



## بررسی انتقال حرارت جابجایی اجباری نانوسیال آب-مس روی یک گوه دما ثابت با استفاده از معادلات لایه مرزی

افراسیاب رئیسی<sup>۱\*</sup> و عباس کسایی پور<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۵/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۲۹

### چکیده

در این مقاله، انتقال حرارت جابجایی اجباری آرام ناشی از حرکت نانوسیال آب-مس روی یک گوه به روش عددی بررسی شده است. برای این منظور، معادلات مومنتوم و انرژی با تقریب لایه مرزی ساده شده‌اند و سپس با معرفی پارامتر تشابهی مناسب معادلات با مشتق جزئی به معادلات دیفرانسیل با مشتق معمولی تبدیل شده‌اند و در نهایت، به روش عددی کلر-باکس و اختلاف محدود به صورت ضمنی حل شده‌اند. اثر درصد حجمی نانوذرات و زاویه گوه روی میدان جریان، ضریب اصطکاک و میزان انتقال حرارت بررسی شده است. نتایج عددی برای پروفیل‌های بی‌بعد سرعت و دما، ضریب اصطکاک محلی و نوسلت محلی بدست آمده‌اند. با افزودن نانوذرات، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی کاهش و ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش یافته است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که افزودن نانوذرات، ضریب اصطکاک و نوسلت را افزایش می‌دهد و افزایش زاویه گوه نیز، همین رفتار را روی پارامترهای مورد نظر دارد.

**کلمات کلیدی:** لایه مرزی؛ حل تشابهی؛ نانوسیال؛ گوه؛ نوسلت.

## Forced Convective Heat Transfer of Cu-Water Nanofluid over a Constant Surface Temperature Wedge

A. Raisi<sup>1</sup>, A. Kasaeipoor<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrekord Univ., Shahrekord, Iran.

<sup>2</sup> Ph.D. Stu., Mech. Eng., University of Isfahan, Isfahan, Iran.

### Abstract

In this paper, the forced convective heat transfer of cu-water nanofluid over a wedge is investigated numerically. It is assumed that the flow of nanofluid is two-dimensional, laminar and incompressible. The boundary layer approximations are used to simplify the equations of momentum and energy. For solving the differential equations of momentum and energy, the similarity solution and the numerical Keller-Box method have been used. The effects of volume fraction of nanoparticles and wedge angle on the flow field and heat transfer rate are investigated. Numerical results for the dimensionless velocity and temperature profiles, the local friction coefficient and local Nusselt number are obtained. With the addition of copper nanoparticles, the hydrodynamic boundary layer thickness decreases and the thermal boundary layer thickness increased. The results indicate that the addition of nanoparticles increases the friction factor and Nusselt number. Also, increasing the wedge angle has the same effect on the friction factor and Nusselt number.

**Keywords:** Boundary Layer; Similarity Solutions; Nanofluid; Edge; Solid Volume Fraction; Nusselt.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۸۲۲۲۲۴۴۳۵؛ فکس: ۰۳۸۲۲۲۲۴۴۳۵

آدرس پست الکترونیک: [raisi@eng.sku.ac.ir](mailto:raisi@eng.sku.ac.ir)

## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تئوری لایه مرزی خیلی سریع کارآیی خود را در شاخه‌های مختلف علم مکانیک سیالات و بویژه هوانوردی نشان داده است [۱-۳]. در حقیقت می‌توان ادعا کرد که موفقیت‌های چشمگیر علم هوانوردی در اوایل قرن بیستم و قبل از اختراع کامپیوتر، بدون استفاده از این تئوری هرگز امکان‌پذیر نبود. با کمک این تئوری، برای حل بسیاری از مسائل نیازی نیست که معادلات بقا بطور کامل حل شوند [۴]. نتایج حاصل از حل این معادلات تقریباً در تمامی موارد با نتایج تجربی، هماهنگی بسیار خوبی نشان دادند؛ به نحوی که این تئوری بسرعت از طرف جامعه مهندسی، مورد تایید قرار گرفت. ساکبادیس [۵]، برای اولین بار جریان لایه مرزی روی یک صفحه جامد در حال حرکت با سرعت ثابت را بررسی کرد. همچنین آیدین و کایا [۶]، جریان عبوری از یک صفحه افقی نفوذپذیر را مورد بررسی قرار دادند. مقاله ارائه شده توسط استینروک [۷]، در مورد جریان لایه مرزی جابجایی توأم عبوری از یک صفحه سرد افقی است. کایس [۸]، جریان عبوری سیال خالص از روی یک گوه دما ثابت را بررسی کرد. نتایج نشان داد، با افزایش زاویه گوه، عدد نوسلت افزایش می‌یابد.

افزایش انتقال حرارت و راندمان در صنایع، همواره مورد توجه مهندسان و طراحان بوده است. سیالاتی مانند آب، روغن و اتیلن گلیکول، نقش مهمی در گرمایش و سرمایش فرآیندهای صنعتی دارند. خواص ضعیف انتقال حرارت این سیالات، مانع بزرگی در افزایش انتقال حرارت است. از سوی دیگر، هدایت حرارتی برخی از جامدات نظیر فلزات، چند صد برابر مایعات متداول حامل انرژی است [۹-۱۱]؛ بنابراین یکی از روش‌های افزایش انتقال حرارت سیالات متداول، پخش ذرات فلزی و یا غیرفلزی در سیالات مینا است که هدایت حرارتی بالاتری نسبت به سیال مینا دارند [۱۲-۱۵]. این ایده اولین بار توسط ماکسول [۱۶] بیان شد؛ اما ذراتی که ماکسول مورد استفاده قرار داد درشت بودند و مشکلاتی نظیر، افزایش بسیار زیاد در افت فشار و انسداد و گرفتگی لوله‌ها ایجاد کردند. با پیشرفت در تکنولوژی نانو، چوی [۱۷] استفاده از نانوذرات را برای معلق‌سازی درون سیال پیشنهاد کرد که سیال تولید شده را نانوسیال نامید و مشکلاتی را

