

ردیابی هدف در تصاویر ویدئویی رنگی به کمک فیلتر ذره‌ای هندسی مبتنی بر مدل تحلیلی شده‌ی هیستوگرام رنگ

نگین قاسمی، پیمان معلم و محمدفرزان صباحی

چکیده: در بحث ردیابی یکی از ویژگی‌های قابل توجه برای توصیف هدف، ویژگی رنگ است. به کمک هیستوگرام رنگ می‌توان مدل مناسبی برای هدف در نظر گرفت و خطای متغیر اندازه‌گیری را با فاصله باتاچاریا بین هیستوگرام مرجع و هیستوگرام تصویر داوطلب بیان نمود. مکان هدف با تخمین گر قوی فیلترهای ذره‌ای تعیین شده و تبدیل افاین دوبعدی هدف به عنوان حالت سیستم لحاظ می‌شود. در نظر گرفتن ویژگی‌های هندسی حرکت افاین به صورت گروه افاین باعث می‌شود نداشت دوبعدی حرکت شیء هدف به مدل سه‌بعدی واقعی آن نزدیک‌تر باشد. تقریب تابع نمونه‌برداری بهینه فیلتر ذره‌ای از بسط تیلور تابع باتاچاریا حاصل می‌شود. نتایج آزمایش‌ها دقت بالا و مقاومت ردیاب پیشنهادی را در برابر حرکت سریع و پیچیده هدف نسبت به الگوریتم فیلتر ذره‌ای هندسی سطح خاکستری نشان می‌دهد.

کلید واژه: حرکت افاین، ردیابی تصویر، فیلتر ذره‌ای هندسی، گروه لی، هیستوگرام رنگ.

در برخی از مقالات تبدیل افاین دوبعدی به عنوان حالت سیستم در نظر گرفته شده است [۳] تا [۵] و [۸] تا [۱۲]. تبدیل دوبعدی افاین یک فضای منحنی است که ساختار گروه لی^۳ دارد. در یک رویکرد این تبدیل دوبعدی با مجموعه‌ای از مختصات محلی به فضای برداری منتقل شده و معادلات حالت و اندازه‌گیری غیر خطی در فضای برداری فرمول‌بندی می‌شود. برای مثال Zhou در [۵] عناصر ماتریس افاین را در یک بردار ۶ بعدی به شکل $x = [a_1 \dots a_6]^T$ قرار داد. به این ترتیب مسأله در چهارچوب الگوریتم فیلترهای ذره‌ای موجود که در فضای برداری بیان شده جای می‌گیرد. اما ردیابی در عمل با تغییرات شدید نور و پس‌زمینه و پارامترهای دیگر مواجه است و چون مختصات محلی، ماهیت ذاتی هندسی ماتریس افاین دوبعدی را در نظر نمی‌گیرد، نمی‌تواند به طور کامل یک ناحیه منحنی را در فضای برداری پارامتری کند [۸].

در رویکردی دیگر Kwon و همکاران در [۳] با حفظ خاصیت هندسی ماتریس افاین، الگوریتم PE را برای سیستم غیر خطی تصادفی روی گروه لی ارائه کردند و در [۱۰] و [۱۲] با استفاده از مدل زیرفضای مقادیر و بردار ویژه^۴ (PCA) ردیابی مبتنی بر الگوریتم فیلترهای ذره‌ای هندسی را در تصاویر سطح خاکستری توسعه دادند.

انتخاب ویژگی تصویری مناسب که شیء هدف را به طور یکتا توصیف کند و مدل مشاهده و اندازه‌گیری متناسب با آن نقش مهمی در کیفیت ردیابی دارد. در این مقاله از مدل هیستوگرام رنگ برای توسعه ردیاب فیلتر ذره‌ای هندسی استفاده شده است تا در تصاویر رنگی حرکت شیء بهتر تخمین زده شود.

در قسمت بعد حرکت افاین و فیلترهای ذره‌ای هندسی را به طور خلاصه مرور می‌کنیم. در بخش سوم با استفاده از تقریب تابع اهمیت بهینه بر اساس مدل هیستوگرام هدف، الگوریتم ردیابی پیشنهادی ارائه می‌گردد. در بخش چهارم عملکرد الگوریتم پیشنهادی با شبیه‌سازی ارزیابی می‌شود. در نتیجه‌گیری به جمع‌بندی و کارهای آینده می‌پردازیم.

