



## مطالعه تحلیلی رفتار خمشی تیرهای بتن الیافی مسلح به فولاد

مجید برید رضایی<sup>۱</sup>، فرشید جندقی علایی<sup>۲\*</sup> و پویان برومند<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۲</sup> دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۳</sup> استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۵/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۳/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۶/۱۱

### چکیده

بتن مسلح هیبریدی (Hybrid Reinforced Concrete) بتنی است که در آن، علاوه بر میلگرد، از الیاف نیز برای مسلح کردن بتن استفاده می‌شود. در این تحقیق به بررسی رفتار تیرهای بتن مسلح هیبریدی تحت خمش، پرداخته شده است. برای مدل سازی بتن مسلح هیبریدی، از مدل فولاد و بتن تحت فشار به صورت الاستیک-پلاستیک کامل استفاده شده است. همچنین برای بتن تحت کشش، مدل سه خطی شامل ناحیه الاستیک، ناحیه انتقال و ناحیه مقاومت باقی مانده به کار برده شده است. روابط ارائه شده، برای بتن الیافی با رفتار سخت شدگی یا نرم شدگی کششی و خمشی کاربرد دارد. در این مقاله روابط تحلیلی برای تعیین عمق تار خنثی و منحنی لنگر-انحنای در هر مرحله از بارگذاری بدست آمده است. روابط به دست آمده از این تحقیق، برای بتن الیافی، بتن الیافی مسلح به میلگرد فولادی و همچنین بتن معمولی، قابل استفاده هستند. جهت اعتبار سنجی مدل پیشنهادی، نتایج مدل با نتایج مقالات معتبر مقایسه شد و مشاهده گردید که مدل می‌تواند با دقت خوبی رفتار بتن الیافی و هیبریدی را تحت خمش پیش‌بینی کند. مدل پیشنهادی، بار بیشینه تیرهای هیبریدی را با دقتی بیش از ۹۳ درصد نسبت به نتایج آزمایشگاهی پیش‌بینی می‌کند.

**کلمات کلیدی:** بتن الیافی؛ بتن هیبریدی؛ خمش؛ منحنی لنگر-انحنای.

## Analytical Study on Flexural Behaviour of Fiber and Steel Reinforced Concrete Beams

M. Barid Rezaee<sup>1</sup>, F. Jandaghi Alaei<sup>2,\*</sup>, P. Broumand<sup>3</sup>

<sup>1</sup> M.S. Student, Civil. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran.

<sup>2</sup> Assoc. Prof., Civil. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran.

<sup>3</sup> Assist. Prof., Civil. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran.

### Abstract

Hybrid Reinforced Concrete (HRC) is a composite material with a combination of rebars and fibers to reinforce concrete. In this study, the behavior of HRC beams under flexure is studied. To model HRC, steel and concrete under compression were assumed to be elastic-perfectly plastic. For concrete under tension, a three-linear model including elastic zone, transition zone, and residual tensile strength zone were used. Analytical relations to determine the depth of neutral axis and moment-curvature diagram at each level of loading were studied. In order to verify the model, the results obtained from the model were compared with those of published papers. It was realized that the relations obtained from this study, can predict the behavior of Fiber Reinforced Concrete (without rebar reinforcement), HRC, and traditional Reinforced Concrete under flexure with good accuracy. The proposed model, could predict the maximum load carrying capacity of HRC beams with an accuracy of more than 93% compared to experimental results. Taking into account the mentioned assumptions and proposed procedure it was found that the model is capable of predicting the behavior of all types of cement based composites: materials with strain-hardening, strain-softening, deflection-hardening and deflection-softening behavior.

**Keywords:** Fiber Reinforced Concrete; Hybrid Reinforced Concrete; Flexure; Moment-curvature diagram.

\* نویسنده مسئول؛ فکس: ۰۰۹۸۲۱۸۸۰۲۹۹۵۶

آدرس پست الکترونیک: [farshidja@yahoo.com](mailto:farshidja@yahoo.com)

## ۱- مقدمه

بتن غیر مسلح ماده ای شکننده با مقاومت کششی کم است. اما در صورت استفاده از الیاف، ویژگی‌های کششی ماده مرکب، مخصوصاً بعد از ترک خوردگی بهبود می‌یابند. استفاده از الیاف باعث کنترل انتشار ترک، کاهش عرض ترک، افزایش مقاومت خمشی نهایی و مقاومت در برابر ضربه، افزایش دوام و سختی و کاهش انحنای تیرهای بتنی می‌شود [۵-۱]. در سال‌های اخیر بتن الیافی در سازه‌های حساس به ترک خوردگی به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد. از جمله: دال‌ها، بخش‌های پیش ساخته در تونل و معدن، در روسازی، مقاوم سازی سازه‌های دریایی، پوشش‌های محافظ آتش و یا در تیرهایی که در آنها از آرماتور برشی استفاده زیادی نشده است [۸-۶ و ۱]. در بسیاری از این کاربردهای سازه‌ای، به منظور تقویت بتن، ترکیبی از میلگردهای معمولی و الیاف استفاده می‌شود. افزودن الیاف به بتن به میزان قابل توجهی خواص مکانیکی آن از جمله طاقت، مقاومت خمشی، مقاومت کششی و مقاومت در برابر ضربه را بهبود می‌بخشد [۱]. به طور کلی هدف از کاربرد الیاف در بتن، افزایش میزان جذب انرژی بتن و کنترل گسترش ترک است. بدین ترتیب، قطعه بتنی در یک مقطع ترک خورده، می‌تواند در مقابل بارهای وارده تغییر شکل‌های بیشتری را پس از ایجاد اولین ترک تحمل نماید [۱۰ و ۹].

بتن مسلح به الیاف فولادی یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای کاهش شکنندگی و افزایش شکل پذیری بتن است. این بهبود عملکرد، اکثراً بعد از ترک خوردن بتن شکل می‌گیرد. زمانی که بتن ترک خورده است، الیاف در محل ترک، نیرو را تحمل می‌کنند و باعث جذب انرژی می‌شوند [۱۱].

مزیت‌های مهم الیاف در کمیته‌هایی همچون ACI 544 [۳] و RILEM TC 162 [۱۲] به صورت اساسی مطرح شده است. حدود ۰/۷۵٪ نسبت حجمی الیاف در یک تیر بتنی بدون خاموت، می‌تواند به اندازه یک تیر بتن مسلح معمولی با خاموت، مقاومت نهایی داشته باشد [۱۳]. اما در تیرهایی تحت برش زیاد، الیاف نمی‌توانند به طور کامل جایگزین خاموت شوند. استفاده از الیاف و میلگرد فولادی در کنار هم

باعث افزایش مقاومت خمشی بتن می‌شود، که این ترکیب بتن الیافی هیبریدی<sup>۱</sup> نام دارد. [۱۳].

در شبیه سازی عددی و تحلیلی، رفتار بتن بعد از ترک توسط رابطه تنش-کرنش و یا رابطه تنش-عرض ترک بررسی می‌شود [۱۴]. روش‌های موجود برای مدل سازی رفتار بتن بعد از ترک خوردگی، بر پایه تعادل نیروها در مقطع ترک خورده به دست می‌آیند. در سطح ترک خورده نیروی کششی توسط الیاف تحمل می‌شود و برآورد مقاومت کششی ایجاد شده در این سطوح ترک خورده چالش اصلی تمام روش‌هاست [۷]. کمیته‌هایی همچون RILEM TC 162 [۱۲] و CEB-FIP Model Code 2010 [۱۵] روابطی برای تعیین عرض ترک و همچنین ارتباط بین تنش و عرض ترک بیان کردند. سوراناکوم<sup>۲</sup> و مباشر<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۷ روشی نوین برای بررسی رفتار بتن الیافی به کمک رابطه تنش-کرنش ارائه کردند [۱۰]. در تیرهای بتنی دارای میلگرد یا دارای نسبت الیاف زیاد، ترک در محدوده مشخصی پخش می‌شود. بنابراین برای بررسی رفتار این نمونه‌ها می‌توان از روابط تنش-کرنش استفاده کرد. اما در بتن‌های غیر مسلح و یا بتن‌های الیافی با نسبت الیاف خیلی کم، نمونه‌های بتنی توانایی پخش ترک را نداشته و فقط یک ترک شکل می‌گیرد، در نتیجه دیگر روابط تنش-کرنش کارایی نداشته و باید از روابط تنش-عرض ترک استفاده کرد [۱۷]. محققین بر این باورند که در تیرهای بتنی هیبریدی به دلیل حضور میلگرد، استفاده از رابطه تنش-کرنش مناسب‌تر است [۱۳، ۱۶، ۱۷].

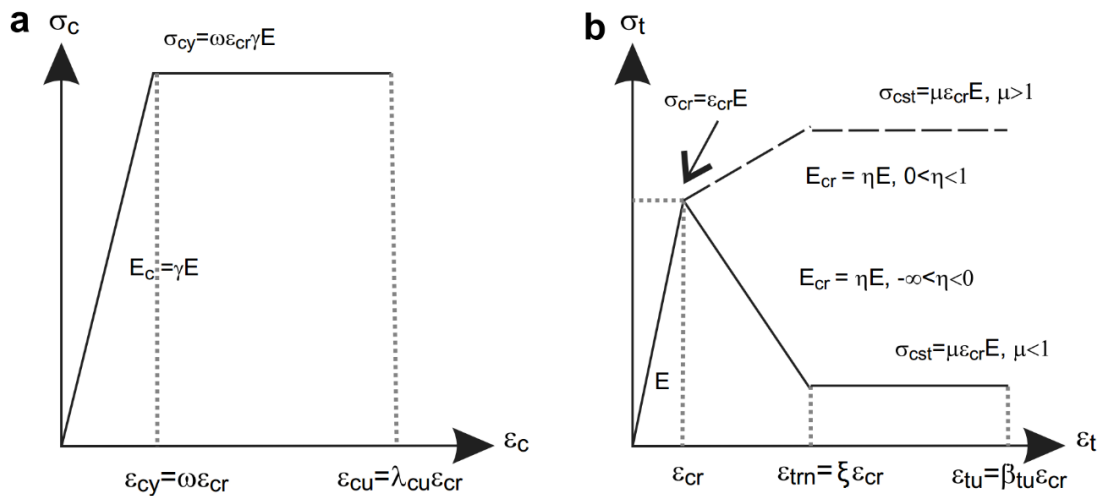
هدف اصلی این مقاله رسیدن به راه حلی برای پیش‌بینی رفتار بتن مسلح هیبریدی، بتن الیافی و یا بتن غیر مسلح، تحت خمش است.

با توجه به رابطه تنش-کرنش و به منظور ایجاد ارتباط بین پارامترهای کششی و خمشی بتن، راه حلی فراگیر برای تولید پاسخ لنگر-انحنا و همچنین بار-تغییر مکان ارائه شده است. در ادامه اثر پارامترهای مختلف روی رفتار بتن تحت خمش و همچنین مقادیر فولاد متوازن و نیز فولاد حداقل به منظور کمک به پارامترهای طراحی ارائه شده است. به علاوه

<sup>1</sup> Hybrid Reinforced Concrete

<sup>2</sup> Soranakom

<sup>3</sup> Mobasher



شکل ۱- (۱.۱.۱) مدل بتن تحت فشار؛ (۱.۱.۲) مدل بتن تحت کشش [۱۸]

پاسخ لنگر-انحنای تولید شده توسط این الگوریتم، می تواند به عنوان مشخصات، در بخش ورودی یک المان تیر، در آنالیز اجزا محدود غیر خطی، برای پیش‌بینی رفتار خمشی تیر استفاده شود. در نهایت به کمک ۴ مورد نتایج آزمایشگاهی محققین مختلف، بر روی بتن‌های مسلح هیبریدی و الیافی، مدل اعتبار سنجی شده است.

تمامی پارامترهای مربوط به تنش، به تنش لحظه ترک خوردگی یعنی  $E\epsilon_{cr}$  و تمامی پارامترهای کرنش، به کرنش ترک خوردگی یعنی  $\epsilon_{cr}$  تقسیم شده اند. همچنین پارامترهای هندسی همگی بر سطح مقطع بتن یعنی  $bh$  تقسیم می‌شوند تا در روابط از پارامترهای بی بعد استفاده - شود. برای ساده‌تر شدن روابط، نسبت فولاد با  $\rho = A_s b h$  معرفی می‌شود. نسبت فولاد معرفی شده، کمی با نسبت فولادی که در طراحی‌های متداول استفاده می‌شود و به صورت  $\rho_g = A_s b d$  بیان می‌شود؛ متفاوت است. در صورتی که تمام پارامترهای بیان شده را نرمال کنیم، داریم:

$$\omega = \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_{cr}}; \quad \beta_{tu} = \frac{\epsilon_{tu}}{\epsilon_{cr}}; \quad \lambda_{cu} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cr}}; \quad \kappa = \frac{\epsilon_{sy}}{\epsilon_{cr}}; \quad \xi = \frac{\epsilon_{trn}}{\epsilon_{cr}} \quad (1)$$

که در آن:  $\epsilon_{cy}$  کرنش فشاری بتن در لحظه جاری شدن،  $\epsilon_{cr}$  کرنش کششی بتن در لحظه ترک خوردگی،  $\epsilon_{tu}$  کرنش کششی نهایی بتن،  $\epsilon_{cu}$  کرنش فشاری نهایی بتن،  $\epsilon_{sy}$  کرنش فولاد در لحظه جاری شدن و  $\epsilon_{trn}$  کرنش کششی بتن در پایان ناحیه انتقال است.

$$\gamma = \frac{E_c}{E}; \quad \gamma_s = \frac{E_s}{E}; \quad \eta = \frac{E_{cr}}{E} \quad (2)$$

## ۲- مواد و روش تحقیق

مدل بتن الیافی استفاده شده در این مقاله بر اساس مدل پیشنهادی توسط مباشر و همکاران انتخاب شده است [۱۸].