نداشت که قبلاً به وجود آمده بود. بر این اساس، نانوسیال بصورت سیالات متداولی که ذرات معلق در اندازه نانومتری دارند، تعریف می‌شود. در سال ۱۹۹۳، هدایت حرارتی موثر نانوسیال شامل نانوذرات  $Al_2O_3$  در آب، توسط ماسودا و همکاران [۱۸] بررسی شد. نتایج بدست آمده نشان از افزایش هدایت حرارتی، با استفاده از درصد حجمی نسبتاً کم نانو ذرات داشت. بررسی افزایش انتقال حرارت جابه‌جایی در نانوسیالات، توسط پک و چو [۱۹] انجام شد. افزایش تقریباً ۳۰ درصدی انتقال حرارت باعث شد تا محققان دیگری نیز به این موضوع علاقه نشان دهند. ایشاک و همکاران، انتقال حرارت جابجایی توأم در جریان عمود بر یک صفحه تخت عمودی در حال کشش را در حضور میدان مغناطیسی بررسی کردند [۲۰ و ۲۱]. آنها در تحقیقات خود، شرایط مرزی حرارتی مختلفی را روی صفحه لحاظ کردند و با استفاده از تقریب لایه مرزی، معادلات مومنتوم و انرژی را ساده کردند و با به‌کارگیری روش حل تشابهی، معادلات ساده شده را حل کردند. رانا و بارگاوا، انتقال حرارت توأم چند نوع نانوسیال را روی صفحات تخت عمودی و افقی تحت شرایط مرزی مختلف با استفاده از حل تشابهی بررسی کردند و دریافتند که افزایش کسر حجمی نانوذرات، باعث افزایش نرخ انتقال حرارت و ضریب اصطکاک می‌شود [۲۲ و ۲۳]؛ همچنین مهدی [۲۴]، انتقال حرارت جابجایی توأم غیردائم لایه مرزی نانوسیال در یک ورق انبساطی را بررسی کرد.

در معادلات لایه مرزی، پارامترهای اصلی عبارتند از؛ پروفیل سرعت، پروفیل دما، ضریب اصطکاک و نوسلت محلی که بعد از حل معادلات بدست می‌آیند.

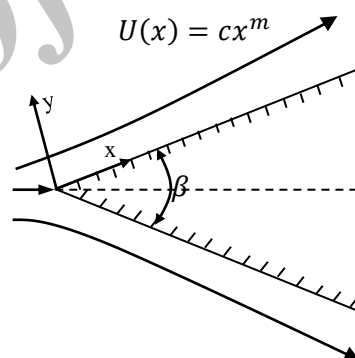
با توجه به تحقیقات انجام شده مشاهده می‌شود که علی‌رغم بررسی حل عددی لایه مرزی روی جریان عبوری از گوه، تحلیل عددی لایه مرزی روی جریان نانوسیال عبوری از گوه و بررسی اثر آن با توجه به تغییر زاویه گوه بررسی نشده است. به همین منظور، در این مقاله، حل عددی جریان نانوسیال آب-مس عبوری از یک گوه با استفاده از معادلات لایه مرزی تراکم‌ناپذیر لزج، مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله، تاثیر پارامتر زاویه گوه و درصد حجمی نانو ذرات بر ضریب اصطکاک سطحی، عدد نوسلت محلی و پروفیل‌های سرعت و دما بررسی شده است.

## ۲- تعریف مسأله

در مسأله حاضر مطابق شکل ۱ جریان دوبعدی، لزج، دائمی و تراکم‌ناپذیر نانوسیال آب - مس روی یک گوه در نظر گرفته می‌شود. دیوارهای گوه مورد نظر در دمای ثابت و یکنواخت  $T_w$  قرار دارند که از دمای سیال پیرامونش  $T_\infty$  بالاتر است. سرعت جریان آزاد (خارج از لایه مرزی) از رابطه  $U(x) = cx^m$  تبعیت می‌کند که در این رابطه پارامترهای  $c$  و  $m$  مقادیر ثابتی هستند و مقدار ثابت  $m$  بر حسب زاویه گوه از رابطه (۱) بدست می‌آید.

$$m = \frac{\beta}{2 - \frac{\beta}{\pi}} \quad (1)$$

هدف این تحقیق، تغییر زاویه گوه و درصد کسر حجمی نانوذرات و بررسی اثر این تغییرات بر روی پارامترهایی از قبیل، پروفیل سرعت، پروفیل دما، ضریب اصطکاک محلی و عدد نوسلت محلی می‌باشد.



شکل ۱- شماتیک مسأله

با استفاده از تقریب لایه مرزی برای جریان دوبعدی، لزج، دائمی و تراکم‌ناپذیر نانوسیال آب - مس معادلات حاکم بدست می‌آیند.  
الف) معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ب) معادله ممنتوم:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

ج) معادله انرژی:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

در این روابط  $u$  و  $v$  به ترتیب، مؤلفه‌های سرعت جریان در راستای سطح گوه (محور  $x$ ) و عمود بر سطح آن (محور  $y$ )، دمای نانوسیال،  $p$  فشار،  $\rho_{nf}$  چگالی،  $\mu_{nf}$  لزجت و  $\alpha_{nf}$  ضریب پخش حرارتی نانوسیال هستند.

با توجه به شکل (۱) شرایط مرزی مطابق رابطه (۵) می‌شوند:

$$y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w$$

$$y \rightarrow \infty \quad u = U(x) = cx^m, \quad T = T_\infty \quad (5)$$

برای بدست آوردن حل تشابهی، تابع جریان  $\psi$  و متغیر تشابهی  $\eta$  و دمای بی‌بعد  $\theta$  را به صورت رابطه (۶) تعریف می‌کنیم.

$$\eta = y \sqrt{\frac{U(x)}{\nu_f x}}$$

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu_f x U(x)} f(\eta)$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (6)$$

در این رابطه‌ها،  $\nu_f$  لزجت سینماتیکی سیال پایه و تابع جریان بی‌بعد است. با توجه به اینکه  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  و  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  روابط (۷-۸) برای مؤلفه سرعت بدست می‌آید.

$$u = U(x) f'(\eta) \quad (7)$$

$$v = -\left(\frac{m+1}{2}\right) \sqrt{\frac{\nu_f U(x)}{x}} \left(f + \frac{m-1}{m+1} \eta f'\right) \quad (8)$$

با استفاده از متغیرهای معرفی شده در رابطه (۶) و جای‌گزینی روابط (۷) و (۸) در روابط (۳) و (۴)، معادلات مومنوم و انرژی به صورت زیر به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند.

$$\frac{\nu_{nf}}{\nu_f} f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m[1 - f'^2] = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{m+1}{2} f \theta' = 0 \quad (10)$$

شرایط مرزی برای این معادلات به صورت رابطه (۱۱) است.

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f = 0, \quad \theta = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' = 1, \quad \theta = 1 \quad (11)$$

## ۳- خواص ترموفیزیکی نانوسیال

برای حل معادلات حاکم بر مسأله نیاز به خواص ترموفیزیکی نانوسیال است. چگالی، ظرفیت حرارتی و ضریب پخش

در نهایت دستگاه معادلات به روش الگوریتم ماتریس سه قطری TDMA [۲۸] حل شدند. جزئیات کامل روش کلریاکس، در مرجع [۲۹] موجود است.