فرایند ردیابی تصویری، محاسبه تخمین تغییرات زمانی و مکانی شیء یا به طور کلی حالت‌های شیء هدف در طول دنباله ویدئویی بر اساس اندازه‌گیری‌ها و مشاهدات است. سیستم ردیاب با استفاده از اطلاعات هدف در قاب‌های قبل و اطلاعات جانبی مانند مدل حرکت هدف یا خصوصیات ظاهری آن به تخمین و جستجوی هدف در قاب جاری می‌پردازد. ردیابی هدف در تصاویر ویدئویی در کاربردهای پیشرفته مبتنی بر بینایی ماشین مانند سیستم‌های نظارتی، ارتباط ربات و انسان و زمینه مهندسی پزشکی نقش مهمی دارد [۱] تا [۴].

در ردیابی به طور معمول هدف به شکل مرز شیء بیان می‌شود، بنابراین هر گونه اطلاعات درباره تغییر شکل در قالب ناحیه مرزی مفید خواهد بود [۲]. این تغییر شکل را می‌توان با یک تبدیل افاین^۱ دوبعدی روی ناحیه مرزی تحقق بخشید که با توجه به هندسه حرکت شیء به دست می‌آید.

۱- مقدمه

اندازه‌گیری‌های به دست آمده از حسگرهای ویدئویی همواره آغشته به نویز است. علاوه بر آن حرکت‌های شیء می‌تواند دستخوش اختلال‌های تصادفی نیز شود. روش‌های ردیابی تصادفی مانند فیلترهای ذره‌ای

این مقاله در تاریخ ۸ بهمن ماه ۱۳۹۱ دریافت و در تاریخ ۱۹ خرداد ماه ۱۳۹۲ بازنگری شد.

نگین قاسمی، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، (email: n-ghasemi@eng.ui.ac.ir).

پیمان معلم، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، (email: p_moallem@eng.ui.ac.ir).

محمدفرزان صباحی، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، (email: sabahi@eng.ui.ac.ir).

2. Particle Filters

3. Lie Group

4. Principle Component Analysis

1. Affine Transformation

روش فیلتر ذره‌ای می‌گویند. فیلترهای ذره‌ای بر پایه فرضیه احتمال بیز و الگوریتم نمونه‌برداری مونت کارلو^۲ است و در زمینه ردیابی تصویری که یک مسأله تخمین متغیر حالت است قابل استفاده می‌باشد. این شیوه در سیستم‌هایی با معادلات غیر خطی و توزیع غیر گوسی عملکرد بسیار خوبی دارد. معادله گذار حالت سیستم $x_k = f(x_{k-1}) + v_k$ با متغیر حالت x و نویز v و معادله اندازه‌گیری $y_k = h(x_k) + n_k$ با متغیر اندازه‌گیری y و نویز n است. توابع f و h به طور کلی غیر خطی هستند. نمونه‌برداری ذرات $x_k^{(i)}$ از تابع توزیع اهمیتی^۳ $\pi(x_k | x_{:k-1}^{(i)}, y_{:k})$ صورت گرفته و وزن متناظر هر ذره از (۳) به دست می‌آید

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{\pi(x_k | x_{:k-1}^{(i)}, y_{:k})} \quad (3)$$

در این مقاله از فیلتر ذره‌ای SIR^۴ استفاده می‌شود و در هر مرحله زمانی نمونه‌برداری مجدد انجام می‌شود. اعمال صحیح PF بر گروه افاین دوبعدی به فرمول‌بندی هندسی معادلات حالت و اندازه‌گیری نیاز دارد که در ادامه بیان می‌گردد.

۲-۱-۲ معادله حالت روی گروه افاین

معادله حالت گذر تصادفی در گروه افاین به صورت (۴) است

$$dX = X.A(X, dt) + X. \sum_{i=1}^{\ell} b_i(X) E_i dw_i \quad (4)$$

$X \in \text{Aff}(2)$ حالت سیستم فرض شده است و نگاشت‌های $A: \text{Aff}(2) \rightarrow \text{aff}(2)$ و $b_i: \text{Aff}(2) \rightarrow \mathfrak{R}$ به طور کلی غیر خطی هستند. dw_i فرایند نویز وینر است و فرم گسسته این معادله به شکل زیر است [۸] و [۹]

$$X_k = X_{k-1} \cdot \exp(A(X, dt) \cdot \Delta t + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_{i,k} E_i \sqrt{\Delta t}) \quad (5)$$

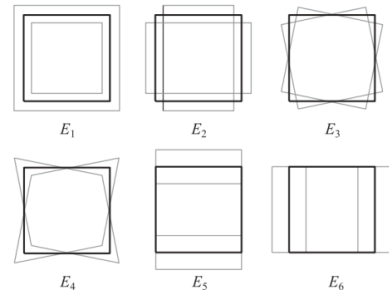
$\varepsilon_{i,k}$ نمونه‌های نویز گوسی با ماتریس کواریانس $P \in \mathfrak{R}^{\ell \times \ell}$ است. در این حالت، معادله اندازه‌گیری گسسته نیز به شکل $y_k = h(X_k) + n_k$ خواهد بود و $h: \text{Aff}(2) \rightarrow \mathfrak{R}^{n_y}$ و n_k نویز اندازه‌گیری با کواریانس $R \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_y}$ است.

