مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۶/ دوره ۷/ شماره ۳/ صفحه ۶۷-۸۲

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2017.4286.2131

دانشگاه صنعتی شاهرود

تعیین نواحی پایداری برای ارتعاشات سنگ و قطعه‌کار در عملیات سنگ‌زنی پلانج با استفاده از مدل سه‌بعدی قطعه‌کار

رضا فاضل [۱]، محمد مهدی جلیلی [۲،*] و محمد مهدی ابوترابی [۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

[۲] دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

[۳] استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۳/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۶/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۲۵

چکیده

پدیده لرزه یک نوع ارتعاش خود تحریک ناپایدار است که در اغلب فرآیندهای ماشینکاری از جمله، عملیات سنگ‌زنی رخ می‌دهد. در این مقاله، یک مدل سه بعدی غیر خطی از ارتعاشات لرزه در فرآیند سنگ‌زنی ارائه شده است. قطعه‌کار به صورت یک محور پیوسته در حال دوران با ارتعاشات عرضی و سنگ ساینده، به عنوان یک سیستم یک درجه آزادی جرم-فنر-دمپر مدل شده‌اند. معادلات حرکت با استفاده از روش پی باکینگهام، بی‌بعد سازی شده‌اند. در ادامه با استفاده از روش مودهای فرضی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مربوط به قطعه‌کار، به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی درآمده، سپس مجموعه معادلات قطعه‌کار و سنگ ساینده با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به صورت تحلیلی حل شده‌اند. نواحی پایداری برای قطعه‌کار و سنگ ساینده برای سرعت‌های مختلف قطعه‌کار و مکان‌های مختلف سنگ در طول قطعه‌کار رسم شده، تأثیر پارامترهای مختلف همچون، سرعت دورانی سنگ و شعاع قطعه‌کار بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که ارتعاشات در قطعه‌کار و سنگ، کاملاً متفاوت از یکدیگر هستند. زمانی که سنگ‌زنی در وسط قطعه‌کار رخ می‌دهد، امکان بروز پدیده لرزه در قطعه کار بیشتر است؛ در حالی که مکان سنگ ساینده تأثیری بر ارتعاشات سنگ ندارد.

کلمات کلیدی: لرزه؛ سنگ‌زنی؛ پایداری؛ روش مقیاس‌های چندگانه.

Determination of Stability Regions of Wheel and Workpiece in Plunge Grinding Process Using 3-D Workpiece Model

R. Fazel[1], M. M. Jalili[2,*], M. M. Abootorabi[3]

[1] MSc student, Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

[2] Assoc. Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

[3] Assis. Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

Abstract

The chatter phenomenon is a kind of unstable self-excited vibration which occurs in most machining processes including grinding. A 3-D nonlinear model of chatter vibrations in grinding process has been presented in this paper. The workpiece has been modeled as a continuous rotating shaft with transverse vibrations and wheel is regarded as a one degree of freedom damped spring–mass system. The equations of motion have been dimensionless by π-Buckingham theory. Then using assumed modes method, partial differential equations of workpiece changed to ordinary differential equations and then the method of multiple scales is adopted for the approximate solution. Stability regions for workpiece and wheel in various workpiece rotary speeds and various wheel positions drawed and then the effect of various parameters such as rotational speed of the wheel,and the radius of the workpiece have been investigated. Results showed that vibrations in workpiece and in wheel are quite different from each other. When grinding occurs in the middle of the workpiece the possibility of chatter phenomenon is more, while the position of wheel has no effect on the vibration of the wheel.

Keywords: Chatter; Grinding; Stability; Method of Multiple Scales.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۳۱۲۳۳۰۲۳-۰۳۵؛ فکس: ۳۸۲۱۲۷۸۱-۰۳۵

آدرس پست الکترونیک: jalili@yazd.ac.ir

۱- مقدمه

پدیده لرزه[1] یکی از پدیده‌های دینامیکی رایج در فرآیند ماشین‌کاری است. در ماشین‌کاری، ارتعاشات لرزه بدلیل اثر گذاری منفی روی صحت ابعادی و صافی سطح قطعه‌کار و همچنین بدلیل ایجاد سر و صدای بیش از حد، سایش زیاد ابزار، آسیب دیدن ماشین ابزار، هدر رفتن انرژی و افزایش هزینه‌های تولید، یک اتفاق نامطلوب تلقی می‌شود؛ بنابراین، شناسایی پدیده لرزه برای جلوگیری از آسیب رسیدن به قطعه‌کار، امری ضروری به نظر می‌رسد. یکی از انواع رایج ارتعاشات لرزه، ارتعاشات باززایشی[2] است که نوعی از ارتعاشات خود تحریک شونده به حساب می‌آید [۱] و از نظر ریاضی، با تأخیر زمانی شرح داده می‌شود [۲]. از جمله فرآیندهای پر کاربرد ماشین‌کاری، سنگ‌زنی است. به طور معمول، عملیات سنگ‌زنی جهت پرداخت سطح قطعات بکار می‌رود. تحقیقات زیادی به منظور بررسی، مدل‌سازی و شبیه‌سازی پدیده لرزه، توسط پژوهشگران صورت گرفته است. توبیاس و فیش‌ویک [۳] و تلاستی و پولاکک [۴] همزمان، اما به طور مستقل به این موضوع پی‌بردند که لرزه به دلیل بی‌ثباتی در فرآیند برش به وجود می‌آید. تلاستی و پولاکک، یک دیاگرام پایداری بر اساس مدل دینامیکی برش عمودی و نیروی برش برای یک سیستم یک درجه آزادی بر حسب پارامتر عمق برش در ماشین‌کاری ارائه کردند [۴]. آن‌ها نشان دادند که برای عمق برش بالاتر از حد پایداری، نیروهای دینامیکی و نوسانات افزایش یافته، ارتعاشات چتر به وجود می‌آید. اولین بار تئوری ارتعاشات باززایشی در ماشین ابزار توسط توبیاس ارائه شد [۵]. دشپند و فوفانا، به ارائه یک مدل یک درجه آزادی همراه با معادله دیفرانسیل تأخیری برای شبیه‌سازی پدیده تراشکاری پرداختند [۶]. ایده اصلی این مدل، مطالعه روی پدیده چتر خود تحریک بود که غیرخطی بودن پدیده ماشین‌کاری را به صورت کیفی توضیح می‌دهد. جلیلی و طواری، با ارائه یک مدل سه بعدی غیر خطی ارتعاشات لرزه در فرآیند تراشکاری، تأثیر پارامترهای مختلف را در پایداری براده‌برداری در دو حالت ماشینکاری با و بدون مرغک بررسی کردند[۷،۸]. تامپسون یکی از اولین تحقیقات انجام گرفته روی ارتعاشات در سنگ‌زنی پلانج را با در نظر گرفتن باززایش در قطعه‌کار و هچنین ابزار صورت داد [۹] و اثرگذاری فاکتورهای مختلف روی پایداری سنگ‌زنی را در مدل خویش مطالعه کرد [۱۰،۱۱]. این مدل توسط لی و شین بهبود یافت [۱۲]. آن‌ها با بکارگیری شبیه‌سازی عددی توانستند، نتایج دقیق‌تری را به‌دست آورند. شیمیزو و همکاران، تحقیقات تجربی را در زمینه سنگ‌زنی عرضی صورت دادند [۱۳] و متوجه شدند، بیشترین دامنه ارتعاشی زمانی رخ می‌دهد که سنگ‌زنی در وسط قطعه کار انجام می‌شود و به طور یکنواخت با دور شدن سنگ ساینده، کاهش می‌یابد. بعد از آن فو و همکاران، وجود دو ارتعاش متمایز در سنگ و قطعه‌کار را در فرآیند سنگ‌زنی گزارش دادند [۱۴]. همچنین دریافتند، نمودارهای لرزه زمانی که سنگ ساینده در امتداد قطعه‌کار در حال حرکت است، به‌شدت متفاوت است. به عبارت دیگر، حرکت سنگ اثر به‌سزایی در پارامترهای لرزه، یعنی دامنه و فرکانس ارتعاش دارد. وک و همکاران، شبیه‌سازی‌های دقیق‌تری را برای پیش‌بینی پایداری سنگ‌زنی انجام دادند [۱۵]. اگرچه نتایج گروه وک تا حدی دقیق بود، ولی بدلیل درنظر نگرفتن مکان سنگ، آن‌ها نتوانستند، رفتار دینامیکی واحدی برای سنگ‌زنی ارائه نمایند. یوآن و همکاران، مدلی با دو تأخیر زمانی را استخراج کردند که ناشی از باززایش سطح سنگ ساینده و قطعه‌کار بود [۱۶]. آن‌ها در این مدل، پایداری سنگ زنی و همچنین لرزه را بررسی کردند. سپس این مدل به منظور بررسی اثرات پارامترهای مؤثر بر پایداری فرآیند سنگ زنی، توسط لی و پایره خطی‌سازی شد [۱۷]. چانگ و لیو، این مدل را برای پیش‌بینی ارتعاشات لرزه بسط دادند [۱۸]. آن‌ها با استفاده از روش PIS[3] مشاهده کردند که لرزه با هوپف فرا بحرانی[4] کاهش می‌یابد. کیم و همکاران، پایداری سنگ‌زنی و آنالیز جدایش[5] را برای رفتار ارتعاشی غیرخطی در فرآیند سنگ‌زنی بررسی کردند [۱۹]. آن‌ها در مدل خویش، جابه‌جایی سنگ ساینده را لحاظ نکرده بودند. شیاوٌ و همکاران، حرکت سنگ در طول قطعه‌کار را در مدل و شبیه‌سازی خویش لحاظ نمودند؛ ولی نتوانستند، توضیح کامل و جامعی برای دینامیک

[1] Chatter
[2] Regenerative
[3] Perturbation Incremental Scheme
[4] Supercritical Hopf Bifurcation
[5] Bifurcation

فرآیند سنگ زنی ارائه نمایند [۲۰]. یان و همکاران، با گسترش این مدل، به بررسی پایداری و آنالیز جدایش در ارتعاشات لرزه سنگ‌زنی عرضی پرداختند [۲۱]؛ همچنین آن‌ها با آنالیز غیر خطی سنگ‌زنی پلانج، اثر کنترل‌گر مناسب برای کنترل مرزهای جدایش را بررسی کردند [۲۲].

مدل‌های استفاده شده در مطالعات قبلی روی پدیده لرزه در عملیات سنگ‌زنی، اکثراً مدل‌های ساده دو بعدی هستند؛ همچنین مدل درنظرگرفته شده برای ابزار و قطعه‌کار در این مدل‌ها، معمولاً خطی هستند. به علت دوبعدی بودن، امکان شبیه‌سازی اثر مکان طولی سنگ بر پدیده لرزه در این مدل‌ها وجود ندارد؛ همچنین اکثر این مدل‌ها، اثرات ژیروسکوپیکی ناشی از دوران قطعه‌کار را درنظر نمی‌گیرند. در این مقاله، قطعه‌کار به صورت سه بعدی و با در نظر گرفتن اثر ژیروسکوپی مدل شده، معادلات ارتعاشی به‌دست آمده با استفاده از روش‌های تحلیلی حل شده است. از دیگر ویژگی های این پژوهش، می‌توان به بررسی پدیده لرزه با در نظر گرفتن مکان سنگ در طول قطعه‌کار و استفاده از پارامترهای بدون بعد به‌منظور بررسی و آنالیز حساسیت مناسب‌تر روی پارامترهای مؤثر بر ارتعاشات لرزه اشاره کرد.

