مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۶/ دوره ۷/ شماره ۱/ صفحه ۳۵-۵۰

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2017.947

بررسی تاثیر پارامترها بر تنش گشودگی مثلثی در ورق‌های همسانگرد محدود

محمد حسین بیاتی چالشتری[۱،*] و محمد جعفری[۲]

[۱] کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

[۲] دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۷/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۱۲/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۲/۲۹

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم سنجاقک به بهینه‌سازی پارامترهای موثر در تحلیل تنش در اطراف گشودگی مثلثی واقع در یک ورق همسانگرد محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداخته شده است. در تحلیل ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی پارامترهایی از قبیل، انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه گشودگی به ورق و نوع بارگذاری به‌عنوان پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش محسوب می‌شود. انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه چرخش گشودگی در نسبت‌های گوناگون اندازه گشودگی به ورق و اضلاع ورق بهینه شده، مقدارهای هر پارامتر بهینه به دست آمد. در مطالعه حاضر، روش به‌کار گرفته‌شده برپایه‌ی حلّ تحلیلیِ متغیّر مختلطِ موشخیلشویلی و نگاشت همنوا با فرض تنش صفحه‌ای است. ورق محدود، همسانگرد و الاستیک خطّی در نظر گرفته شده است. برای محاسبه تابع تنش مربوط به ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حدّاقل مربّعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به‌دست می‌آیند. نتایج نشان می‌دهند، با انتخاب پارامترهای بهینه می‌توان قابلیت تحمل بار سازه را افزایش داد.

کلمات کلیدی: ورق همسانگرد محدود؛ گشودگی مثلثی؛ حلّ تحلیلی؛ ضریب تمرکز تنش؛ الگوریتم سنجاقک.

Investigation of Effective Parameters on Triangular Cutout Stress in Finite Isotropic Plates

M. H. Bayati Chaleshtari [1,*], M. Jafari [2]

[1] MSc., Mech. Eng., Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

[2] Associate. Prof., Mech. Eng., Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

This paper aims at optimizing the parameters involved in stress analysis around a triangular cutout located in a finite isotropic plate under in-plane loading using optimization technique called dragonfly algorithm. In analysis of finite isotropic plate, the effective parameters on stress distribution around triangular cutouts are include cutout bluntness, cutout orientation, plate's aspect ratio, cutout size and type of loading. The cutout bluntness and cutout orientation are optimizing in various cutout sizes and plate's aspect ratio, and then the values of each optimum parameter achieved. In this study, with the assumption of plane stress conditions, analytical solution of Muskhelishvili's complex variable method and conformal mapping is utilized. The plate is considered to be finite, isotropic and linearly elastic. To calculate the stress function of a finite plate with a triangular cutouts, the stress functions in finite plane are determined by superposition of the stress function in infinite plate containing triangular cutouts with stress function in finite plate without any cutout. Using least square boundary collocation method and applying appropriate boundary conditions, unknown coefficients of stress function are obtained. Results show that by selecting the aforementioned optimum parameters, less amounts of stress could be achieved around the cutout leading to an increase in load-bearing capacity of the structure.

Keywords: Finite Isotropic Plates; Triangular Cutout; Analytical Solution; Stress Concentration Factor; Dragonfly Algorithm.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۸۴۴۰۹۳۹۲؛ فکس: ۰۲۱۵۵۶۶۶۵۷۰

آدرس پست الکترونیک: mh.bayati@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از ورق‌های محدود در ساخت سازه‌های مکانیکی، فضایی، دریایی و خودروسازی افزایش یافته است. در عین حال، در بسیاری از صنایع با ورق‌های محدود حاوی گشودگی مواجه هستند. این گشودگی‌ها در ورق‌های محدود، بیشتر برای کاهش وزن سازه و ایجاد راه‌های ورودی و خروجی در سازه ایجاد می‌شوند. تغییر هندسه ورق به دلیل وجود گشودگی، منجر به ایجاد تنش موضعی شدیدی در اطراف گشودگی می‌شود که به آن تمرکز تنش می‌گویند. تمرکز تنش، باعث کاهش استحکام، شکست‌های زودرس در سازه و تغییر شکل‌های پلاستیک در محل تمرکز تنش می‌شود. تجربه نشان داده است که بیشتر شکست‌های ایجاد شده در سازه‌های هوایی در محل بست‌ها و اتصالات سازه رخ می‌دهند که ناشی از وجود تمرکز تنش در آن نقاط است؛ بنابراین، دانستن مقادیر تمرکز تنش در دستیابی به طراحی بهینه، بسیار مهّم است. تعیین ضریب تمرکز تنش در سازه‌های گوناگون برای ناپیوستگی‌های مختلف هندسی، به طور گسترده توسط افرادی همچون هوولند[۱] و هیوود[۲]، مورد بررسی قرار گرفته است. هوولند، روابطی برای صفحات نامحدود با گشودگی دایروی و عرض محدود ارائه کرد. هیوود نیز روابطی برای تصحیح ضریب تمرکز تنش در عرض محدود با استفاده از مقادیر ضریب تمرکز تنش صفحات نامحدود استخراج کرد. هیوود این روابط را با استفاده از برآیند نیروهای تعادل برای صفحات دارای گشودگی تحت بار کششی تک‌جهته ارائه کرد که در آن تاثیر عرض محدود، به تنهایی اعمال شد. استفاده از روش متغیّر مختلط در حلّ مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته‌ی دوبعدی، اوّلین بار توسط موشخلیشویلی [۳] برای موادّ الاستیک همسانگرد ارائه شد. لخنیتسکی [۴]، روش متغیّر مختلط موشخیلشویلی را برای موادّ الاستیک غیر همسانگرد بسط داد و حلّ عمومی برای محاسبه مولفه‌های تنش و جابه‌جایی در حالت تنش صفحه‌ای به‌دست آورد. او از روش سری‌ها برای به دست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حلّ بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها با شکل‌های مختلف را در ورق نامحدود غیرهمسانگرد ارائه کرد. ساوین [۵] با استفاده از روش متغیّر مختلط، مطالعاتی در زمینه ورق‌های همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و ورق‌های ناهمسانگرد نامحدود فقط برای گشودگی بیضی شکل و دایره‌ای انجام داد. سپس حلّ ساوین برای بریدگی مثلثی، توسط دائوست و هووا [۶] بسط داده شد. به طوری که توسط آن‌ها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، علاوه بر مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین و موادّ غیر همسانگرد با در نظر گرفتن انحنای گوشه بریدگی حل شد. ابوالفتوح [۷]، رابطه واحدی برای مولفه تنش مماس بر مرز بریدگی برای هندسه‌های دایره، بیضی، مثلث و مربع در ورق نامحدود از مادّه غیر همسانگرد خاص تحت کشش بیان کرد. او توانست نقاط روی هر بریدگی با شکل خاص را به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کند. یودکادگائونکر و رائو [۸]، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق غیرهمسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با استفاده از روش گائو و بدون استفاده از جمع آثار به دست آوردند. باتیستا [۹]، تمرکز تنش اطراف گشودگی‌های چندضلعی با هندسه‌های نسبتاً پیچیده را مورد بررسی قرارداد. او از بسط روش متغیّر مختلط موشخلیشویلی [۳] و تابع نگاشت شوارتز- کریستفل استفاده کرد. لی و همکاران [۱۰]، با اعمال ضرایب تصحیح در تابع نگاشت همنوا، توانستند توزیع تنش و جابه‌جایی حول گشودگی مستطیلی شکل با ابعاد دلخواه در ورق نامحدود همسانگرد و تحت بار تک محوری را به دست آورند. رضایی پژند و جعفری [۱۱]، از روش متغیّر مختلط ساوین برای مطالعه تمرکز تنش حول گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود فلزی استفاده کردند و یک حلّ تحلیلی برای ورق‌های حاوی گشودگی‌های مختلف ارائه دادند. بنرجی و همکاران [۱۲]، با استفاده از روش عددی توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی در ورق‌های همسانگرد و اورتوتروپیک نامحدود را تحت بارگذاری عرضی مطالعه کردند. آن‌ها تأثیر ضخامت ورق و قطر گشودگی و جنس مواد را در ورق‌های اورتوتروپیک بر میزان تمرکز تنش، مورد بررسی قرار دادند. شارما و همکاران[۱۳]، در مورد ورق ناهمسانگرد نامحدود نیز به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی مثلّثی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداختند و پارامترهای زاویه‌ی بار، زاویه‌ی الیاف، جنس و انحنای گوشه گشودگی را نیز در نظر گرفتند. وو و چن [۱۴]، به منظور حلّ مسأله‌ی ورق همسانگرد محدود با تعداد و موقعیّت دلخواه از گشودگی‌های دایروی، تابع تنشی را بر اساس روش

متغیّر مختلط موشخیلشویلی و روش حدّاقل مربّعات مرزی پیشنهاد کردند. زو و همکاران [۱۵]، با استفاده از بسط سری فابر[1]و روش حدّاقل مربّعات مرزی، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی در چندلایه کامپوزیتی محدود را به‌دست آوردند. بیشتر مطالعاتی که تاکنون روی ورق‌های محدود حاوی گشودگی انجام شده است، محدود به گشودگی دایروی و بیضی‌شکل می‌شود. پن و همکاران [۱۶]، با استفاده از روش متغیّر مختلط و حدّاقل مربّعات مرزی و با اصلاح تابع تنش ارائه‌شده توسط موشخیلشویلی، به بررسی توزیع تنش ورق محدود حاوی گشودگی، تنها تحت بار کششی تک‌محوری پرداختند. آن‌ها از تابع نگاشتی استفاده کردند که توسط شارما بر اساس نگاشت شوارتز- کرستفل به‌دست‌آمده بود و یک گشودگی مثلثی و دو گشودگی مستطیلی با نسبت ابعادی۳/۲ به ۱ و ۵ به ۱را بدون در نظر گرفتن پارامتر انحنا، تحت بار کششی تک‌محوری بررسی کردند. آن‌ها همچنین پارامتر چرخش گشودگی را برای گشودگی مثلثی در زوایای بسیار خاصی بررسی کردند. جعفری و اردلانی [۱۷]، به بررسی تمرکز تنش در ورق‌های محدود فلزی دارای گشودگی‌های منظّم پرداختند. آن‌ها همانند کار پن و همکاران [۱۶]، با استفاده از روش متغیّر مختلط و حدّاقل مربّعات مرزی، تنها اثر بار تک محوری روی گشودگی‌های مختلف ایجاد شده روی ورق محدود را بررسی کردند.