اگر دنباله‌ای از تصاویر متوالی داشته باشیم و محل شیء در قاب اول مشخص باشد، یافتن شیء هدف در تصویر جدید با تخمین X_k تبدیل افاین دوبعدی در قاب k ام انجام می‌شود. در معادلات حالت $A(X, t)$ تعیین‌کننده مدل دینامیکی است. یک روش مؤثر برای داشتن مدل دینامیک منعطف و ساده، استفاده از فرایند AR مرتبه اول است. در مسأله با حالت برداری فرمول فرایند AR مرتبه r به شکل (۶) و در حالت $\text{Aff}(2)$ به شکل (۷) خواهد بود [۱۳]

$$x_k = \sum_{i=1}^r a_i x_{k-i} + w_k \quad (6)$$

$$X_k = X_{k-1} \cdot \exp(A_{k-1} + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_{i,k} E_i \sqrt{\Delta t}) \quad (7)$$

چون در روش SIR در هر مرحله زمانی نمونه‌برداری مجدد انجام می‌شود، لازم است حالت (A_k, X_k) در نظر گرفته شود [۱۱].



شکل ۱: تغییر شکل حاصل از هر عنصر پایه $\text{aff}(2)$ [۱۰].

۲- گروه افاین و فیلتر ذره‌ای هندسی

۲-۱-۲ گروه افاین

در طی ردیابی، می‌توان مکان هر نقطه از تصویر را با یک ماتریس افاین نشان داد [۱۰] و بنابراین از ماتریس افاین به عنوان حالت سیستم می‌توان استفاده کرد. تبدیل افاین یک نقطه از تصویر مانند $p = (p_x, p_y)^T$ ، یک تبدیل خطی معکوس‌پذیر $G \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ به همراه جابه‌جایی $t = (t_x, t_y)^T$ است و به صورت $p' = G.p + t$ بیان می‌شود که در مختصات همگن این تبدیل با بیان ماتریسی (۱) برابر است

$$p' = \begin{bmatrix} G & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ماتریس افاین دوبعدی $\begin{bmatrix} G & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، تحت عملگر ضرب یک گروه لی را تشکیل می‌دهد که به شکل $\text{Aff}(2)$ (گروه افاین دوبعدی) نمایش داده می‌شود. $\text{aff}(2)$ ، جبر لی متناظر با $\text{Aff}(2)$ به صورت فضای برداری مماس بر عنصر یکسانی فضای گروه افاین تعریف می‌شود که با نگاشت نمایشی $\text{aff}(2) \xrightarrow{\exp} \text{Aff}(2)$ به هم مرتبط می‌شوند. $\text{aff}(2)$ شامل ماتریس‌هایی به فرم $\begin{bmatrix} M & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. عناصر پایه E_i متعلق به $\text{aff}(2)$ طوری انتخاب شده‌اند که تحت عملیات براکت لی، یک مجموعه بسته می‌سازند: E_1 تغییر بزرگ‌نمایی، E_2 کشش عمودی-افقی، E_3 دوران، E_4 کشش اریبی، E_5 جابه‌جایی عمودی و E_6 جابه‌جایی افقی و به این ترتیب ترکیب آنها انواع تبدیل هندسی را تولید می‌کند [۱۰]. معادله (۲) عناصر پایه E_i و شکل ۱ تبدیل هندسی ناشی از هر یک را نشان می‌دهد

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

۲-۲ فیلتر ذره‌ای روی گروه افاین

تخمین توزیع مطلوب فیلتر بیزی یعنی $p(x_k | y_k)$ با مجموعه‌ای از نمونه‌ها و وزن‌های متناظر آنها $\{x_k^{(i)}, w_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ صورت می‌گیرد که به این