۲- مدل‌سازی سیستم و بدست آوردن معادلات حرکت

برای بدست آوردن معادلات دینامیکی حاکم بر سنگ‌زنی، در ادامه مدل‌سازی و معادلات حرکت برای قطعه‌کار و سنگ ساینده به صورت مجزا ذکر شده است.

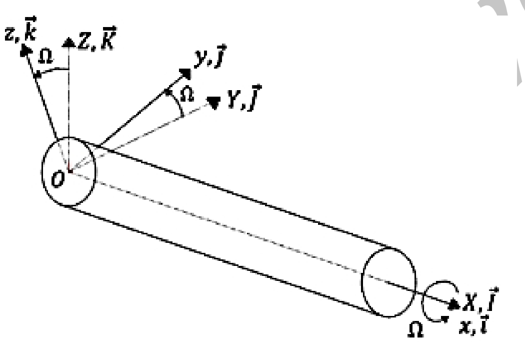
۲-۱- قطعه‌کار

با توجه به اینکه قطعه‌کار در دو طرف توسط دو مرغک مهار شده است، می‌توان آن را به صورت یک تیر دو سر مفصل مدل‌سازی کرد. به منظور بدست آوردن معادلات حرکت حاکم بر قطعه‌کار، از چندین دستگاه مختصات استفاده شده است. مطابق شکل ۱، دستگاه مختصات Z,Y,X و بردارهای یکه $\vec{I}$، $\vec{J}$، $\vec{K}$ متصل به آن در چارچوب اینرسی $\Re$ ثابت شده است. دستگاه مختصات z,y,x و بردارهای یکه متناظرش یعنی $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$، $\vec{k}$، در چارچوب مرجع $\aleph$ قرار دارد که این چارچوب با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega\vec{I}$ نسبت به چارچوب $\Re$ دوران می‌کند.

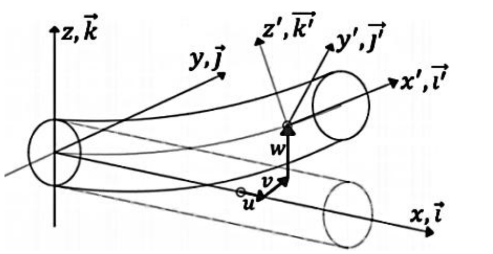
تغییر شکل‌های خمشی تیر، توسط جابه‌جایی‌های الاستیک (w,v,u) موازی با بردارهای یکه $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$، $\vec{k}$، در شکل ۲ نشان داده شده است. یک نقطه در دستگاه z,y,x قبل از تغییر شکل در مختصات $(0,0,x)$ قرار گرفته که بعد از تغییر شکل، به مختصات $(w,v,x+u)$ انتقال می‌یابد.

در شکل ۳، سطح مقطع تیر بعد از تغییر شکل نشان داده شده است. محورهای دستگاه مختصات ξ,η، محورهای اصلی سطح مقطع هستند. بعد از تغییر شکل، مرکز برش آن (مبدأ دستگاه مختصات ξ,η) به اندازه u در جهت x v در جهت y و w در جهت z جابه‌جا می‌شود. ضمناً در این شکل، صفحه $\vec{k}'-\vec{\jmath}'$ در صفحه $\vec{k}-\vec{\jmath}$ تصویر شده است؛ همچنین زاویه پیچش سطح مقطع حول محور x' به اندازه φ است. در اینجا به‌دلیل ناچیز بودن مقدار u و φ، از آن‌ها صرف نظر شده است.

چندین تبدیل مختصات در اینجا استفاده شده است که شامل، یک تبدیل ساده از دستگاه $\vec{I}$، $\vec{J}$، $\vec{K}$ به دستگاه $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$، $\vec{k}$ و یک تبدیل پیچیده‌تر از $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$، $\vec{k}$ به دستگاه $\vec{\imath}'$، $\vec{\jmath}'$، $\vec{k}'$ می‌شود. فرمول‌های مربوط به این تبدیل، در رابطه (۱) آمده است [۲۳].



شکل ۱- دستگاه‌های مختصات قبل از تغییر شکل



شکل ۲- وضعیت تیر قبل و بعد از جابجایی‌های الاستیک

$$\vec{i}' = \left(1-\tfrac{1}{2}v'^2+\tfrac{1}{2}w'^2\right)\vec{i}+v'\vec{j}+w'\vec{k}$$
$$\vec{j}' = -v'\vec{j}+\left(1-\tfrac{1}{2}v'^2\right)\cos(v'w')\vec{j}$$
$$\vec{k}' = -w'\vec{j}-\left(1-\tfrac{1}{2}v'^2\right)\sin(v'w')\vec{j} + \left(1-\frac{1}{2}w'^2\right)\vec{k} \qquad (۱)$$

با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی برای قطعه‌کار به‌دست می‌آید. اصل هامیلتون، با رابطه (۲) بیان می‌شود.

$$\int_1^2 [\delta(U-T)-\delta W]dt = 0 \qquad (۲)$$

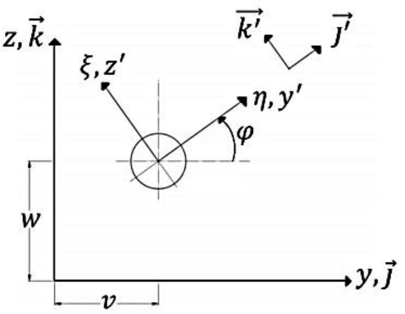
۲-۱-۱- محاسبه انرژی پتانسیل

انرژی کرنشی بر اساس تنش‌ها و کرنش‌های مهندسی، بر اساس رابطه (۳) محاسبه می‌شود [۲۳].

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L\iint_A(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{x\eta}\varepsilon_{x\eta} +\sigma_{x\xi}\varepsilon_{x\xi})d\eta d\xi dx \qquad (۳)$$

که در آن:

$$\sigma_{xx}=E\varepsilon_{xx}$$
$$\sigma_{x\eta}=G\varepsilon_{x\eta}$$
$$G\varepsilon_{x\xi}=\sigma_{x\xi} \qquad (۴)$$



شکل ۳- سطح مقطع تیر بعد از تغییر شکل

واریشن رابطه (۳)، به صورت رابطه (۵) به دست می‌آید.

$$\delta U=\int_0^L\left(\overline{Y}_V\delta v+\overline{Y}_W\delta w\right)dx+b(U) \qquad (۵)$$

که در آن:

$$\overline{Y_V}= M_z''-(V_{x'}v')'$$
$$\overline{Y_w}= M_y''-(V_{x'}w')'$$
$$b(U)=[V_{x'}v'-M'_{z'}]\delta v\Big|_0^L+M_{z'}\delta v'\Big|_0^L -M_{y'}\delta w'\Big|_0^L+[V_{x'}w'+M'_{y'}]\delta w\Big|_0^L \qquad (۶)$$

همچنین، تنش‌ها و گشتاورهای رابطه (۶)، به‌صورت رابطه (۷) تعریف می‌شوند.

$$V_{x'}\equiv\iint_A \sigma_{xx}\ d\eta d\xi=\frac{EA}{2}(v'^2+w'^2)$$
$$M_{y'}\equiv\iint_A \xi\sigma_{xx}\ d\eta d\xi=-EI_{y'}w''$$
$$M_{z'}\equiv-\iint_A \eta\sigma_{xx}\ d\eta d\xi=EI_{z'}v'' \qquad (۷)$$

با فرض سطح مقطع دایره‌ای برای قطعه‌کار، مساحت و ممان اینرسی سطح به صورت رابطه (۸) محاسبه می‌شوند:

$$A\equiv\iint_A d\eta d\xi=\pi R^2$$
$$I_{y'}\equiv\iint_A \xi^2\ d\eta d\xi=\frac{\pi}{4}R^2$$
$$I_{z'}\equiv\iint_A \eta^2\ d\eta d\xi=\frac{\pi}{4}R^2 \qquad (۸)$$

که در آن R شعاع قطعه‌کار است.

۲-۱-۲- محاسبه انرژی جنبشی

مکان یک نقطه دلخواه قطعه‌کار، پس از تغییر شکل در مختصات (x_1,y_1,z_1)، بارابطه (۹) معرفی می‌شود [۲۳]:

$$x_1= x-v'\eta-w'\xi$$
$$y_1= v+\eta$$
$$z_1= w+\xi \qquad (۹)$$

سرعت کل این نقطه نسبت به چارچوب $\mathfrak{R}$، به صورت رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود:

$$\vec{v}= \partial\vec{r}/\partial t+\Omega\vec{I}\times\vec{r} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\vec{r}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ در چارچوب، در حال دوران $\aleph$ بوده، عبارت $\Omega\vec{I}\times\vec{r}$ بدلیل دوران دستگاه مختصات به وجود می‌آید. سرعت‌های رابطه (۱۰) برابرند با :

$$\partial\vec{r}/\partial t=\dot{x}_1\vec{i}+\dot{y}_1\vec{j}+\dot{z}_1\vec{k}$$
$$\Omega\vec{I}\times\vec{r}=-\Omega z_1\vec{j}+\Omega y_1\vec{k} \qquad (۱۱)$$

در نتیجه سرعت کل با رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود:

$$\vec{v}= \dot{x}_1\vec{i}+(\dot{y}_1-\Omega z_1)\vec{j}+(\dot{z}_1+\Omega y_1)\vec{k} \qquad (۱۲)$$

انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود.

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L\iint_A \rho\vec{v}\cdot\vec{v}\ d\eta d\xi\ dx \qquad (۱۳)$$

که واریشن رابطه فوق به‌صورت رابطه (۱۴) است:

$$\delta T=\int_0^L\iint_A \rho\vec{v}\cdot\delta\vec{v}\ d\eta d\xi \qquad (۱۴)$$

با محاسبه رابطه (۱۴) روی سطح مقطع تیر، رابطه (۱۵) بدست می‌آید.

$$\delta T=\int_0^L\begin{bmatrix}(\overline{z_v}-\overline{z_{v'}})\delta v\\+(\overline{z_w}-\overline{z_{w'}})\delta w\end{bmatrix}dx+b(T) \qquad (۱۵)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
&\overline{z_v}=m\Omega^2 v+2m\Omega\dot{w}-m\ddot{v}\\
&\overline{z_w}=m\Omega^2 w-2m\Omega\dot{v}-m\ddot{w}\\
&\overline{z_{v'}}=-\frac{mR^2}{4}\ddot{v}'\\
&\overline{z_{w'}}=-\frac{mR^2}{4}\ddot{w}'\\
&b(T)=\overline{z_{v'}}\delta v\big|_0^L+\overline{z_{w'}}\delta w\big|_0^L\\
&m=\iint_A\rho d\eta d\xi=\rho\pi R^2
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

۲-۱-۳- محاسبه کار نیروی ناپایستار

کار مجازی نیروی ناپایستار با رابطه (۱۷) تعریف می‌شود:

$$W=\int_o^L F_g\,\delta_D(x-x_0)\delta v dx \qquad (۱۷)$$

که در آن F_g نیروی سنگ‌زنی است که در راستای y به قطعه‌کار وارد می‌شود. نیروی سنگ زنی مطابق مرجع [۲۴]، به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$F_g=WKC^\nu\left(\frac{R}{R_g}\right)^{2\mu-1}\left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)^{2\mu-1}{D_e}^{1-\mu}D^\mu \qquad (۱۸)$$