برای مدل کردن هندسه مورد نظر و حل معادلات، برنامه‌ای به زبان فرترن نوشته شد. دقت محاسبات برای همگرایی  $10^{-7}$  در نظر گرفته شده است.

پس از حل عددی معادلات مومنوم و انرژی که توسط روابط (۹) و (۱۰) بیان شده‌اند، برای ضریب اصطکاک سطحی و نوسلت موضعی برحسب پارامترهای بی‌بعد، به صورت رابطه (۱۵-۱۶) بدست می‌آیند.

$$\frac{c_f}{2} \sqrt{Re_x} = \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} f''(0) \quad (15)$$

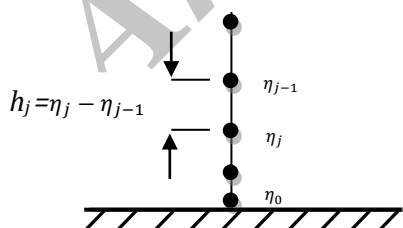
$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{k_{nf}}{k_f} \theta'(0) \quad (16)$$

در این مقاله، پارامتر نوسلت و ضریب اصطکاک به صورت  $f_m = \mu_{nf}/\mu_f f''(0)$  و  $Nu_m = -[k_{nf}/k_f] \theta'(0)$  نشان داده شده است.

#### ۵- نتایج و تحلیل

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و شرایط مرزی حاصل، با توجه به استفاده از حل تشابهی، استفاده از یک شبکه حل یک‌بعدی در راستای عرضی جریان برای محاسبه تغییرات میدان جریان کفایت می‌کند؛ لذا از یک شبکه غیریکنواخت در راستای عمود بر سطح استفاده شده است. در این شبکه‌بندی، نسبت فاصله هر دو گره متوالی ثابت است:

$$h_j = Kh_{j-1} \quad (17)$$



شکل ۲- نمائی ساده از شبکه‌بندی یک بعدی عرضی و غیریکنواخت استفاده شده

همچنین فاصله تا گره زام از رابطه (۱۸) بدست می‌آید:

$$\eta_j = h_1 \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad j = 1, 2, \dots, M \quad K > 1 \quad (18)$$

حرارتی نانوسیال بر حسب خواص سیال پایه و نانوذرات توسط رابطه (۱۲) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \rho_{nf} &= (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_s \\ (\rho c_p)_{nf} &= (1 - \varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_s \\ \alpha_{nf} &= \frac{k_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}} \end{aligned} \quad (12)$$

در این روابط  $\varphi$  درصد حجمی نانوذرات است و اندیس‌های  $f$ ،  $s$  و  $nf$  به ترتیب اشاره به سیال خالص، نانوذرات و نانوسیال دارد.

برای مدل کردن ویسکوزیته دینامیکی نانوسیال از رابطه بریکمن [۲۵] و برای ضریب هدایت حرارتی آن از مدل ماکسول استفاده شده است [۲۶].

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (13)$$

$$k_{nf} = k_f \left[ \frac{(k_s + 2k_f) - 2\varphi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \varphi(k_f - k_s)} \right] \quad (14)$$

خصوصیات ترموفیزیکی برای آب خالص و نانوسیال Cu، در دمای  $25^\circ\text{C}$ ، در جدول ۱ آورده شده است [۲۷]. عدد پرانتل برای آب خالص  $Pr=6.2$  فرض شده است.

جدول ۱- خواص ترموفیزیکی آب و نانوذرات [۲۷]

خواص فیزیکی	مس	آب خالص
$c_p$ (j/kg.k)	۳۸۵	۴۱۷۹
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	۸۹۳۳	۹۹۷/۱
$k$ (w/mk)	۴۰۱	۰/۶۱۳

ویسکوزیته دینامیکی سیال خالص  $\mu_f = 9/09452 \times 10^{-4}$  است.

#### ۴- حل عددی

در سال ۱۹۷۰ توسط فردی به نام کلر، یک روش عددی موسوم به روش کلر-باکس برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه شد. در این مقاله، رابطه‌های (۹) - (۱۰) همراه با شرایط مرزی (۱۱) با استفاده از روش کلر باکس حل شده‌اند. برای این منظور، معادلات به یک سیستم مرتبه اول کاهش داده شده‌اند و با استفاده از اختلاف محدود به معادلات جبری تبدیل شده‌اند.

معادلات جبری به روش نیوتنی به صورت طولی درآمدند و در قالب بردار ماتریسی نوشته شدند.

در ادامه جهت اعتبار سنجی کار حاضر در نانوسیال، نتایج کار حاضر با نتایج مراجع [۱۴ و ۱۵] در جدول ۳ مقایسه گردید. نتایج نشان می‌دهد، عملکرد کد کامپیوتری نوشته شده در جریان لایه مرزی نانوسیال با دقت بالایی قابل قبول است.

#### ۵-۱- بررسی پروفیل سرعت و دما

در این قسمت، به بررسی اثر نانوسیال و زاویه گوه بر پروفیل‌های سرعت و دما می‌پردازیم. در شکل ۳، پروفیل سرعت برای مقادیر مختلف درصد حجمی نانوذرات در زاویه گوه ۴۵ درجه مشاهده می‌شود. همانطور که دیده می‌شود، افزودن نانوذرات، تاثیر ناچیزی بر پروفیل سرعت می‌گذارد. افزایش کسر حجمی نانوذرات به مقدار اندکی سرعت را داخل لایه مرزی افزایش و ضخامت لایه مرزی را کاهش می‌دهد. دلیل این امر، وجود نانو ذرات مس در جریان است که سبب می‌شوند، گرادیان فشار در جریان آزاد منفی تر شود و از رشد لایه مرزی جلوگیری نماید. پروفیل سرعت  $f'(\eta)$  در شکل ۴ برای  $\phi = 0.04$  و مقادیر مختلف  $\beta/2$  نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که با فاصله گرفتن از دیوار، مقدار سرعت افزایش می‌یابد؛ همچنین با افزایش زاویه گوه،  $f'(\eta)$  (که معیاری از سرعت سیال می‌باشد) به دلیل افزایش سرعت جریان آزاد و ایجاد گرادیان فشار مطلوب، افزایش می‌یابد و به همین دلیل، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی کاهش می‌یابد.

در رابطه فوق،  $h_1$  طول اولین گام و  $K$ ، ضریب کشیدگی یا نسبت فاصله هر دو گره متوالی است. در مساله حاضر، از مقادیر زیر در حل عددی استفاده شده است:

$$h_1 = 0.0001 \quad K = 1.01$$

با در نظر گرفتن مقادیر فوق، تعداد گره‌های محاسباتی در این روش برابر ۱۷۰ است. در شکل ۲، نمایی ساده از شبکه محاسباتی استفاده شده مشاهده می‌شود.