2. Monte Carlo
3. Importance Sampling
4. Sampling Importance Resampling

1. Lie Bracket

با جمله اول بسط سری تیلور می‌توان y_k را به شکل تقریبی $y_k \approx h(f(x_{k-1})) + J \cdot (x_k - f(x_{k-1})) + n_k$ خطی کرد. برای تقریب $p(x_k | x_{k-1}, y_k)$ فرض اصلی گوسی توأم بودن توزیع $p(x_k | x_{k-1}, y_k)$ است [۱۴]. بردار میانگین و ماتریس کواریانس این توزیع بر اساس توزیع‌های کناری عبارتست از

$$\mu = (\mu_1, \mu_2)^T = [E(x_k | x_{k-1}), E(y_k | x_{k-1})]^T \quad (11)$$

$$\approx [f(x_{k-1}), h(f(x_{k-1}))]^T$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} \text{var}(x_k | x_{k-1}) & \text{cov}(x_k, y_k | x_{k-1}) \\ \text{cov}(x_k, y_k | x_{k-1})^T & \text{var}(y_k | x_{k-1}) \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} P & PJ^T \\ JP & JPJ^T + R \end{pmatrix}$$

در این صورت $p(x_k | x_{k-1}, y_k)$ با $N(\mu_k, \Sigma_k)$ تقریب زده می‌شود [۱۱]

$$\mu_k = \mu_1 + \Sigma_{12}(\Sigma_{22})^{-1}(y_k - \mu_2) \quad (13)$$

$$\Sigma_k = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}(\Sigma_{22})^{-1}(\Sigma_{21})^T \quad (14)$$

۲-۳-۲ تقریب توزیع اهمیتی بهینه روی Aff(۲)

دو مفهوم توزیع گوسی و بسط تیلور در Aff(۲) را با توجه به خصوصیات هندسی ماتریس افاین بررسی می‌کنیم. فاصله در این فضا با طول کوتاه‌ترین منحنی بین دو نقطه اندازه‌گیری می‌شود. نمایش نمادین کوتاه‌ترین فاصله بین X و I در فضای گروه لی در شکل ۲ مشاهده می‌شود [۱۵].

در نزدیکی عنصر یکانی گروه افاین، کوتاه‌ترین فاصله از رابطه $X = \exp(\sum_{i=1}^p u_i E_i)$ با مشخصه همسایگی $u = [u_1, \dots, u_p]^T$ به دست می‌آید [۳] و [۱۶]. با فرض یک مختصات محلی برای X ، هر همسایگی نزدیک از X با (۱۵) تقریب زده می‌شود [۹]

$$X(u) = X \cdot \exp(\sum_{i=1}^p u_i E_i) \quad (15)$$

در این صورت یک توزیع گوسی روی Aff(۲) از نگاهت نمایی توزیع نرمال روی aff(۲) به دست می‌آید، به شرط آن که کواریانس P به اندازه‌ای کوچک باشد که مختصات محلی برای X معتبر بماند [۱۶]. بنابراین با در نظر گرفتن $F(X_{k-1}) = X_{k-1} \cdot \exp(A_{k-1})$ بازنویسی (۷) به شکل زیر خواهد بود

$$X_k = X(u) = F(X_{k-1}) \cdot \exp(\sum_{i=1}^p u_i E_i \sqrt{\Delta t}) \quad (16)$$

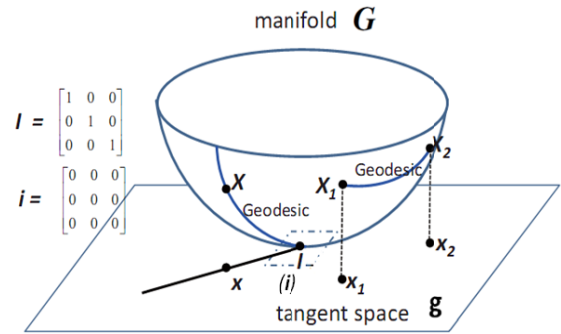
پس احتمال گذار حالت $p(X_k | X_{k-1})$ با توزیع $N_{Aff(\nu)}(F(X_{k-1}), Q)$ با کواریانس $Q = P \cdot \Delta t$ تقریب زده می‌شود.

برای تعیین کواریانس توزیع اهمیتی $p(x_k | x_{k-1}, y_k)$ بسط تیلور تابع اندازه‌گیری $h(\cdot)$ در همسایگی $F(X_{k-1})$ را در نظر می‌گیریم. اگر این همسایگی را به شکل $X(u) = F(X_{k-1}) \cdot \exp(\sum_{i=1}^p u_i E_i)$ با توجه به (۱۵) بیان کنیم، جمله اول بسط تیلور تابع $h(\cdot)$ حول $F(X_{k-1})$ عبارت است از

$$y_k = h(F(X_{k-1})) \cdot J \cdot u + n_k \quad (17)$$

J ژاکوبین $h(X(u))$ نسبت به u (مولد همسایگی در گروه افاین) به ازای $X(u)$ برابر با $F(X_{k-1})$ یعنی $u = 0$ است. به طور خلاصه

پارامترهای $N_{Aff(\nu)}(\mu_k, \Sigma_k)$ عبارتند از [۱۱]



شکل ۲: نمایش نمادین کوتاه‌ترین فاصله در فضای گروه لی [۱۵].