که در آن W پهنای سنگ ساینده، Ω_g و Ω به ترتیب، سرعت زاویه‌ای قطعه‌کار و سنگ ساینده، R_g شعاع سنگ و $D_e=2RR_g/(R+R_g)$ قطر هم‌ارزی است؛ همچنین K بیانگر سختی سنگ‌زنی، C پارامتر بی‌بعد مربوط به زاویه برش و $\nu\in[0,1]$ و $\mu\in[0.5,1]$ پارامترهای بی‌بعد هستند که از آزمایش‌های تجربی بدست می‌آیند. D عمق براده‌برداری لحظه‌ای است [۲۴] که شامل، عمق براده‌برداری نامی (D_n) و همچنین پس‌زنی[1] سنگ و قطعه کار (D_g) است. D_g با فاصله نسبی سنگ و قطعه‌کار یعنی $\Delta(t,x_0)=v(t,x_0)-v_g(t)$ به‌صورت زیر رابطه دارد:

$$\begin{aligned}D_g=&\Delta(t,x_0)-g\Delta(t-T_g,x_0)\\&-\Delta(t-T_w,x_0)\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که در آن T_w و T_g به ترتیب، دوره تناوب چرخش قطعه‌کار و سنگ است؛ همچنین $g\in[\frac{1}{5000},1]$ نسبت سنگ‌زنی نامیده می‌شود [۲۵]. $g=\frac{1}{5000}$، بیانگر سخت بودن سنگ ساینده و $g=1$، نشان‌دهنده نرم بودن آن است. با جایگذاری روابط (۵)، (۱۳) و (۱۵) در رابطه (۲)، معادلات حرکت حاکم بر قطعه‌کار به‌صورت رابطه (۲۰) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
EIv''''-&\frac{EA}{2}\left(\left(v'^2+w'^2\right)v'\right)'+m\ddot{v}\\
&-m\Omega^2 v-2m\Omega\dot{w}\\
&-\rho I\ddot{v}''=F_g\delta_D(x-x_0)\\
EIw''''-&\frac{EA}{2}\left(\left(v'^2+w'^2\right)v'\right)'+m\ddot{w}\\
&-m\Omega^2 w+2m\Omega\dot{v}-\rho I\ddot{w}''=0
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

۲-۲- سنگ ساینده

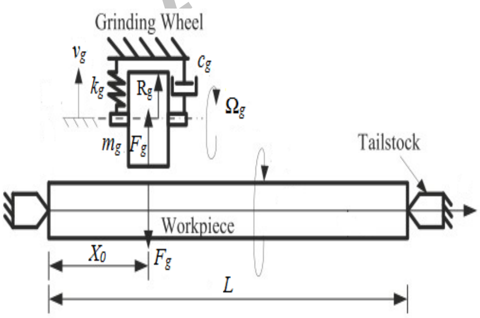
مطابق شکل ۴ سنگ ساینده به عنوان یک سیستم، جرم و فنر با جرم m_g، سختی k_g و ضریب دمپینگ c_g با شعاع R_g مدل‌سازی شده است؛ در نتیجه، با استفاده از قانون نیوتن، معادله حرکت سنگ ساینده به صورت معادله (۲۱) به‌دست می‌آید.

$$m_g\frac{d^2v_g(t)}{dt^2}+c_g\frac{dv_g(t)}{dt}+k_g v_g(t)=-F_g \qquad (۲۱)$$

۲-۳- نقطه‌ی تعادل

برای شروع سنگ‌زنی ساده‌ترین وضعیت، یعنی عدم ارتعاش چتر در نظر گرفته شده است. از روی شرایط مرزی، حل معادله (۲۰) به صورت یک سری سینوسی به فرم رابطه (۲۲) فرض می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}(x.t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}_i(t)\sin\left(\frac{ix\pi}{L}\right)\\
&\mathrm{w}(x.t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{w}_i(t)\sin\left(\frac{ix\pi}{L}\right)
\end{aligned} \qquad (۲۲)$$



شکل ۴- شکل شماتیک عملیات سنگ زنی پلانج

[1] Back-off

زمانی که لرزه وجود ندارد، حل‌ها مستقل از زمان می‌شوند؛ بنابرین جابجایی سنگ و قطعه کار، به‌صورت رابطه (۲۳) است.

$$\mathrm{v}_g = v_g^{(0)}$$
$$\mathrm{v}(t,x) = v^0(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_i^{(0)} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$
$$w(t,x) = w^0(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_i^{(0)} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲۳) در روابط (۲۰) و (۲۱) و سپس با ضرب رابطه (۲۰) در $\sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$ و انتگرال گیری از ۰ تا L، عبارات (۲۴) به‌دست می‌آید:

$$v_g^{(0)} = \frac{k_c}{k_g}\left(D_n + g\Delta^{(0)}(x_0)\right)^{\mu} (-EL\frac{i^4\pi^4}{2L^3} + \frac{m\Omega^2}{2L})v_i^{(0)}$$
$$-\frac{3EAi^4\pi^4}{16L^3} v_i^{(0)^3} = k_g v_g^{(0)} \sin\left(\frac{i\pi x_0}{L}\right)$$
$$w_i^{(o)} = 0 \qquad (۲۴)$$

که در آن، $k_c = WKC^v\left(\frac{R}{R_g}\right)^{2\mu-1}\left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)^{2\mu-1} {D_e}^{1-\mu}$ و $\Delta^{(0)}(x_0) = v^{(0)}(x_0) - {v_g}^{(0)}$ است؛ همچنین ${v_g}^{(0)}$ و ${v_i}^{(0)}$ از معادله (۲۴)، قابل محاسبه است. با تعریف پارامترهای زیر، مبدأ روابط (۲۰) و (۲۱) به نقطه تعادل منتقل می‌شود.

$${v_g}^*(t) = v_g(t) - {v_g}^{(0)}$$
$$v^*(t,x) = v(t,x) - v^{(0)}(x)$$
$$w^*(t,x) = w(t,x) - w^{(0)}(x)$$
$${D_g}^* = D_g - {D_g}^{(0)}$$
$${D_g}^{(0)} = -g\Delta^{(0)}(x_0) \qquad (۲۵)$$

در نتیجه با جایگذاری پارامترهای فوق در روابط (۲۰) و (۲۱) و با توجه به $w^{(0)}(x) = 0$، رابطه (۲۶) حاصل می‌شود.

$$m_g\frac{d^2 v^*_g(t)}{dt^2} + c_g\frac{dv^*_g(t)}{dt} + k_g \mathrm{v}^*_g(t)$$
$$= -k_g v_g^{(0)} + k_c\left(D_n + D_g^{(0)} + D_g^*\right)^{\mu}$$
$$EIv^{*''''} - \frac{EA}{2}\left(\left({v^*}'^2 + {w^*}'^2\right){v^*}'\right)' + \mathrm{m}\ddot{v}^*$$
$$-\mathrm{m}\Omega^2 v^* - 2m\Omega\dot{w}^* - \rho I\ddot{v}^{*''} = -ELv^{(0)''''}$$
$$+\frac{EA}{2}\left({v^{(0)'}}^3\right)' + m\Omega^2 v^{(0)}$$
$$-k_c\delta_D(x-x_0)\left(D_n + D_g^{(0)} + D_g^*\right)^{\mu}$$
$$EIw^{*''''} - \frac{EA}{2}\left(\left({v^*}'^2 + {w^*}'^2\right){w^*}'\right)'$$
$$+\mathrm{m}\ddot{w}^* - \mathrm{m}\Omega^2 w^* + 2m\Omega\dot{v}^* - \rho I\ddot{w}^{*''} = 0$$
(۲۶)

۲-۴- بی‌بعد سازی معادلات حرکت

یکی از روش‌های مرسوم در بی‌بعدسازی معادلات، روش پی-باکینگهام است. با استفاده از این روش، پارامترهای بی‌بعد زیر برای بی‌بعد سازی معادلات ارتعاشی سیستم استخراج شده‌اند.

$$\tau = t\sqrt{\frac{k_g}{m_g}}, \tau_w = T_w\sqrt{\frac{k_g}{m_g}}, \quad \tau_g = T_g\sqrt{\frac{k_g}{m_g}}$$
$$\overline{v} = \frac{v^*}{D_n}, \quad \overline{w} = \frac{w^*}{D_n}, \quad \overline{v}_g = \frac{v_g^*}{D_n}, \quad \overline{v}^{(0)} = \frac{v^{(0)}}{D_n}$$
$$\overline{v}_g^{(0)} = \frac{v_g^{(0)}}{D_n}, \qquad \overline{x}_0 = \frac{x_0}{D_n}, \qquad \overline{D}_g = \frac{D_g^*}{D_n}$$
$$\overline{D}_g^{(0)} = \frac{D_g^{(0)}}{D_n}, \qquad l = \frac{L}{D_n}, \qquad \overline{x} = \frac{x}{D_n}$$
$$C_g = \sqrt{\frac{C_g^2}{k_g m_g}}, \quad \gamma = \Omega\sqrt{\frac{m_g}{k_g}}, \quad \chi = \frac{\rho I}{mD_n^2}$$
$$k_c = \frac{k_c}{k_g}\left(\frac{\tau_g}{\tau_w}\right)^{2\mu-1} D_n^{\mu-1} \quad ,\eta = \frac{E\, Im_g}{D_n^4\, mk_g}$$
$$\xi = \frac{EAm_g}{2D_g^2 mk_g}, \qquad k_c' = \frac{k_c m_g}{k_g m}\left(\frac{\tau_g}{\tau_w}\right)^{2\mu-1} D_n^{\mu-2} \qquad (۲۷)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در رابطه (۲۷)، رابطه (۲۶) به رابطه (۲۸) تبدیل می‌شود.

$$\ddot{\overline{v}}_g(\tau) + \overline{v_g}(\tau) = -\overline{v}_g^{(0)} - C_g\dot{\overline{v}}_g(\tau)$$
$$+k_c\left(1 + \overline{D}_g^{(0)} + \overline{D}_g\right)^{\mu}$$
$$\ddot{\overline{v}}(\tau,\overline{x}) - \gamma^2\overline{v} = (\tau,\overline{x}) + \eta\overline{\mathrm{v}}''''(\tau,x)$$
$$-\xi\left(\left(\overline{v}'^2(\tau,x) + \overline{w}'^2(\tau,\overline{x})\right)\overline{v}'(\tau,\overline{x})\right)'$$
$$-2\gamma\overline{w}'(\tau,\overline{x}) - \chi\ddot{\overline{v}}''(\tau,\overline{x})$$
$$= -\eta\overline{v}^{(0)}(\overline{x}) + \xi\left(\overline{v}^{(0)^3}(\overline{x})\right)'$$
$$+\gamma^2\overline{v}^{(0)}(\overline{x})$$
$$-k_c'\delta(\overline{x} - \overline{x}_0)\left(1 + \overline{D}_g^{(0)} + \overline{D}_g\right)^{\mu}$$
$$\ddot{\overline{w}}(\tau,\overline{x}) - \gamma^2\overline{w}(\tau,\overline{x}) + \eta\overline{w}(\tau,\overline{x})$$
$$-\xi\left(\left(\overline{v}'^2(\tau,\overline{x})\right) + \overline{w}'^2(\tau,\overline{x})\right)\overline{w}'(\tau,\overline{x})\right)'$$
$$+2\gamma\overline{v}'(\tau,\overline{x}) - \chi\ddot{\overline{w}}''(\tau,\overline{x}) = 0 \qquad (۲۸)$$

شرایط مرزی معادلات (۲۸)، مطابق رابطه (۲۹) است.