شاخه دیگری از پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه سازه‌های مهندسی، مسائل مربوط به بهینه‌سازی و انتخاب مقادیر بهینه متغیّرهای طراحی حاکم بر مسأله است. از جمله تحقیقات صورت گرفته با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی را می‌توان به کار آلانسو و همکارش [۱۸] اشاره کرد. آن‌ها به بررسی استفاده از الگوریتم اجتماع ذرّات برپایه حرکت دسته پرندگان در غالب روشی مناسب برای بهینه‌سازی سازه‌های کامپوزیتی پرداختند. جعفری و روحانی [۱۹]، به تعیین پارامترهای بهینه مؤثر بر توزیع تنش ورق‌های ارتوتروپیک نامحدود دارای گشودگی شبه مثلثی با استفاده از الگوریتم ژنتیک پرداختند. آن‌ها مقادیر بهینه پارامترهای زاویه چرخش گشودگی، زاویه الیاف، زاویه بار، نرمینگی و کشیدگی گشودگی بر مقدار تنش بی‌بعد اطراف گشودگی را بررسی کردند و سپس با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک، مقادیر بهینه پارامترهای فوق برای یک ورق ارتوتروپیک نامحدود حاوی گشودگی معرفی نمودند. باربوسا و همکاران [۲۰]، به طراحی یک سازه مشبّک کامپوزیتی تحت پیچش با بررسی تأثیر بسیاری از مواد و پارامترهای هندسی روی رفتار مکانیکی بهینه‌ی سازه پرداختند. در این کار تکنیک بهینه-سازی اجتماع ذرّات برای بیشینه‌سازی ثابت پیچشی سازه، مورد استفاده قرار گرفته است. جعفری و محمودزاده [۲۱]، به بهینه‌سازی پارامترهای مؤثر بر ورق همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های چندضلعی منتظم با استفاده از الگوریتم اجتماع ذرّات پرداختند.

در این مقاله، با تکیه بر حلّ تحلیلیِ متغیّر مختلطِ موشخیلشویلی و نگاشت همنوا و بسط حلّ پن و همکاران [۱۶]، به گشودگی مثلثی واقع در مرکز ورق همسانگرد محدود سعی شده است تا برای بارگذاری درون صفحه‌ای، مقادیر بهینه پارامترهای مورد استفاده جهت دستیابی به کمترین تنش بی‌بعد معرفی شود. هدف اصلی این مقاله، بهینه‌سازی و معرفی هندسه گشودگی، تحلیل ورق‌های محدود با گشودگی مثلثی، اعمال بارهای کششی تک‌محوره، دومحوره و برشی در اطراف گشودگی مثلثی و درنهایت بررسی پارامترهای بهینه موثر هم‌چون انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق و نسبت اندازه گشودگی به ورق است که از نوآوری‌های این مقاله محسوب می‌شود و تا به حال تحلیلی جهت بهینه‌سازی پارامترهای مذکور در ورق محدود صورت نگرفته است. لازم به ذکر است که مقدار تنش بی‌بعد[2] (*D.S.*) در اطراف گشودگی مثلثی برای الگوریتم بهینه‌سازی سنجاقک به عنوان تنش بهینه در نظر گرفته شده است. تنش بی‌بعد به صورت بیشترین تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی تعریف می‌شود.

۲- حلّ تحلیلی

هدف اصلی در این مقاله، بهینه‌سازی تنش و پارامترهای موثر بر توزیع تنش ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی است. نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع

---
[1] Faber Series

[2] Dimensionless Stress

ورق، بزرگتر از ۰/۲ است، بنابراین با اطمینان می‌توان ورق را محدود در نظر گرفت. مسأله با فرض تنش صفحه‌ای و در غیاب نیروهای حجمی، مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ همچنین رفتار ورق در ناحیه الاستیک خطّی بررسی می‌شود. فرض می‌شود، گشودگی در مرکز ورق قرارگرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است؛ یعنی در مرز گشودگی $\sigma_\rho = \sigma_{\rho\theta} =$ ۰ است.

در شکل ۱ زاویه چرخش گشودگی که نحوه قرارگیری آن نسبت به محور افق است، با β نمایش داده شده است. ورق تحت بار کششی تک‌محوری، دومحوری و برش خالص قرار می‌گیرد. شکل گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، ابعاد ورق و نوع بارگذاری درون صفحه‌ای از پارامترهایی هستند که تأثیر مقدار بهینه آن‌ها بر توزیع تنش بهینه، مورد بررسی قرارگرفته است. لازم به ذکر است که در این مقاله، در بارگذاری دو محوری۲ = λ و در تک محوری ۰ = λ در نظر گرفته شده است. λ ضریب بار دو محوری نسبت بار افقی به عمودی است.

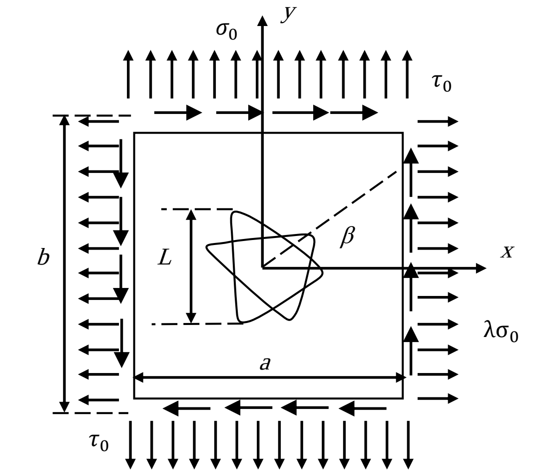
روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله، برگرفته از روش متغیّر مختلط موشخیلشویلی[۳] و نگاشت همنوا است. به‌منظور تحلیل تنش گشودگی مثلثی، ابتدا می‌بایست ورق حاوی گشودگی مثلثی در صفحه مختلط z به ورق حاوی گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحه نگاشت ζ تبدیل - شود. شکل ۲، این تبدیل را نشان می‌دهد. این عمل با استفاده از معادله (۱) صورت می‌پذیرد که در آن، R اندازه‌ی گشودگی، n نوع گشودگی و m مقدار انحنای گوشه‌ی گشودگی را مشخص می‌کند. در این مقاله، R=۱ در نظر گرفته شده است.

$$z = x + iy = w(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta^n}) \qquad (۱)$$

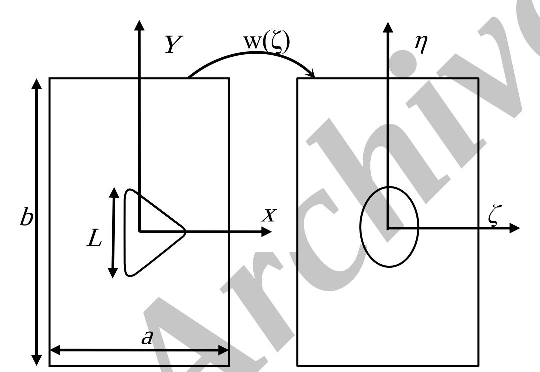
در گشودگی‌های لبه‌دار m ، معیار تیزی یا نرمی و انحنای گشودگی است(m ≥۰). با تغییر این پارامتر (m) می‌توان برای هر گشودگی خاص، شعاع انحناهای متفاوتی ایجاد کرد و در هر مورد تنش در جهت‌های مختلف را مورد بررسی قرار داد. برای هر گشودگی وقتی m کاهش می‌یابد، گشودگی ملایم‌تر می‌شود تا اینکه m به کمترین مقدار خود یعنی m=۰ می‌رسد. در این حالت گشودگی به دایره تبدیل می‌شود. در شکل ۳ برای گشودگی مثلثی تغییرات m و روند میل کردن گشودگی مثلثی به دایره نشان داده شده است.