شکل ۱، مدل‌های پیشنهادی برای بتن الیافی و شکل ۲ مدل استفاده شده برای فولاد را نشان می‌دهد. بر اساس شکل ۱.۱.۱، بتن تحت فشار، ابتدا بار را به صورت خطی تا تنش  $\sigma_y$  تحمل می‌کند و پس از آن تا لحظه ای که کرنش فشاری بتن به کرنش نهایی برسد، در همین حد باقی می‌ماند. با توجه به شکل ۱.۱.۲، مدل بتن تحت کشش، به صورت سه خطی با شیب‌های  $E$  و  $E_{cr}$  و شیب صفر در انتهای مدل بیان می‌شود. از ابتدای بارگذاری تا لحظه ترک خوردگی، بتن با شیب  $E$  تنش را تحمل می‌کند. بعد از ترک خوردگی، با توجه به مقدار و جنس الیاف استفاده شده، بتن می‌تواند پاسخی به صورت سخت‌شدگی کششی ( $E_{cr} > 0$ ) یا نرم‌شدگی کششی ( $E_{cr} < 0$ ) داشته باشد. در ناحیه سوم، بتن تا لحظه کرنش نهایی، با یک تنش ثابت (تنش باقی‌مانده)، نیرو را تحمل می‌کند. مقدار تنش باقی‌مانده به صورت

تا محل تار خنثی که به عنوان طول بازوی لنگر معرفی می-شود؛ به دست می-آید. برای به دست آوردن ارتفاع تارخنثی (k)، اختلاف نیروی کششی و فشاری در مقطع برابر صفر در نظر گرفته می-شود. در مراحل دو، سه و چهار، برای k روابط درجه دوم به وجود می-آیند و در نتیجه دو جواب برای k به دست می-آید. با استفاده از آزمایش‌های عددی مختلف، مشخص شد که فقط یکی از مقادیر k باعث جواب مثبت می-شود و قابل قبول است. در جدول ۱ پیوست، روابط به دست آمده مربوط به تار خنثی در هر مرحله از بارگذاری مشخص شده است.

انحنا در هر مرحله از بارگذاری برابر است با کرنش در دورترین تار فشاری بخش بر ارتفاع تار خنثی. مقادیر لنگر و انحنا، برای نرمال و بی بعد شدن، به ترتیب بر مقادیر لنگر ترک خوردگی ( $M_{cr}$ ) و انحنا ترک خوردگی ( $\phi_{cr}$ ) تقسیم می-شوند:

$$M = M' * M_{cr}; \quad \phi = \phi' * \phi_{cr} \quad (۴)$$

$$M_{cr} = \frac{1}{6} bh^2 E \epsilon_{cr} \quad (۵)$$

$$\phi_{cr} = \frac{2\epsilon_{cr}}{h} \quad (۶)$$

که در این روابط: M لنگر موجود، M' لنگر نرمال شده،  $\phi$  انحنا موجود،  $\phi'$  انحنا نرمال شده و h و b به ترتیب ارتفاع و عرض تیر هستند. خلاصه روابط برای مقادیر لنگر و انحنا در جدول ۲ پیوست آورده شده است.

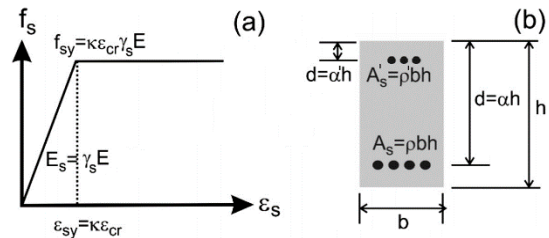
بایستی توجه داشت که الگوریتم بر اساس افزایش کرنش فشاری عمل می-کند. بنابراین برای کسب اطمینان از دقت کافی، الگوریتم باید رفتار بتن را قبل از ترک خوردگی به چند قسمت تقسیم کند تا قابل بررسی باشد. در این تحقیق پاسخ به ده قسمت تقسیم شده است. برای این کار از پارامتر  $\lambda_{cr}$  استفاده می-شود.  $\lambda_{cr}$  برابر است با کرنش فشاری متناظر با لحظه ترک خوردن بتن، یعنی لحظه ای که  $\beta = 1$  می-شود.

با توجه به نمودار کرنش در لحظه ترک خوردگی که در شکل ۳ نشان داده شده است، می-توان  $\lambda_{cr}$  را بدست آورد:

$$\text{if } \gamma = 1: \lambda_{cr} = \frac{C_1}{2C_2 - C_1} \quad (۷)$$

$$\text{if } \gamma \neq 1: \lambda_{cr} = \frac{\sqrt{(2C_2)^2 + 4(\gamma-1)C_1} - 2C_2}{2(\gamma-1) + 2C_2 - \sqrt{(2C_2)^2 + 4(\gamma-1)C_1}} \quad (۸)$$

مقادیر  $k_1$ ،  $C_1$  و  $C_2$  در جدول ۱ پیوست مشخص شده‌اند.



شکل ۲- (۲.ا) منحنی تنش کرنش فولاد، (۲.ب) سطح مقطع بتن [۱۳]

که در آن: E مدول الاستیسیتة کششی بتن،  $E_c$  مدول الاستیسیتة فشاری بتن،  $E_s$  مدول الاستیسیتة فولاد و  $E_{cr}$  شیب ناحیه انتقال در منحنی تنش کرنش بتن تحت کشش است.

همچنین کرنش کششی و فشاری بتن و کرنش در فولاد، در حالت نرمال شده به صورت زیر بیان می-شود:

$$\beta = \frac{\epsilon_{t,bot}}{\epsilon_{cr}}; \quad \lambda = \frac{\epsilon_{c,top}}{\epsilon_{cr}}; \quad \chi = \frac{\epsilon_{s,bot}}{\epsilon_{cr}}; \quad (۳)$$

که در آن:  $\epsilon_{c,top}$  و  $\epsilon_{t,bot}$  به ترتیب حداکثر کرنش کششی و فشاری موجود در بتن و  $\epsilon_{s,bot}$  و  $\epsilon'_{s,top}$  به ترتیب کرنش در فولاد کششی و فشاری بتن هستند.

با لحاظ نمودن اصل برنولی که در آن صفحات عمود بر محور عضو پس از خمش بصورت صفحه باقی می-مانند، تغییرات کرنش در ارتفاع مقطع خطی در نظر گرفته می-شود. بدیهی است با اعمال لنگر خمشی به عضو، کرنش فشاری بتن افزایش می-یابد. در مدل پیشنهادی به ازای هر کرنش فشاری بتن، ارتفاع تار خنثی بگونه ای محاسبه می-شود که تعادل نیرویی مقطع ارضاء شود. کرنش فشاری بتن از مقدار صفر تا مقدار متناظر با گسیختگی تغییر کرده و ارتفاع تار خنثای مربوطه محاسبه می-شود (جدول پ-۱).

در روش ارائه شده، کرنش در دورترین تار فشاری ( $\lambda$ ) به عنوان پارامتر مستقل برای تعیین لنگر-انحنا استفاده می-شود. به این ترتیب که بارگذاری از  $\lambda = 0$  شروع شده و تا  $\lambda = \lambda_{cu}$  ادامه می-یابد.

در مجموع، هدفه حالت در غالب چهار مرحله بارگذاری به وجود می-آید. برای هر حالت، با استفاده از روابط تنش-کرنش، مقادیر تنش موجود در مقطع و به کمک آن نیروی معادل محاسبه می-شوند. همچنین فاصله محل اثر نیروها

جدول ۱- مشخصات مکانیکی بتن مصرفی در نمونه‌های آزمایشگاهی

| نام نمونه  | $f'_c$ (Mpa) | E (Mpa) | $\gamma$ | $\epsilon_{cr}$ | $\omega$ | $\lambda_{cu}$ | $\xi$ | $\mu$ | $A_s$ (mm <sup>2</sup> ) | $A'_s$ (mm <sup>2</sup> ) |
|------------|--------------|---------|----------|-----------------|----------|----------------|-------|-------|--------------------------|---------------------------|
| 2φ16-B-PC  | ۴۹/۷         | ۳۳۱۳۴/۲ | ۱/۱۱۷    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۷/۶۶     | ۲۰/۱۳          | ۱/۰۱  | ۰     | ۴۰۲                      | ۱۵۷                       |
| 2φ16-B-30  | ۴۵           | ۳۱۵۲۸/۶ | ۱/۱۷۴    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۶/۹۴     | ۲۳/۵           | ۱/۰۱  | ۰/۱۵  | ۴۰۲                      | ۱۵۷                       |
| 2φ16-B-60  | ۴۳/۲         | ۳۰۸۹۱/۶ | ۱/۱۹۸    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۶/۶۶     | ۲۳/۵           | ۱/۰۱  | ۰/۲۵  | ۴۰۲                      | ۱۵۷                       |
| 4φ16-B-PC  | ۴۹/۷         | ۳۳۱۳۴/۲ | ۱/۱۱۷    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۷/۶۶     | ۲۰/۱۳          | ۱/۰۱  | ۰     | ۸۰۴                      | ۱۵۷                       |
| 4φ16-B-30  | ۴۵           | ۳۱۵۲۸/۶ | ۱/۱۷۶    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۶/۹۴     | ۲۳/۵           | ۱/۰۱  | ۰/۱۵  | ۸۰۴                      | ۱۵۷                       |
| 2φ16-UB-PC | ۴۹/۷         | ۳۳۱۳۴/۲ | ۱/۱۱۷    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۷/۶۶     | ۲۰/۱۳          | ۱/۰۱  | ۰     | ۴۰۲                      | ۱۵۷                       |
| 2φ16-UB-30 | ۴۵           | ۳۱۵۲۸/۶ | ۱/۱۷۶    | ۰/۰۰۰۱۴۹        | ۶/۹۴     | ۲۳/۵           | ۱/۰۱  | ۰/۱۵  | ۴۰۲                      | ۱۵۷                       |

۲. با توجه به مراحل جداول ۱ و ۲ پیوست، مقادیر تار خنثی، لنگر و انحنای مربوط به هر مرحله بارگذاری، با افزایش کرنش فشاری ( $\lambda$ ) محاسبه می‌شوند.

۳. مقادیر لنگر و انحنای واقعی توسط رابطه ۴ بدست می‌آید.

۴. بار معادل روی نمونه‌های بتنی در هر لحظه از بارگذاری از رابطه ۹ تعیین می‌شود. S در این معادله برای حالت خمش سه نقطه ای برابر است با نصف طول آزاد دهانه و برای حالت خمش چهار نقطه ای برابر است با فاصله آزاد هر کدام از بارها تا لبه تیر.

$$P_i = \frac{2M_i}{S} \quad (9)$$

۵. برای به دست آوردن تغییرات انحنا در طول تیر، تیر به اجزای مختلفی تقسیم می‌شود. تغییرات لنگر مطابق شکل ۴-ب به صورت خطی در نظر گرفته شده و در هر لحظه از بارگذاری لنگر مربوط به هر قطعه از تیر محاسبه می‌شود.

۶. با توجه به منحنی لنگر انحنا، انحنای متناظر با لنگر هر قطعه به دست می‌آید. (شکل ۴-ج)

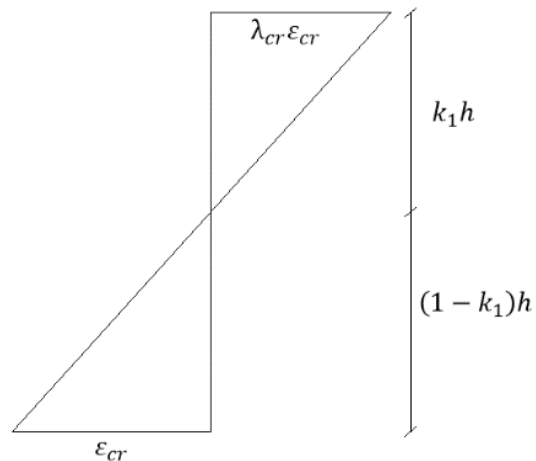
۷. با لنگر گرفتن از سطح زیر منحنی نشان داده شده در شکل ۴-ج حول تکیه‌گاه A تغییر شکل به دست می‌آید.

۸. تکرار مراحل ۳ تا ۷ تا پایان منحنی بار تغییر شکل.

فلوجارت در شکل ۵ نشان داده شده است.