$$\overline{w}(\tau,0) = \frac{d^2\overline{w}(\tau,0)}{d\overline{x}^2} = 0$$
$$\overline{w}(\tau,l) = \frac{d^2\overline{w}(\tau,l)}{d\overline{x}^2} = 0$$
$$\overline{v}(\tau,0) = \frac{d^2\overline{v}(\tau,0)}{d\overline{x}^2} = 0$$
$$\overline{v}(\tau,l) = \frac{d^2\overline{v}(\tau,l)}{d\overline{x}^2} = 0 \qquad (۲۹)$$

۲-۵- آماده سازی معادلات حرکت برای حل تحلیلی

با استفاده از روش مودهای فرضی و با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۸)، معادله (۳۰) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\bar{v}}_g(\tau)+\overline{v_g}(\tau)=-\varepsilon\bar{c}\,\dot{\bar{v}}_g(\tau)\\
&\quad-\varepsilon\bar{k}\big(-\bar{v}_g(\tau)+g\bar{v}_g(\tau-\tau_g)\\
&\quad+\bar{v}_g(\tau-\tau_w)+\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i(\tau)\sin\left(\frac{i\pi\bar{x}_0}{l}\right)\\
&\quad-g\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i(\tau-\tau_g)\sin\left(\frac{i\pi\bar{x}_0}{l}\right)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i(\tau-\tau_w)\sin\left(\frac{i\pi\bar{x}_0}{l}\right)\big)\\
&\ddot{\bar{v}}_i(\tau)+{\lambda_i}^2\bar{v}_i(\tau)=\varepsilon\Lambda_i\big(({\bar{v}_i}^2(\tau)\\
&\quad+{\bar{w}_i}^2(\tau))\bar{v}_i(\tau)\big)+\alpha_i\dot{w}_i(\tau)\\
&\quad+\varepsilon{\bar{k}_i}'\big(\bar{v}_g(\tau)\\
&\quad+g\bar{v}_g(\tau-\tau_g)+\bar{v}_g(\tau-\tau_w)\big)\\
&\quad+\varepsilon{\bar{k}'}_i\sigma_i\Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i(\tau)\sin\left(\frac{i\pi\bar{x}_0}{l}\right)\\
&\quad-g\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i(\tau-\tau_g)\sin\left(\frac{i\pi\bar{x}_0}{l}\right)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i(\tau-\tau_w)\sin\left(\frac{i\pi\bar{x}_0}{l}\right)\Big)\\
&\ddot{\bar{w}}_i(\tau)+{\lambda_i}^2\bar{w}_i(\tau)=\varepsilon\Lambda_i\big(({\bar{v}_i}^2(\tau)\\
&\quad+{\bar{w}_i}^2(\tau))\bar{w}_i(\tau)\big)-\alpha_i\dot{\bar{v}}_i(\tau)
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

که پارامترهای موجود در آن به صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\bar{c}=C_g\,,\quad \varepsilon\bar{k}=k_c\mu\left(1+\bar{D}_g^{(0)}\right)^{\mu-1}\\
&\sigma_i=\sin\left(\frac{i\bar{x}_0\pi}{l}\right),\quad {\lambda_i}^2=\frac{\frac{-\gamma^2}{2}+\frac{\eta i^4\pi^4}{2l^3}}{\chi\frac{i^2\pi^2}{2l}+\frac{l}{2}}\\
&\varepsilon\Lambda_i=\frac{\xi\frac{3i^4\pi^4}{8l^3}}{\chi\frac{i^2\pi^2}{2l}+\frac{l}{2}}\,,\quad \alpha_i=\frac{\gamma l}{\chi\frac{i^2\pi^2}{2l}+\frac{l}{2}}\\
&\varepsilon{\bar{k}'}_i=\frac{{k_c}'\,\mu\left(1+\bar{D}_g^{(0)}\right)^{\mu-1}\sin\left(\frac{i\bar{x}_0\pi}{l}\right)}{\chi\frac{i^2\pi^2}{2l}+\frac{l}{2}}
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

که در آن ε پارامتر بی‌بعد بسیار کوچک است. این پارامتر نشان می‌دهد که ضریب دمپینگ سیستم و سختی سنگ‌زنی در برابر دیگر پارامترهای سیستم، مقادیر نسبتاً کوچکی هستند.

۳- حل تحلیلی

حل عددی برای مسائل دینامیکی با تعداد متغیرهای حالت زیاد و همچنین زمان شبیه‌سازی طولانی، زمانبر است؛ همچنین بررسی پارامتریک روی پاسخ تحلیلی یک مسأله بسیار ساده‌تر از حل عددی آن است. لذا در این پژوهش به منظور بررسی پدیده لرزه در عملیات سنگ‌زنی، از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است [۲۶]. با در نظرگرفتن یک مقیاس زمانی اصلی $T_0=\tau$ و یک مقیاس زمانی آهسته $T_1=\varepsilon\tau$ و با تعریف متغیرهای رابطه (۳۲) برای ساده‌تر شدن شرح عبارات، رابطه (۳۳) برای v_i, w_i, k=g، j=w, g و i=1,2,…,n تعریف می‌شود.

$$x_g=\bar{v}_g\quad,\quad x_{vi}=\bar{v}_i\quad,\quad x_{wi}=\bar{w}_i \tag{۳۲}$$

و

$$\begin{aligned}
&x_k(\tau)=x_k(T_0,T_1)=x_{k0}(T_0,T_1)\\
&\quad+\varepsilon x_{k1}(T_0,T_1)\\
&x_k(\tau-\tau_j)=x_{k0}(T_0-\tau_j\ ,T_1-\varepsilon\tau_j)\\
&\quad+\varepsilon x_{k1}(T_0-\tau_j\ ,T_1-\epsilon\tau_j)\\
&\quad=x_{k0}(T_{00}-\tau_j\ ,T_1)\\
&\quad-\varepsilon\frac{\partial x_{k0}(T_0-\tau_j\ ,T_1)}{\partial T_1}\tau_j\\
&\quad+\varepsilon x_{k\,1}(T_0-\tau_j\ ,T_1)+o(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳۳) و مشتقات آن نسبت به T_0 و T_1 در رابطه (۳۰) و جداکردن ضرایب ε^0 و ε^1 روابط زیر برای i=1,2,…,n به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&D_0^2x_{g0}(T_0,T_1)+x_{g0}(T_0,T_1)=0\\
&D_0^2x_{vi0}(T_0,T_1)+{\lambda_i}^2x_{vi0}(T_0,T_1)\\
&\quad-\alpha_iD_0x_{wi0}(T_0,T_1)=0\\
&D_0^2x_{wi0}(T_o,T_1)+{\lambda_i}^2x_{wi0}(T_o,T_1)\\
&\quad+\alpha_iD_0x_{vi0}(T_o,T_1)=0
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

و

$$\begin{aligned}
&D_0^2x_{g1}(T_0,T_1)+x_{g1}(T_0,T_1)\\
&\quad=-2D_0D_1x_{g0}(T_0,T_1)\\
&\quad-\bar{c}\,D_0x_{g0}(T_0,T_1)+\bar{k}x_{g0}(T_0,T_1)\\
&\quad-\bar{k}gx_{g0}(T_0-\tau_g,T_1)\\
&\quad-\bar{k}x_{g0}(T_0-\tau_w,T_1)\\
&\quad-\bar{k}\sum_{i=1}^{n}x_{vi0}(T_0,T_1)\,\sigma_i\\
&\quad+\bar{k}g\sum_{i=1}^{n}x_{vi0}(T_0-\tau_g,T_1)\,\sigma_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\bar{k}\sum_{i=1}^{n} x_{vi0}(T_0-\tau_w,T_1)\,\sigma_i \\
&D_0^2 x_{vi1}(T_0,T_1)+{\lambda_i}^2 x_{vi1}(T_0,T_1) \\
&\quad -\alpha_i D_0 x_{wi1}(T_0,T_1) \\
&\qquad\qquad = -2D_0 D_1 x_{vi0}(T_0,T_1) \\
&\quad +\alpha_i D_1 x_{wi0}(T_0,T_1)+\Lambda_i({x_{vi0}}^3(T_0,T_1) \\
&\quad +{x_{wi0}}^2(T_0,T_1)x_{vio}(T_0,T_1)) \\
&\quad -\overline{k'}x_{g0}(T_0,T_1)\ +\overline{k'}_i g x_{g0}(T_0-\tau_g\ ,T_1) \\
&\quad +\overline{k'}_i x_{g0}(T_0-\tau_w\ ,T_1)+\overline{k'}_i(\sum_{i=1}^{n} x_{vi0}(T_0,' \\
&\quad -g\sum_{i=1}^{n} x_{vi0}(T_0-\tau_g,T_1)\,\sigma_i \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n} x_{vi0}(T_0-\tau_w,T_1)\,\sigma_i) \\
&D_0^2 x_{wi1}(T_0,T_1)+{\lambda_i}^2 x_{wi1}(T_0,T_1) \\
&\quad +\alpha_i D_0 x_{vi1}(T_0,T_1) \\
&\qquad\qquad = -2D_0 D_1 x_{wi0}(T_0,T_1) \\
&\quad -\alpha_i D_1 x_{vi0}(T_0,T_1)+\Lambda_i({x_{wi0}}^3(T_0,T_1) \\
&\quad +{x_{vi0}}^2(T_0,T_1)x_{wi0}(T_0,T_1))
\end{aligned}
\tag{۳۵}
$$

که در آن $D_0=\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $D_1=\frac{\partial}{\partial T_1}$ است. پاسخ x_{g0} از رابطه (۳۴) به‌صورت رابطه (۳۶) به‌دست می‌آید.

$$x_{g0}(T_0,T_1)=A_g(T_1)e^{iT_0}+c.c \tag{۳۶}$$

که در آن $c.c$ بیانگر مزدوج مختلط عبارات قبل از خود است؛ همچنین با فرض $x_{wi0}=w_i\,e^{i\omega_i T_0}$ و $x_{vi0}=v_i\,e^{i\omega_i T_0}$ و جایگذاری آن در رابطه (۳۴) و با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب v_i و w_i برای بدست آوردن جواب غیر بدیهی، مقدار ω_i طبق رابطه (۳۷) به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&\omega_{i1} \\
&=\sqrt{\frac{({\alpha_i}^2+2{\lambda_i}^2)-\sqrt{({\alpha_i}^2+2{\lambda_i}^2)^2-4{\lambda_i}^2}}{2}} \\
&\omega_{i2} \\
&=\sqrt{\frac{({\alpha_i}^2+2{\lambda_i}^2)+\sqrt{({\alpha_i}^2+2{\lambda_i}^2)^2-4{\lambda_i}^2}}{2}}
\end{aligned}
\tag{۳۷}
$$

با جایگذاری ω_{i1} و ω_{i2} در دستگاه معادلات و بدست‌آوردن نسبت پاسخ‌ها یعنی $z_{in}=\frac{x_{w_i}}{x_{v_i}}=\frac{-i\omega_{in}\alpha_i}{{\lambda_i}^2-{\omega_{in}}^2}$ برای $n=1,2$، پاسخ x_{vi0} و x_{wi0} از رابطه (۳۸) برای i=1,2,…,n حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&x_{vio}(T_o,T_1)=A_{i1}(T_1)e^{i\omega_{i1}T_0} \\
&\quad +A_{i2}(T_1)e^{i\omega_{i2}T_0}+c.c \\
&x_{wio}(T_o,T_1)=z_{i1}A_{i1}(T_1)e^{i\omega_{i1}T_0} \\
&\quad +z_2A_{i2}(T_1)e^{i\omega_{i2}T_0}+c.c
\end{aligned}
\tag{۳۸}
$$