همچنین x و y نقاط در صفحه z برحسب ρ و θ نقاط در صفحه‌ی ζ به‌صورت معادلات (۳) و (۴) به‌دست می‌آید:

$$\tau = \rho e^{i\theta} = \rho(cos\theta + isin\theta) \qquad (۲)$$



شکل ۱- ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری



شکل۲- نگاشت ورق حاوی گشودگی مثلّثی به ورق حاوی گشودگی دایروی[۱۷]

m=۰ m=۰/۱ m=۰/۲ m=۰/۳

شکل ۳- تأثیر پارامتر m بر گوشه‌های گشودگی مثلثی

$$x = Re[w(\zeta)] = R\left(\rho \cos(\theta) + \frac{m \cos(n\theta)}{\rho^n}\right) \quad (۳)$$

$$y = Img[w(\zeta)] = R\left(\rho \sin(\theta) + \frac{m \sin(n\theta)}{\rho^n}\right) \quad (۴)$$

مسأله حاضر بر پایه تئوری الاستیسیته صفحه‌ای، تحلیل و بررسی خواهد شد. در مسائل دوبعدی تحت بار درون صفحه‌ای، ماتریس تنش در هر نقطه از مادّه‌ی الاستیک، دارای سه تنش σ_y، σ_x و τ_{xy} است. این تنش‌ها، در غیاب نیروهای خارجی معادلات تعادل را به‌صورت رابطه (۵) ارضا می‌کنند:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad ، \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (۵)$$

همچنین معادله سازگاری برحسب مؤلفه‌های تنش به‌صورت رابطه (۶) است:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (۶)$$

ساده‌سازی مسأله، با ادغام این معادلات، از طریق روابط حاکم بین آن‌ها صورت می‌گیرد. با معرفی تابع تنش $U(x,y)$، رابطه مؤلفه‌های تنش با تابع تنش به‌صورت رابطه (۷) خواهند بود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (۷)$$

با ترکیب معادلات (۵)، (۶) و (۷) معادله‌ی سازگاری، برحسب تابع تنش U به شکل رابطه (۸) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (۸)$$

حلّ مسائل صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعیین تابع بای‌هارمونیک[1] $U(x,y)$ خلاصه می‌شود که شرایط مرزی معادلات را ارضا می‌کند. به این منظور موشخیلیشویلی حلّ زیر را برای رابطه (۸) پیشنهاد کرد:

$$U(x,y) = Re[\bar{z}\varphi(z) + \Theta(z)] \quad (۹)$$

در معادله‌ی فوق، Re نشان‌دهنده قسمت حقیقی یک عبارت مختلط و $\varphi(z)$ و $\Theta(z)$ توابعی تحلیلی از متغیّر مختلط z می‌باشند؛ بنابراین حلّ مسائل تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع تحلیلی هولومورفیک $\varphi(z)$ و $\psi(z) = \Theta'(z)$ محدود می‌شود که روی کانتور $\acute{L}$ شرایط مرزی تعیین‌شده را ارضا می‌کنند. با مشخص شدن تابع تنش $U(x,y)$ برحسب توابع $\varphi(z)$ و $\psi(z) = \Theta'(z)$ مؤلفه‌های تنش در حالت دوبعدی و برای ناحیه‌ی همبند ساده به‌صورت روابط (۱۰) و (۱۱) محاسبه می‌شوند[۳].

$$\sigma_x + \sigma_y = 4Re[\varphi'(z)] \quad (۱۰)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \quad (۱۱)$$

که در آن $\psi(z)$ و $\varphi(z)$ توابع مختلط برحسب متغیّر z می‌باشند. مؤلفه‌های تنش در سیستم مختصات قطبی و با استفاده از نگاشت همنوا، برحسب متغیّر ζ به‌صورت روابط (۱۲) و (۱۳) تعریف می‌گردند[۳].

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4Re\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] \quad (۱۲)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\alpha}$$

$$= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}}\left(\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right) \quad (۱۳)$$

که در آن،

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \quad ، \quad \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad ، \quad \Phi'(\zeta) = \varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) \quad (۱۴)$$

$\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ دو تابع تحلیلی هولومورفیک می‌باشند که شرایط مرزی مسأله را ارضا می‌کنند. با مشخص شدن $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$، مؤلفه‌های تنش محاسبه و مسأله‌ی تنش صفحه‌ای نیز حل می‌گردد. ساوین [۵]، به منظور حلّ مسأله توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای، از تابع نگاشت همنوا استفاده کرد. او توابع $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ را برحسب متغیّر ζ به شکل رابطه (۱۵) و (۱۶) معرفی کرد:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\chi)}\ln\zeta + a_1\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (۱۵)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1+\chi)}\ln\zeta + b_1\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \quad (۱۶)$$

که در آن:

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \zeta^{-n} \quad ، \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n} \quad (۱۷)$$

a'_n و b'_n ثابت‌ها مجهول می‌باشند. X و Y مؤلفه‌های تنش در مرز گشودگی هستند که به دلیل آزاد بودن مرز گشودگی

[1] Biharmonic

از تنش صفر می‌باشند. از معادلات (۱۵) و (۱۶) می‌توان در تحلیل تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف استفاده کرد؛ امّا در ورق‌های محدود علاوه بر هندسه گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد؛ بنابراین از معادلات (۱۵) و (۱۶) به شکلی که در بالا ارائه شده است، نمی‌توان استفاده کرد. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، تابع تنش ورق محدود حاوی گشودگی دایروی در صفحهζ، از جمع تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی با تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی در صفحه‌ی ζ به‌دست می‌آید؛ لذا با استفاده از سری لورنت در یک ناحیه غیر ساده، جملاتی با توان‌های منفیζ که روی مرز گشودگی دایروی و ناحیه‌ی خارج آن تحلیلی است، تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی را تشکیل می‌دهد. همچنین سری لورنت شامل، جملاتی با توان‌های مثبتζ که روی مرز خارجی ورق تحلیلی است، تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی را تشکیل می‌دهد؛ بنابراین با جمع جمله‌هایی با توان مثبت و منفی ζ سری لورنت، توابع تنش$\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ با جملات محدود مطابق روابط (۱۸) و (۱۹) بدست می‌آیند [۱۶].

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{M} A_n \zeta^{-n} + \sum_{n=0}^{M} B_n \zeta^{n} \quad (۱۸)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{M} \frac{C_n \zeta^{-n}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^{M} D_n \zeta^{n} \quad (۱۹)$$

که در آن ضرایب A_n، B_n، C_n و D_n اعدادی مختلط هستند که به‌صورت رابطه (۲۰) درنظر گرفته می‌شوند:

$$A_n = a_{n1} + i a_{n2} \quad , \quad B_n = b_{n1} + i b_{n2} \quad (۲۰)$$

$$C_n = c_{n1} + i c_{n2} \quad , \quad D_n = d_{n1} + i d_{n2}$$

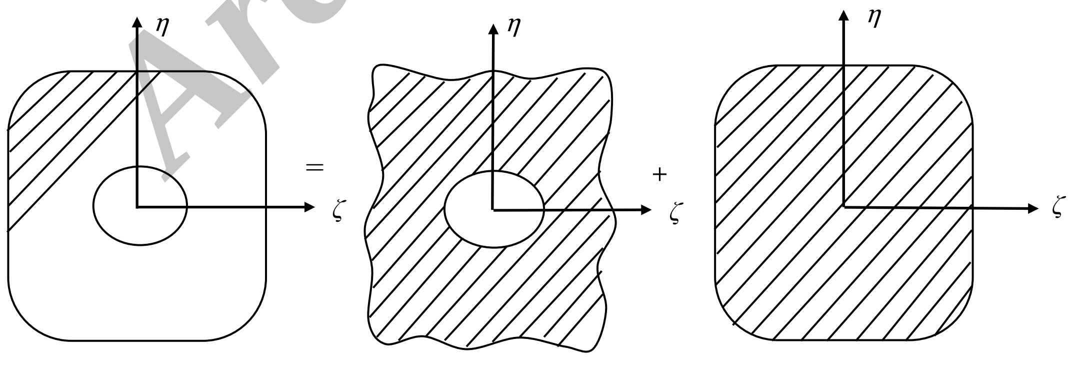
a_{n1}، a_{n2}، b_{n1}، b_{n2}، c_{n1}، c_{n2}، d_{n1} و d_{n2} ثابت‌های حقیقی مجهول می‌باشند و M در آن تعداد جملات مربوط به بخش‌های مختلف سری لورنت است. محاسبه مشتقات توابع تنش به‌صورت روابط (۲۱) تا (۲۳) می‌باشند:

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{n=1}^{M} -nA_n \zeta^{-n-1} + \sum_{n=0}^{M} nB_n \zeta^{n-1} \quad (۲۱)$$

$$\varphi''(\zeta) = \sum_{n=1}^{M} n(n+1) A_n \zeta^{-n-2} + \sum_{n=0}^{M} n(n-1) B_n \zeta^{n-2} \quad (۲۲)$$

$$\psi'(\zeta) = \sum_{n=1}^{M} \frac{C_n\left(-n\zeta^{-n-1}\omega'(\zeta) - \omega''(\zeta)\zeta^{-n}\right)}{(\omega'(\zeta))^2} + \sum_{n=0}^{M} nD_n \zeta^{n-1} \quad (۲۳)$$

با جای‌گذاری معادلات فوق در معادلات (۱۸) و (۱۹) و حلّ دستگاه معادلات (۱۲) و (۱۳)، مؤلفه‌های تنش به شکل نهایی (۲۴-۲۶) به‌دست می‌آیند:



