همچنین، رابطهی وارونی با

دامنه پاسخهای دینامیکی دارد؛ در حالی که نیروی فشاری محوری، رابطهی وارون با سختی سازه و بسامدهای طبیعی دارد. این نتیجهها و پارامترها از روشهای المان محدود کلاسیک و طیفی بر پایه تبدیل موجک بر پایه تبدیل موجک بهدست آمد، با این تفاوت که دقت روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک، بسیار بیشتر و تعداد المانها کمتر بود.





۹- فهرست نمادها

-۱- نمادهای لاتین	
A	(m^2) سطح مقطع
E	مدول یانگ (Pa)
f(x,t)	نیروی برانگیزش خارجی (N)
$F(x, \tau)$	تبدیل مقیاس نیروی برانگیزش خارجی (N)
$\{\widehat{F}^e\}$	بردار نیروهای گرهی
f_{nyq}	بسامد نایکوییست (Hz)
6	مدول برشی (Pa)
	گشتاور اینرسی سطح مقطع (m ⁴)
$[\widehat{K}^{e}]$	ماتریس سختی دینامیکی یک المان
k	عدد موج (rad/m)
1	طول تیر (m)
L ^e	طول المان (m)
M(x,t)	گشتاور خمشی (Nm)
$\mathcal{M}(x,\tau)$	تبدیل مقیاس گشتاور خمشی (Nm)
N,	نیروی کششی محوری ثابت (N)
٨	درجهي موجك داوبچيز
N _{cr}	نیروی محوری بحرانی اول (N)
r	تعداد نقاط به کار رفته در تبدیل مقیاس
Q(x,t)	نیروی برشی (N)
$Q(x, \tau)$	تبدیل مقیاس نیروی برشی (N)
	زمان (s)
$\{\hat{u}^e\}$	بردار جابهجایی گرهی
w(x,t)	جابه جایی عرضی (m)
$W(x,\tau)$	تبدیل مقیاس جابهجایی عرضی (m)
2	مختصه مکان (m)

۹–۲– نمادهای یونانی

<i>i</i>	مقدارهای ویژه ماتریس ضریبهای ارتباط
ιγ	درجه یکم حاصل از روش نامتناوب (rad/s)
iλ	مقدارهای ویژه ماتریس ضریبهای ارتباط
	درجه یکم حاصل از روش متناوب (rad/s)
$\theta(x,t)$	جابەجايى چرخشى (rad)
κ	فاكتور تصحيح سطح مقطع
ρ	چگالی جرمی (kg/m ³)
$\varphi_{m,\mathcal{H}}(t)$	تابع مقیاس داوبچیز در هر مقیاس دلخواه m
ω	بسامد نمونه برداری (rad/s)

- [10] Jun L, Hongxing H,Rongying S (2008), Dynamic stiffness analysis for free vibrations of axially loaded laminated composite beams. Compos Struct 84: 87-98.
- [11] Lee U, Kim J, Oh H (2004) Spectral analysis for the transverse vibration of an axiallymoving Timoshenko beam. J Sound Vib 271: 685-703.
- [12] Lee U, Jang I (2010) Spectral element model for axially loaded bending–shear–torsion coupled composite Timoshenko beams. Compos Struct 92: 2860-2870.
- [13] Chen W (2011) Bending vibration of axially loaded Timoshenko beams with locally distributed Kelvin–Voigt damping. J Sound Vib 330: 3040-3056.
- [14] Mitra M, Gopalakrishnan S (2005)Spectrally formulated wavelet finite element for wave propagation and impact force identification in connected 1-D waveguides. Int J Solids Struct 42: 4695-4721.
- [15] Mitra M,Gopalakrishnan S (2006) Extraction of wave characteristics from wavelet-based spectral finite element formulation. Mech Syst Signal Pr 20: 2046–2079.
- [16] Mitra M, Gopalakrishnan S (2006) Wavelet based spectral finite element for analysis of coupled wave propagation in higher order composite beams. Compos Struct 73: 263–277.
- [17] Mokhtari A, Mirdamadi H.R, Ghayour M, Sarvestan V (2016) Time/wave domain analysis for axially moving pre-stressed nanobeam by waveletbased spectral element method. Int J Mech Sci 105: 58-69.
- [18] Beylkin G (1992) On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. SIAM J Numer Anal 6(6): 1716-1740.
- [19] Gopalakrishnan S, Mitra M (2010) Wavelet methods for dynamical problems, Taylor & Francis Group.
- [20] Blevins R.D (1979) Formulas for natural frequencies and mode shape. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

$$\operatorname{rad}$$
تىدىل مقىاس جايەجايى جرخشى ($\Theta(x, \tau)$

ماتریسهای ضریبهای ارتباط درجه اول و
$$\Lambda^1$$
 و Λ^2 دوم حاصل از روش متناوب

(1

و
$$\Omega^1_{j-\mathcal{H}}$$
 و $\Omega^1_{j-\mathcal{H}}$ ضریبهای ارتباط موجک داوبچیز $\Omega^2_{j-\mathcal{H}}$

- [1] Bokaian A (1988) Natural frequencies of beams under compressive axial loads. J Sound Vib 126(1): 49-65.
- [2] Bokaian A (1990) Natural frequencies of beams under tensile axial loads. J Sound Vib 142(3): 481-498.
- [3] Yokayama T (1990) Vibrations of a hanging Timoshenko beam under gravity. J Sound Vib 141(2): 245-258.
- [4] Mohammad Hashemi S, Richard Marc J (2000)Free vibrational analysis of axially loaded bendingtorsion coupled beams: a dynamic finite element. Comput Struct 77: 711-724.
- [5] Naguleswaran S (2004) Transverse vibration of an uniform Euler–Bernoulli beam under linearly varying axial force. J Sound Vib 275: 47-57.
- [6] Kavyanpoor M, Islaminejhad V, Malekzadeh K (2012) Effect of axial tensile force on the free vibration of Euler-Bernoulli beam. Iranian Society of Acoustics and Vibration 2. (In Persion)
- [7] Svensson I (2002) Dynamic response of constrained axially loaded beam. J Sound Vib 252(4): 739-749.
- [8] Mei C, Karpenko Y, Moody S, Allen D (2006) Analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked Timoshenko beams. J Sound Vib 291: 1041-1060.
- [9] Viola E, Ricci P, Aliabadi M.H (2007)Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method. J Sound Vib 304: 124-153.