۲-۲-۲ تعیین مقدار میانگین در گروه افاین

تخمین بهینه حالت در ردیابی معمولاً به روش کمترین میانگین مربعات خطا (MMSE) محاسبه می‌شود. \hat{X}_k در MMSE از میانگین وزن دار ذرات $\{X_k^{(1)}, \dots, X_k^{(N)}\}$ به دست می‌آید و برای میانگین‌گیری روی گروه افاین از روش یادشده در [۱۰] استفاده می‌شود، به این ترتیب که \bar{G}_k میانگین $\{G_1, \dots, G_N\}$ که عضو گروه لی است با تعریف ذاتی میانگین به دست می‌آید

$$\arg \min \sum_i d(\bar{G}, G_i)^\nu \quad (8)$$

که $d(\bar{G}, G_i)$ فاصله \bar{G} از G_i است. به جای محاسبات سنگین کمینه‌سازی، چون ذرات پس از نمونه‌برداری مجدد به هم نزدیک هستند انتظار می‌رود بیشتر آنها در همسایگی ذره با بیشترین وزن یعنی $G_{k, \max}$ باشند [۱۰]، بنابراین از تقریب فاصله بین دو همسایگی استفاده می‌شود

$$\bar{G}_k = G_{k, \max} \cdot \exp(\bar{M}_k) \quad (9)$$

$$\bar{M}_k = \frac{1}{N} \cdot \sum \log(G_{k, \max}^{-1} \cdot G_k^{(i)}) \quad (10)$$

بنابراین میانگین N نمونه $\{X_k^{(1)}, \dots, X_k^{(N)}\}$ به شکل $\begin{bmatrix} \bar{G}_k \\ \bar{t}_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ خواهد بود که \bar{G}_k میانگین بخش گروه لی و \bar{t}_k میانگین عددی بخش جابه‌جایی $X_k^{(i)}$ است.

۳-۲ توزیع اهمیتی بهینه

معمول‌ترین توزیع اهمیتی، تابع چگالی گذار حالت سیستم یعنی $p(X_k | X_{k-1}^{(i)})$ است. در این صورت وزن‌ها با درست‌نمایی $p(y_k | X_{k-1}^{(i)})$ متناسب خواهند بود. در این حالت، اندازه‌گیری‌های جدید در نظر گرفته نمی‌شود، در نتیجه پراکندگی وزن‌ها زیاد و تعداد ذره مؤثر در تخمین کم است. تابع اهمیتی که واریانس وزن ذرات را به حداقل می‌رساند $p(X_k | X_{k-1}^{(i)}, y_k)$ است [۶] اما محاسبه آنالیزی وزن ذرات به طور کلی از (۳) ممکن نیست. یک حالت خاص برای آن مدل فضای حالت گوسی و معادله اندازه‌گیری خطی است. چون در ردیابی، شدت پیکسل‌های ناحیه‌ای از تصویر که با X_k مشخص می‌شود و پارامتر اندازه‌گیری تابع غیر خطی از X_k هستند، تخمینی از تابع نمونه‌برداری بهینه با خطی‌سازی محلی صورت می‌گیرد [۶].

۱-۳-۲ تقریب توزیع اهمیتی بهینه در فضای برداری

با توجه به معادلات $x_k = f(x_{k-1}) + v_k$ و $y_k = h(x_k) + n_k$ در فضای برداری، J ژاکوبین $h(x_k)$ به ازای x_k برابر با $f(x_{k-1})$ است.

$$hist(b) = \sum_p Kr(p) \cdot \delta(I(p) - b) \quad (21)$$

$\delta(\cdot)$ تابع دلتای کرونیگر است. برای یک هیستوگرام B تایی، $I(p)$ ابتدا به بازه $[0, 1]$ نرمالیزه و به B مقدار $[0, 1/B - 1, 2/B - 1, \dots, 1]$ کوانتیزه می‌شود. $Kr(\cdot)$ یک کرنل گوسی است که برای وزن دهی بیشتر به نقاط داخلی مستطیل نسبت به نقاط مرزی آن استفاده می‌شود [۱۸]. برای جلوگیری از تقسیم بر صفر، در استخراج هیستوگرام مقدار بسیار کوچک ϵ به جای صفر تعریف می‌شود

$$hist(b) = \max(\sum_p Kr(p) \cdot \delta(I(p) - b), \epsilon) \quad (22)$$

برای تحلیلی بودن مدل، تابع $\delta(x)$ را می‌توان با توابع مختلفی مانند $\text{sinc}^2(x)$ یا تابع گوسی تقریب زد. تابع مورد نظر باید در صفر مقدار یک داشته و میرایی آن حول صفر شدید باشد.