شکل ۴- نمایی از روش حل پن و همکاران [۱۶]

$$\begin{aligned}\sigma_\rho = Re\Bigg[& \Bigg[\frac{\sum_{n=1}^{M} -2n\,\zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} \\ & -\left(\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\sum_{n=1}^{M} n(n+1)\,\zeta^{-n}\right)\Bigg]A_n \\ & +\Bigg[\frac{\sum_{n=0}^{M} 2n\zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \\ & -\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\sum_{n=0}^{M} n(n-1)\zeta^{n}\Bigg]B_n \\ & -\Bigg[\sum_{n=1}^{M}\frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1}-\omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2\big(\omega'(\zeta)\big)^2\overline{\omega'(\zeta)}}\Bigg]C_n \\ & -\Bigg[\frac{\sum_{n=0}^{M} n\zeta^{n+1}}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\Bigg]D_n\Bigg] \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = Re\Bigg[& \Bigg[\frac{\sum_{n=1}^{M} -2n\,\zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} \\ & +\left(\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\sum_{n=1}^{M} n(n+1)\,\zeta^{-n}\right)\Bigg]A_n \\ & +\Bigg[\frac{\sum_{n=0}^{M} 2n\zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \\ & +\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\sum_{n=0}^{M} n(n-1)\zeta^{n}\Bigg]B_n \\ & +\left[\sum_{n=1}^{M}\frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1}-\omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2\big(\omega'(\zeta)\big)^2\overline{\omega'(\zeta)}}\right]C_n \\ & +\Bigg[\frac{\sum_{n=0}^{M} n\zeta^{n+1}}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\Bigg]D_n\Bigg] \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\rho\theta} = Re\Bigg[& \Bigg[\left(\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\sum_{n=1}^{M} n(n+1)\,\zeta^{-n}\right)\Bigg]A_n \\ & +\Bigg[\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\sum_{n=0}^{M} n(n-1)\zeta^{n}\Bigg]B_n \\ & +\left[\sum_{n=1}^{M}\frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1}-\omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2\big(\omega'(\zeta)\big)^2\overline{\omega'(\zeta)}}\right]C_n \\ & +\Bigg[\frac{\sum_{n=0}^{M} n\zeta^{n+1}}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\Bigg]D_n\Bigg] \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

با توجّه به روابط ذکرشده برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی، نیاز به محاسبه ضرایب مجهول A_n،B_n،C_n و D_n درمعادلات (۲۴) تا (۲۶) است. به این منظور از روش حدّاقل مربّعات مرزی استفاده شده است [۱۷]. برای استفاده از روش حدّاقل مربّعات مرزی، مطابق شکل ۵ به نقاط منتخب روی مرز داخلی و خارجی در صفحه ζ نیاز است مختصات نقاط در صفحه‌ی ζ، به‌صورت$\zeta(\rho,\theta)$ و در صفحه‌ی z به‌صورت $z(x,y)$ می‌باشند. نقاط منتخب روی مرز داخلی دایره واحد در صفحه‌ی ζ، به‌صورت رابطه (۲۷) تعریف می‌شوند:

$$\rho = 1\,, \qquad \theta = \frac{2\pi}{N_{in}}(j-1) \qquad (j=1,\dots,N_{in}) \qquad (۲۷)$$

در معادله‌ی (۲۷)، N_{in} تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی دایره واحد است. با جای‌گذاری مؤلفه‌های x و y نقاط منتخب در صفحه z در سمت چپ معادلات (۳) و (۴)، با استفاده از حلّ عددی، مؤلفه‌های ρ و θ نقاط متناظر در صفحه‌ی ζ محاسبه می‌شوند. در استفاده از روش حدّاقل مربّعات مرزی، برای شرایط مرزی داخلی از شرایط مرزی دایره واحد در صفحه‌ی ζو در مختصات قطبی استفاده شده است. شرایط مرزی روی مرز گشودگی، به‌صورت رابطه (۲۸) است:

$$\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0 \ \ ، \ |\zeta| = 1 \qquad (۲۸)$$

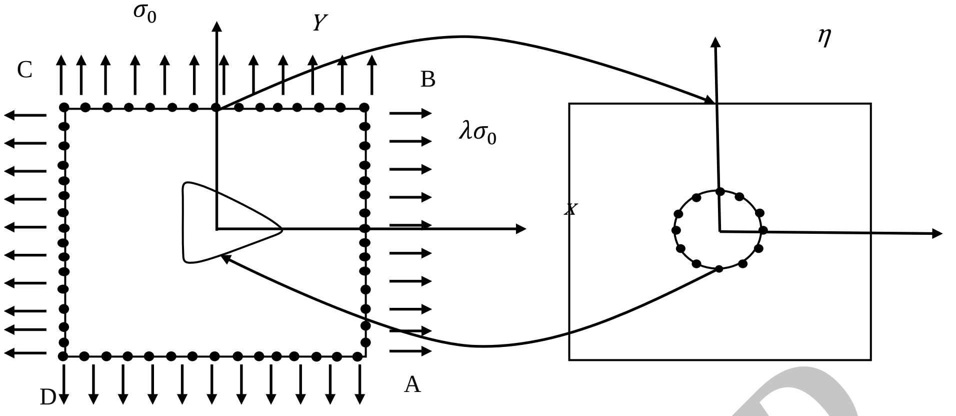
این در حالی‌است که برای شرایط مرزی خارجی ورق از شرایط مرزی ورق در صفحه z و مختصات کارتزین استفاده می‌شود. شرایط مرزی خارجی ورق محدود حاوی گشودگی به‌صورت روابط (۲۹) و (۳۰) است:

$$\sigma_x\, cos^2\gamma + \sigma_y\, sin^2\gamma + 2\tau_{xy}\, sin\,\gamma\, cos\,\gamma = \sigma_n \qquad (۲۹)$$

$$(\sigma_y - \sigma_x)\, sin\,\gamma\, cos\,\gamma + \tau_{xy}(cos^2\gamma - sin^2\gamma) = \tau_n \qquad (۳۰)$$

در معادلات فوق، γ زاویه بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محورx است؛ همچنین σ_nوτ_n به ترتیب، تنش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی می‌باشند. σ_0 تنش کششی واردشده بر مرز خارجی ورق است و در این مقاله ۱MPa درنظر گرفته شده است؛ همچنین در بارگذاری کششی دومحوری۲ = λ و در بارگذاری برشی تنشτ_0 برابر ۱MPa است. بر اساس روش حدّاقل مربّعات مرزی، مجذور باقی‌مانده مرزی به‌صورت رابطه (۳۱) بیان می‌شود:

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{in}+N_{ot}} r^2(\rho_j,\theta_j) \qquad (۳۱)$$



شکل ۵- موقعیّت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه ζ و مرز خارجی در صفحه‌ی z [۱۷]

که در آن N_{in} تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی دایره واحد، N_{ot} تعداد نقاط منتخب روی مرز خارجی ورق در محلّ اعمال بار، اندیس j نشان‌دهنده تعداد نقاط منتخب و r^2 به صورت رابطه (۳۲) تعریف می‌شود:

$$r^2(\rho_j,\theta_j) = r_1^2(\rho_j,\theta_j) + r_2^2(\rho_j,\theta_j) \qquad (۳۲)$$

تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی در این مقاله پس از همگرا شدن جواب‌ها، ۸۰ عدد و روی مرز خارجی، ۱۲۰ عدد است. در رابطه‌ی فوق، $r_1(\rho_j,\theta_j)$ و $r_2(\rho_j,\theta_j)$ اختلاف دو تنش، یکی تنش حاصل از شرایط مرزی و دیگری تنش حاصل از حلّ تحلیلی ارائه شده در نقاط منتخب روی مرزها هستند، پس از به‌دست آوردن Δ^2 برای هر نوع بارگذاری، به‌منظور کمینه کردن تابعِ اختلاف حاصل شده، از روابط (۳۳) و (۳۴) استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{n1}} = 0, \frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{n2}} = 0, \frac{\partial\Delta^2}{\partial b_{n1}} = 0, \frac{\partial\Delta^2}{\partial b_{n2}} = 0 \qquad (۳۳)$$

$$\frac{\partial\Delta^2}{\partial c_{n1}} = 0, \frac{\partial\Delta^2}{\partial c_{n2}} = 0, \frac{\partial\Delta^2}{\partial d_{n1}} = 0, \frac{\partial\Delta^2}{\partial d_{n2}} = 0 \qquad (۳۴)$$

از روابط فوق، دستگاه معادلاتی خطّی تشکیل می‌شود که از حلّ آن ثابت‌ها مجهول به‌دست می‌آیند. با جای‌گذاری این ثابت‌ها در معادلات (۲۴) تا (۲۶)، مؤلفه‌های تنش به‌دست آمده و مسأله موردنظر حل می‌شود.