جدول ۲- میزان الیاف و شرایط فولاد مصرفی در بتن [۶]

| نام نمونه  | الیاف                              | Bond    |
|------------|------------------------------------|---------|
| 2φ16-B-PC  | -                                  | Bond    |
| 2φ16-B-30  | ۳۰ kg/m <sup>3</sup> و $V_f = ٪۳۸$ | Bond    |
| 2φ16-B-60  | ۶۰ kg/m <sup>3</sup> و $V_f = ٪۷۶$ | Bond    |
| 4φ16-B-PC  | -                                  | Bond    |
| 4φ16-B-30  | ۳۰ kg/m <sup>3</sup> و $V_f = ٪۳۸$ | Bond    |
| 2φ16-UB-PC | -                                  | No Bond |
| 2φ16-UB-30 | ۳۰ kg/m <sup>3</sup> و $V_f = ٪۳۸$ | No Bond |



شکل ۳- نمودار کرنش در لحظه ترک خوردگی

### ۳- الگوریتم پیش‌بینی منحنی بار-تغییر شکل

۱. بعد از دریافت مشخصات اولیه بتن و همچنین ابعاد آن، ابتدا مقادیر  $\lambda_{cr}$ ,  $\phi_{cr}$  و  $M_{cr}$  محاسبه می‌شوند.

روابط ارائه شده در جدول ۲ پیوست، در مرحله ۴-۴ به دست می‌آید. اما با توجه به این که ظرفیت نهایی لنگر در بیشترین کرنش فشاری حاصل می‌شود؛ می‌توان فرض کرد:  $\lambda_{u} \rightarrow \infty$

و  
 $M_u = M_{\infty}$  با جایگذاری  $\lambda_{u} = \infty$  در حالت ۴-۴ جداول ۱ و ۲ پیوست، لنگر نهایی مطابق رابطه ۱۰ حاصل می‌شود.

$$M'_{\infty} = 3\mu + 6\kappa\gamma_s(\alpha\rho - \alpha'\rho') - \frac{(3(\mu + \kappa\gamma_s(\rho - \rho'))^2)}{\mu + \gamma\omega} \quad (10)$$

برای بتن الیافی ساده و با در نظر گرفتن  $\gamma = 1$  لنگر نهایی می‌شود  $M'_{\infty} = \frac{3\mu\omega}{\mu + \omega}$  که همان رابطه‌ای است که سوراناکوم قبلاً پیشنهاد داده است [۱۰]. برای یک ماده الاستیک-پلاستیک کامل با مقاومت کششی و فشاری یکسان و همچنین مدول الاستیسته کششی و فشاری یکسان و بدون در نظر گرفتن حضور میلگرد، معادله بالا نظریه‌ای که بیان می‌کند "ظرفیت لنگر پلاستیک یک مقطع مستطیلی ۱/۵ برابر حد پلاستیک آن است." [۱۹] را تایید می‌کند.

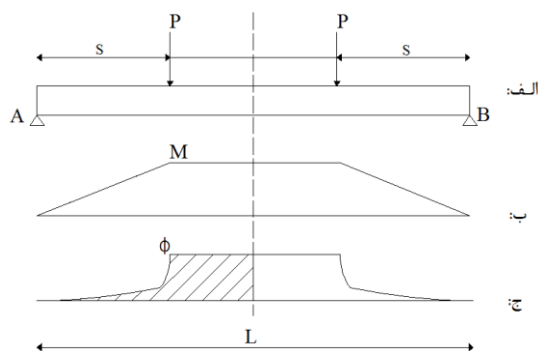
با فرض اینکه ظرفیت لنگر نهایی نرمال شده به دست آمده از  $M'_{\infty}$  برابر یک شود (یعنی ظرفیت لنگر نهایی برابر لنگر ترک خوردگی) مقدار مقاومت باقی‌مانده بحرانی بدست می‌آید:

$$\mu_{crit} = \frac{3\kappa^2\gamma_s^2(\rho - \rho')^2 - 6\gamma\omega\kappa\gamma_s(\alpha\rho - \alpha'\rho') + \gamma\omega}{3\gamma\omega - 6\kappa\gamma_s(\rho - \rho') + 6\kappa\gamma_s(\alpha\rho - \alpha'\rho') - 1} \quad (11)$$

مقاومت باقی‌مانده بحرانی، حدی است که رفتار نرم شدگی و سخت شدگی بتن الیافی را در خمش مشخص می‌کند. یعنی در صورتی که  $\mu < \mu_{crit}$  باشد، بتن الیافی رفتار نرم شدگی خمشی و در صورتی که  $\mu > \mu_{crit}$  بتن الیافی از خود رفتار سخت شدگی خمشی نشان می‌دهد. در صورت استفاده از میلگرد،  $\mu_{crit}$  به شدت کاهش یافته و حتی منفی می‌شود و بدیهی است که حتی در صورت استفاده نکردن از الیاف ولی با حضور میلگرد حداقل، که در ادامه به آن نیز پرداخته می‌شود، تیر بتنی رفتار سخت شدگی خمشی از خود نشان می‌دهد. برای بتن الیافی معمولی  $\mu_{crit} \approx 0/35$  به دست می‌آید که این موضوع توسط محققین دیگر نیز بیان شده است [۱۰، ۱۲ و ۲۰].

#### ۴-۲- وضعیت مقطع در حالت متوازن

برای به دست آوردن میزان فولاد متوازن در یک مقطع بتن هیبریدی، فرض می‌شود درست در زمانی که بتن در ناحیه



شکل ۴- روند به دست آوردن منحنی بار-تغییر شکل



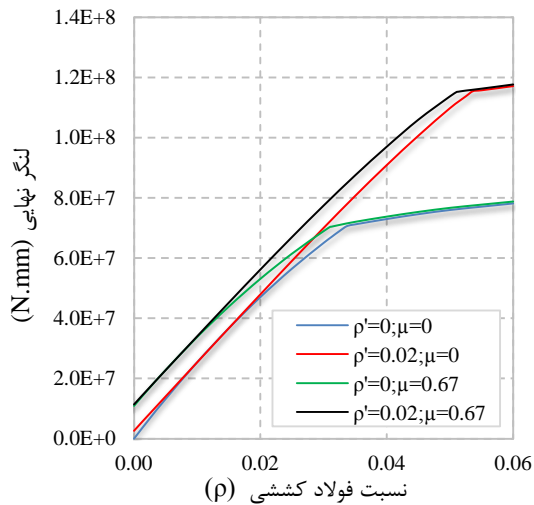
شکل ۵- فلوچارت پیش‌بینی منحنی بار-تغییر شکل

#### ۴- پارامترهای طراحی

در این بخش لازم است به پارامترهایی پرداخته شود که برای طراحی یک تیر بتنی هیبریدی مورد نیاز است.

#### ۴-۱- پاسخ لنگر-انحنای در حالت حدی

منظور از پاسخ لنگر-انحنای در حالت حدی، همان ظرفیت لنگر نهایی است. ظرفیت لنگر نهایی، لنگری است که از



شکل ۶- ظرفیت لنگر نهایی بر اساس میزان میلگرد کششی و رابطه آن با فولاد فشاری و مقاومت باقی مانده

شکست محتمل است. بنابراین برای جلوگیری از این نوع شکست باید درصد الیاف موجود و مقاومت باقی مانده بتن زیاد شود تا بتن رفتار سخت شدگی خمشی از خود نشان دهد و یا میزان میلگرد داخل بتن از نسبتی که فولاد حداقل نامیده شده است کمتر نباشد.

ACI 318 حداقل فولاد کششی برای بتن مسلح ساده را به صورت زیر بیان می کند [۲۱]:

$$\rho_{\min} = \frac{\sqrt{f_c}}{4f_y} \geq \frac{1.4}{f_y} \quad (14)$$

در صورتی که در بتن از الیاف نیز استفاده شود، مقاومت کششی بتن نیز در نظر گرفته می شود و میزان فولاد حداقل کمتر از حالت بدون الیاف خواهد بود. برای بدست آوردن حداقل فولاد کششی بتن هیبریدی، کافی است لنگر مقاوم نهایی با لنگر ترک خوردگی برابر فرض شود. بنابراین کافی است  $M'_{\infty} = 1$  در نظر گرفته شود. با فرض  $M'_{\infty} = 1$  و حل آن، معادله درجه دو حاصل می شود و دو جواب برای  $\rho_{\min}$  به دست خواهد آمد. تنها یکی از جوابها منجر به  $\rho_{\min} < \rho_b$  خواهد شد که در روابط ۱۵ و ۱۶ گنجانده شده است:

$$W_1 = \frac{\sqrt{3\mu(1-2\alpha)+3\alpha^2(\mu+\gamma\omega)+6\kappa\gamma_s\rho'(\alpha-\alpha')-1}}{\mu+\gamma\omega} \quad (15)$$

$$\rho_{\min} = \frac{\alpha\mu-\mu+\alpha\gamma\omega+\kappa\gamma_s\rho'-\sqrt{3}/3W_1(\mu+\gamma\omega)}{\kappa\gamma_s} \quad (16)$$

فشاری دچار گسیختگی می شود، فولاد کششی نیز جاری می شود. در مقطع، احتمال حضور فولاد فشاری هست و رابطه ارائه شده در مرحله ۴-۴، یعنی حالتی که هر دو فولاد کششی و فشاری جاری شده اند، خیلی ساده تر از روابط دیگر ارائه شده در مرحله ۴ است. معمولا در طراحی بهینه، هنگام گسیختگی، فولاد فشاری هم در مقطع جاری می شود. بنابراین می توان برای به دست آوردن  $\rho_b$  از روابط ناحیه ۴-۴ استفاده کرد.

$$\epsilon_c = \epsilon_{cu}; \epsilon_s = \epsilon'_s = \epsilon_{sy} \quad \text{یعنی:}$$

باتوجه به نمودار توزیع کرنش داریم:

$$\frac{\lambda\epsilon_{cu}\epsilon_{cr}}{k_{4.4}h} = \frac{\kappa\epsilon_{cr}}{(\alpha-k_{4.4})h} \quad (12)$$

با جایگذاری مقدار  $k_{4.4}$  در رابطه فوق و حل آن برای  $\rho_b$

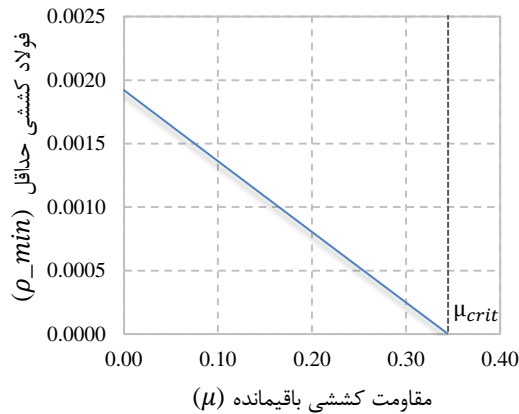
خواهیم داشت:

$$\rho_b = \frac{((2\alpha\xi(-1+\eta+\mu) - 2\mu(\lambda+\kappa - \alpha\lambda) + \alpha\gamma\omega(2\lambda - \omega) + 2\kappa\rho'\gamma_s(\kappa+\lambda) - \alpha(\eta+\eta\xi^2 - 1))) / (2\kappa\gamma_s(\kappa+\lambda))}{\alpha(\eta+\eta\xi^2 - 1)} \quad (13)$$

شکل ۶ تغییرات لنگر نهایی را بر حسب نسبت فولاد کششی نشان می دهد. ملاحظه می شود که تا قبل از رسیدن فولاد کششی به نسبت فولاد متوازن، لنگر نهایی با افزایش نسبت فولاد، با شیب زیادی افزایش می یابد. اما بعد از رسیدن نسبت فولاد موجود به نسبت فولاد متوازن، شکست ترد می شود و افزایش میلگرد، تاثیر کمتری در افزایش لنگر نهایی خواهد گذاشت. همچنین ملاحظه می شود که اضافه کردن فولاد فشاری به مقطع، باعث می شود که نسبت فولاد متوازن در مقطع افزایش یابد. در نتیجه، شکست ترد با فولاد کششی بیشتری اتفاق خواهد افتاد و از ظرفیت مقطع استفاده بیشتری خواهد شد. همچنین مشاهده می شود که افزایش مقاومت باقی مانده باعث افزایش لنگر مقاوم نهایی می شود. اما در صورتی که نسبت فولاد موجود، از نسبت فولاد متوازن بیشتر شود؛ مقاومت باقیمانده تاثیری در افزایش لنگر مقاوم نهایی نخواهد گذاشت.

#### ۴-۳- حداقل فولاد کششی

در صورتی که در یک تیر بتن مسلح، مقاومت نهایی مقطع از لنگر ترک خوردگی آن کمتر باشد، تیر بتنی بلافاصله بعد از ترک خوردگی گسیخته می شود. این شکست، شکستی ترد و ناگهانی محسوب شده و باید از وقوع آن جلوگیری کرد. در تیرهای بتنی الیافی با رفتار نرم شدگی خمشی نیز این



شکل ۷- روند تغییرات حداقل فولاد کششی بر حسب مقاومت باقیمانده

که T مجموع نیروهای کششی و فشاری مقطع،  $C_c$  مجموع نیروهای فشاری و  $C_t$  مجموع نیروهای کششی موجود هستند.