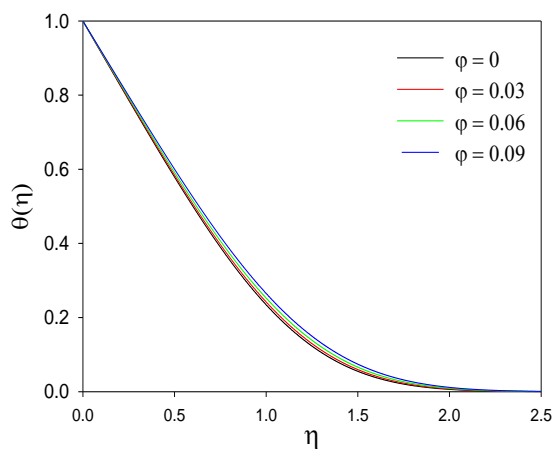
همچنین جهت بررسی صحت عملکرد کد نوشته شده، نتایج حاصل از کد کامپیوتری با نتایج مرجع [۸] برای جریان عبوری سیال خالص از روی یک گوه دما ثابت مقایسه شدند. در جدول ۲، مقدار  $\theta'(0)$  بدست آمده از کد نوشته شده با مقادیر موجود در مرجع [۸] به ازای مقادیر مختلف  $Pr$  و  $m$ ، مقایسه شده است. از مقایسه نتایج در جدول ۲ مشاهده می‌شود که نتایج بدست آمده با دقت خوبی قابل قبول است.

جدول ۲- مقایسه مقدار  $\theta'(0)$  با تغییرات  $Pr$  و  $m$ ، با نتایج موجود در مرجع [۸]

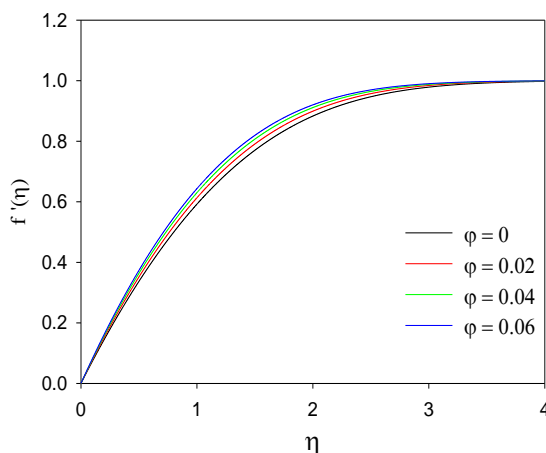
	$m=4$	$m=0.333$	$m=0$		
۰/۸۱۳	۰/۳۸۴	۰/۲۹۲	کایس [۸]	Pr=0.7	
۰/۸۱۳	۰/۳۸۴	۰/۲۹۲	برنامه حاضر		
۱/۷۳۶	۰/۷۹۲	۰/۵۸۵	کایس [۸]	Pr=5	
۱/۷۳۸	۰/۷۹۲	۰/۵۷۷	برنامه حاضر		

جدول ۳- مقایسه نتایج کار حاضر با نتایج موجود در مراجع [۱۴ و ۱۵] برای نانوسیال آب- مس با درصدهای حجمی مختلف برای نانوذرات

دیناروند [۱۵]	گروسن [۱۴]	برنامه حاضر		
۱/۷۰۷۶۴	۱/۷۰۷۶۲	۱/۷۰۷۶۱	$\phi = 0$	
۲/۵۱۲۱۶	۲/۵۱۲۱۳	۲/۵۱۲۱۱	$\phi = 0.1$	$(1/\bar{x}) \sqrt{Re} C_f$
۳/۴۶۸۲۶	۳/۴۶۸۲۹	۳/۴۶۸۳۰	$\phi = 0.2$	
۲/۱۵۱۷۷	۲/۱۵۱۷۳	۲/۱۵۱۷۱	$\phi = 0$	
۲/۶۹۶۶۴	۲/۶۹۶۶۷	۲/۶۹۶۶۸	$\phi = 0.1$	$(1/\bar{x}) Re^{-1/2} Nu$
۳/۲۶۹۳۵	۳/۲۶۹۳۸	۳/۲۶۹۳۹	$\phi = 0.2$	

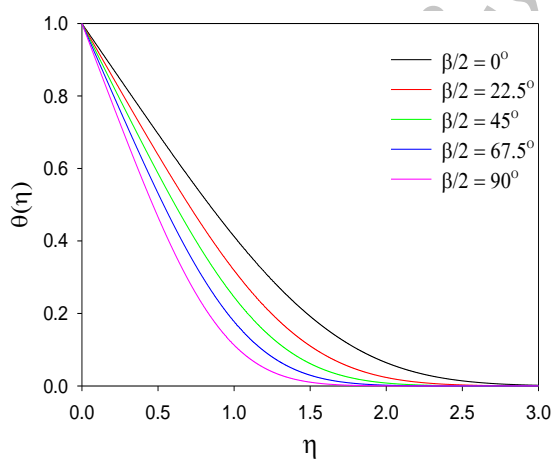


شکل ۵- پروفیل دما  $\theta(\eta)$  برای مقادیر مختلف نانوذرات در  $\beta/2 = 45$



شکل ۳- پروفیل سرعت  $f'(\eta)$  برای مقادیر مختلف نانوذرات در  $\beta/2 = 45$

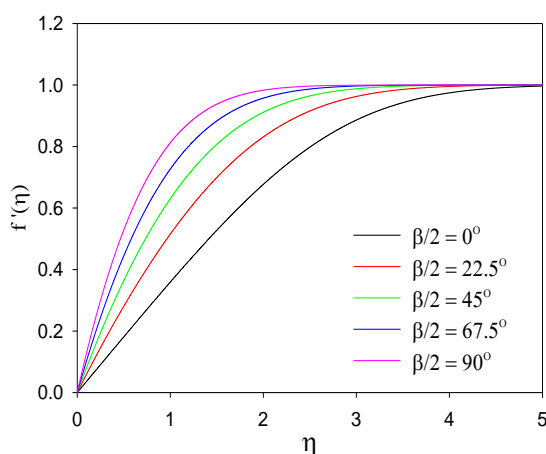
در شکل ۶، پروفیل دمای بی‌بعد  $\theta(\eta)$  برای  $\beta/2$  های مختلف در  $\varphi=0$  نشان داده شده است. به دلیل تغییرات سرعت جریان آزاد با زاویه گوه و ایجاد گرادیان فشار مطلوب، ضخامت لایه‌های مرزی با افزایش  $\beta/2$ ، کاهش می‌یابد و شیب  $\theta(\eta)$  افزایش می‌یابد و پیش‌بینی می‌شود که انتقال حرارت افزایش یابد.