۳- الگوریتم سنجاقک[1]

در سراسر دنیا تقریباً سه هزار گونه مختلف از سنجاقک‌ها در طبیعت وجود دارند. چرخه زندگی سنجاقک‌ها شامل، دو مرحله‌ی نابالغی (که بیشتر عمر خود را در آن سپری می‌کنند) و بزرگسالی است. الگوریتم سنجاقک برای اوّلین بار توسط میرجلیلی [۲۲] در سال ۲۰۱۶ مطرح شد. میرجلیلی با ۱۹ تابع آزمون، عملکرد و کارایی مناسب این الگوریتم را اثبات نمود. الهام‌گیری اصلی از الگوریتم سنجاقک، سرچشمه از رفتارهای استاتیکی و دینامیکی سنجاقک‌ها در طبیعت دارد. می‌توان گفت این دو رفتار بسیار مشابه دو مرحله مهّم در بهینه‌سازی، یعنی جست و جوی شکار (اکتشاف) و حمله به شکار (بهره برداری) است. در رفتار استاتیکی، سنجاقک‌ها گروه‌های کوچک ایجاد می‌کنند و به منظور شکار حشرات بر فراز نواحی مختلف پرواز می‌کنند. هدف اصلی در این مرحله، جست و جوی شکار (اکتشاف) است. در رفتار دینامیکی، سنجاقک‌ها در دسته‌های بزرگ و در یک مسیر پرواز می‌کنند. هدف اصلی در این مرحله، حمله به شکار (بهره برداری) است. هدف نهایی موجودات در طبیعت، بقا است. بدین منظور برای دستیابی به منبع غذا و فرار از دشمن تلاش می‌کنند. با توجّه به این دو رفتار می‌توان نتیجه گرفت که پنج عامل اصلی در به روز رسانی موقعیّت نمونه در رفتار ازدحامی وجود دارد. این پنج عامل عبارتند از: استقلال (مجزا

[1] Dragonfly Algorithm

بودن)، حرکت اصولی (همترازی)، انسجام، دستیابی به منبع غذایی و دوری از دشمن که مدل ریاضی هریک از رفتارها ارائه شده است. مرحله استقلال به صورت معادله (۳۵) است [۲۲].

$$S_i = -\sum_{j=1}^{N} X - X_j \quad (۳۵)$$

X موقعیّت فعلی سنجاقک و X_j موقعیّت j امین همسایه سنجاقک و N تعداد سنجاقک‌های همسایه را نشان می‌دهد. مدل ریاضی حرکت اصولی نیز، به صورت رابطه (۳۶) است [۲۲].

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} V_j}{N} \quad (۳۶)$$

V_j نشان دهنده سرعت j امین همسایه سنجاقک است. مرحله انسجام به صورت معادله (۳۷) است [۲۲].

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} - X \quad (۳۷)$$

در رابطه (۳۷)، X موقعیّت فعلی سنجاقک و X_j موقعیّت j امین همسایه سنجاقک و N تعداد سنجاقک‌های همسایه را نشان می‌دهد. مرحله چهارم، حرکت به سوی یک منبع غذایی است که رابطه آن به صورت (۳۸) ارائه می‌شود [۲۲].

$$F_i = X^{+} - X \quad (۳۸)$$

در رابطه (۳۸)، X موقعیّت فعلی سنجاقک و X^{+} موقعیّت منبع غذا را نشان می‌دهد و در نهایت مدل ریاضی دوری از دشمن، به صورت معادله (۳۹) است [۲۲].

$$E_i = X^{-} + X \quad (۳۹)$$

که X موقعیّت فعلی سنجاقک و X^{-} موقعیّت دشمن را نشان می‌دهد. رفتار سنجاقک‌ها ترکیبی از این پنج گروه است که در این مقاله به آن‌ها پرداخته شده است. برای به روز رسانی موقعیّت سنجاقک‌ها در یک فضای جست و جو و شبیه‌سازی حرکت‌های آن‌ها، بردار گام(ΔX) و بردار موقعیّت مکانی (X) مورد نظر قرار می‌گیرد. بردار گام، مشابه بردار سرعت در الگوریتم اجتماع ذرّات (PSO) است که جهت حرکت سنجاقک‌ها را نشان می‌دهد و به صورت رابطه (۴۰) تعریف می‌شود [۲۲].

$$\Delta X_{t+1} = (sS_i + aA_i + cC_i + fF_i + eE_i) + w'\Delta X_t \quad (۴۰)$$

s نشان دهنده ضریب مجزا بودن، S_i نشان دهنده مجزا بودن i امین سنجاقک، a نشان دهنده ضریب حرکت اصولی (هم‌ترازی)، A_i نشان دهنده حرکت اصولی i امین سنجاقک، c نشان دهنده ضریب انسجام، C_i نشان دهنده انسجام i امین سنجاقک، f نشان دهنده ضریب منبع غذا، F_i نشان دهنده منبع غذای i امین سنجاقک، e نشان دهنده ضریب دشمن، E_i نشان دهنده موقعیّت دشمن از i امین سنجاقک، w' نشان دهنده ضریب اینرسی و t شماره تکرار است. با توجّه به ضرایب معادله (۴۰)، می‌توان در طول بهینه‌سازی رفتارهای مختلف اکتشافی و بهره برداری را به دست آورد. پس از محاسبه بردار گام، بردار موقعیّت نیز به صورت رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود.

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X_{t+1} \quad (۴۱)$$

که t نشان دهنده شماره تکرار است. نکته مهّم دیگر در این مقاله، این است که در زمان جست و جو برای شکار، ضرایب همترازی افزایش و انسجام کاهش و در زمان حمله به شکار، ضرایب همترازی کاهش و انسجام افزایش داده می‌شود. برای بهبود بیشتر رفتار تصادفی و اکتشافی سنجاقک‌ها، فرض می‌شود، همسایه‌ای وجود ندارد. پس لازم است، پرواز آن‌ها در اطراف فضای جست و جو با استفاده از یک گردش تصادفی انجام گیرد. با توجّه به این فرض روابط (۴۲) تا (۴۴) حاصل می‌شود [۲۲].

$$X_{t+1} = X_t + Levy(d) \times X_t \quad (۴۲)$$

$$Levy(x) = 0.01 \times \frac{r_1 \times \sigma'}{|r_2|^{\frac{1}{\beta'}}} \quad (۴۳)$$

$$\sigma' = \left(\frac{\Gamma(1+\beta') \times \sin(\frac{\pi\beta'}{2})}{\Gamma(\frac{1+\beta'}{2}) \times \beta' \times 2^{\left(\frac{\beta'-1}{2}\right)}} \right)^{\frac{1}{\beta'}}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad (۴۴)$$

با توجّه به روابط (۴۲) تا (۴۴)، t تکرار فعلی، d بعد بردار مکانی جسم، r_1, r_2 دو عدد تصادفی در بازه [۰،۱] و β' مقدار ثابت (که در این مقاله برابر ۱/۵) است. در هر تکرار، موقعیّت و گام هر سنجاقک با استفاده از معادلات (۴۰)،

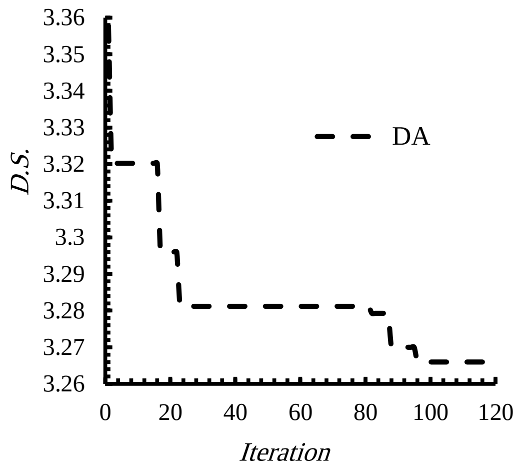
(۴۱) و (۴۲) به روز می‌شوند. برای به روز رسانی موقعیّت X و ΔX در همسایگی هر سنجاقک، با استفاده از روش فاصله اقلیدسی که فاصله بین دو نقطه را بر اساس قضیه فیثاغورس بین تمام سنجاقک‌ها محاسبه و N تا از آن‌ها را انتخاب می‌نماید، روند موقعیّت به روز رسانی پیوسته تا معیار نهایی ادامه می‌یابد. شایان ذکر است که تفاوت‌های اصلی بین الگوریتم DA وPSO وجود عامل استقلال، حرکت اصولی، انسجام، دستیابی به منبع غذایی، دوری از دشمن و گردش تصادفی است [۲۲]؛ همچنین مفاهیم ازدحام استاتیکی و دینامیکی در الگوریتم سنجاقک، از مفاهیم جدید هستند که در این الگوریتم به کار گرفته شده‌اند.

۴- بررسی نمودارهای همگرایی

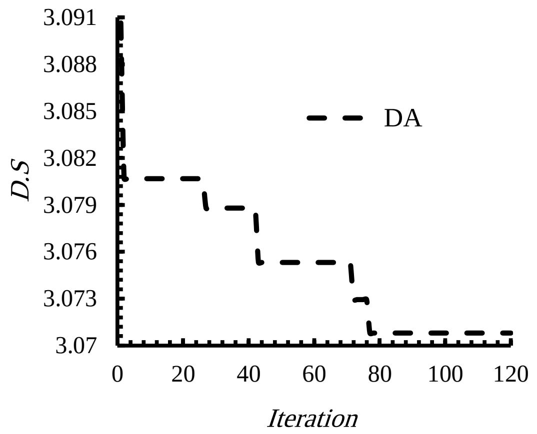
در شکل ۶ تا ۸، نمودارهای همگرایی الگوریتم سنجاقک برای ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی در حالت‌های بهینه تحت بارگذاری درون صفحه‌ای ($\frac{L}{a}=$ ۰/۲، $\frac{b}{a}=$۱) نشان داده شده است. دیده می‌شود، به ازای حالت‌های در نظر گرفته شده، الگوریتم سنجاقک در حال بررسی نقاط بهینه محلّی برای بدست آوردن مقدار مناسب است.