$\bar{\rho}_{s,min}$  با ترکیب روابط ۱۷ و ۱۸ به دست می‌آید:

$$\bar{\rho}_{s,min} = \left( (\alpha'(-2\gamma\lambda\omega + \gamma\omega^2 - 2\lambda\mu - 2\xi(\eta + \mu - 1) + \xi^2\eta + \eta - 1) + 2(\kappa - \lambda) * (\kappa\rho'\gamma_s - \mu)) \right) / (2\kappa\gamma_s(\kappa - \lambda)) \quad (19)$$

توجه شود که در محاسبات، شرط جاری شدن فولاد کششی حتما بررسی شود. برای بررسی جاری شدن فولاد کششی با توجه به شکل ۸ باید از یک معادله سازگاری دیگر به صورت زیر استفاده کرد:

$$\frac{kh}{(\alpha - \alpha')h} = \frac{\lambda_{cu}}{\chi} \rightarrow \chi = \lambda_{cu} \left( \frac{\alpha}{k} - 1 \right) \quad (20)$$

$$\chi = \frac{\alpha}{\alpha'} (\lambda_{cu} - \kappa) - \lambda_{cu} \geq \kappa \quad (21)$$

در صورتی که شرط رابطه ۲۱ رعایت شود به این معنی است که فولاد کششی جاری شده است.

#### ۷- صحت سنجی مدل توسط نتایج آزمایشگاهی

برای صحت سنجی لازم است هر دو مورد تیر بتنی هیبریدی و تیر بتنی الیافی بررسی شوند.

##### ۷-۱- تیر بتنی هیبریدی

سه مورد تیر بتنی هیبریدی با شرایط مختلف برای صحت سنجی استفاده شده است.

باید توجه کرد که نسبت فولاد ارائه شده به صورت  $\frac{A_s}{bh}$  است. بنابراین برای تبدیل آن به نسبت فولاد مرسوم باید عدد بدست آمده را بر  $\alpha = d/h$  تقسیم کنیم.

همان‌گونه که قبلا ذکر شد، در صورتی که مقاومت باقیمانده بتن الیافی از مقاومت باقیمانده بحرانی بیشتر شود، بتن رفتار سخت شدگی خمشی از خود نشان می‌دهد. یعنی شکست شکل پذیر خواهد بود و فولاد حداقل دیگر معنی پیدا نمی‌کند. شکل ۷ روند تغییرات فولاد حداقل برحسب افزایش مقاومت باقیمانده را مشخص می‌کند. بدیهی است در صورتی که  $\mu = \mu_{crit}$  شود، نسبت فولاد حداقل صفر خواهد شد.

#### ۴-۴- بررسی جاری شدن فولادهای فشاری بتن الیافی

در یک مقطع بتن مسلح با فولاد فشاری مشخص، عامل تعیین کننده در جاری شدن یا جاری نشدن فولادهای فشاری، مقدار فولادهای کششی موجود در مقطع است. به طوری که اگر میزان فولاد های کششی از یک حد مرزی بیشتر باشد، نیروی

مقاوم ایجاد شده به اندازه ای است که می‌تواند فولادهای فشاری را به حد تسلیم برساند [۲۲]. اما در مورد بتن‌های الیافی این موضوع کمی متفاوت است. در محاسبات مهندسی بتن مسلح ساده، مقاومت کششی بتن در نظر گرفته نمی‌شود. اما در بتن‌های هیبریدی با توجه به مقاومت کششی قابل توجه بتن الیافی، علاوه بر میلگرد کششی، مقاومت کششی بتن نیز در تعیین جاری شدن فولادهای فشاری موثراند.

در بتن هیبریدی، نسبت فولاد کششی که باعث جاری شدن فولاد فشاری می‌شود با  $\bar{A}_{s,min}$  بیان می‌شود. برای یک طراحی بهینه باید در لحظه نهایی فولاد کششی و فشاری هر دو با هم جاری شوند. در بسیاری از مسائل عملی و با در نظر گرفتن ابعاد موجود، در لحظه جاری شدن فولاد فشاری، فولاد کششی نیز جاری می‌شود [۲۲]. بنابراین برای محاسبه  $\bar{A}_{s,min}$  باید از روابط مربوط به مرحله ۴-۴ استفاده شود. با توجه به نمودار توزیع کرنش نشان داده شده در شکل ۸ و نوشتن معادلات تعادل و سازگاری خواهیم داشت:

$$\frac{kh}{(k - \alpha')h} = \frac{\lambda_{cu}}{\kappa} \rightarrow k = \frac{\lambda_{cu}\alpha'}{\lambda_{cu} - \kappa} \quad (17)$$

$$T = C_c + C_t \quad (18)$$



ACI 318 برای تعیین مقاومت کششی و مدول الاستیسته تیرهای تحت خمش روابط زیر را پیشنهاد می‌کند [۲۲]:

$$f_r = 0.7\sqrt{f'_c} \quad (22)$$

$$E = 4700\sqrt{f'_c} \quad (23)$$

سایر مشخصات مکانیکی بتن بر اساس این دو پارامتر تعیین می‌شوند که در جدول ۱ مشخص شده است. شرایط میلگردهای مصرف شده در تیرهای بتنی و میزان الیاف موجود در نمونه‌های آزمایش در جدول ۲ مشخص شده‌اند. نتایج منحنی‌های بار-تغییر شکل برای بتن‌های با میلگرد دنداندار مطابق شکل ۹ است. مشاهده می‌شود که مدل به خوبی رفتار بتن هیبریدی را پیش‌بینی کرده است.

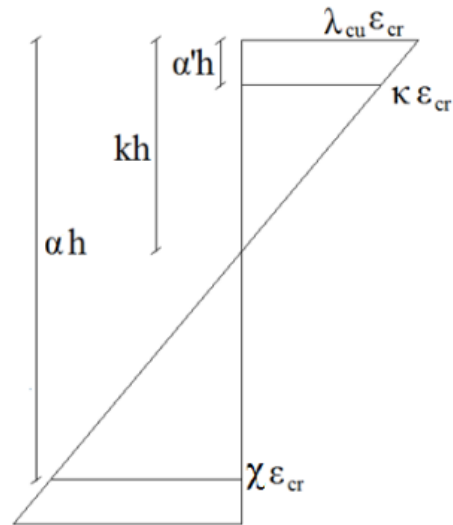
در مورد بتن 2φ16-B-30 میزان تغییر شکل نهایی فقط ۶۱ درصد به درستی پیش‌بینی شده است. پاسخ نمونه بتنی 4φ16-B-30 بعد از نقطه متناظر با ۰/۸۵ درصد بار بیشینه، ناپایدار می‌شود و بیشترین جابجایی را براساس این نقطه در نظر می‌گیریم [۶].

بعد از رسم منحنی لنگر-انحنای بتن‌های 2φ16-UB-PC و 2φ16-UB-30 مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از مدل به نتایج آزمایشگاهی بسیار نزدیک هستند (شکل ۱۰). به طور کلی نتایج حاصل از اعتبار سنجی مدل و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی در جدول ۳ آورده شده است. مشاهده می‌شود که مدل نیروی بیشینه را با دقتی بیش از ۹۳ درصد پیش‌بینی کرده است. همچنین مدل، به جز مورد 2φ16-B-30 تغییر مکان نهایی را بیشتر از نتایج آزمایشگاهی پیش‌بینی کرده و تغییر مکان بتن در لحظه جاری شدن را در تمامی حالت‌ها با دقت بین ۸۰ تا ۱۰۰ درصد پیش‌بینی کرده است.

#### ۷-۱-۲- نمونه دوم

این بار برای صحت سنجی مدل در زمینه تیر بتنی هیبریدی، از نتایج تحقیقات گریبناک و همکاران استفاده شد [۱۴]. تیرهای هیبریدی به ارتفاع ۳۰۰ میلی‌متر، عرض ۲۸۵ میلی‌متر،

طول ۳ متر تحت بار چهار نقطه ای قرار گرفتند. عمق موثر برای میلگرد کششی (d)، ۲۷۵ میلی‌متر و برای میلگرد فشاری (d')، ۲۵ میلی‌متر است.



شکل ۸- نمودار تنش مربوط به حالتی که فولاد فشاری در مرز تسلیم باشد

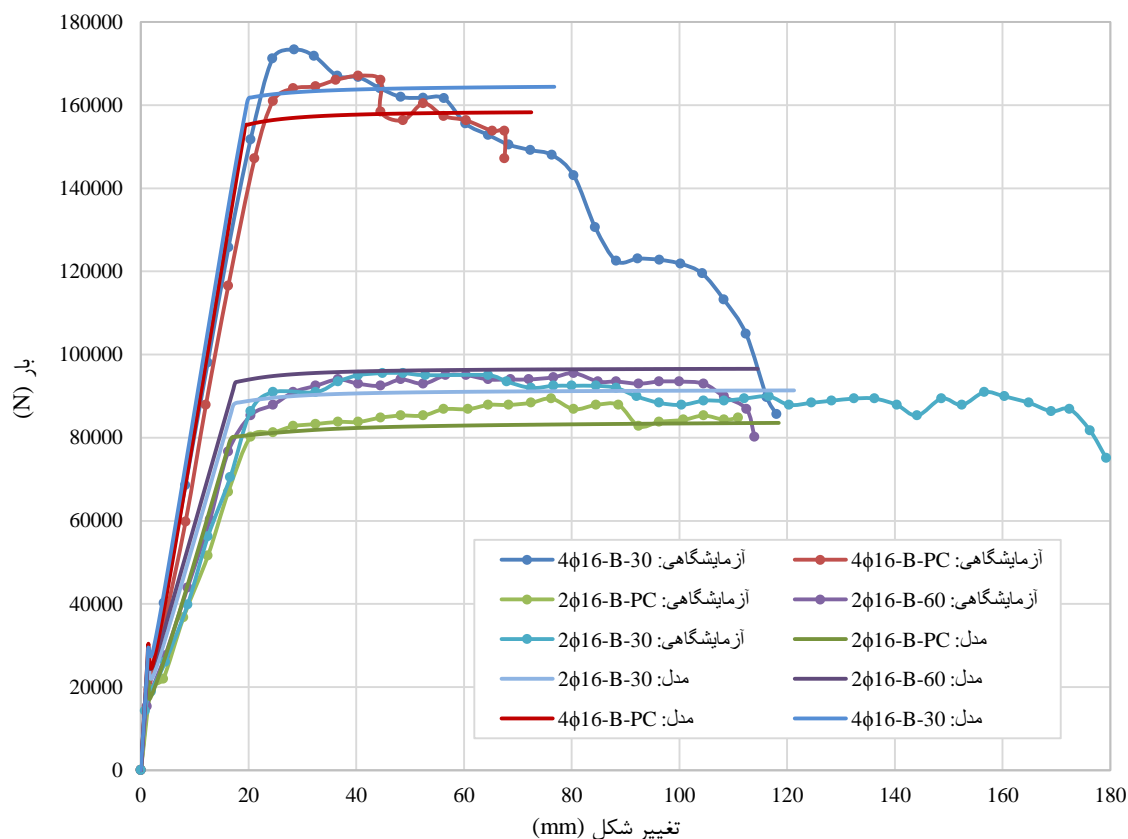
#### ۷-۱-۱- نمونه اول

برای صحت سنجی مدل و بررسی میزان دقت آن در شبیه سازی تیر بتنی، نتایج آزمایش‌هایی که توسط مدا و همکاران [۶] انجام شده‌اند؛ به کار گرفته شد.

تمامی نمونه‌ها ۴ متر طول (با طول دهانه ۳/۶ متر)، ارتفاع ۳۰۰ میلی‌متر (عمق موثر ۲۶۰ میلی‌متر) و عرض ۲۰۰ میلی‌متر هستند. در تمامی نمونه‌ها نسبت آب به سیمان ۰/۴۸ و بیشترین قطر سنگدانه ۲۰ میلی‌متر است.

در بتن از الیاف فولادی قلاب دار با طول ۵۰ و قطر ۱ میلی‌متر استفاده شده است. بر اساس میزان الیاف موجود در بتن، ۳ نوع نمونه انتخاب شد: بتن بدون الیاف، بتن با  $30 \text{ kg/m}^3$  الیاف و بتنی با  $60 \text{ kg/m}^3$  الیاف. برای بتن بدون الیاف،  $\mu = 0$  و برای بتن با  $30 \text{ kg/m}^3$  الیاف،  $\mu = 0/15$  و برای بتن با  $60 \text{ kg/m}^3$  الیاف،  $\mu = 0/25$  در نظر گرفته شد. در تمامی نمونه‌ها  $\xi = 1/01$  فرض شده است. جنس فولاد مصرفی در آرماتورها S500 است. دو ردیف خاموت با قطر ۸ میلی‌متر و با فاصله ۱۰۰ میلی‌متر در محدوده خارجی دوار نقطه‌ای، برای جلوگیری از شکست برشی قرار گرفته‌اند.

همچنین برای مهار بهتر خاموت‌ها از ۲ عدد میلگرد فشاری با قطر ۱۰ میلی‌متر استفاده شده است. دو مدل میلگرد کششی مختلف (2φ16 و 4φ16) استفاده شده است.