شکل ۶- پروفیل دما  $\theta(\eta)$  برای مقادیر مختلف  $\beta/2$  در  $\varphi = 0.04$

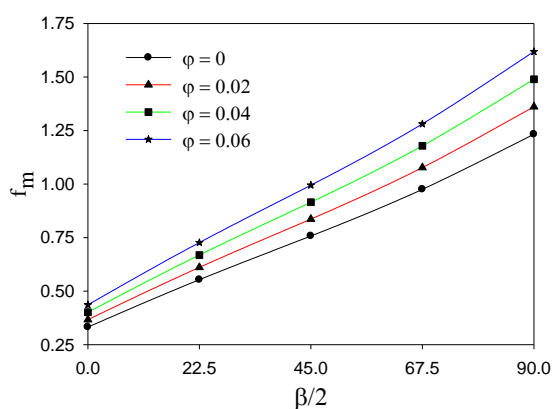
در جدول ۳، مقدار فاصله  $\eta$  از دیوار برای تشکیل لایه مرزی هیدرودینامیکی و لایه مرزی حرارتی برای سیال خالص آب و نانوسیال آب-مس در  $\varphi=0.06$  و در زوایای مختلف گوه نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که با

در شکل ۵، پروفیل دمای بی‌بعد  $\theta(\eta)$  در  $\beta/2 = 45$ ، به ازای مقادیر مختلف درصد حجمی نانو ذرات نشان داده شده است. با توجه به این شکل دیده می‌شود که با افزایش کسر حجمی نانوسیال، ضخامت لایه مرزی حرارتی اندکی افزایش می‌یابد و شرط حرارتی روی سطح بهتر به داخل جریان نانوسیال نفوذ می‌کند؛ به طوری که در یک فاصله مشخص از دیوار با افزایش کسر حجمی نانوسیال مقدار  $\theta(\eta)$  بیشتر می‌شود. این رفتار به این دلیل است که ضریب انتقال حرارت هدایتی نانوسیال با افزایش کسر حجمی نانوذرات بیشتر می‌شود و سبب می‌شود که حرارت از سطح دیوار بهتر به داخل جریان نانوسیال نفوذ کند.

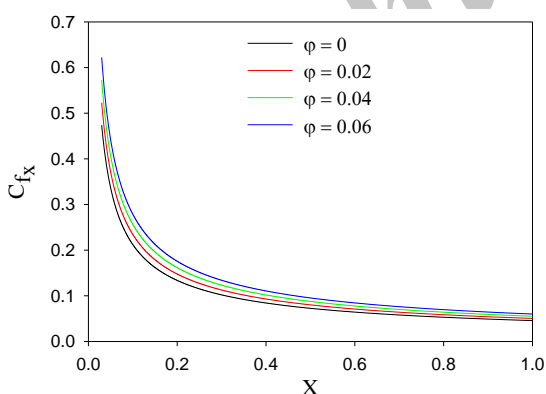


شکل ۴- پروفیل سرعت  $f'(\eta)$  برای  $\varphi = 0.04$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta/2$

به ازای مقدار ثابت  $c = 0.001$ ،  $c_f$  با استفاده از رابطه نمودار مشاهده می‌شود، با فاصله گرفتن از ابتدای صفحه به دلیل رشد لایه مرزی هیدروپدینامیکی، ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد؛ همچنین نتایج نشان می‌دهد که با افزایش درصد حجمی نانو ذرات به دلیل افزایش گرادیان سرعت روی سطح ( $f''(0)$ ) ناشی از کاهش ضخامت لایه مرزی هیدروپدینامیکی و همچنین به دلیل افزایش لزجت نانوسیال، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد.



شکل ۷- تغییرات پارامتر  $f_m$  بر حسب تغییرات  $\beta/2$  برای مقادیر مختلف درصد حجمی نانو ذرات



شکل ۸- تغییرات ضریب اصطکاک سطحی  $C_{fx}$  برای مقادیر مختلف  $\phi$  در  $\beta/2=45^\circ$

در شکل ۹، تغییرات ضریب اصطکاک سطحی به ازای مقادیر مختلف زاویه گوه و  $\phi = 0.04$  بر حسب  $x$  رسم شده است. مطابق انتظار با افزایش  $x$ ، ضریب اصطکاک کاهش

افزایش زاویه گوه، ضخامت لایه‌های مرزی هیدروپدینامیکی و حرارتی به دلیل تغییرات سرعت جریان آزاد و ایجاد گرادیان فشار مطلوب کاهش می‌یابد؛ همچنین نانوسیال به دلیل اینکه ضریب انتقال حرارت هدایتی بیشتری دارد، سبب افزایش ضخامت لایه مرزی حرارتی می‌شود، ولی ضخامت لایه مرزی هیدروپدینامیکی را کاهش می‌دهد؛ همچنین مشاهده می‌شود که در همه موارد ضخامت لایه مرزی سرعت، بیشتر از ضخامت لایه مرزی حرارتی است.

جدول ۳- فاصله ( $\eta$ ) تشکیل لایه مرزی از دیوار

زاویه	سیال خالص	نانوسیال ( $\phi=0.06$ )
$\beta/2$	هیدروپدینامیکی لایه مرزی	هیدروپدینامیکی لایه مرزی
$0^\circ$	۱۰/۸۳	۵/۴۲
$45^\circ$	۸/۵۶	۴/۳۱
$90^\circ$	۶/۶	۳/۴
	حرارتی لایه مرزی	حرارتی لایه مرزی
$0^\circ$	۵/۲	۹/۶۳
$45^\circ$	۴/۰۸	۷/۶۱
$90^\circ$	۳/۲	۵/۸۸

#### ۵-۲- بررسی تغییرات ضریب اصطکاک

در این قسمت به بررسی اثر نانوسیال و زاویه گوه بر تغییرات ضریب اصطکاک می‌پردازیم.

در شکل ۷، تغییرات پارامتر  $f_m$  بر حسب زاویه گوه برای مقادیر مختلف درصد حجمی نانو ذرات نشان داده شده است. نتایج ارائه شده در این شکل نشان می‌دهد که با افزایش زاویه گوه، به دلیل کاهش ضخامت لایه مرزی هیدروپدینامیکی و افزایش گرادیان سرعت مقدار  $f_m$  افزایش می‌یابد؛ همچنین با افزایش درصد حجمی نانو ذرات به دلیل افزایش لزجت نانوسیال و کاهش ضخامت لایه مرزی هیدروپدینامیکی، مقدار  $f_m$  افزایش می‌یابد. با توجه به این شکل، همچنین پیداست که تاثیر درصد حجمی نانو ذرات روی مقدار  $f_m$  در زوایای بزرگتر چشم‌گیرتر است.