۵- نتایج

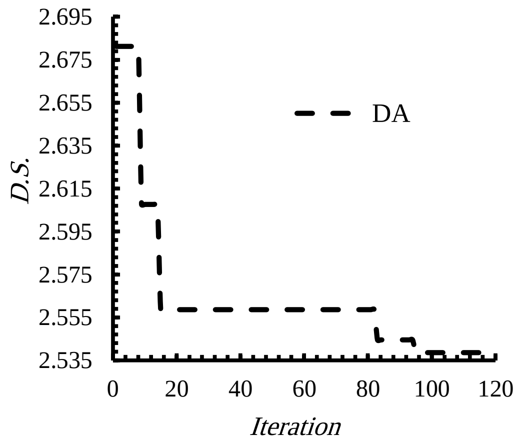
همان‌طور که می‌دانیم، تمرکز تنش در ورق‌های همسانگرد حاوی گشودگی مستقل از جنس و خواص مکانیکی مادّه است؛ بنابراین نتایج این مقاله را می‌توان برای ورق‌های همسانگرد از سایر جنس‌ها نیز تعمیم داد. براین اساس، مشخصات مادّه همسانگرد به کار رفته در این مقاله مطابق جدول ۱ است. در این بخش، نتایج تنش بهینه ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری تک‌محوری، دومحوری و برشی ارائه می‌شود. از آن‌جایی‌که اندازه گشودگی به ورق مقداری ثابت و برابر $\frac{L}{a}=$۰/۴ در نظر گرفته شده است، کمترین نسبت $\frac{b}{a}$ می‌تواند برابر با عدد ۰/۴ باشد که در این صورت، دو ضلع ورق مماس بر گشودگی می‌شوند. این امر در کاربردهای عملی معقول به‌نظر نمی‌رسد، بنابراین در این مقاله نسبت $\frac{b}{a}$ های بزرگتر از ۰/۷ بررسی می‌گردد. در این پژوهش سعی می‌شود، با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی سنجاقک برای یک ورق همسانگرد محدود حاوی



شکل ۶- نمودار همگرایی برای بارگذاری تک‌محوری



شکل ۷- نمودار همگرایی برای بارگذاری دومحوری



شکل ۸- نمودار همگرایی برای بارگذاری برشی

گشودگی، در هر نسبت اضلاع ورق $(\frac{b}{a})$ و هر نسبت اندازه گشودگی به ورق $(\frac{L}{a})$ مقادیر بهینه دیگر متغیّرهای طراحی و کمترین مقدار توزیع تنش اطراف گشودگی، مورد بررسی قرار گیرد.

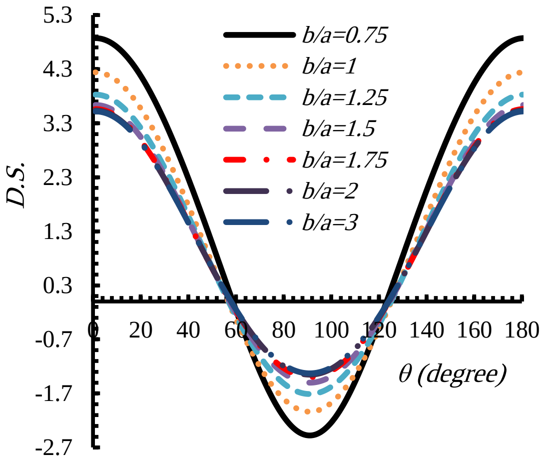
۵-۱- تاثیر نسبت ابعاد ورق

تأثیر نسبت ابعاد ورق بر مقدار تنش بی‌بعد با در نظر گرفتن همزمان زوایه چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی به عنوان متغیّرهای طراحی برای مادّه همسانگرد فولاد تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای در شکل‌های ۹ تا ۱۱، نشان داد شده است. مقادیر بهینه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی و تنش بی‌بعد کمینه، مقادیر بهینه حاصل از الگوریتم سنجاقک هستند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ مقدار تنش بی‌بعد حول گشودگی در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و اختلاف توزیع تنش با افزایش این نسبت، کاهش پیدا می‌کند. علّت این امر این است، ورق در صورتی محدود می‌باشد که نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از ۰/۲ باشد. برای نسبت $\frac{b}{a}$ های کوچکتر از ۱، شرایط $\frac{L}{a}=۰/۴$ (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق بزرگتر از ۰/۲) برقرار است و با کوچک شدن ابعاد، مقدار تنش افزایش می‌یابد. برای نسبت‌های $\frac{b}{a}$ بزرگتر از یک، b ضلع بزرگتر ورق می‌شود و در صورتی که شرایط ورق محدود برای آن صدق نکند، تغییر چندانی در مقدار تنش همانند ورق‌های نامحدود به‌وجود نمی‌آید. به همین خاطر مشاهده می‌شود که در نسبت $\frac{b}{a}$ برابر با ۱/۷۵ و بیشتر از آن تغییر چندانی در مقدار تنش ایجاد نمی‌شود؛ همچنین در جدول ۲ نیز مشاهده می‌کنید، برای حالت $m=۰$ که بیان کننده‌ی گشودگی دایروی است، کمترین مقدار تنش بی‌بعد را به ازای تمامی حالت‌های بارگذاری خواهیم داشت. شکل ۱۲، ماکزیمم تنش بهینه را برحسب نسبت $\frac{b}{a}$ در سه نوع بارگذاری مورد بحث نشان می‌دهد. در این‌جا نیز مشاهده می‌گردد، با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و در نسبت‌های بزرگتر از $\frac{b}{a}=۱/۷۵$ مقدار تنش به حالت پایدار رسیده با افزایش این نسبت، تغییر چندانی در مقدار تنش ماکزیمم بی‌بعد ایجاد نمی‌شود.

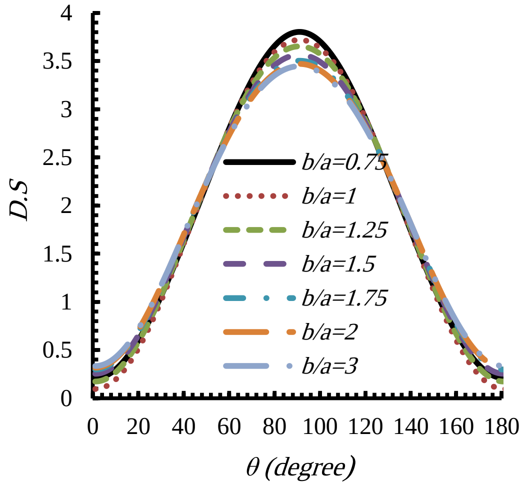
همچنین تأثیر نسبت ابعاد ورق برای دو بارگذاری برشی و تک‌محوری، بیشتر از بارگذاری دومحوری است و این کاهش مقدار تنش در این دو بارگذاری با شیب بیشتری اتّفاق می‌افتد. لازم به اشاره است، به علت تقارن موجود در توزیع تنش حول گشودگی مثلثی، در همه بارگذاری‌های مورد بحث، نتایج تا $\theta=۱۸۰^{\circ}$ ارائه شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی مادّه [۱۱]

مادّه	ν	G(GPa)	E(GPa)
فولاد	۰/۳	۷۹/۳	۲۰۷



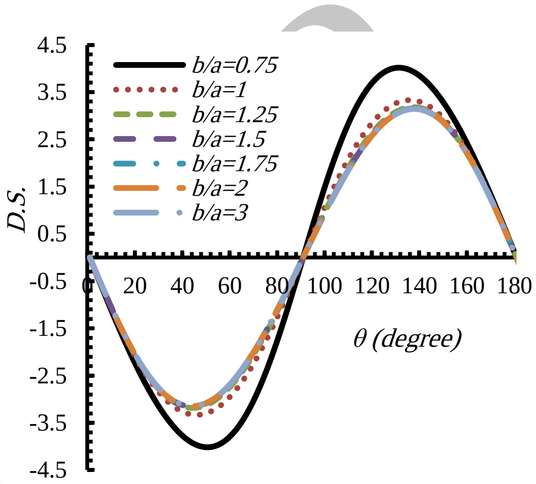
شکل ۹- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{b}{a}$های مختلف تحت بارکششی تک‌محوری



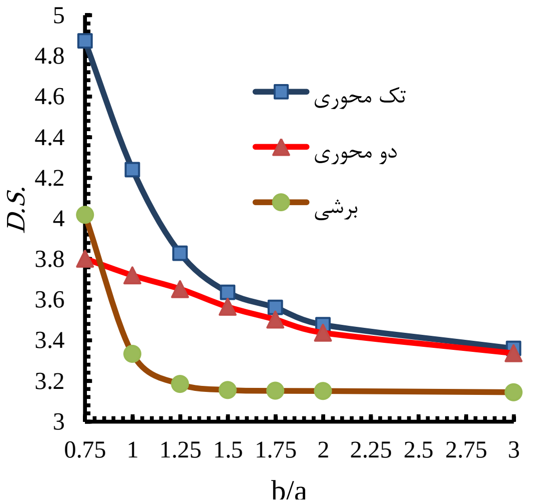
شکل ۱۰- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{b}{a}$های مختلف تحت بارکششی دومحوری