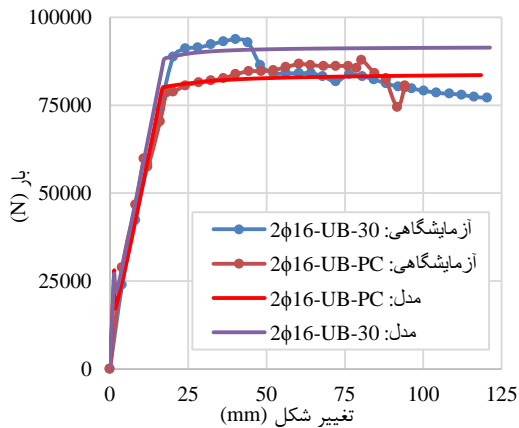
شکل ۹- منحنی‌های بار تغییر شکل مربوط به نمونه‌های با میلگرد دندان‌دار و مقایسه نتایج آزمایشگاهی با مدل

جدول ۳- نتایج بار-تغییر شکل آزمایشگاهی و مدل، و مقایسه آنها با هم

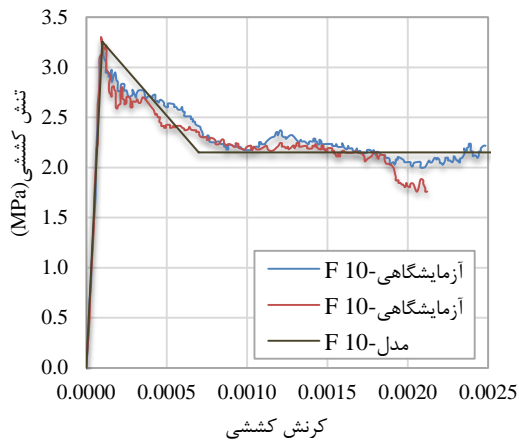
| نمونه      | نتایج آزمایشگاهی (kN,mm) |            |                | نتایج مدل (kN,mm) |            |                | دقت %     |            |                |
|------------|--------------------------|------------|----------------|-------------------|------------|----------------|-----------|------------|----------------|
|            | $P_{max}$                | $\delta_y$ | $\delta_{max}$ | $P_{max}$         | $\delta_y$ | $\delta_{max}$ | $P_{max}$ | $\delta_y$ | $\delta_{max}$ |
| 2φ16-B-PC  | ۹۰                       | ۲۱         | ۱۱۰            | ۸۴                | ۱۷         | ۱۱۸            | ۹۳        | ۸۱         | ۱۰۷            |
| 2φ16-B-30  | ۹۶                       | ۲۰         | ۱۸۰            | ۹۱                | ۱۸         | ۱۲۱            | ۹۵        | ۹۰         | ۹۷             |
| 2φ16-B-60  | ۹۶                       | ۱۸         | ۱۱۴            | ۹۷                | ۱۸         | ۱۱۵            | ۱۰۱       | ۱۰۰        | ۱۰۱            |
| 4φ16-B-PC  | ۱۶۸                      | ۲۴         | ۶۷             | ۱۵۸               | ۲۰         | ۷۲             | ۹۴        | ۸۳         | ۱۰۷            |
| 4φ16-B-30  | ۱۷۵                      | ۲۵         | ۷۶             | ۷۶۴               | ۲۰         | ۷۷             | ۹۴        | ۸۰         | ۱۰۱            |
| 2φ16-UB-PC | ۸۷                       | ۱۸         | ۹۴             | ۸۴                | ۱۷         | ۱۱۸            | ۹۷        | ۹۴         | ۱۲۶            |
| 2φ16-UB-30 | ۹۴                       | ۲۰         | ۹۴             | ۹۱                | ۱۸         | ۱۲۱            | ۹۷        | ۹۰         | ۱۲۹            |

درصد الیاف ۱٪ و ۱/۵٪ در نظر گرفته شده است. مقاومت فشاری بتن با ۱٪ الیاف، ۴۸ مگاپاسکال و مقاومت فشاری بتن با ۱/۵٪ الیاف، ۵۲/۲ مگاپاسکال اندازه گیری شده است.

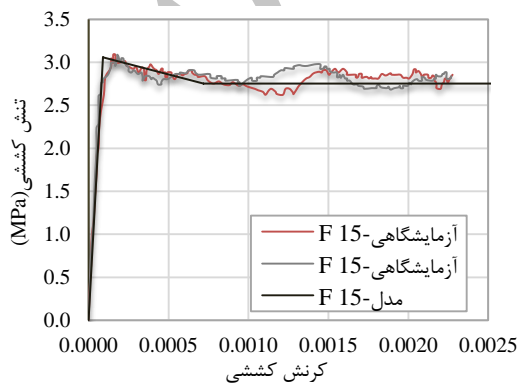
مشخصات مواد استفاده شده در بتن، در جدول ۴ آورده شده است. الیاف از جنس فولادی قلاب دار با مدول الاستیسیته ۱۰۲۰ مگاپاسکال، به طول ۵۳ میلیمتر و قطر ۱ میلیمتر استفاده شده اند. دو نوع بتن الیافی با



شکل ۱۰- منحنی بار-تغییر شکل برای نمونه‌های با میلگرد صاف



شکل ۱۱- منحنی تنش کرنش مربوط به بتن الیافی با ۱۰٪ الیاف



شکل ۱۲- منحنی تنش کرنش مربوط به بتن الیافی با ۱۵٪ الیاف

در بتن هیبریدی از ۲۳۵ میلیمتر مربع میلگرد کششی و ۵۶ میلیمتر مربع میلگرد فشاری استفاده شده است. مدول الاستیسیت و مقاومت فولاد به ترتیب ۲۰۲/۸ گیگاپاسکال و ۵۶۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

کرنش فشاری نرمال شده در لحظه جاری شدن بتن الیافی ( $\omega$ ) با فرض  $\sigma_{cy} = 0.85f'_c$  به دست می‌آید. شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب نتایج تطبیق مدل با نتایج آزمایشگاهی مربوط به منحنی تنش-کرنش بتن الیافی تحت کشش، با ۱۰٪ و ۱۵٪ الیاف را نشان داده است.

مدول الاستیسیت بتن از رابطه ۲۵ به دست می‌آید و بقیه اطلاعات مربوط به کشش از قبیل کرنش ترک خوردگی ( $\epsilon_{cr}$ )، مقاومت باقیمانده و  $\xi$  از طریق انطباق به دست می‌آیند. اطلاعات مربوط به مشخصات به دست آمده در جدول ۵ ذکر شده است.

همان‌طور که در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود، مدل به خوبی توانسته منحنی لنگر انحنای دو نمونه بتنی را پیش‌بینی کند. دقت شود که منحنی لنگر انحنای داده شده در شکل ۱۳ فقط مربوط به رفتار بتن هیبریدی تا قبل از جاری شدن میلگردها است و بعد از آن اطلاعاتی در اختیار نیست.

جدول ۴- مشخصات مواد استفاده شده در بتن [۱۴]

| طرح اختلاط ( $\text{kg/m}^3$ ) | ماده                                 |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| $90.5 \pm 2$                   | ماسه ۰/۴ میلیمتر                     |
| $388 \pm 1$                    | سنگدانه گرانیت خرد شده ۵/۸ میلیمتر   |
| $548 \pm 1$                    | سنگدانه گرانیت خرد شده ۱۱/۱۶ میلیمتر |
| $400 \pm 0.5$                  | سیمان (CEM I 42.5)                   |
| $123/8 \pm 5$                  | آب                                   |
| $2 \pm 2$                      | روان کننده بتن Muraplast FK 63.30    |

جدول ۵- مشخصات نمونه‌های بتنی با ۱ و ۱/۵ درصد الیاف

|                 | F 10     | F 15    |
|-----------------|----------|---------|
| $f'_c$ (MPa)    | ۴۸       | ۵۲/۲    |
| E (MPa)         | ۳۲۵۶۲/۶  | ۳۳۹۵۷/۳ |
| $\omega$        | ۱۲/۴۱    | ۱۴/۶۸   |
| $\epsilon_{cr}$ | ۰/۰۰۰۱۰۱ | ۰/۰۰۰۰۹ |
| $\xi$           | ۸        | ۸       |
| $\mu$           | ۰/۶۴     | ۰/۹     |

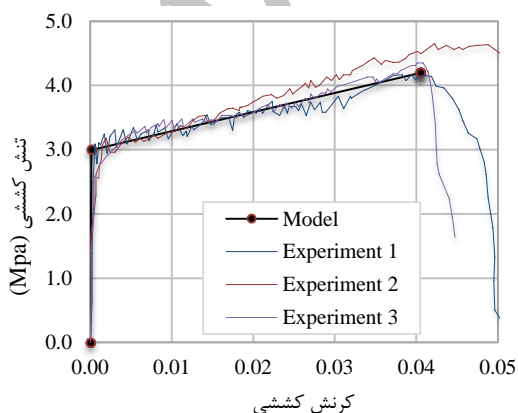
مقاومت کششی ۱۶۰۰ مگاپاسکال و مدول الاستیک ۴۰ گیگاپاسکال انتخاب شده است. مشخصات هندسی تیرهای هیبریدی در جدول ۶ ذکر شده است.

فولادهای استفاده شده با مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگاپاسکال و مقاومت ۳۶۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شدند. مدول الاستیسیته UHTCC تحت فشار و کشش برابر فرض شده و مقدار آن براساس تحقیقات مختلف به صورت  $4012(f_{cu})^{0.4}$  به دست می‌آید [۲۴]. مشخصات UHTCC تحت کشش به کمک آزمایش کشش مستقیم به دست آمده است که در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود. به کمک نتایج آزمایش کشش مستقیم و انطباق نتایج آزمایشگاهی با مدل، در منحنی تنش-کرنش بتن تحت کشش، مشخصات دیگر بتن به دست می‌آیند. کرنش فشاری نهایی UHTCC، ۰/۰۱ در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی UHTCC در جدول ۷ ذکر شده اند.

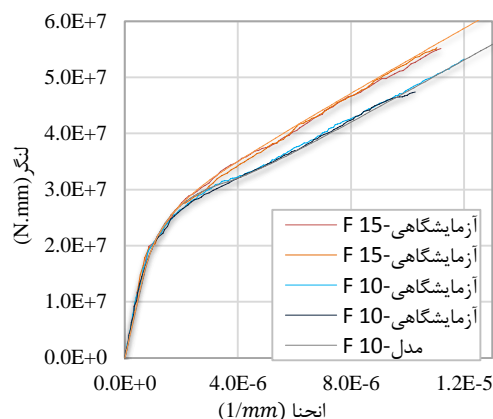
تیرهای هیبریدی تحت بار خمشی ۳ نقطه ای قرار گرفتند. نتایج منحنی بار-تغییر مکان در شکل ۱۵ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مدل توانسته است رفتار دو تیر RUHTCC را به خوبی پیش‌بینی کند.

#### ۷-۲- تیر بتنی الیافی UHPFRC

همانطور که قبلاً ذکر شد؛ مدل معرفی شده قابلیت پیش‌بینی تمامی حالت‌های رفتار بتن ساده، بتن الیافی با رفتار سخت شدگی یا نرم شدگی و همین‌طور بتن هیبریدی را داراست. بنابراین علاوه بر اعتبار سنجی رفتار بتن هیبریدی، یک نمونه بتن الیافی نیز اعتبار سنجی شد.



شکل ۱۴- منحنی تنش-کرنش مربوط به بتن UHTCC



شکل ۱۳- مقایسه منحنی بار-تغییر شکل به دست آمده از مدل با نتایج آزمایشگاهی

#### ۷-۱-۳- نمونه سوم

برای بررسی و صحت سنجی، تمام حالت‌های ممکن باید در نظر گرفته شوند. بنابراین برای صحت سنجی پاسخ مدل نسبت به تیرهای هیبریدی با بتن دارای رفتار سخت شدگی کششی؛ از UHTCC استفاده شد. UHTCC بتنی با رفتار سخت شدگی کششی است و هنگامی که تحت کشش قرار می‌گیرد دچار ترک‌های متعدد می‌شود [۲۳]. این بتن ظرفیت کرنش کششی حدود ۳٪ دارد که نسبت به بتن‌های دیگر بسیار بالا است در حالی که نسبت الیاف استفاده شده در حدود مقداری کمتر از ۲٪ است [۲۶]. این بتن تحت کشش دچار ترک‌های ریز متعدد با عرض ترک کمتر از ۰/۱ میلیمتر می‌شود و تغییر شکل‌های خمشی زیادی را تحمل می‌کند [۲۴].