برای اینکه x_{g1} دارای پاسخ محدود باشد، باید ترم‌های نامحدود آن صفر گردند [۲۶]؛ در نتیجه با جایگذاری رابطه (۳۶) در معادله (۳۵)، برای حذف ترم‌های نامحدود آن باید رابطه (۳۹) برقرار باشد.

$$
\begin{aligned}
&-2iD_1A_g(T_1)-ciA_g(T_1)+\bar{k}A_g(T_1) \\
&\quad -g\bar{k}A_g(T_1)\exp(-i\tau_g) \\
&\quad -\bar{k}A_g(T_1)\exp(-i\tau_w)=0
\end{aligned}
\tag{۳۹}
$$

با فرض $A_g=\frac{1}{2}a_g(T_1)e^{i\beta_{g(T_1)}}$ و جایگذاری آن در معادله (۳۹) و همچنین جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی، رابطه (۴۰) به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{da_g}{dT_1}+a_g\left(-\frac{\bar{c}}{2}+\frac{\bar{k}g\sin(\tau_g)}{2}+\frac{\bar{k}\sin(\tau_w)}{2}\right)=0 \\
&a_g\left(\frac{d\beta_g}{dT_1}+\frac{\bar{k}}{2}-\frac{\bar{k}g\cos(\tau_g)}{2}+\frac{\bar{k}\cos(\tau_w)}{2}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۴۰}
$$

پاسخ معادله دیفرانسیل (۴۰)، به صورت رابطه (۴۱) است.

$$
\begin{aligned}
&a_g(T_1)=a_{go}e^{M_gT_1} \\
&\beta_g(T_1)=M'_gT_1+\beta_{g0}
\end{aligned}
\tag{۴۱}
$$

در آن a_{g0} و β_{g0} از شرایط اولیه و M_g و M'_g، مطابق رابطه (۴۲) محاسبه می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&M_g=\frac{-\bar{c}+\bar{k}g\sin(\tau_g)+\bar{k}\,\sin(\tau_w)}{2} \\
&M'_g=\frac{-\bar{k}+\bar{k}g\cos(\tau_g)+\bar{k}\,\cos(\tau_w)}{2}
\end{aligned}
\tag{۴۲}
$$

در نهایت A_g از رابطه (۴۳) به‌دست می‌آید.

$$A_g(T_1)=\frac{1}{2}a_{go}e^{M_gT_1}e^{i(M'_gT_1+\beta_{g0})}+c.c \tag{۴۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳۸) در رابطه (۳۵)، ترم‌های نامحدود معادله (۳۵) از رابطه (۴۴) به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
R_{i11} = & -2i\omega_{i1}D_1A_{i1} + 6\Lambda_i A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} \\
& +3\Lambda_i A_{i1}^2\overline{A}_{i1} + 2\Lambda_i z_{i1}\overline{z}_2 A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} \\
& +2\Lambda_i z_{i1}\overline{z}_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} + \Lambda_i z_{i1}A_{i1}^2\overline{A}_{i1} \\
& +2\Lambda_i z_{i2}\overline{z}_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} \\
& +2\Lambda_i z_{i1}z_{i1}A_{i1}^2\overline{A}_{i1} + \alpha_i D_1 z_{i1}A_{i1} \\
& +\overline{k'}_i\sigma_i(A_{i1} - gA_{i1}e^{-i\omega_{i1}\tau_g} \\
& -A_{i1}e^{-i\omega_{i1}\tau_w}) \\
R_{i12} = & -2i\omega_{i2}D_1A_{i2} + 6\Lambda_i A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} \\
& +3\Lambda_i A_{i2}^2\overline{A}_{i2} + 2\Lambda_i z_{i2}\overline{z}_{i1}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} \\
& +2\Lambda_i z_{i1}\overline{z}_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} + \Lambda_i z_{i2}^2A_{i2}^2\overline{A}_{i2} \\
& +2\Lambda_i z_{i2}\overline{z}_{i2}A_{i2}^2\overline{A}_{i2} + \alpha_i D_1 z_{i2}A_{i2} \\
& +2\Lambda_i z_{i1}z_{i1}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} + \Lambda_i z_{i2}^2A_{i2}^2\overline{A}_{i2} \\
& +\overline{k'}_i\sigma_i(A_{i2} - gA_{i2}e^{-i\omega_{i2}\tau_g} \\
& - A_{i2}e^{-i\omega_{i2}\tau_w}) \\
R_{i21} = & -2i\omega_{i1}z_{i1}D_1A_{i2} \\
& +6\Lambda_i z_{i1}\overline{z}_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} \\
& +3\Lambda_i z_{i1}^2\overline{z}_{i1}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1}\overline{A}_{i1} \\
& +2\Lambda_i\overline{z}_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} \\
& +2\Lambda_i z_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} + \Lambda_i z_{i1}A_{i1}^2A_{i2}\overline{A}_{i1} \\
& +2\Lambda_i z_1A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} + 2\Lambda_i z_{i1}z_{i1}A_{i1}^2\overline{A}_{i1} \\
& +\alpha_i D_1A_{i1} \\
R_{i22} = & -2i\omega_{i2}D_1A_{i2} \\
& +6\Lambda_i z_{i1}\overline{z}_{i2}z_{i1}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} \\
& +3\Lambda_i z_{i2}^2\overline{z}_{i2}A_{i2}^2\overline{A}_{i2} + 2\Lambda_i\overline{z}_{i1}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} \\
& +2\Lambda_i z_{i2}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} + \Lambda_i z_{i2}A_{i2}^2\overline{A}_{i2} \\
& +2\Lambda_i z_{i1}A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} + 2\Lambda_i z_{i2}A_{i2}^2\overline{A}_{i2} \\
& +\alpha_i D_1A_{i2}
\end{aligned}
\tag{۴۴}
$$

در آن R_{i11} وR_{i12}، ترم‌های سکولار معادله x_{vi1} و R_{i21} وR_{i22}، ترم‌های سکولار معادله x_{wi1} می‌باشند. برای اینکه معادله (۳۸) جواب محدود داشته باشد، باید رابطه (۴۵) برقرار باشد [۲۶].

$$
\begin{aligned}
& R_{i11} + \overline{z}_{i1}R_{i21} = o \\
& R_{i12} + \overline{z}_{i2}R_{i22} = o
\end{aligned}
\tag{۴۵}
$$

با جایگذاری رابطه (۴۴) در رابطه (۴۵) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی ضرایب $A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2}$، $A_{i1}^2\overline{A}_{i1}$، A_{i1} و $\frac{dA_{i1}}{dT_1}$ در معادله اول و همچنین ضرایب $A_{i2}^2\overline{A}_{i2}$، $A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1}$، A_{i2} و $\frac{dA_{i2}}{dT_1}$ در معادله دوم و استفاده از نماد M_{ir}، به عنوان قسمت حقیقی و M_{ic} به عنوان قسمت موهومی ضریب، رابطه (۴۶) برای i=1,2,…,n به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
& (M_{i1r} + iM_{i1c})\frac{dA_1}{dT_1} + (M_{i2r} + iM_{i2c})A_{i1} \\
& \quad +(M_{i3r} + iM_{i3c})A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i2} \\
& \quad +(M_{i4r} + iM_{i4c})A_{i1}^2\overline{A}_{i1} = 0 \\
& (M_{i5r} + iM_{i5c})\frac{dA_{i2}}{dT_1} + (M_{i6r} + iM_{i6c})A_{i2} \\
& \quad +(M_{i7r} + iM_{i7c})A_{i1}A_{i2}\overline{A}_{i1} \\
& \quad +(M_{i8r} + iM_{i8c})A_{i2}^2\overline{A}_{i2} = 0
\end{aligned}
\tag{۴۶}
$$

مقدار ضرایب موجود در رابطه (۴۶)، در پیوست ذکر شده است. با فرض $A_{in} = \frac{1}{2}a_{in}(T_1)e^{i\beta_{in}(T_1)}$ برای $n = 1,2$ و جایگذاری آن در رابطه (۴۶) و جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی، رابطه (۴۷) به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}M_{i1r}a_{i1}\frac{d\beta_{i1}}{dT_1} + \frac{1}{2}M_{i2r}a_{i1} + \frac{1}{8}M_{i3r}a_{i1}a_{i2}^2 \\
& \quad +\frac{1}{8}M_{i4r}a_{i1}^3 = 0 \\
& \frac{1}{2}M_{i1c}\frac{da_{i1}}{dT_1} + \frac{1}{2}M_{i2c}a_{i1} = 0 \\
& -\frac{1}{2}a_{i2}M_{i5c}\frac{d\beta_{i2}}{dT_1} + \frac{1}{2}M_{i6r}a_{i2} + \frac{1}{8}M_{i7r}a_{i2}a_{i1}^2 \\
& \quad +\frac{1}{8}M_{i8r}a_{i2}^3 = 0 \\
& \frac{1}{2}M_{i5c}\frac{da_{i1}}{dT_1} + \frac{1}{2}M_{i6c}a_{i2} = 0
\end{aligned}
\tag{۴۷}
$$

پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیل (۴۷)، بصورت رابطه (۴۸) است:

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}(T_1) = a_{i10}e^{\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} \\
& a_{i2}(T_1) = a_{i20}e^{\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} \\
& \beta_{i1}(T_1) = -\frac{M_{i4r}}{8M_{i2c}}\,{a_{i10}}^2e^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} \\
& \quad -\frac{M_{i3r}M_{i5c}}{8M_{i1i}M_{i6c}}{a_{i20}}^2e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i2r}}{M_{i1c}}T_1 \\
& \quad + \beta_{i10} \\
& \beta_{i2}(T_1) = -\frac{M_{i7r}M_{i1c}}{8M_{i2c}M_{i5c}}\,{a_{i10}}^2e^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} \\
& \quad -\frac{M_{i3r}}{8M_{i6c}}{a_{i20}}^2e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i6r}}{M_{i5c}}T_1 + \beta_{i20}
\end{aligned}
\tag{۴۸}
$$

پارامترهای a_{i10}، a_{i20}، β_{i10} و β_{i20}، از شرایط اولیه به‌دست می‌آیند. در نتیجه A_{i1} و A_{i2} برابرند با:

$$
\begin{aligned}
& A_{i1}(T_1) = \frac{1}{2}a_{i10}e^{-\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1}\exp(i(-\frac{M_{i4r}}{8M_{i2c}} \times \\
& \quad \times {a_{i10}}^2e^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} - \frac{M_{i3r}M_{i5c}}{8M_{i1i}M_{i6c}} \times \\
& \quad \times {a_{i20}}^2e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i2r}}{M_{i1c}}T_1 \\
& \quad +\beta_{i10})) + c.c \\
& A_{i2}(T_1) = \frac{1}{2}a_{i20}e^{-\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} \times
\end{aligned}
$$

$$\times \exp(i(-\frac{M_{i7r}M_{i1c}}{8M_{i2c}M_{i5c}}a_{i10}{}^{2}\,\mathrm{e}^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} - \frac{M_{i3r}}{8M_{i6c}}a_{i20}{}^{2}e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i6r}}{M_{i5c}}T_1 + \beta_{i20})) + c.c \tag{۴۹}$$