جدول ۲- نتایج بهینه گشودگی مثلثی در نسبت ابعاد مختلف ورق (حالت بهینه $m=\cdot$)

b/a	بارگذاری تک محوری D.S.	بارگذاری دو محوری D.S.	بارگذاری برشی D.S.
۰/۷۵	۴/۸۷۳۲	۳/۸۰۱۸	۴/۰۱۷۶
۱	۴/۲۴	۳/۷۱۹۳	۳/۳۳۲۲
۱/۲۵	۳/۸۲۷۹	۳/۶۵۲۲	۳/۱۸۳۹
۱/۵	۳/۶۳۶	۳/۵۶۴۴	۳/۱۵۵۴
۱/۷۵	۳/۵۶۱	۳/۵۰۲۴	۳/۱۵۱۱
۲	۳/۴۷۶۲	۳/۴۲۷۱	۳/۱۵۰۴
۳	۳/۳۵۹۵	۳/۳۳۶۴	۳/۱۴۴۳



شکل ۱۱- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{b}{a}$های مختلف تحت بار برشی

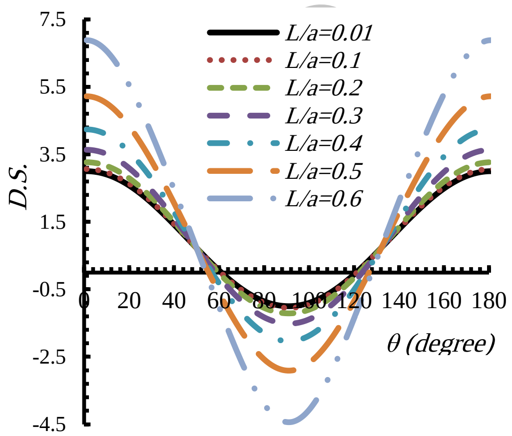


شکل ۱۲- تنش بهینه حول گشودگی مثلثی برحسب $\frac{b}{a}$های مختلف درسه حالت بارگذاری

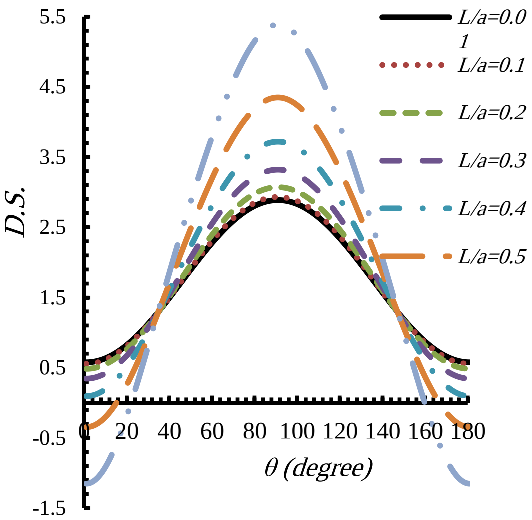
۵-۲- تاثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق

تأثیر نسبت اندازه گشودگی به ورق، بر مقدار تنش بی‌بعد با در نظر گرفتن همزمان زوایه چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه گشودگی به عنوان متغیّرهای طراحی برای ماده‌ی همسانگرد فولاد تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود، با افزایش نسبت اندازه گشودگی به ورق تنش در هر سه حالت، بارگذاری افزایش می‌یابد. در محدوده‌ی اندازه گشودگی به ورق بزرگتر از ۰/۲، این افزایش به میزان بیشتری است؛ درحالی‌که در محدوده کوچکتر از ۰/۲، افزایش مقدار تنش بهینه ناچیز و تقریباً مقدار تنش بهینه حول گشودگی ثابت است. این امر نشان‌دهنده تأثیر بسیار زیاد اندازه گشودگی به ورق در ورق‌های محدود است. جدول ۳، مقادیر بهینه پارامترهای اثرگذار، تنش بهینه و مقایسه مقادیر به دست آمده با حلّ ورق نامحدود ($\frac{L}{a}=\cdot/\cdot۱$) را در سه حالت بارگذاری ($\frac{b}{a}=۱$) نشان می‌دهد. در این حالت ابتدا فرآیند بهینه‌سازی به ازای سه متغیّر طراحی یعنی نسبت اندازه گشودگی به ورق، شعاع انحنای گوشه گشودگی و زاویه چرخش صورت می‌گیرد تا مقدار تنش بهینه بی‌بعد در انحنای گشودگی و زوایه چرخش بهینه مشخص شود. ملاحظه می‌شود، در نسبت‌های $\frac{L}{a}$ کوچکتر از ۰/۲، اختلاف ماکزیمم تنش از دو روش، کمتر از ۱۰٪ است، بنابراین در کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌های محدود با نسبت $\frac{L}{a}$ کوچکتر ۰/۲را می‌توان نامحدود در نظر گرفت. این در حالی است که در نسبت‌های بزرگتر از ۰/۲، اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا ۱۲۹/۴۳٪ هم می‌رسد و این نشان می‌دهد که در این نسبت‌ها نمی‌توان از حلّ نامحدود ورق استفاده کرد. شکل ۱۶، ماکزیمم تنش بهینه حول گشودگی مثلثی

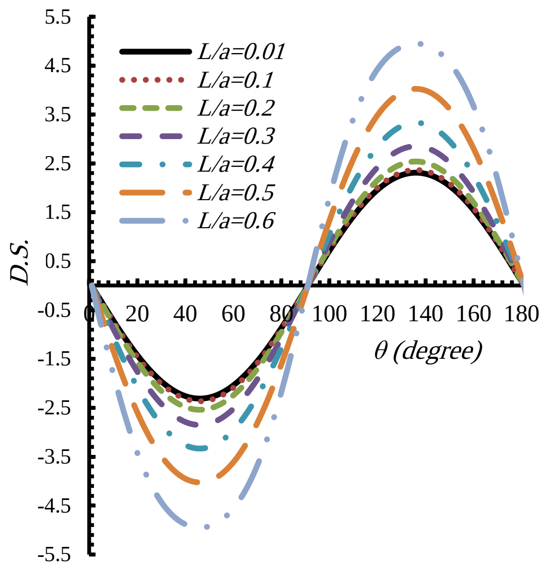
برحسب نسبت‌های مختلف $\frac{L}{a}$ را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. با افزایش نسبت اندازه گشودگی به ورق، در محدوده اندازه گشودگی به ورق کمتر از ۰/۲، مقدار تنش تقریباً ثابت و در محدوده بزرگتر از ۰/۲، با افزایش این نسبت مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد و در بارگذاری تک‌محوری، بیشتر از دو بارگذاری دیگر است و این افزایش مقدار تنش بهینه در بارگذاری اشاره شده با شیب بیشتری اتّفاق می‌افتد.



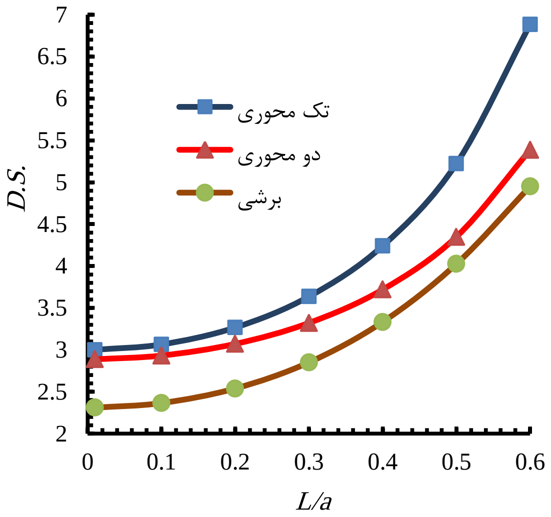
شکل ۱۳- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{L}{a}$های مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۱۴- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{L}{a}$های مختلف تحت بار دومحوری



شکل ۱۵- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{L}{a}$های مختلف تحت بار برشی



شکل ۱۶- تنش بهینه حول گشودگی مثلثی برحسب $\frac{L}{a}$های مختلف درسه حالت بارگذاری

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از الگوریتم سنجاقک (DA) به تعیین پارامترهای بهینه مؤثر بر تنش بی‌بعد اطراف گشودگی مثلثی واقع در ورق همسانگرد محدود پرداخته شد. الگوریتم سنجاقک، گونه‌ای دیگر از الگوریتم‌های فرا ابتکاری بر مبنای هوش ازدحامی (SI) است که از رفتار استاتیکی و دینامیکی

جدول۳- نتایج بهینه گشودگی مثلثی در نسبت‌های مختلف اندازه گشودگی به ورق (حالت بهینه $m=$ ۰)