برای صحت سنجی، از نتایج آزمایشگاهی انجام شده توسط Li-jun HOU و همکاران [۲۵] و همچنین Shilang Xu و همکاران [۲۴] استفاده شد. طرح اختلات استفاده شده در هر دو مقاله کمی با هم متفاوت است اما پاسخ بتن تحت کشش در هر دو مقاله یکی انتخاب شده است و به عبارتی در هر دو مقاله یک UHTCC استفاده شده است. مصالح اصلی ملات UHTCC، سیمان پرتلند تیپ ۱، آب، ماسه ریز، خاکستر بادی، فوق روان کننده و الیاف PVA هستند. ۲ درصد الیاف PVA به قطر ۰/۰۴ میلیمتر، طول ۱۲ میلیمتر،

<sup>1</sup> UltraHigh Toughness Cementitious Composite

جدول ۶- مشخصات هندسی تیرهای هیبریدی

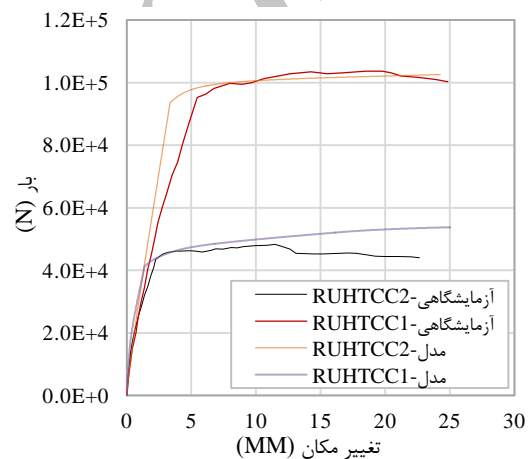
| تیر     | منبع | طول (mm) | عرض (mm) | ارتفاع (mm) | عمق موثر (mm) | میلگردکشی (mm <sup>2</sup> ) | میلگردفشاری (mm <sup>2</sup> ) | f <sub>cu</sub> (MPa) |
|---------|------|----------|----------|-------------|---------------|------------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| RUHTCC1 | [۲۴] | ۹۰۰      | ۱۲۰      | ۱۸۰         | ۱۴۰           | ۱۱۳/۰۴                       | ۰                              | ۴۳/۲۵                 |
| RUHTCC2 | [۲۵] | ۱۲۰۰     | ۱۲۰      | ۱۸۰         | ۱۴۶           | ۵۶۹/۴                        | ۱۰۰/۵۳                         | ۴۵/۷۳                 |

جدول ۷- مشخصات مکانیکی UHTCC استفاده شده در مدل

| بتن     | E       | ε <sub>cr</sub> | γ | ξ   | μ   | ω    | λ <sub>cu</sub> |
|---------|---------|-----------------|---|-----|-----|------|-----------------|
| RUHTCC1 | ۱۸۱۰۳/۲ | ۰/۰۰۰۱۶۶        | ۱ | ۲۵۰ | ۱/۴ | ۱۴/۴ | ۶۰/۲            |
| RUHTCC2 | ۱۸۵۱۱/۵ | ۰/۰۰۰۱۶۲        | ۱ | ۲۵۰ | ۱/۴ | ۱۵/۲ | ۶۱/۷            |

جدول ۸- مشخصات مواد استفاده شده در بتن [۲۸]

| ماده   | طرح اختلاط (kg/m <sup>3</sup> ) |
|--|---------------------------------|
| سیمان (52.5 N)   | ۶۵۷                             |
| GGBS   | ۴۱۸                             |
| فوم سیلیکا   | ۱۱۹                             |
| ماسه سیلیکا  | ۱۰۵۱                            |
| فوق روان کننده   | ۵۹                              |
| آب   | ۱۸۵                             |
| ۳درصد الیاف فولادی (طول ۱۳ میلیمتر و قطر ۰/۱۶ میلیمتر) | ۲۳۶                             |



شکل ۱۵- منحنی بار-تغییر مکان تیرهای UHTCC و مقایسه نتایج مدل با نتایج آزمایشگاهی

بتن دارای مقاومت فشاری ۱۶۴ مگاپاسکال و مدول الاستیسیته ۵۷/۵ گیگا پاسکال است. همچنین مقاومت کششی متوسط بتن که از آزمایش کشش مستقیم به دست آمده ۱۲ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. برای تعیین مشخصات کششی دیگر بتن، با استفاده از یک روش برگشتی و انطباق منحنی تنش-کرنش بتن از روی نتایج آزمایشگاهی و مدل، مقدار مقاومت باقیمانده ۰/۲ و ξ، ۱۲۲ به دست می-آید.

نتایج انطباق در شکل ۱۶ آورده شده است. برای بدست آوردن مشخصات فشاری بتن مراحل زیر انجام شدند:

$$\sigma_{cy} = 0.85f'_c = 0.85 * 164 \quad (24)$$

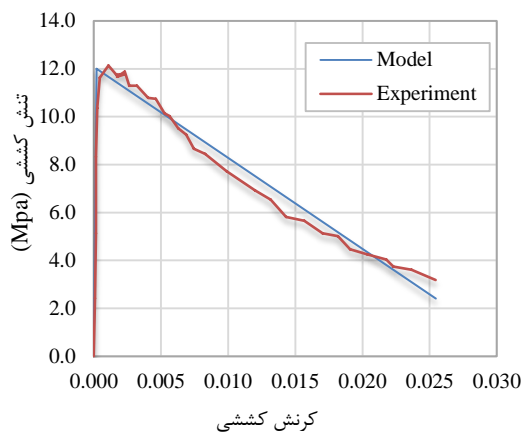
$$= 139.4 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{cy} = \frac{f'_c}{E} = \frac{139.4}{57500} = 0.00242 \quad (25)$$

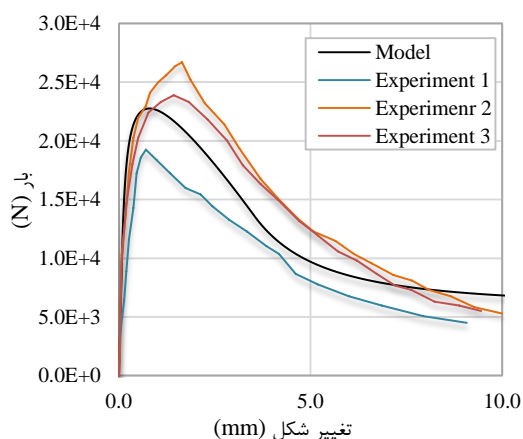
بتن<sup>۱</sup> UHPFRC ماده ای است که دارای مقاومت کششی و فشاری بالا است. این ماده همچنین بعد از ترک خوردگی توانایی جذب انرژی فوق العاده زیادی را دارد [۱ و ۲۷]. برای اعتبار سنجی مدل از نتایج آزمایش روی بتن UHPFRC که توسط لامپروپولس و همکاران انجام شده، استفاده شد [۲۸]. برای مسلح کردن بتن از ۳درصد الیاف فولادی با طول ۱۳ میلیمتر و قطر ۰/۱۶ میلیمتر استفاده شد. سایر مشخصات مواد به کار گرفته شده در بتن در جدول ۸ آورده شده است.

<sup>1</sup> Ultra High Performance Fiber Reinforced Concrete

بین نسبت‌های  $\rho$ ، مشخص شد که افزایش میلگرد کششی، تاثیر زیادی در افزایش مقاومت خمشی بتن دارد.



شکل ۱۶- منحنی تنش-کرنش بتن UHPFRC تحت کشش



شکل ۱۷- منحنی بار-تغییر شکل بتن و مقایسه نتایج آزمایشگاهی با مدل مورد نظر

نمونه‌ها با عرض ۱۰۰ میلیمتر، ارتفاع ۵۰ میلیمتر و طول دهانه ۳۰۰ میلیمتر، تحت آزمایش خمشی چهار نقطه ای قرار گرفتند. فاصله بین دو بار ۱۰۰ میلیمتر در نظر گرفته شد. مقایسه نتایج آزمایشگاهی با مدل مشخص می‌کند که مدل می‌تواند به خوبی رفتار خمشی تیر UHPFRC را پیش‌بینی کند. شکل ۱۷ نتایج آزمایشگاهی و پاسخ مدل را نشان می‌دهد.

همانطور که مشاهده می‌شود مدل مورد نظر به خوبی توانسته حد میانگینی از نتایج آزمایشگاهی را شبیه‌سازی کند.

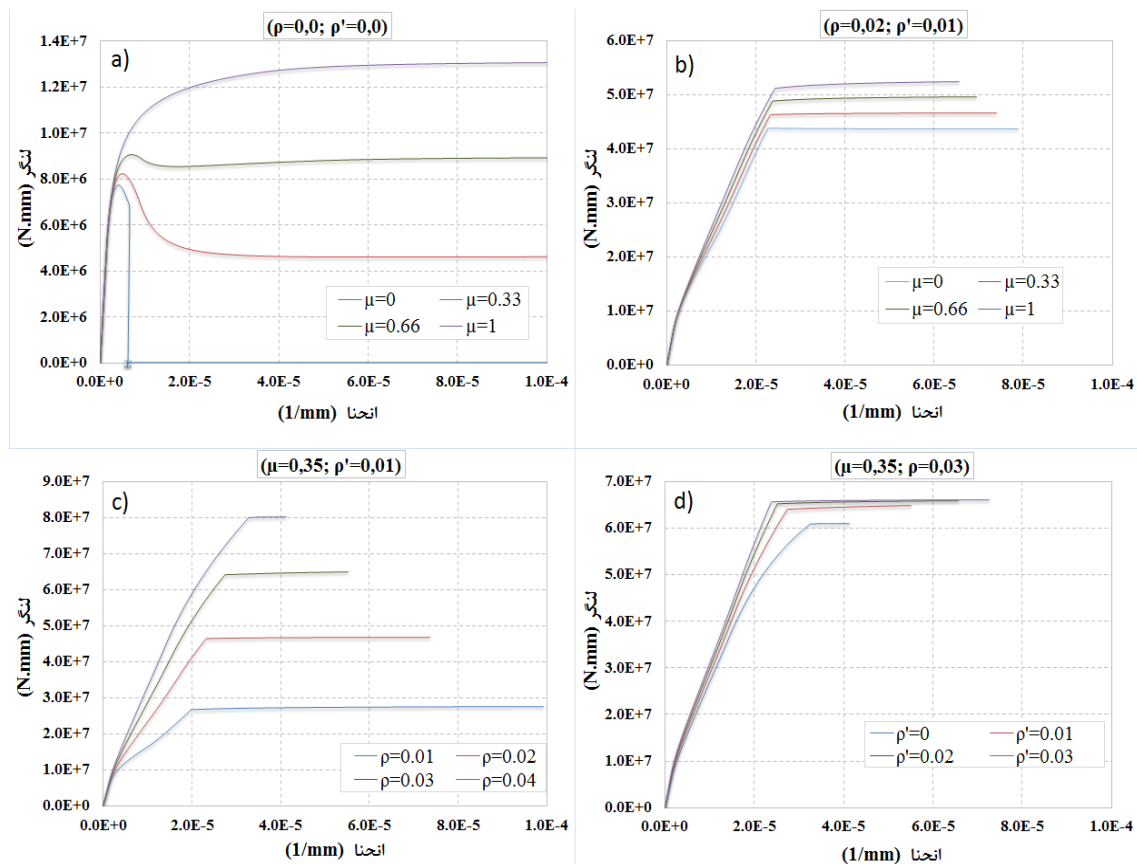
### ۵- مطالعه پارامتری مواد

مطالعه پارامتری، حساسیت مدل نسبت به پارامترهای مختلف را بیان می‌کند. ابتدا میزان فولاد کششی ( $\rho$ )، فولاد فشاری ( $\rho'$ ) و مقاومت کششی باقیمانده ( $\mu$ ) را بررسی می‌کنیم. ویژگی‌های بتن مورد مطالعه مطابق جدول ۹ است. ابتدا مقایسه برای بتن الیافی غیر مسلح مطرح شد. یعنی  $\rho = \rho' = 0$ . همانطور که در شکل ۱۸.a نشان داده شده است، با افزایش  $\mu$  در بتن، لنگر نهایی افزایش زیادی پیدا می‌کند. اما انحنای نهایی کاهش می‌یابد. تغییرات  $\mu$  تاثیر ناچیزی در مقاومت بتن، قبل از ترک خوردگی دارد. در مقایسه بعدی (شکل ۱۸.b) به بتن الیافی، میلگرد کششی و فشاری اضافه شد ( $\rho = 0.02$  و  $\rho' = 0.01$ ). در این حالت هم افزایش  $\mu$  تاثیر کمی روی مقاومت خمشی بتن تا قبل از ترک خوردگی می‌گذارد.

برای بررسی تاثیر میلگرد کششی در مقاومت خمشی بتن هیبریدی، بتنی با ( $\mu = 0.35$  و  $\rho' = 0.01$ ) در نظر گرفته شد. همانطور که در شکل ۱۸.c مشاهده می‌شود؛ با مقایسه

جدول ۹- مشخصات بتن مصرفی در بخش مطالعه پارامتری

| مشخصات هندسی (mm) |          |                |          |                 | بتن تحت کشش            |                        |              |            |
|-------------------|----------|----------------|----------|-----------------|------------------------|------------------------|--------------|------------|
| b                 | h        | L              | E        | $\epsilon_{cr}$ | $\mu$                  | $\xi$                  | $\beta_{tu}$ |            |
| ۲۰۰               | ۲۰۰      | ۱۰۰۰           | ۲۸۰۰۰    | ۰/۰۰۰۱۳         | ۰ و ۰/۳۳ و ۰/۶۶ و ۱    | ۱۰                     | ۱۵۰          |            |
| بتن تحت فشار      |          |                |          |                 | مشخصات فولاد           |                        |              |            |
| $\gamma$          | $\omega$ | $\lambda_{cu}$ | $\alpha$ | $\alpha'$       | $\rho$                 | $\rho'$                | $\kappa$     | $\gamma_s$ |
| ۱                 | ۱۰       | ۳۰             | ۰/۸      | ۰/۲             | ۰ و ۰/۰۲ و ۰/۰۳ و ۰/۰۴ | ۰ و ۰/۰۱ و ۰/۰۲ و ۰/۰۳ | ۱۵/۳۸        | ۷/۱۴       |



شکل ۱۸- مطالعه پارامتری منحنی لنگر انحنا به ازای مقادیر مختلف فولاد کششی  $\rho$ ، فولاد فشاری  $\rho'$  و مقاومت باقیمانده  $\mu$

- برای بتن تحت کشش مدلی به صورت سه خطی و برای بتن تحت فشار و میلگردها، مدلی بصورت دوخطی بیان شد و توسط این مدلها روابط ارائه شده شکل گرفتند. همچنین روابط مربوط به لنگر-انحنا و ارتفاع تار خنثی در هر مرحله از بارگذاری به دست آمدند.
- مقایسه پارامترها نشان داد که با افزایش الیاف و فولاد کششی در بتن، مقاومت خمشی افزایش می-یابد. اما تغییرات مقاومت خمشی ناشی از افزایش فولاد، بیشتر است. افزایش میلگرد فشاری باعث افزایش قابل توجهی در انحنای نهایی بتن می-شود.
- رابطه ای برای تعیین نسبت فولاد متوازن در بتن و همچنین رابطه ای برای تعیین حداقل فولاد کششی مورد نیاز جهت جاری شدن فولاد فشاری در بتن هیبریدی ارائه شد.