یک تقریب مناسب تابع شبه‌گوسی $\exp(-x^2/2\sigma^2)$ است که مقدار آن در صفر برابر یک است و میرایی آن با σ^2 قابل تنظیم است. در روش پیشنهادی σ^2 به گونه‌ای تعیین می‌شود که در محاسبه $hist(b)$ مقدار تابع $\exp(-x^2/2\sigma^2)$ در $I(p) - b = 1/B - 1$ برابر ϵ باشد یعنی $\exp(-(1/B - 1)^2/2\sigma^2) = \epsilon$. در شکل ۳ تابع $\exp(-x^2/2\sigma^2)$ نشان داده شده است [۲۰].

به دلیل تغییر الگوی تابشی و شدت در طی ردیابی، لازم است مدل هیستوگرام هدف به طور وقتی آموزش دیده و تغییر کند. مدل وفق یافته برای هدف از ترکیب مدل مرجع در قاب آغازین q و مدل تجمعی هدف تا قاب قبل یعنی \hat{q}_{k-1} ایجاد می‌شود

$$\hat{q}_k = \rho \cdot q + (1 - \rho) \hat{q}_{k-1} \quad (23)$$

ρ ضریب تشابه بین مدل هیستوگرام اولیه و وفق یافته خواهد بود. در این پژوهش هیستوگرام در فضای رنگ HSI محاسبه می‌شود. از آنجا که دو تصویر یکسان در شرایط نوری متفاوت دارای طول موج و اشباع رنگ یکسان هستند و تنها بعد روشنایی آنها متفاوت است (مگر زمانی که روشنایی به حدی کم باشد که دو کانال رنگ مذکور خاصیت تفکیک‌دهی خود را از دست بدهند)، بنابراین بردار هیستوگرام را برای دو کانال رنگ S و H با $B = 32$ در هر کانال محاسبه می‌کنیم.

۲-۳ تابع اندازه‌گیری

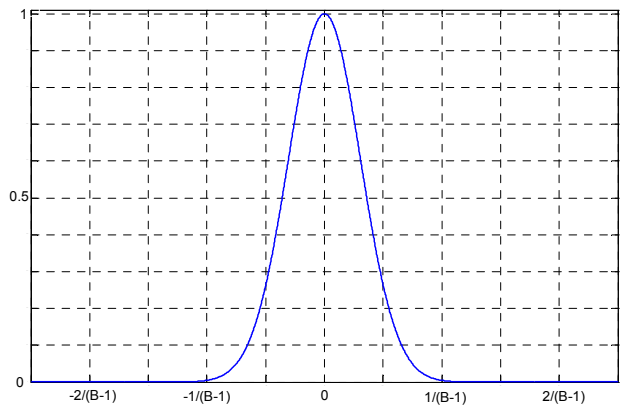
فاصله بین هیستوگرام تصویر مرجع q و هیستوگرام تصویر داوطلب $hist$ با فاصله باتاچاریا بیان می‌شود. متغیر اندازه‌گیری برابر این فاصله است و درست‌نمایی اندازه‌گیری مطابق (۲۴) خواهد بود [۲۱]

$$y_k = D^r = 1 - \sum_{b=1}^B \sqrt{q(b) \cdot hist(b)} \quad (24)$$

$$p(y_k | X_k) \propto \exp\left(-\frac{y_k^2}{2R}\right) \quad (25)$$

۳-۳ محاسبه ژاکوبین تابع اندازه‌گیری رنگی

همان طور که بیان شد، $p = G \cdot p + t$ تبدیل افاین نقطه p متعلق به تصویر اولیه شیء هدف است که به صورت دستی در قاب اول تعیین شده است. $y_k = h(X_k) + n_k = g(p) + n_k$ معادله متغیر اندازه‌گیری یا همان y_k است که $g(\cdot)$ تابعی غیر خطی با خروجی حقیقی و مشتق‌پذیر از متغیر p می‌باشد. ژاکوبین J_i با قانون مشتق زنجیره‌ای نسبت به u_i در $u = 0$ به شکل زیر است