با جایگذاری روابط (۴۳) و (۴۹) به ترتیب در روابط (۳۶) و (۳۸)، پاسخ x_{g0}، x_{iv0} و x_{iw0} برای i=1,2,…,n، بصورت رابطه (۵۰) به‌دست می‌آیند:

$$x_{g0}(T_0,T_1) = a_{g0}e^{M_gT_1}\cos(M'_gT_1 + T_0 + \beta_{go})$$

$$x_{iv0}(T_0,T_1) = a_{i10}e^{-\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1}\cos(-\frac{M_{i4r}}{8M_{i2c}} \times \times a_{i10}{}^{2}e^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} - \frac{M_{i3r}M_{i5c}}{8M_{i1i}M_{i6c}} \times \times a_{i20}{}^{2}e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i2r}}{M_{i1c}}T_1 + \beta_{i10} + \omega_{i1}T_0) + a_{i20}{}^{2}e^{-\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1}cos(-\frac{M_{i7r}M_{i1c}}{8M_{i2c}M_{i5c}} \times \times a_{i10}{}^{2}\mathrm{e}^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} - \frac{M_{i3r}}{8M_{i6c}} * \times a_{i20}{}^{2}e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i6r}}{M_{i5c}}T_1 + \beta_{i20} + \omega_{i2}T_0)$$

$$x_{iw0}(T_0,T_1) = z_{i1}a_{i10}e^{\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1}\sin(-\frac{M_{i4r}}{8M_{i2c}} \times \times a_{i10}{}^{2}e^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} - \frac{M_{i3r}M_{i5c}}{8M_{i1i}M_{i6c}}a_{i20}{}^{2} \times \times e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i2r}}{M_{i1c}}T_1 + \beta_{i10} + \omega_{i1}T_0) - z_2a_{20}e^{\frac{M_{6i}}{M_{5i}}T_1}\sin(-\frac{M_{i7r}M_{i1c}}{8M_{i2c}M_{i5c}}a_{i10}{}^{2} \times \times \mathrm{e}^{-2\frac{M_{i2c}}{M_{i1c}}T_1} - \frac{M_{i3r}}{8M_{i6c}}a_{i20}{}^{2}e^{-2\frac{M_{i6c}}{M_{i5c}}T_1} + \frac{M_{i6r}}{M_{i5c}}T_1 + \beta_{i20} + \omega_{i2}T_0) \tag{۵۰}$$

۴- ارائه نتایج

با استفاده از رابطه (۵۰)، می‌توان ارتعاش جانبی قطعه‌کار و ابزار را در طول زمان بررسی کرد. در این بخش، ابتدا به منظور صحت‌سنجی پاسخ بدست آمده در بخش قبل، نتایج حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله با نتایج تجربی مقایسه می‌شود. پس از آن نمونه‌هایی از نمودارها و نتایج حاصل برای ارتعاشات سنگ و قطعه‌کار در هر دو حالت پایدار و ناپایدار ارائه می‌شوند.

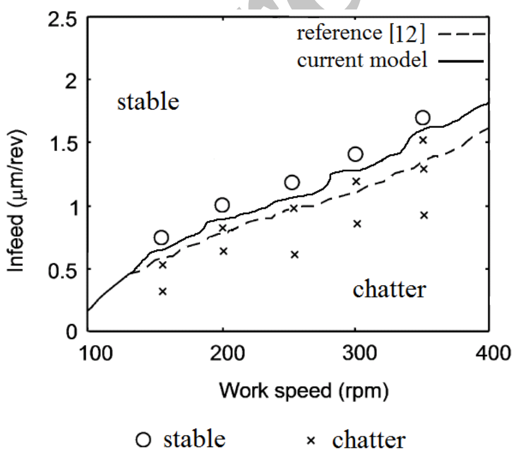
۴-۱- اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی مدل ارائه شده در این پژوهش، نتایج حاصل از پیش‌بینی پایداری سیستم، با نتایج بدست آمده از آزمایشات تجربی توسط لی و شین [۱۲] مقایسه شده است. در این مرجع، پایداری سیستم توسط آزمایشات تجربی برای سنگ‌زنی عرضی، مورد تحقیق قرار گرفته است. این نتایج در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. مطابق این شکل، نتایج حاصل از مدل‌سازی انجام گرفته در این مقاله، مطابقت قابل قبولی با نتایج حاصل از داده‌های تجربی دارد؛ اگرچه در نزدیکی مرز ناحیه پایدار و ناپایدار، تفاوت کوچکی وجود دارد که به علت فرضیات صورت گرفته در مدل‌سازی مسأله است.

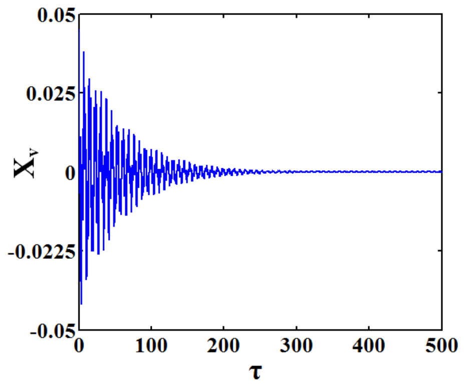
۴-۲- فرآیند براده برداری پایدار

در صورتی که در یک فرآیند سنگ‌زنی، پدیده لرزه برای هیچ یک از سنگ یا قطعه‌کار رخ ندهد، براده برداری در حالت پایدار انجام می‌شود. برای نمونه، مقادیر پارامترهای بی‌بعد برای یک حالت براده‌برداری پایدار، در جدول ۱ ذکر شده‌اند.

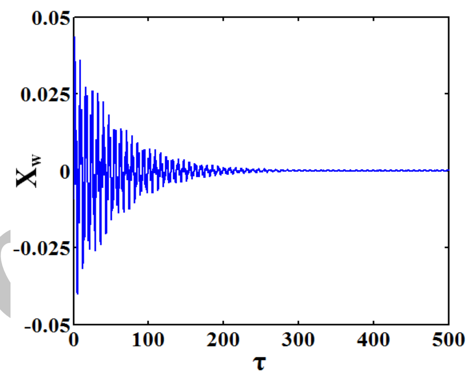
نتایج مربوط به سنگ‌زنی در حالت پایدار، در شکل‌های ۶ تا ۸ ذکر شده است. شکل‌های ۶ و ۷، مربوط به نوسانات جانبی قطعه‌کار و شکل ۸، مربوط به ارتعاشات سنگ ساینده است.



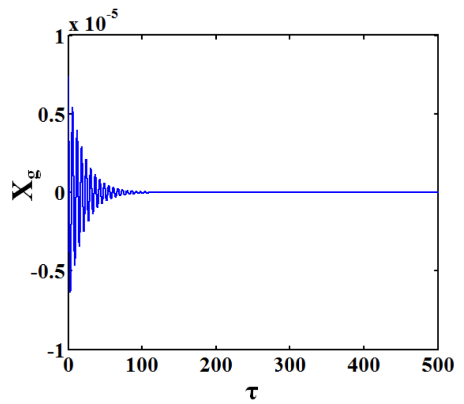
شکل ۵- مقایسه نمودار پایداری حاصل از داده‌های تجربی و شبیه‌سازی مقاله حاضر



شکل ۶- نمودار $(x_v-\tau)$ در حالت سنگ‌زنی پایدار



شکل ۷- نمودار $(x_w-\tau)$ در حالت سنگ‌زنی پایدار



شکل ۸- نمودار $(x_g-\tau)$ در حالت سنگ‌زنی پایدار

مطابق شکل‌های ۶ تا ۸، در حالت براده‌برداری پایدار، پس از گذشت مدت زمانی از شروع فرآیند سنگ‌زنی، دامنه ارتعاشات در قطعه‌کار و همچنین سنگ ساینده کاهش یافته و در یک مقدار معین ثابت می‌شود.

البته با توجه به اینکه از پارامترهای بی‌بعد برای بررسی مسئله استفاده شده است، می‌توان نتایج را برای تمام حالت‌هایی استفاده کرد که دارای پارامتر بی‌بعد یکسان هستند. برای نمونه، مقادیر این پارامترها برای یک حالت خاص، در جدول ۲ آورده شده است.

نتایج مربوط به نمودار مسیر در شکل ۹ ارائه شده است. نمودار مسیر، نشان‌دهنده موقعیت نقطه مرکز سطح مقطع قطعه‌کار در محل براده‌برداری است.

جدول ۱- مقادیر پارامترهای بی‌بعد برای حالت سنگ‌زنی پایدار

پارامتر بی‌بعد	مقدار	پارامتر بی‌بعد	مقدار
K_c	۰/۱۱	τ_w	۶۸
η	۵/۳×۱۰^{۱۶}	τ_g	۶۷/۸۸
ζ	۵/۹۵×۱۰^{۱۰}	$\bar{x}_0$	۲/۵×۱۰^{۴}
χ	۶/۴۷×۱۰^{۶}	l	۵×۱۰^{۴}
K_c	۳/۶۹×۱۰^{۳}	C_g	۱/۸×۱۰$^{-۳}$

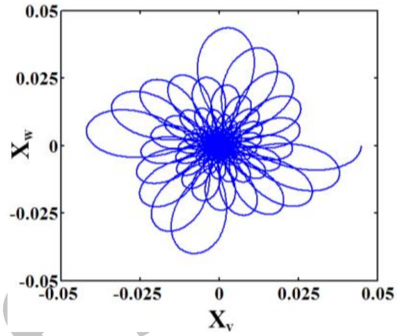
جدول ۲- پارامترهای یک نمونه واقعی قطعه کار و سنگ ساینده [۲۱]

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
E	(N/m^2)۲۰۶×۱۰^{۹}	R	(m)۰/۰۵
D_n	(m)۱۰$^{-۳}$	R_g	(m)۰/۲۵
K_g	(N/m)۶/۴×۱۰^{۸}	Ω	(rad/s)۵۲۲/۳
m_g	(kg)۲۰	Ω_g	(rad/s)۵۲۳/۵۹
W	(m)۰/۰۴	L	(m)۰/۵
KC^v	(N/m^2)۱۰^{۸}	X_0	(m)۰/۲۵
g	۰/۰۰۲	ρ	(kg/m^3)۷۸۵۰
c_g	(N.s/m) ۲۰۰	μ	۰/۷

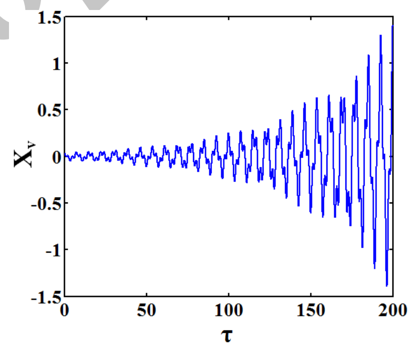
۴-۳- فرآیند براده برداری ناپایدار

در صورتی که پدیده لرزه در فرآیند سنگ‌زنی رخ دهد، براده‌برداری به صورت ناپایدار صورت می‌گیرد. به عنوان نمونه اگر مقدار پارامتر بی‌بعد دوره زمانی قطعه‌کار ارائه شده در

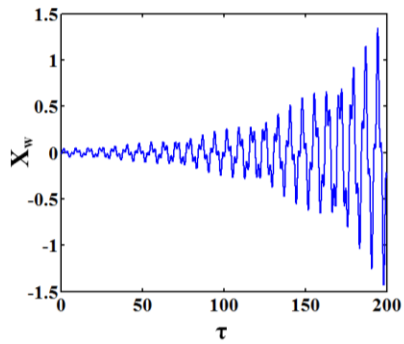
جدول ۱ به $\tau_w = 70$ تغییر کند، پدیده لرزه اتفاق افتاده، فرآیند ناپایدار می‌شود. نتایج مربوط به براده‌برداری در این حالت، در شکل‌های ۱۰ تا ۱۳ ارائه شده است. شکل‌های ۱۰ و ۱۱، مربوط به ارتعاشات قطعه‌کار و شکل ۱۲، مربوط به ارتعاشات سنگ است. شکل ۱۳، نمودار مسیر را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در این حالت پدیده لرزه برای سنگ و قطعه‌کار اتفاق می‌افتد.