همچنین افزایش میلگرد کششی باعث کاهش انحنای نهایی تاثیر  $\mu$  می-شود. افزایش یا کاهش میلگرد نیز مانند تغییرات زیادی روی بتن، تا قبل از ترک خوردگی نمی-گذارد. در نهایت اثر فولاد فشاری روی بتن بررسی شد. در این حالت درصد فولاد کششی  $0/03$  و  $0/35$   $\mu$  در نظر گرفته شد (شکل ۱۸.d). نتایج بیانگر این مطلب بودند که افزایش فولاد فشاری تاثیر ناچیزی در افزایش لنگر نهایی دارد؛ اما باعث افزایش قابل توجهی در انحنای نهایی تیر بتنی می-شود. فولاد کششی هم تا قبل از ترک خوردگی تاثیر ناچیزی روی افزایش مقاومت خمشی بتن دارد.

#### ۸- نتیجه گیری

در این مطالعه، مدلی برای به دست آوردن تغییرات لنگر-انحنای تیرهای بتنی هیبریدی، بتن الیافی و بتن معمولی با مقطع مستطیلی ارائه گردید.

محل تار خنثی ندارد، اما فولاد کششی و فشاری از همان مراحل اولیه در تغییرات تار خنثی موثر اند.

### ۹- پیوست

در هر مرحله از بارگذاری نحوه توزیع تنش و کرنش و مقادیر آنها مشخص است. به کمک روابط تعادل، فرمول‌های مربوط به تاریخچه ارائه شده در جدول پ-۱ به دست می‌آیند. به همین ترتیب و با توجه به نحوه توزیع تنش و کرنش در هر مرحله از بارگذاری، روابط مربوط به محاسبه لنگر و و انحنا حاصل می‌شوند که همگی به طور کامل در جدول پ-۲ آورده شده اند.

- چهار مورد اعتبار سنجی برای حالت‌های مختلف بتن الیافی و هیبریدی انجام شد. نتایج حاصل از اعتبار سنجی نمایانگر این مطلب بودند که مدل می‌تواند بیشینه بار قابل تحمل بتن هیبریدی را با دقتی بیش از ۹۳ درصد شبیه سازی کند. همچنین برای بتن‌های UHPFRC نیز اعتبار سنجی انجام شد و مشاهده شد که مدل می‌تواند به خوبی رفتار خمشی بتن‌های با رفتار سخت شدگی کششی را پیش‌بینی کند.
- مطالعه پارامتری روی تاریخچه نشان داد که مقاومت باقی‌مانده در مراحل اولیه بارگذاری تأثیری روی

### جدول پ-۱- روابط تار خنثی مربوط به در هر مرحله از بارگذاری

| مرحله | k   |
|-------|---|
| ۱     | $\text{if } \gamma = 1 : \frac{C_1}{2C_2}; \quad \text{if } \gamma \neq 1 : \frac{\sqrt{(2C_2)^2 + 4(\gamma-1)C_1 - 2C_2}}{2(\gamma-1)}$  |
| ۲-۱   | $\frac{\lambda}{C_3} \left( -\lambda\eta + C_4 + \sqrt{C_3 C_5 + C_4 + \gamma\lambda^2\eta + C_1^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_1^{*2}} \right)$   |
| ۲-۲   | $\frac{\lambda}{C_3} \left( -\lambda\eta + C_6 + \sqrt{2\alpha\rho\gamma_s C_3 + C_6 + \gamma\lambda^2\eta + C_2^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_2^{*2}} \right)$                         |
| ۲-۳   | $\frac{\lambda}{C_3} \left( -\lambda\eta + C_7 + \sqrt{2\alpha'\rho'\gamma_s C_3 + C_7 + \gamma\lambda^2\eta + C_3^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_3^{*2}} \right)$                       |
| ۲-۴   | $\frac{\lambda}{C_3} \left( -\lambda\eta + C_8 + \sqrt{C_8 + \gamma\lambda^2\eta + C_4^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_4^{*2}} \right)$   |
| ۳'-۱  | $\frac{\lambda}{C_{11}} \left( -\lambda\eta + C_4 + \sqrt{C_{11} C_5 + C_4 - \gamma\eta\omega(\omega - 2\lambda) + C_1^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_1^{*2}} \right)$                   |
| ۳'-۲  | $\frac{\lambda}{C_{11}} \left( -\lambda\eta + C_6 + \sqrt{2\alpha\rho\gamma_s C_{11} + C_6 - \gamma\eta\omega(\omega - 2\lambda) + C_2^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_2^{*2}} \right)$   |
| ۳'-۳  | $\frac{\lambda}{C_{11}} \left( -\lambda\eta + C_7 + \sqrt{2\alpha'\rho'\gamma_s C_{11} + C_7 - \gamma\eta\omega(\omega - 2\lambda) + C_3^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_3^{*2}} \right)$ |
| ۳'-۴  | $\frac{\lambda}{C_{11}} \left( -\lambda\eta + C_8 + \sqrt{C_8 - \gamma\eta\omega(\omega - 2\lambda) + C_4^*(2\eta - 1 + 2\lambda\eta) + C_4^{*2}} \right)$                                |
| ۳-۱   | $\frac{\lambda}{C_9} (\mu - C_1^* + \sqrt{C_9 C_5 + (C_1^* - \mu)^2})$  |
| ۳-۲   | $\frac{\lambda}{C_9} (\mu - C_2^* + \sqrt{2\alpha\rho\gamma_s C_9 + (C_2^* - \mu)^2})$  |
| ۳-۳   | $\frac{\lambda}{C_9} (\mu - C_3^* + \sqrt{2\alpha'\rho'\gamma_s C_9 + (C_3^* - \mu)^2})$  |
| ۳-۴   | $(2\lambda/C_9)(\mu - C_4^*)$   |
| ۴-۱   | $\frac{\lambda}{C_{10}} (\mu - C_1^* + \sqrt{C_{10} C_5 + (C_1^* - \mu)^2})$  |
| ۴-۲   | $\frac{\lambda}{C_{10}} (\mu - C_2^* + \sqrt{2\alpha\rho\gamma_s C_{10} + (C_2^* - \mu)^2})$  |
| ۴-۳   | $\frac{\lambda}{C_{10}} (\mu - C_3^* + \sqrt{2\alpha'\rho'\gamma_s C_{10} + (C_3^* - \mu)^2})$  |
| ۴-۴   | $(2\lambda/C_{10})(\mu - C_4^*)$  |

$C_1 = 2\alpha\gamma_s\rho + 2\alpha'\gamma_s\rho' + 1$   
 $C_2 = \gamma_s(\rho + \rho') + 1$   
 $C_3 = \lambda^2(\gamma - \eta) + (2\lambda + 1)(1 - \eta)$   
 $C_4 = -\eta + 1 - C_1^*$   
 $C_5 = 2\gamma_s(\alpha\rho + \alpha'\rho')$   
 $C_6 = -\eta + 1 - C_2^*$   
 $C_7 = -\eta + 1 - C_3^*$   
 $C_8 = -\eta + 1 - C_4^*$   
 $C_9 = 2\xi(\eta + \mu - 1) + 2\lambda\mu + \gamma\lambda^2 - \xi^2\eta + 1$   
 $C_{10} = C_9 - \gamma\lambda^2 + 2\gamma\lambda\omega - \gamma\omega^2$   
 $C_{11} = 2\gamma\lambda\omega - \gamma\omega^2 - \lambda^2\eta + (2\lambda + 1)(1 - \eta)$   
 $C_1^* = \gamma_s\lambda(\rho + \rho')$   
 $C_2^* = \gamma_s(\lambda\rho + \kappa\rho')$   
 $C_3^* = \gamma_s(\lambda\rho' - \kappa\rho)$   
 $C_4^* = \gamma_s\kappa(\rho' - \rho)$



جدول پ-۲- روابط لنگر و انحنا مربوط به هر مرحله از بارگذاری

| مرحله | M'   | $\theta'$                   |   |
|-------|--|-----------------------------|---|
|       |  |                             | $D_1 = \gamma - 1$  |
| ۱     | $\frac{2\lambda}{k}(D_1k^3 + D_2k^2 + D_3k + D_4)$               | $\frac{\lambda}{2k_1}$      | $D_2 = 3\gamma_s(\rho + \rho') + 3$   |
| ۲-۱   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_5k^3 + D_6k^2 + D_7k + D_8)$             | $\frac{\lambda}{2k_{2.1}}$  | $D_3 = -6\gamma_s(\alpha\rho + \alpha'\rho') - 3$   |
| ۲-۲   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_5k^3 + D_9k^2 + D_{10}k + D_{11})$       | $\frac{\lambda}{2k_{2.2}}$  | $D_4 = 3\gamma_s(\rho\alpha^2 + \rho'\alpha'^2) + 1$  |
| ۲-۳   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_5k^3 + D_{12}k^2 + D_{13}k + D_{14})$    | $\frac{\lambda}{2k_{2.3}}$  | $D_5 = 2\gamma\lambda^3 - \lambda^2(2\lambda\eta + 3\eta - 3) + \eta - 1$                                     |
| ۲-۴   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_5k^3 + D_{15}k^2 + D_{16}k + D_{17})$    | $\frac{\lambda}{2k_{2.4}}$  | $D_6 = 6\lambda^2\gamma_s C_1^* + 6\lambda^2(\lambda\eta + \eta - 1)$   |
| ۳-۱   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{18}k^3 + D_{19}k^2 + D_{20}k + D_{21})$ | $\frac{\lambda}{2k_{3.1}}$  | $D_7 = -12\lambda^3\gamma_s(\alpha\rho + \alpha'\rho') - 3\lambda^2(2\lambda\eta + \eta - 1)$                 |
| ۳-۲   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{18}k^3 + D_{22}k^2 + D_{23}k + D_{24})$ | $\frac{\lambda}{2k_{3.2}}$  | $D_8 = 6\lambda^3\gamma_s(\alpha^2\rho + \alpha'^2\rho') + 2\lambda^3\eta$                                    |
| ۳-۳   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{18}k^3 + D_{25}k^2 + D_{26}k + D_{27})$ | $\frac{\lambda}{2k_{3.3}}$  | $D_9 = 6\lambda^2 C_2^* + 6\lambda^2(\lambda\eta + \eta - 1)$   |
| ۳-۴   | $\frac{1}{\lambda^2}(D_{18}k^2 + D_{28}k + D_{29})$              | $\frac{\lambda}{2k_{3.4}}$  | $D_{10} = -6\lambda^2\gamma_s(2\lambda\alpha\rho + \kappa\alpha'\rho') - 3\lambda^2(2\lambda\eta + \eta - 1)$ |
| ۳'-۱  | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{31}k^3 + D_6k^2 + D_7k + D_8)$          | $\frac{\lambda}{2k_{3'.1}}$ | $D_{11} = 6\alpha^2\lambda^3\rho\gamma_s + 2\lambda^3\eta$  |
| ۳'-۲  | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{31}k^3 + D_9k^2 + D_{10}k + D_{11})$    | $\frac{\lambda}{2k_{3'.2}}$ | $D_{12} = 6\lambda^2 C_3^* + 6\lambda^2(\lambda\eta + \eta - 1)$  |
| ۳'-۳  | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{31}k^3 + D_{12}k^2 + D_{13}k + D_{14})$ | $\frac{\lambda}{2k_{3'.3}}$ | $D_{13} = -6\lambda^2\gamma_s(2\lambda\alpha'\rho' + \kappa\alpha\rho) - 3\lambda^2(2\lambda\eta + \eta - 1)$ |
| ۳'-۴  | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{31}k^3 + D_{15}k^2 + D_{16}k + D_{17})$ | $\frac{\lambda}{2k_{3'.4}}$ | $D_{14} = 6\alpha'^2\lambda^3\rho'\gamma_s + 2\lambda^3\eta$  |
| ۴-۱   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{30}k^3 + D_{19}k^2 + D_{20}k + D_{21})$ | $\frac{\lambda}{2k_{4.1}}$  | $D_{15} = 6\lambda^2 C_4^* + 6\lambda^2(\lambda\eta + \eta - 1)$  |
| ۴-۲   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{30}k^3 + D_{22}k^2 + D_{23}k + D_{24})$ | $\frac{\lambda}{2k_{4.2}}$  | $D_{16} = 6\kappa\lambda^2\gamma_s(\alpha\rho - \alpha'\rho') - 3\lambda^2(2\lambda\eta + \eta - 1)$          |
| ۴-۳   | $\frac{1}{k\lambda^2}(D_{30}k^3 + D_{25}k^2 + D_{26}k + D_{27})$ | $\frac{\lambda}{2k_{4.3}}$  | $D_{17} = 2\lambda^3\eta$   |
| ۴-۴   | $\frac{1}{\lambda^2}(D_{30}k^2 + D_{28}k + D_{29})$              | $\frac{\lambda}{2k_{4.4}}$  | $D_{18} = 2\gamma\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 2\xi^3\eta - 3\xi^2(\eta + \mu - 1) + \eta - 1$                  |
|       |  |                             | $D_{19} = 6\lambda^2 C_1^* - 6\lambda^2\mu$   |
|       |  |                             | $D_{20} = 12\lambda^3\gamma_s(\alpha\rho + \alpha'\rho') + 3\lambda^2\mu$                                     |
|       |  |                             | $D_{21} = 6\lambda^3\gamma_s(\alpha^2\rho + \alpha'^2\rho')$  |
|       |  |                             | $D_{22} = 6\lambda^2 C_2^* - 6\lambda^2\mu$   |
|       |  |                             | $D_{23} = -6\lambda^2\gamma_s(\kappa\alpha'\rho' + 2\lambda\alpha\rho) + 3\lambda^2\mu$                       |
|       |  |                             | $D_{24} = 6\lambda^3\gamma_s\alpha^2\rho$   |
|       |  |                             | $D_{25} = 6\lambda^2 C_3^* - 6\lambda^2\mu$   |
|       |  |                             | $D_{26} = 6\lambda^2\gamma_s(\kappa\alpha\rho - 2\lambda\alpha'\rho') + 3\lambda^2\mu$                        |
|       |  |                             | $D_{27} = 6\lambda^3\gamma_s\alpha'^2\rho'$   |
|       |  |                             | $D_{28} = 6\lambda^2 C_4^* - 6\lambda^2\mu$   |
|       |  |                             | $D_{29} = 6\lambda^2\gamma_s\kappa(\alpha\rho - \alpha'\rho') + 3\lambda^2\mu$                                |
|       |  |                             | $D_{30} = D_{18} - 2\gamma\lambda^3 + 3\gamma\lambda^2\omega - \gamma\omega^3$                                |
|       |  |                             | $D_{31} = 3\gamma\lambda^2\omega - \gamma\omega^3 + \lambda^2(-2\lambda\eta - 3\eta + 3) + \eta - 1$          |