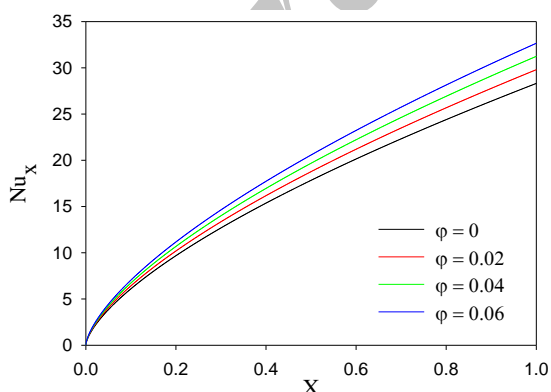
در شکل ۸، تغییرات ضریب اصطکاک سطحی  $c_f$  نسبت به  $x$  برای مقادیر مختلف درصد حجمی نانو ذرات نشان داده شده است. برای بدست آوردن تغییرات ضریب اصطکاک نسبت به  $x$ ، با توجه به رابطه  $Re = \frac{U(x)x}{\nu_f}$  و  $U(x) = cx^m$ ،

## ۵-۳- بررسی تغییرات عدد نوسلت

در این قسمت، به بررسی اثر کسر حجمی نانوذرات و زاویه گوه بر تغییرات عدد نوسلت می‌پردازیم.

در شکل ۱۰ تغییرات نوسلت محلی به ازای زاویه گوه  $\beta/2 = \frac{\pi}{4}$  و مقادیر مختلف درصد حجمی نانوذرات بر حسب  $X$  نشان داده شده‌است. با وجود اینکه افزودن نانوذرات به سیال پایه، ضخامت لایه مرزی حرارتی را اندکی افزایش می‌دهد و این سبب کاهش گرادیان دما روی سطح گوشه می‌شود، اما از طرف دیگر، افزودن نانوذرات به سیال پایه، باعث افزایش هدایت حرارتی می‌شود. نتیجه این دو اثر متقابل این است که افزودن نانوذرات به سیال پایه، ضریب عدد نوسلت موضعی را افزایش می‌دهد؛ همچنین با توجه به رابطه (۱۶)، با افزایش  $X$  به دلیل افزایش عدد رینولدز، عدد نوسلت افزایش یافته‌است.

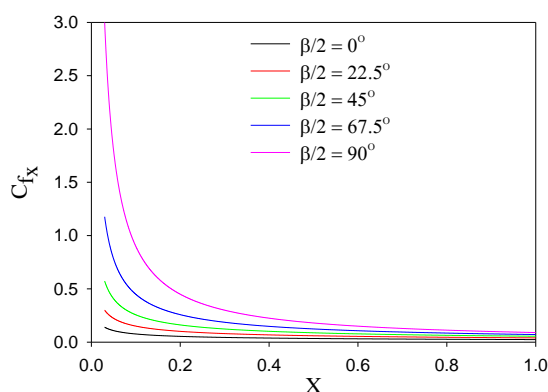
در شکل ۱۱، تغییرات عدد نوسلت محلی بر حسب  $X$  به ازای  $\varphi = 0.04$  و برای مقادیر مختلف زاویه گوه نشان داده شده‌است. با توجه به این شکل آن چه حائز اهمیت است، این است که در  $X$ های کوچک با افزایش زاویه گوه عدد نوسلت کمتر می‌شود، زیرا در  $X$ های کوچک با افزایش زاویه گوه، سرعت جریان آزاد کاهش می‌یابد؛ همچنین از این شکل پیداست که به ازای  $\beta/2 = \frac{\pi}{2}$  (جریان سکون)، عدد نوسلت رابطه‌ای خطی با  $X$  دارد که با توجه به رابطه ارائه شده برای عدد نوسلت، این موضوع نشان از ثابت بودن ضریب انتقال حرارت جابجایی دارد.



شکل ۱۰- تغییرات نوسلت موضعی  $Nu_x$  برای مقادیر مختلف  $\beta/2=45^\circ$  در  $\phi$

می‌یابد و با افزایش زاویه گوه به دلیل کاهش ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد.

در جدول ۴، مقدار پارامتر  $f_m$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta/2$  برای درصد حجمی متفاوت نانو ذرات ارائه شده‌است. در این جدول  $\Delta\varphi\%$ ، بیانگر درصد افزایش مقدار  $f_m$  در اثر افزایش کسر حجمی نانوذرات بوده، در هر زاویه‌ای به صورت  $\Delta\varphi\% = [(f_{m,nf} - f_{m,f})/f_{m,f}] \times 100$  تعریف شده‌است.



شکل ۹- تغییرات ضریب اصطکاک سطحی  $C_{fx}$  برای مقادیر مختلف  $\beta/2$  در  $\varphi = 0.04$

جدول ۴- مقدار پارامتر  $f_m$  و درصد افزایش آن برای مقادیر مختلف  $\beta/2$  و درصد حجمی نانوذرات

$\beta/2$	$\varphi=0$	$\varphi=0.02$	$\varphi=0.04$	$\varphi=0.06$
$0^\circ$	۰/۳۳۲۱	۰/۳۶۶۶	۰/۴۰۱۲	۰/۴۳۶
$\Delta\varphi\%$	۰	۱۰/۳۹	۲۰/۸	۳۱/۲۹
$45^\circ$	۰/۷۵۷۴	۰/۸۳۶۴	۰/۹۱۵۲	۰/۹۹۴۷
$\Delta\varphi\%$	۰	۱۰/۴۳	۲۰/۸۳	۳۱/۳۳
$90^\circ$	۱/۳۳۲۶	۱/۳۶۱	۱/۴۸۹۳	۱/۶۱۸۷
$\Delta\varphi\%$	۰	۱۰/۴۲	۲۰/۸۳	۳۱/۳۲

نتایج این جدول نشان می‌دهد که با افزایش زاویه گوه و درصد حجمی نانوذرات، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج ارائه شده در این جدول همچنین مشهود است که در هر زاویه‌ای درصد افزایش ضریب اصطکاک نسبت به تغییرات درصد حجمی نانوذرات تقریباً ثابت است، به طوری که در هر زاویه‌ای وقتی درصد حجمی نانوذرات ۶ درصد افزایش یابد ضریب اصطکاک حدوداً ۳۱/۳ درصد افزایش می‌یابد.



نانوسیال بر انتقال حرارت با افزایش زاویه کاهش می‌یابد. تا جایی که با افزودن ۰/۰۲ درصد نانوذرات مس به آب خالص، در زاویه ۹۰ درجه، فقط ۰/۵۹ درصد نوسلت افزایش می‌یابد.