شکل ۳: تقریب تابع $\delta(x)$ با $\exp(-x^2/2\sigma^2)$.

$$\Sigma_k = \Sigma_{11} - \Sigma_{1r} (\Sigma_{rr})^{-1} \cdot \Sigma_{1r}^T \quad (18)$$

$$\mu_k = \mu_1 \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^r u_{i,k} E_i\right)$$

$$\Sigma_{11} = Q, \quad \Sigma_{1r} = Q \cdot J^T, \quad \Sigma_{rr} = JQJ^T + R$$

$$\mu_1 = F(X_{k-1}), \quad \mu_r = h(F(X_{k-1})) \quad (19)$$

$$u = \Sigma_{rr}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^r (y_k - \mu_r)$$

نمونه‌برداری از تقریب تابع اهمیتی بهینه $\mathcal{N}_{Aff(r)}(\mu_k, \Sigma_k)$ با نگاهش نمایی نمونه‌های نویز گوسی روی $aff(r)$ به شکل زیر انجام می‌گیرد

$$\mu_k \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^r \varepsilon_i \cdot E_i\right), \quad \varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r]^T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_k) \quad (20)$$

۳-۳ مدل هدف و تابع اندازه‌گیری رنگی ردیاب پیشنهادی

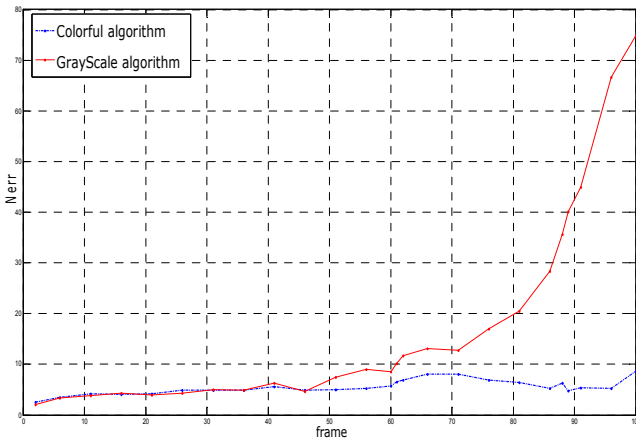
تابع اندازه‌گیری $g(\cdot)$ به طور مستقیم با مدل بیان شیء و ویژگی‌های تصویری مورد استفاده در ارتباط است. برای تعیین پارامترهای توزیع اهمیتی نیاز به ژاکوبین تابع اندازه‌گیری نسبت به متغیر مولد همسایگی در گروه افاین داریم. به این ترتیب مدل هدف و تابع اندازه‌گیری لازم است تحلیلی و مشتق‌پذیر باشد. در بعضی مراجع مثل [۱۰] و [۱۱]، از زیرفضای PCA [۱۷] برای مدل کردن هدف استفاده شده است. در روش آنها مدل مرجع با میانگین و بردارهای ویژه سطح خاکستری ناحیه هدف، $I(p)$ ، مشخص می‌شود. تابع اندازه‌گیری مورد استفاده آنها شامل دو بخش فاصله از فضای ویژگی^۱ (DFFS) و فاصله در فضای ویژگی^۲ (DIFS) بوده است.

رنگ ویژگی قابل توجهی است چون تغییرات سریعی ندارد و از طرفی، استفاده از تصویر سطح خاکستری در روش مطرح شده در [۱۱] موجب از دست رفتن بخش قابل توجهی از اطلاعات می‌شود.

۱-۳ مدل هدف

روش‌های متنوعی برای به کار گرفتن اطلاعات رنگ وجود دارد [۱۸] و [۱۹] که متداول‌ترین آنها مدل هیستوگرام رنگ است. به جای استفاده از کل تصویر، بردار هیستوگرام رنگ $hist$ مربوط به ناحیه داخل کادر مستطیلی که مکان آن با حالت X_k تعیین شده است، استخراج می‌شود. هیستوگرام وزن‌دار، یک مدل ساده آماری از تعداد پیکسل‌های تصویر از هر مؤلفه رنگ است. عضو b ام بردار هیستوگرام به شکل زیر محاسبه می‌شود [۱۸]

1. Distance from Feature Space
2. Distance in Feature Space



شکل ۵: خطای نرمالیزه شده آزمایش اول.

$$\frac{\partial I(p)}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_p^{(v)}}{\partial x} & \frac{\partial I_p^{(v)}}{\partial y} \\ \frac{\partial I_p^{(r)}}{\partial x} & \frac{\partial I_p^{(r)}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (30)$$