۱۰- علائم و نشانه‌ها

|   |             |   |                   |
|---|-------------|---|-------------------|
| ضریب‌هایی مربوط به جاری شدن فولاد                 | $C_{1-4}^*$ |   |                   |
| مجموع نیروهای فشاری موجود در مقطع، N              | $C_C$       | مساحت فولاد کششی، $m^2$   | $A_s$             |
| مجموع نیروهای کششی موجود در مقطع، N               | $C_T$       | حداقل مساحت فولاد کششی مورد نیاز، $m^2$                           | $A_{s,min}$       |
| فاصله مرکز سطح فولاد کششی از دورترین تار فشاری، m | $d$         | حداقل مساحت فولاد کششی مورد نیاز برای جاری شدن فولاد فشاری، $m^2$ | $\bar{A}_{s,min}$ |
| فاصله مرکز سطح فولاد کششی از دورترین تار کششی، m  | $d'$        | مساحت فولاد فشاری، $m^2$  | $A'_s$            |
| ضریب‌هایی مربوط به لنگر در جدول ۲ پیوست           | $D_{1-31}$  | عرض تیر، m  | $b$               |
| مدول الاستیسیته کششی بتن، $N/m^2$                 | $E$         | ضریب‌هایی مربوط به تار خنثی در جدول ۱ پیوست                       | $C_{1-11}$        |
| مدول الاستیسیته فشاری بتن، $N/m^2$                | $E_c$       |   |                   |

|  |              |                                    |             |
|--|--------------|------------------------------------|-------------|
| نسبت فولاد فشاری موجود به کل مقطع                          | $\rho'$      | مدول الاستسیته کششی بتن بعد از ترک | $E_{cr}$    |
| نسبت فولاد متوازن به کل مقطع                               | $\rho_b$     | خوردگی، $N/m^2$                    |             |
| نسبت فولاد کششی موجود به مقطع موثر                         | $\rho_g$     | مدول الاستسیته فولاد، $N/m^2$      | $E_s$       |
| نسبت فولاد متوازن به مقطع موثر                             | $\rho_{g,b}$ | مقاومت فشاری نهایی بتن، $N/m^2$    | $f'_c$      |
| تنش، $N/m^2$   | $\sigma$     | ارتفاع مقطع، $m$                   | $h$         |
| تنش فشاری بتن، $N/m^2$                                     | $\sigma_c$   | نسبت عمق تار خنثی                  | $k$         |
| مقاومت کششی باقیمانده بتن، $N/m^2$                         | $\sigma_p$   | لنگر، $N.m$                        | $M$         |
| تنش کششی بتن، $N/m^2$                                      | $\sigma_t$   | لنگر لحظه ترک خوردگی، $N.m$        | $M_{cr}$    |
| کرنش فشاری نرمال شده در لحظه جاری شدن                      | $\omega$     | لنگر نرمال شده                     | $M_i'$      |
| کرنش کششی نرمال شده ناحیه انتقال                           | $\xi$        | لنگر نهایی، $N.m$                  | $M_u$       |
| کرنش فولاد کششی نرمال شده ( $\epsilon_s/\epsilon_{cr}$ )   | $\chi$       | ظرفیت لنگر نهایی نرمال شده         | $M'_\infty$ |
| کرنش فولاد فشاری نرمال شده ( $\epsilon'_s/\epsilon_{cr}$ ) | $\chi'$      | نیرو، $N$                          | $P$         |

#### ۱۱- مراجع

- |   |  |                      |
|---|--|----------------------|
| [1] Barsby C (2011) Post peak characterization and modeling of fiber cement composites. MS. Dissertation, ASU.  | ضریبی برای تعیین فولاد کششی حداقل                                    | $W_1$                |
| [2] Xiliang N, Yining D, Fasheng Z, Yulin Z (2015) Experimental study and prediction model for flexural behavior of reinforced SCC beam containing steel fibers. Const Build Mater 93: 644-653.                     | عمق نرمال شده فولاد کششی   | $\alpha$             |
| [3] ACI Committee 544 (1996) Design considerations for steel fiber reinforced concrete. ACI Struct J.   | عمق نرمال شده فولاد فشاری  | $\alpha'$            |
| [4] Chi Y, Xu L, Zhang Y (2014) Experimental study on hybrid fiber-reinforced concrete subjected to uniaxial compression. J Mater Civ Eng 26: 211-218.  | کرنش کششی نرمال شده  | $\beta$              |
| [5] Bencardino F, Rizzuti L, Spadea G, Swamy RN (2010) Experimental evaluation of fiber reinforced concrete fracture properties. Compos Part B: Eng 41(1):17-24.  | کرنش   | $\epsilon$           |
| [6] Meda A, Minelli F, Plizzari GA (2012) Flexural behaviour of RC beams in fibre reinforced concrete. Compos Part B (43): 2930-2937.   | کرنش فشاری بتن   | $\epsilon_c$         |
| [7] Ahmadi R, Ghoddousi P, Sharifi M (2012) A simple solution for prediction of steel fiber reinforced concrete behavior under flexure. Int J Civ Eng 40: 274-279.  | کرنش کششی بتن  | $\epsilon_t$         |
| [8] Mehmet ÖD, Alemdar B, Abdurrahman S, Tefaruk H, Temel T (2009) Experimental and finite element analysis on the steel fiber-reinforced concrete (SFRC) beams ultimate behavior. Const Build Mater 23: 1064-1077. | کرنش کششی بتن در نقطه انتقال   | $\epsilon_{trn}$     |
| [9] Yoo D, Yoon Y, Banthia N (2015) Predicting the post-cracking behavior of normal- and high-strength steel-fiber-reinforced concrete beams. Const Build Mater (93): 477-485.                                      | انحنای، $1/m$  | $\emptyset$          |
|   | انحنای نرمال شده   | $\emptyset'$         |
|   | مدول الاستسیته فشاری نرمال شده بتن                                   | $\gamma$             |
|   | مدول الاستسیته نرمال شده فولاد ( $E_s/E$ )                           | $\gamma_s$           |
|   | تغییر شکل، $m$   | $\kappa$             |
|   | کرنش نرمال شده تسلیم فولاد ( $\epsilon_{sy}/\epsilon_{cr}$ )         |                      |
|   | مدول الاستسیته نرمال شده بتن در ناحیه انتقال                         | $\lambda$            |
|   | کرنش فشاری نرمال شده ( $\epsilon_c/\epsilon_{cr}$ )                  |                      |
|   | کرنش فشاری نهایی نرمال شده ( $\epsilon_{cu}/\epsilon_{cr}$ )         | $\lambda_{cu}$       |
|   | مقاومت کششی باقیمانده  | $\mu$                |
|   | مقاومت کششی باقیمانده بحرانی   | $\mu_{crit}$         |
|   | نسبت فولاد کششی موجود به کل مقطع                                     | $\rho$               |
|   | نسبت حداقل فولاد کششی مورد نیاز به کل مقطع                           | $\rho_{min}$         |
|   | نسبت حداقل فولاد کششی مورد نیاز برای جاری شدن فولاد فشاری به کل مقطع | $\bar{\rho}_{s,min}$ |

- [20] Barros JA, Cunha VM, Ribero A, Antunes J (2005) Postcracking behavior of steel fibre reinforced concrete. *Mater Struct* 57-56.
- [21] ACI 318-14 (2014) Building Code requirements for structural concrete. Farmington Hills, MI, USA: ACI J.
- [۲۲] مستوفی نژاد د (۱۳۹۲) سازه‌های بتن آرمه. انتشارات ارکان دانش.
- [23] Shilang X, Wen L (2012) Investigation on crack propagation law of ultra-high toughness cementitious composites under fatigue flexure. *Eng Fract Mech* 93: 1-12.
- [24] Shilang X, Lijun H, Xiufang Z (2012) Flexural and shear behaviors of reinforced ultrahigh toughness cementitious composite beams without web reinforcement under concentrated load. *Eng Struct* 39: 176-186.
- [25] Lijun H, Zhiyong L, Da C, Shi-lang X (2015) Experimental study of the shear properties of reinforced ultra-high toughness cementitious composite beams. *J Zhejiang Univ Sci A* 16: 251-264.
- [26] XiangRong C, ShiLang X, BaiQuan Fv (2011) A statistical micromechanical model of multiple cracking for ultra high toughness cementitious composites. *Eng Fract Mech* 78: 1091-1100.
- [27] Nicolaidis D, Markou G (2015) Modelling the flexural behaviour of fibre reinforced concrete beams with FEM. *Eng Struct* 99: 653-665.
- [28] Lampropoulos P, Paschalis S, Tsioulou O, Dritsos S (2016) Strengthening of reinforced concrete beams using ultra high performance fibre reinforced concrete (UHPFRC). *Eng Struct* 106: 370-384.
- [10] Soranakom C, Mobasher B (2007) Closed-form solutions for flexural response of fiber-reinforced concrete beams. *J Eng Mech-Asce* 933-941.
- [11] Lin W, Yoda T, Taniguchi N (2014) Application of SFRC in steel-concrete composite beams subjected to hogging moment. *J Constr Steel Res* (101): 175-183.
- [12] Vandewalle, RILEM TC 162-TDF (2003) test and design methods for steel fibre reinforced concrete-sigma-epsilon design method (final recommendation). *Mater Struct* 36(262): 560-567.
- [13] Mobasher B, Yao Y, Soranakom C (2015) Analytical solutions for flexural design of hybrid steel fiber reinforced concrete beams. *Eng Struct* 167-177.
- [14] Gribniak V, Kaklauskas G, Kwan AKH, Bacinskas D, Ulbinas D (2012) Deriving stress-strain relationships for steel fibre concrete in tension from tests of beams with ordinary reinforcement. *Eng Struct* (42): 387-395.
- [15] fib Model Code 2010, Final draft: CEB and FIP, 2011.
- [16] Buratti N, Ferracuti B, Savoia M (2013) Concrete crack reduction in tunnel linings by steel fibre-reinforced concretes. *Const Build Mater* 249-259.
- [17] Soranakom C (2008) Multi scale modeling of fiber and fabric reinforced cement. in PHD Dissertation, ASU.
- [18] Soranakom C, Mobasher B (2008) Correlation of tensile and flexural responses of strain softening and strain hardening cement composites. *Cem Concr Comp* (30): 465-477.
- [19] Salmon CG, Johnson JE (1990) Steel structures: Design and behavior. 3rd edn. Harper and Row, New York.