جدول ۵- مقدار پارامتر  $Nu_m$  و درصد افزایش آن برای مقادیر مختلف  $\beta/2$  و درصد حجمی نانوذرات

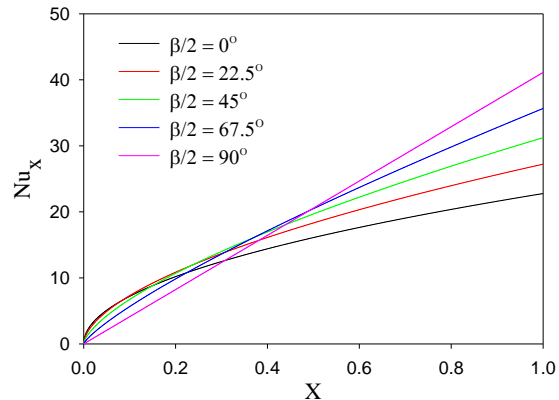
$\beta/2$	$\varphi=0$	$\varphi=0/02$	$\varphi=0/04$	$\varphi=0/06$
۰°	۰/۶۲	۰/۶۵۴۴	۰/۶۸۷۸	۰/۷۲۰۶
% $\Delta\varphi$	۰	۱/۶	۳/۲۳	۴/۹۲
۴۵°	۰/۸۵۵	۰/۸۹۹۹	۰/۹۴۳۵	۰/۹۸۶۲
% $\Delta\varphi$	۰	۰/۷۸	۱/۶۴	۲/۶۱
۹۰°	۱/۱۲۸	۱/۱۸۵۷	۱/۲۴۱۸	۱/۲۹۶۷
% $\Delta\varphi$	۰	۰/۵۹	۱/۲۹	۲/۰۷

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله جریان نانوسیال تراکم‌ناپذیر آرام و دائم عبوری از یک گوه با استفاده از معادلات لایه مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. مسئله به صورت عددی و با استفاده از طرح تفاضل محدود ضمنی، به روش کلرباکس حل شده است. برای مقادیر مختلف پارامتر  $\varphi$  و  $\beta/2$  در این مقاله نشان داده شده است که چگونه پروفیل سرعت، پروفیل دما، ضریب اصطکاک سطحی و عدد نوسلت محلی، تحت تاثیر این پارامترها قراردارند. نتایجی که از این مقاله می‌توان گرفت، به صورت زیر است:

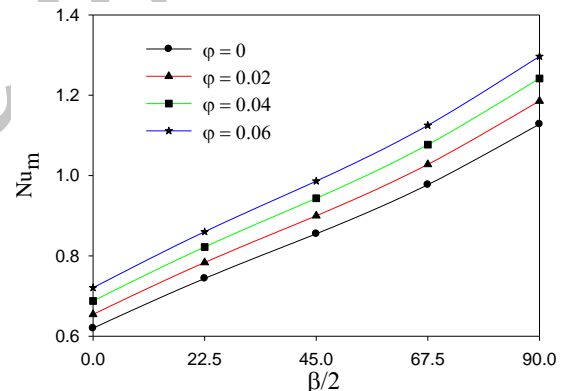
افزودن نانوذرات مس به سیال پایه آب، باعث کاهش ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی و افزایش ویسکوزیته نانوسیال می‌شود؛ بنابراین به دلیل این دو اثر هم‌سو، افزودن نانوذرات به سیال پایه، باعث افزایش ضریب اصطکاک موضعی و متوسط می‌شود.

افزودن نانوذرات به سیال پایه، سبب افزایش ضریب نفوذ حرارتی نانوسیال می‌شود؛ بنابراین با افزایش کسر حجمی نانوذرات، لایه مرزی حرارتی اندکی افزایش می‌یابد و این سبب می‌شود که گرادیان دما روی سطح کاهش یابد. از طرف دیگر، افزودن نانوذرات به سیال پایه، سبب افزایش ضریب هدایت حرارتی می‌شود. افزایش ضخامت لایه مرزی حرارتی، سبب کاهش نرخ انتقال حرارت و افزایش ضریب هدایت حرارتی، سبب افزایش نرخ انتقال حرارت می‌شود.



شکل ۱۱- تغییرات نوسلت موضعی  $Nu_x$  برای مقادیر مختلف  $\beta/2$  در  $\varphi = 0.04$

در شکل ۱۲، تغییرات پارامتر  $Nu_m$  به ازای مقادیر مختلف زاویه گوشه و درصد حجمی نانوذرات نشان داده شده است. افزایش زاویه گوه و افزایش درصد حجمی نانوذرات، هر دو سبب افزایش این پارامتر شده است.



شکل ۱۲- تغییرات نوسلت  $\frac{K_{nt}}{K_f} \theta'(0)$  با تغییر  $\Phi$  و در  $\beta/2=45^\circ$  برای نانوذرات مختلف

در جدول ۵، مقدار پارامتر  $Nu_m$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta/2$  برای درصد حجمی متفاوت نانوذرات ارائه شده است. در این جدول % $\Delta\varphi$ ، بیانگر درصد افزایش مقدار  $Nu_m$  در اثر افزایش کسر حجمی نانوذرات بوده، در هر زاویه‌ای به صورت  $\Delta\varphi\% = [(Nu_{m,nf} - Nu_{m,f}) / Nu_{m,f}] \times 100$  تعریف شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد با افزایش زاویه گوشه، نوسلت متوسط افزایش می‌یابد؛ همچنین افزایش نانوذرات، سبب افزایش انتقال حرارت می‌شود. این اثر افزایشی