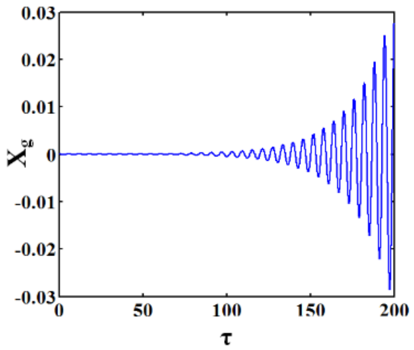
شکل ۹- نمودار مسیر ($x_w - x_v$) برای حالت سنگ‌زنی پایدار



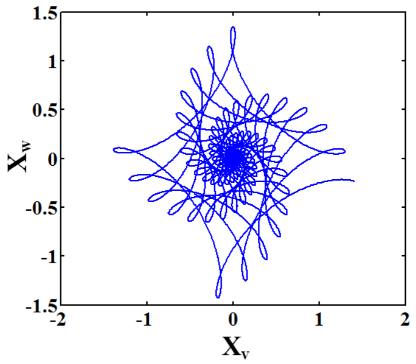
شکل ۱۰- نمودار ($x_v - \tau$) در حالت سنگ‌زنی ناپایدار در $\tau_w = 70$



شکل ۱۱- نمودار ($x_w - \tau$) در حالت سنگ‌زنی ناپایدار در $\tau_w = 70$



شکل ۱۲- نمودار ($x_g - \tau$) در حالت سنگ‌زنی ناپایدار در $\tau_w = 70$



شکل ۱۳- نمودار مسیر ($x_w - x_v$) برای حالت سنگ‌زنی ناپایدار در $\tau_w = 70$

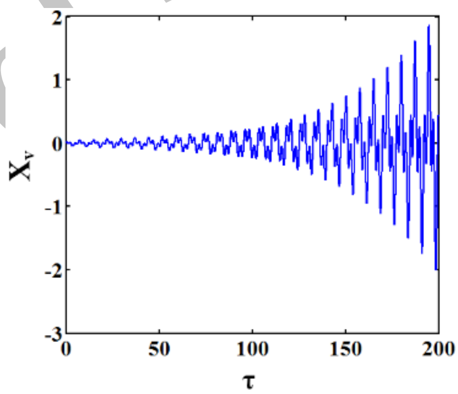
مطابق شکل های ۱۰ و ۱۱، پس از گذشت زمان کوتاهی از شروع فرآیند سنگ‌زنی، دامنه ارتعاشات قطعه‌کار به طور پیوسته زیاد می‌شود؛ همچنین براساس شکل ۱۲، دامنه ارتعاشات سنگ ساینده پس از گذشت مدت زمانی افزایش می‌یابد. شکل ۱۳، نوسانات مرکز قطعه کار را برای براده‌برداری ناپایدار در حالت فوق نشان می‌دهد.

همچنین با تغییر مقدار پارامتر بی‌بعد دوره زمانی سنگ ساینده ارائه شده در جدول ۱ به $\tau_g = 64$، پدیده لرزه فقط برای قطعه‌کار رخ داده، باعث ناپایدار شدن فرآیند سنگ‌زنی شده است. نتایج مربوط به براده‌برداری در حالت فوق، در شکل‌های ۱۴ تا ۱۷ نشان داده شده است. شکل‌های ۱۴ و ۱۵، مربوط به ارتعاشات قطعه‌کار و شکل ۱۶، مربوط به ارتعاشات سنگ است. شکل ۱۷، نشان‌دهنده نمودار مسیر برای این حالت براده‌برداری است.

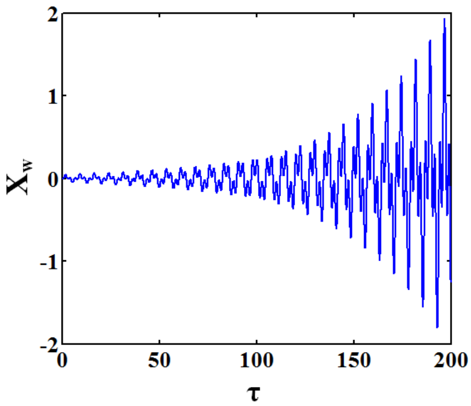
بر اساس شکل‌های ۱۴ و ۱۵، دامنه ارتعاشات قطعه‌کار به طور پیوسته افزایش می‌یابد؛ در حالی که مطابق شکل ۱۶، دامنه ارتعاشات سنگ ساینده کاهش یافته و در مقدار معینی ثابت می‌شود.

۴-۴- نمودار پایداری

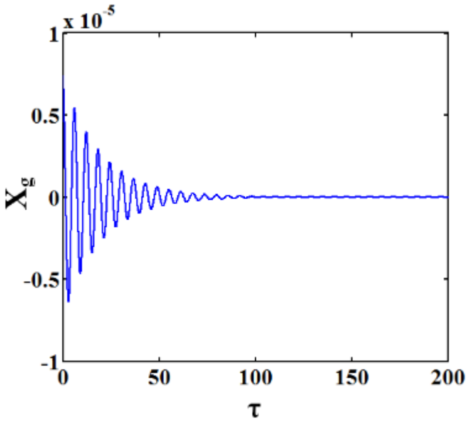
شکل ۱۸، نمودار پایداری را بر اساس پارامتر بی‌بعد دوره چرخش قطعه‌کار (τ_w) که نشان دهنده تأخیر زمانی است و همچنین پارامتر بی‌بعد مکان سنگ ($\bar{x}_0$)، نشان می‌دهد. مطابق این شکل در برخی از نواحی پدیده لرزه در هیچ‌یک از قطعه‌کار یا سنگ اتفاق نمی‌افتد. این نواحی در شکل به عنوان نواحی پایدار مشخص شده‌اند. در بقیه نواحی، بخش‌هایی که در آن لرزه در ابزار یا قطعه‌کار اتفاق می‌افتد، به وسیله پیکان مشخص شده‌اند. این نواحی در شکل به عنوان نواحی ناپایدار معرفی شده‌اند.



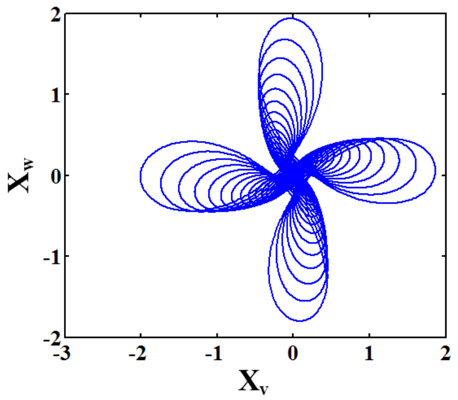
شکل ۱۴- نمودار $(x_v - \tau)$ **در حالت سنگ‌زنی ناپایدار در** $\tau_g = 64$



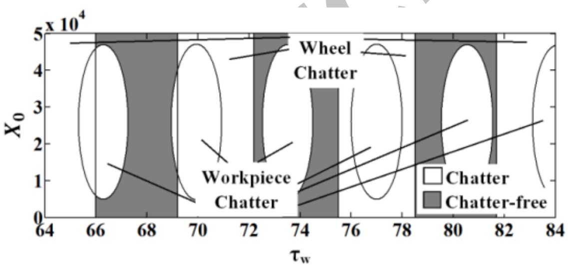
شکل ۱۵- نمودار $(x_w - \tau)$ **در حالت سنگ‌زنی ناپایدار در** $\tau_g = 64$



شکل ۱۶- نمودار $(x_g - \tau)$ **در حالت سنگ‌زنی ناپایدار در** $\tau_g = 64$



شکل ۱۷- نمودار مسیر $(x_w - x_v)$ **برای حالت سنگ‌زنی ناپایدار** در $\tau_g = 64$



شکل ۱۸- نواحی پایداری سنگ و قطعه‌کار

از شکل ۱۸ می‌توان دریافت که پایداری سنگ به مکان سنگ مرتبط نیست؛ در حالی که پایداری قطعه‌کار وابسته به مکان سنگ است؛ همچنین می‌توان ملاحظه کرد که ناحیه بحرانی ارتعاشی قطعه‌کار در مناطق میانی آن واقع شده است.

۴-۵- تأثیر پارامترهای سنگ‌زنی بر پایداری فرآیند

در این قسمت به‌منظور بررسی تأثیر پارامترهای مختلف سنگ‌زنی بر فرآیند براده‌برداری، نتایج به‌طور مقایسه‌ای و تفکیک شده ارائه شده‌اند. به‌منظور افزایش قابلیت مقایسه بین نتایج در حالت‌های مختلف، مطابق جدول‌های ۱ و ۲، یک حالت پایه برای پارامترهای براده برداری در نظر گرفته شده است که در بررسی هر یک از پارامترها، تغییر مقدار آن پارامتر به طور مشخص در نتایج ذکر شده است. نتایج بر اساس نمودار پایداری ارائه شده‌اند.

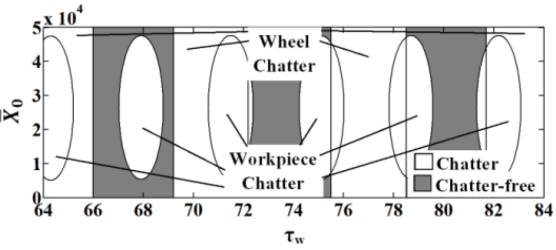
۴-۵-۱- تأثیر دوره زمانی بی‌بعد سنگ ساینده (τ_g)

به‌منظور بررسی تأثیر دوره زمانی سنگ ساینده، نمودار پایداری برای دو مقدار متفاوت τ_g، در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ ذکر شده است.

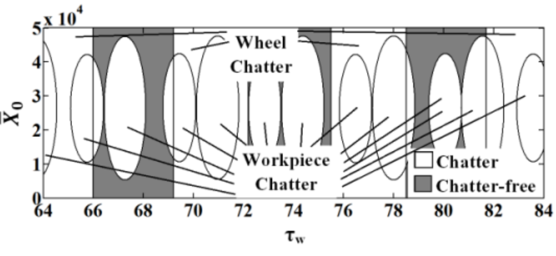
بر اساس شکل‌های ۱۹ و ۲۰، مقدار ناحیه پایدار در $\tau_g = 64$ بیشتر از $\tau_g = 76$ است؛ همچنین با در نظر گرفتن شکل ۱۸ می‌توان گفت با تغییر τ_g از ۶۴ به ۶۷.۸۸ و سپس تغییر آن به ۷۶، ناپایداری در فرآیند سنگ‌زنی افزایش یافته است.

۴-۵-۲- تأثیر شعاع قطعه کار (R)

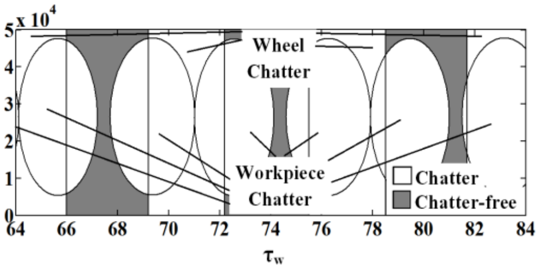
به منظور بررسی تأثیر شعاع قطعه کار بر پایداری سیستم، نمودار پایداری برای دو شعاع مختلف قطعه‌کار، در شکل‌های ۲۱ و ۲۲ نشان داده شده است.