L/a	بارگذاری تک محوری		بارگذاری دو محوری		بارگذاری برشی	
	$D.S.$	درصداختلاف	$D.S.$	درصداختلاف	$D.S.$	درصداختلاف
۰/۰۱	۳/۰۰۰۶	۰	۲/۸۸۷۱	۰	۲/۳۰۹۹	۰
۰/۱	۳/۰۶۴۳	۲/۱۲	۲/۹۳۱۶	۱/۵۴	۲/۳۶۵	۲/۳۸
۰/۲	۳/۲۶۶	۸/۸۴	۳/۰۷۰۸	۶/۳۶	۲/۵۳۸۶	۹/۹
۰/۳	۳/۶۳۵۴	۲۱/۱۵	۳/۳۲۰۷	۱۵/۰۲	۲/۸۵۰۲	۲۳/۴
۰/۴	۴/۲۴	۴۱/۳۰	۳/۷۱۹۳	۲۸/۸۲	۳/۳۳۲۲	۴۴/۲۵
۰/۵	۵/۲۲۱۴	۷۴/۰۱	۴/۳۴۸۵	۵۰/۶۱	۴/۰۲۴۴	۷۴/۲۲
۰/۶	۶/۸۸۴۳	۱۲۹/۴۳	۵/۳۸۵۹	۸۶/۵۵	۴/۹۵۰۴	۱۱۴/۳۱

سنجاقک‌ها به منظور جست و جوی شکار (اکتشاف) و حمله به شکار (بهره برداری) در فضای جست و جو استفاده می‌کند. این الگوریتم به پنج عامل، انسجام، استقلال، حرکت اصولی، دستیابی به منبع غذایی و دوری از دشمن مجهز شده است. فرآیند اکتشاف و بهره‌برداری، از دیگر مزایای الگوریتم سنجاقک است. همچنین اجتناب از بهینه محلّی و نتایج رقابتی این الگوریتم دلالت بر مناسب بودن این الگوریتم در بهینه‌سازی ورق‌های محدود دارای گشودگی دارد. انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق و نوع بارگذاری متغیّرهای طراحی در این مقاله می‌باشند. تنش بی‌بعد مورد نظر این مقاله، بر پایه‌ی حلّ تحلیلیِ متغیّر مختلطِ موشخیلشویلی و نگاشت همنوا با فرض تنش صفحه‌ای است. برای محاسبه تابع تنش مربوط به ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حدّاقل مربّعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به‌دست می‌آیند. نتایج نشان داد که انحنای گوشه‌های گشودگی تنها پارامتر موثّر بر کاهش تمرکز تنش نیست، بلکه زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق و نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق، سهم به سزایی در کاهش مقدار تنش دارد.

۷- علائم و نشانه‌ها

A_n	ثابت مختلط مجهول در محاسبه‌ی $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
a_{n1} و a_{n2}	ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه‌ی $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
a	طول ضلع افقی ورق، (m)
a_n a'_n	ثابت‌های حقیقی مجهول
B_n	ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
b_{n1} و b_{n2}	ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
b	طول ضلع عمودی ورق، (m)
b_n و b'_n	ثابت‌های حقیقی مجهول
C_n	ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
c_{n1} و c_{n2}	ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
c_1 و c_2	ثابت‌های حقیقی دلخواه
D_n	ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
d_{n1} و d_{n2}	ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$
j	اندیس نشان‌دهنده تعداد نقاط منتخب
L	طول ضلع گشودگی مربّعی و مثلّثی و طول قطر دایره محیط بر n ضلعی‌ها، (m)
L'	کانتور محدود کننده ناحیه‌ی S
M	تعداد جملات مربوط به سری لورنت
m	پارامتر تعیین‌کننده انحنای گوشه‌ی گشودگی
N_{in}	تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی ورق
N_{ot}	تعداد نقاط منتخب روی مرزخارجی ورق
n	پارامتر تعیین‌کننده هندسه گشودگی
R	پارامتر تعیین‌کننده اندازه گشودگی
$r_1(\rho_j,\theta_j)$ و $r_2(\rho_j,\theta_j)$	اختلاف تنش حاصل از شرایط مرزی و تنش حاصل از حلّ تحلیلی روی مرز ورق و گشودگی

$U(x,y)$	تابع تنش
χ	تابعی از نسبت پواسون
X و Y	نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی، (N)
z	متغیّر مختلط
α	زاویه بین افق و عمود بر مرز گشودگی، (θ°)
β	زاویه چرخش گشودگی، (θ°)
γ	زاویه بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور x، (θ°)
Δ	باقی‌مانده مرزی
ζ	متغیّر مختلط
η، ζ	مختصات عمودی و افقی در صفحه‌ی ζ
θ	زاویه‌ی حول گشودگی، (θ°)
$\Theta(\mathrm{z})$	تابع تحلیلی از متغیّر مختلط z
λ	ضریب بار دومحوری
π	عدد پی ۳/۱۴۱۵
ρ	مختصات شعاعی
σ_x و σ_y	تنش عمودی در صفحهz، (Pa)
σ_ρ و σ_θ	تنش عمودی در صفحهζ، (Pa)
σ_n	تنش نرمال در مرز خارجی ورق، (Pa)
τ_{xy}	تنش برشی در صفحهz، (Pa)
$\tau_{\rho\theta}$	تنش برشی در صفحهζ، $((Pa)$
τ_n	تنش برشی نرمال در مرز خارجی ورق، (Pa)
$\varphi(\mathrm{z})$	تابع تحلیلی از متغیّر مختلط z
$\varphi(\zeta)$	تابع تحلیلی از متغیّر مختلط ζ
$\psi(z)$	تابع تحلیلی از متغیّر مختلط z
$\psi(\zeta)$	تابع تحلیلی از متغیّر مختلط ζ
$\omega(\zeta)$	تابع نگاشت
$X^{\pm}$	موقعیّت هدف
X_j	موقعیّت j امین همسایه سنجاقک
ΔX	بردار گام، (m)
β'	مقدار ثابت
s	ضریب استقلال (مجزا بودن)
S_i	نشان دهنده مجزا بودن i امین سنجاقک
a	ضریب حرکت اصولی(هم‌ترازی)
A_i	نشان دهنده حرکت اصولی i امین سنجاقک
c	ضریب انسجام
C_i	نشان دهنده‌ی انسجام i امین سنجاقک
f	ضریب منبع غذا
F_i	نشان دهنده منبع غذای i امین سنجاقک
e	ضریب دشمن
E_i	نشان دهنده موقعیّت دشمن از i امین سنجاقک
w	ضریب اینرسی
t	شماره تکرار
d	بعد بردار مکانی، (m)
r_1, r_2	عدد تصادفی

۸- مراجع

[1] Howland RCJ (1929) On the stresses in the neighborhood of circular hole in a strip under tension. Philos Trans Roy Soci 229: 49-86.

[2] Heywood RB (1952) Designing by Photoelasticity. Chapman and Hall, London.

[3] Muskhelishvili NI (1962) Some basic problems of mathematical theory of elasticity. 2rd edn. Netherlands, Noordhooff.

[4] Lekhnitskii SG (1968) Anisotropic plates. 2rd edn. Gordon and Breach Science Publishers, NewYork.

[5] Savin GN (1961) Stress concentration around holes. Pergamon Press, NewYork.

[6] Daoust J, Hoa SV (1991) An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes. Com Str 19:107-130.

[7] Abuelfoutouh NM (1993) Preliminary design of unstiffend composite shells. Symposium of 7th technical Conference of ASC 693-786.

[8] Ukadgaonker VG, Rao DKN (1999) Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates. Com Str 45:171-183.

[9] Batista M (2011) On the stress concentration around hole in an infinite plate subject to uniform load at infinity. Int J Mech Sci 53:254-261.

[10] Lei GH, Ng CWW, Rigby DB (2001) Stress and displacement around an elastic artificial rectangular hole. J Eng Mech 127: 880-890.

[11] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout. Int J Mech Sci 96-102.

[12] Banerjee M , Jain NK, Sanyal S (2013) Stress concentration in isotropic and orthotropic composite plates with center circular hole subjected to transverse static loading. Int J Mech Ind Eng 3: 109-113.

[13] Sharma DS, Patel NP, Panchal KC (2010) Stress distribution around triangular holes in orthrotropic plate. Nirm Uun J ENG TECH 1:56-63.

[14] Woo CW, Chan LW (1992) Boundary collocation method for analyzing perforated plate problems. Eng Fract Mech 43(5):757-768.

[15] Xu X, Sun L, Fan X (1995) Stress concentration of finite composite laminates with elliptical hole. Comput Struct 57(1):29-35

[16] Pan Z, Cheng Y, Liu J (2013) Stress analysis of finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions. Int J Mech Sci 75:265-277.

[17] Jafari M, Ardalani E (2016) Stress concentration in finite metallic plates with regular holes. Int J Mech Sci 106:220-230.

[18] Alonso MG, Duysinx p (2013) Particle swarm optimization (PSO): An alternative method for composite optimization, 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Orlando. Florida. USA. May 19-24.

[19] Jafari M, Rohani A (2014) Stress distribution parameters optimization of orthotropic plates quasi-square cut out using genetic algorithm. J So Flu Mech 4(4): 87-99. (In Persian)

[20] Ines Barbosa CJ, Maria Amélia R (2014) Design of a laminated composite multi-c structure subjected to torsion. 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, St. Petersburg, Russia, September 7-12.

[21] Mahmodzade SA, Jafari M (2015) Optimization of Influence parameter on isotropic plates regular polygonal cutouts using particle swarm algorithm. Modares Mech Eng 15(12):243-253. (in Persian)

[22] Mirjalili S (2016) Dragonfly algorithm: a new meta-heuristic optimization technique for solving single-objective, discrete, and multi-objective problems. Neural Comput Appl.27(4):1053-1073.