نانوسیال	$nf$
نانوذره	$s$
مشخصه جریان آزاد	$\infty$
دیوار	$w$

## ۸- مراجع

- [۱] آقاجفی س، سعیدی ع (۱۳۹۲) حل عددی اثر میدان مغناطیسی یکنواخت بر انتقال حرارت جابجایی آزاد از روی صفحه‌ای عمودی. مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۷۵-۶۵: ۳(۲).
- [۲] [□] تظهیری غر، پوریوسفی غح، دوست محمودی عر، میرزایی م (۱۳۹۲) بررسی تجربی اثر مانع دی الکتریک در سرعت القایی در لایه مرزی هوای ساکن با مقایسه باد کرونا پلاسما DBD جریان مستقیم و متناوب. مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۱۰-۱۰۳: ۳(۴).
- [3] فلاح پور ن، حقیری ع، مانی م، کلانتری م ح (۱۳۹۴) بررسی تجربی لایه مرزی روی یک ایرفویل مافوق بحرانی نوسانی (پیچ) در جریان تراکم پذیر با استفاده از سنسورهای فیلم داغ. مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۸۴-۱۷۳: ۵(۳).
- [4] White FM (1993) Fluid mechanics. 3rd edn. McGraw-Hill, New York.
- [5] Sakinda BC (1961) Boundary layer behavior on continuous solid surface: II. Boundary layer behavior on continuous flat surface. AIChE J 7 (1): 221-225.
- [6] Aydin O, Kaya A (2005) Laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate. Applied Mathematics and Computation A 161: 229-240.
- [7] Steinrück H (2001) A review of the mixed convection boundary-layer flow over a horizontal cooled plate. GAMM Mitteilung Heft 2: 127-158.
- [8] Kays WM, Crawford ME (1993) Convective heat and mass transfer. 3rd edn. McGraw-Hill, New York.
- [۹] ضیائی‌راد م، کسای پور ع (۱۳۹۳) مطالعه عددی حل تشابهی جریان لایه مرزی جابجایی ترکیبی برای نانوسیال آب- مس از روی یک صفحه افقی. مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک تربیت مدرس شماره‌ها ۱۹۸-۱۹۰: ۱۴(۱۲).
- [10] Khan WA, Culham R, Haq RU (2015) Heat transfer analysis of MHD water functionalized carbon nanotube flow over a static/moving wedge. J Nanomater 2015(112): 1-13.
- [11] Rahman MM, Rosca AV, Pop I (2015) Boundary layer flow of a nanofluid past a permeable exponentially shrinking surface with convective

میانگین این دو اثر متقابل سبب افزایش نرخ انتقال حرارت شده است. افزایش زاویه‌ی گوشه، سبب افزایش سرعت جریان آزاد و کاهش ضخامت لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی می‌شود. از این رو با افزایش زاویه گوشه در بازه  $0 \leq \frac{\beta}{2} \leq 90^\circ$ ، ضریب اصطکاک و عدد نوسلت هر دو افزایش می‌یابند.

## ۷- فهرست علائم

گرمای ویژه، J/kg K	$c_p$
تابع جریان بدون بعد	$f$
شتاب جاذبه زمین، $m/s^2$	$g$
ضریب هدایت حرارتی، W/mK	$k$
فشار، Pa	$p$
عدد پراتنل	$Pr$
عدد رینولدز	$Re$
دمای، K	$T$
مؤلفه‌های سرعت در جهت x و y، m/s	$u, v$
سرعت جریان آزاد، m/s	$U$
مختصات کارتزین، m	$x, y$
تابع جریان بی‌بعد	$f$
ضریب اصطکاک محلی	$c_f$
عدد بی‌بعد نوسلت	$Nu$
ضریب انتقال حرارت جابجایی، W/m <sup>2</sup> K	$h$
حروف یونانی	
ضریب پخش حرارتی	$\alpha$
زاویه گوه	$\beta$
دمای بدون بعد، $\theta = \frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}$	$\theta$
لزجت دینامیکی، Pa.s	$\mu$
لزجت سینماتیکی، m <sup>2</sup> /s	$\nu$
درصد حجمی نانوذرات	$\varphi$
چگالی، kg/m <sup>3</sup>	$\rho$
پارامتر تشابه، $\eta = y \sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}}$	$\eta$
تابع جریان، m <sup>2</sup> /s	$\psi$
سیال خالص	$f$

زیر نویس‌ها

- stretching vertical surface with constant wall temperature. *Int J Heat Mass Tran* 53: 5330-5334.
- [21] Ishak A, Nazar R, Bachok N, Pop I (2010) MHD mixed convection flow adjacent to a vertical plate with prescribed surface temperature. *Int J Heat Mass Tran* 53: 4506-4510.
- [22] Rana P, Bhargava R (2011) Numerical study of heat transfer enhancement in mixed convection flow along a vertical plate with heat source/sink utilizing nanofluids. *Comm Nonlinear Sci Numer Simulat* 16(11): 4318-4334.
- [23] Rana P, Bhargava R (2012) Flow and heat transfer of a nanofluid over a nonlinearly stretching sheet: A numerical study. *Comm Nonlinear Sci Numer Simulat* 17: 212-226.
- [24] Mahdy A (2012) Unsteady mixed convection boundary layer flow and heat transfer of nanofluids due to stretching sheet. *Nucl Eng Des* 249: 248-255.
- [25] Brinkman HC, (1952) The viscosity of concentrated suspensions and solution, *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 20, No. 4, pp. 571-581.
- [26] Maxwell JC (1873) *A treatise on electricity and magnetism*, Oxford University Press, Cambridge, UK, II: 54.
- [27] Abu-Nada E, Masoud Z, Hijazi A (2008) Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids. *Int Commun Heat Mass* 35(5): 657-665.
- [28] Hoffmann KA, Chiang ST (2000) *Computational fluid dynamics*. Wichita.
- [29] Jones DR (1973) Free convection from a semi-infinite plate inclined at a small angle. *Quart. J Mech Appl Math* 26: 77-98.
- boundary condition using Buongiorno's model. *Int J Numer Method H* 25(2): 299-319.
- [12] Hayat T, Muhammad T, Shehzad SA, Alsaedi A (2015) Similarity solution to three dimensional boundary layer flow of second grade nanofluid past a stretching surface with thermal radiation and heat source/sink. *AIP Advances* 5(1): 017107.
- [13] Farooq U, Zhao YL, Hayat T, Alsaedi A, Liao SJ (2015) Application of the HAM-based Mathematica package BVP4c on MHD Falkner-Skan flow of nano-fluid. *Comput Fluids* 111: 69-75.
- [14] Grosan T, Pop I (2011) Axisymmetric mixed convection boundary layer flow past a vertical cylinder in a nanofluid. *Int J Heat Mass Tran* 54(15): 3139-3145.
- [15] Dinarvand S, Abbassi A, Hosseini R, Pop I (2015) Homotopy analysis method for mixed convective boundary layer flow of a nanofluid over a vertical circular cylinder. *Therm Sci* 19(2): 549-561.
- [16] Maxwell JC (1873) *A treatise on electricity and magnetism*. Clarendon Press, Oxford.
- [17] Choi US (1995) Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. *ASME FED* 231: 99-103.
- [18] Masuda H, Ebata A, Teramae K, Hishinuma N (1993) Alteration of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra-fine particles. (Dispersion of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, SiO<sub>2</sub>, and TiO<sub>2</sub> Ultra-fineParticles) *Netsu Bussei* 4: 227.
- [19] Pak B, Cho YI (1998) Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. *Exp Heat Transfer* 11(2): 151-170.
- [20] Ishak A, Nazar R, Pop I (2010) MHD mixed convection boundary layer flow towards a