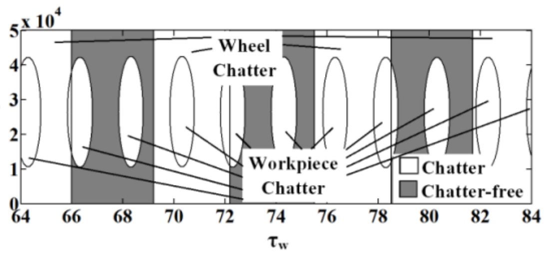
شکل ۱۹- نمودار پایداری در $\tau_g = 64$



شکل ۲۰- نمودار پایداری در $\tau_g = 76$



شکل ۲۱- نمودار پایداری در $R = 0.025\ m$



شکل۲۲- نمودار پایداری در $R = 0.1\ m$

با توجه به شکل‌های ۲۱ و ۲۲ و همچنین شکل ۱۸، ملاحظه می‌شود که افزایش شعاع قطعه، باعث افزایش ناحیه پایدار در نمودار پایداری و پایدارتر شدن فرآیند سنگ‌زنی می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، پدیده لرزه در فرآیند سنگ‌زنی پلانج، مورد بررسی قرار گرفته است. قطعه‌کار با استفاده از یک مدل سه-بعدی غیرخطی و ابزار سنگ با استفاده از مدل جرم-فنر-دمپر یک درجه آزادی، مدل‌سازی شده‌اند. معادلات حرکت با استفاده از روش پی باکینگهام، بی‌بعدسازی شده‌اند. درنهایت، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای قطعه‌کار با استفاده از روش مودهای فرضی به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی درآمده، سپس مجموعه معادلات قطعه‌کار و سنگ ساینده با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، به صورت تحلیلی حل شده‌اند. با تغییر پارامترهای بدون بعد دوره زمانی قطعه کار و مکان طولی ابزار، احتمال بروز پدیده لرزه در ابزار و قطعه‌کار بررسی شده، نمودار پایداری برای هریک از اجزاء رسم شده است؛ همچنین با تغییر پارامترهای بی‌بعد متناظر با پارامترهای سنگ‌زنی همچون دوره زمانی سنگ ساینده و شعاع قطعه کار، یک آنالیز حساسیت روی پایداری فرآیند انجام شده است.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که:

- مکان طولی سنگ روی قطعه‌کار بر پایداری قعطه‌کار تأثیر دارد؛ در حالی که پایداری سنگ از مکان طولی آن روی قطعه‌کار آن تأثیرپذیر نیست.
- ناحیه ناپایدار ارتعاشی قطعه‌کار در نمودار پایداری، بیشتر در اطراف نواحی میانی قطعه‌کار واقع می‌شود.
- با کاهش پارامتر متناظر با سرعت دورانی سنگ ساینده و همینطور پارامتر شعاع قطعه‌کار، پایداری فرآیند سنگ‌زنی کاهش یافته و احتمال بروز پدیده لرزه افزایش می‌یابد.

۶- فهرست علائم

C	عدد زاویه برش
c_g	دمپینگ جرم-فنر-دمپر مدل شده (N.s/m)
D	عمق برش (m)
D_n	عمق برش اسمی (m)
E	مدول یانگ (N/m^2)
g	نسبت سنگ‌زنی
K	سختی سنگ‌زنی (N/m^2)
k_g	سختی جرم-فنر-دمپر مدل شده (N/m)
L	طول قطعه‌کار (m)
m	جرم قطعه‌کار بر واحد طول (kg)
m_g	جرم جرم-فنر-دمپر مدل شده (kg)
R	شعاع قطعه کار (m)
R_g	شعاع سنگ ساینده (m)
T	دوره زمانی قطعه‌کار (s)
T_g	دوره زمانی سنگ ساینده (s)
W	پهنای سنگ ساینده (m)
x_0	مکان سنگ ساینده در طول قطعه‌کار (m)

علائم یونانی

μ	عدد توانی نیروی سنگ‌زنی
ν	عدد توانی نیروی سنگ‌زنی
ρ	چگالی قطعه‌کار (kg/m^3)
Ω	سرعت زاویه‌ای قطعه‌کار (rad/s)
Ω_g	سرعت زاویه‌ای سنگ ساینده (rad/s)

۷- پیوست

$$M_{i1r} = 0$$
$$M_{i1c} = -i(-2i\omega_{i1} z_{i1}\bar{z}_{i1} - \alpha_i \bar{z}_{i1} - 2i\omega_{i1} + \alpha_i z_{i1})$$
$$M_{i2r} = \overline{k'}_i \sigma_i - \overline{k'}_i \sigma_i g\cos(\omega_{i1}\tau_g) - \overline{k'}_i \sigma_i \cos(\omega_{i1}\tau_w)$$
$$M_{i2c} = -i(i\overline{k'}_i \sigma_i g\sin(\omega_{i1}\tau_g) + i\overline{k'}_i \sigma_i \sin(\omega_{i1}\tau_w))$$
$$M_{i3r} = 6\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i1} z_{i2}\bar{z}_{i2} + 2\Lambda_i \bar{z}_{i1}\bar{z}_{i2} + 2\Lambda_i z_{i2}\bar{z}_{i1} + 2\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i1} + 6\Lambda_i + 2\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i2} + 2\Lambda_i z_{i1} z_{i2} + 2\Lambda_i z_{i2}\bar{z}_{i2}$$
$$M_{i3c} = 0$$
$$M_{i4r} = 3\Lambda_i {z_{i1}}^2 {\bar{z}_{i1}}^2 + \Lambda_i {\bar{z}_{i1}}^2 + 4\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i1} + 3\Lambda_i + \Lambda_i {z_{i1}}^2$$
$$M_{i4c} = 0$$
$$M_{i5r} = 0$$
$$M_{i5c} = -i(-2i\omega_{i2} z_{i2}\bar{z}_{i2} - \alpha_i \bar{z}_{i2} - 2i\omega_{i2} + \alpha_i z_{i2})$$
$$M_{i6r} = \overline{k'}_i \sigma_i - \overline{k'}_i \sigma_i g\cos(\omega_{i2}\tau_g) - \overline{k'}_i \sigma_i \cos(\omega_{i2}\tau_w)$$
$$M_{i6c} = -i(i\overline{k'}_i \sigma_i g\sin(\omega_{i2}\tau_g) + i\overline{k'}_i \sigma_i \sin(\omega_{i2}\tau_w))$$
$$M_{i7r} = 6\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i1} z_{i2}\bar{z}_{i2} + 2\Lambda_i \bar{z}_{i1}\bar{z}_{i2} + 2\Lambda_i z_{i2}\bar{z}_{i1} + 2\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i1} + 6\Lambda_i + 2\Lambda_i z_{i1}\bar{z}_{i2} + 2\Lambda_i z_{i1} z_{i2} + 2\Lambda_i z_{i2}\bar{z}_{i2}$$
$$M_{i7c} = 0$$
$$M_{i8r} = 3\Lambda_i {z_{i2}}^2 {\bar{z}_{i2}}^2 + \Lambda_i {\bar{z}_{i2}}^2 + 4\Lambda_i z_{i2}\bar{z}_{i2} + 3\Lambda_i + \Lambda_i {z_{i2}}^2$$
$$M_{i8c} = 0$$

۸- مراجع

[1] Chatterjee S (2011) Self-excited oscillation under nonlinear feedback with time-delay. J Sound Vib 330: 1860-1876.

[2] Brecher C, Esser M, Witt S (2009) Interaction of manufacturing process and machine tool. CIRP Ann-Manuf Techn 58: 588-607.

[3] Tobias SA, Fishwick W (1958) The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions. T ASME 80: 1079-1088.

[4] Tlusty J, Polacek M (1963) The stability of machine tools against self excited vibrations in machining. Proc. Int. Research in Production Eng Conf. Pittsburgh, PA.:465–474.

[5] S. A. Tobias (1965) Machine Tool Vibration. Blackie, London.

[6] Deshpande N, Fofana MS (2001) Nonlinear regenerative chatter in turning. J Comp Integ Manu 17: 107-112.

[7] Jalili MM, Tavari H (2014) Nonlinear analysis of chatter in turning process considering workpiece and cutting tool dynamics simultaneously. Modares Mech Eng 13: 177-188.

[8] Jalili MM, Tavari H, Movahhedy MR (2015) Nonlinear analysis of chatter in turning process using dimensionless groups. J Brazil Soc Mech Sci Eng 37: 1151-1162.

[9] Thompson RA (1974) On the doubly regenerative stability of a grinder. J Eng Ind-T ASME 96: 275-280.

[10] Thompson RA (1977) On the doubly regenerative stability of a grinder: the combined effect of wheel and workpiece speed. J Eng Ind-T ASME 99: 237-241.

[11] Thompson RA (1992) On the doubly regenerative stability of a grinder: the effect of contact stiffness and wave filtering. J Eng Ind-T ASME 114: 53-60.

[12] Li HQ, Shin YC (2006) A time-domain dynamic model for chatter prediction of cylindrical plunge grinding processes. J Manuf Sci E-T ASME 128: 404-415.

[13] Shimizu T, Inasaki I, Yonetsu S (1978) Regenerative chatter during cylindrical traverse grinding. Bull JSME 21: 317-323.

[14] Fu JC, Troy CA, Morit K (1996) Chatter classification by entropy functions and morphological processing in cylindrical traverse grinding. Precis Eng 18: 110-117.

[15] Weck M, Hennes N, Schulz A (2001) Dynamic behaviour of cylindrical traverse grinding processes. CIRP Ann-Manuf Techn 50: 213-216.

[16] Yuan L, Keskinen E, Jarvenpaa VM (2005) Stability analysis of roll grinding system with double time delay effects. Proc. IUTAM Symposium on Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures 130: 375-387.

[17] Liu ZH, Payre G (2007) Stability analysis of doubly regenerative cylindrical grinding process. J Sound Vib 301: 950-962.

[18] Chung KW, Liu Z (2011) Nonlinear analysis of chatter vibration in a cylindrical transverse grinding process with two time delays using a nonlinear time transformation method. Nonlinear Dyn 66: 441-456.

[19] Kim P, Jung J, Lee S, Seok J (2013) Stability and bifurcation analyses of chatter vibrations in a nonlinear cylindrical traverse grinding process. J Sound Vib 332: 23879-3896.

[20] Shiau TN, Huang KH, Wang FC, KH Chen, Kuo CP (2010) Dynamic response of a rotating ball screw subject to a moving regenerative force in grinding. Appl Math Model 34: 1721-1731.

[21] Yan Y, Xu J, Wiercigroch M (2014) Chatter in a transverse grinding process. J Sound Vib 333: 937-953.

[22] Yan Y, Xu J, Wiercigroch M (2015) Non-linear analysis and quench control of chatter in plunge grinding. Int J Non-Linear Mech 70: 134-144.

[23] Hodges DH, Dowell EH (1974) Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. NASA technical note: 1-30.

[24] Werner G (1978) Influence of work material on grinding forces. CIRP Ann-Manuf Techn 27: 243-248.

[25] WB Rowe (2009) Principles of Modern Grinding Technology. William Andrew, USA.

[26] Nayfeh AH, Mook DT (1979) Nonlinear Oscillations. Wiley-Interscience, New York.