دو جمله دیگر (۲۶) به شکل زیر خواهد بود

$$\frac{\partial p}{\partial X(u_i)} = \begin{bmatrix} p_x & \cdot & p_y & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & p_x & \cdot & p_y & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial X(u_i)}{\partial u_i} \right|_{u=\cdot} = \frac{\partial X_k \cdot \exp(\sum_i u_i \cdot E_i)}{\partial u_i} = X_k \cdot E_i \quad (32)$$

۶ مؤلفه جایگذاری می‌شود. برای همخوانی داشتن با $\frac{\partial p}{\partial X(u_i)}$ به شکل بردار $\left. \frac{\partial X(u_i)}{\partial u_i} \right|_{u=\cdot}$ با

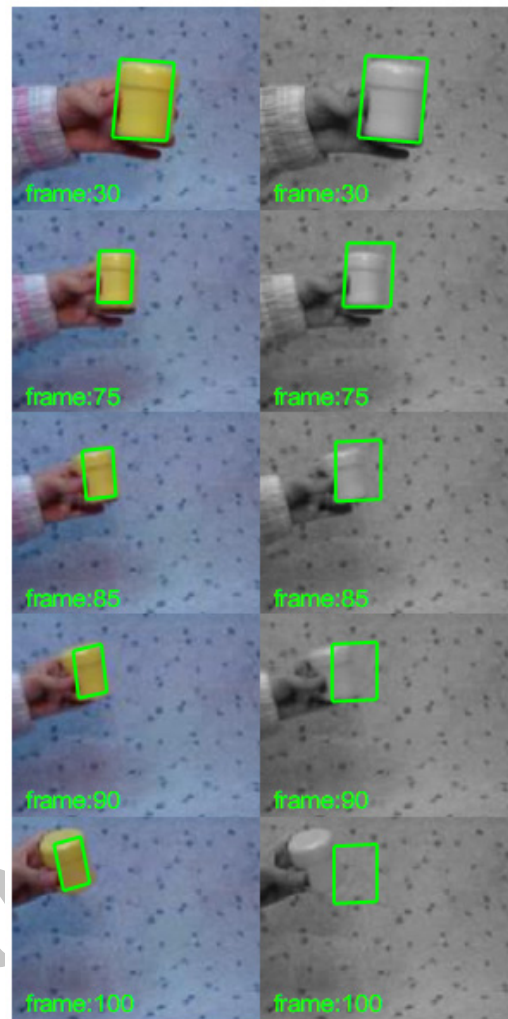
۴- نتایج شبیه‌سازی

عملکرد الگوریتم هیستوگرام رنگی پیشنهاد شده در مقایسه با الگوریتم PCA سطح خاکستری [۱۱] در سه آزمایش با شرایط مساوی بررسی شده و با نرم‌افزار MATLAB R2009a پیاده‌سازی شده است. در آزمایش اول شیء هدف یک ظرف زرد رنگ است که در پس‌زمینه آبی ردیابی می‌شود. همان‌طور که در ستون الف شکل ۴ مشاهده می‌شود، ردیابی هدف به پس‌زمینه چندان موفق نیست. لحاظ کردن رنگ در تابع اندازه‌گیری موجب عملکرد بهتر الگوریتم پیشنهادی شده است. از فریم ۷۶ حرکت هدف ناگهانی می‌شود و الگوریتم [۱۱] از فریم ۸۵ به بعد نمی‌تواند هدف را دنبال کند. برای مقایسه کمی دو ردیاب، خطای نرمالیزه شده (Nerr) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$e_i = \sqrt{\sum_{j=1}^F (p_{ij} - \bar{p}_{ij})^2} \quad (33)$$

$$Nerr = \frac{e_i}{scale_i} \quad (34)$$

e_i خطای کادر ردیاب در قاب i ام و $scale_i$ نسبت اندازه شیء هدف در قاب i ام به اندازه شیء هدف در قاب اول است و به این ترتیب بزرگ و کوچک شدن هدف باعث افزایش و کاهش خطا نمی‌شود. نمودار خطای نرمالیزه شده آزمایش اول بر حسب شماره قاب در شکل ۵ رسم شده است.



(ب) (الف)

شکل ۴: آزمایش اول، ظرف زرد، الف) نتیجه ردیابی با الگوریتم [۱۱] و ب) نتیجه ردیابی با الگوریتم رنگی پیشنهادی.

$$J_i = \frac{\partial h}{\partial u_i} = \frac{\partial g(p)}{\partial p} = \frac{\partial p}{\partial X(u_i)} = \left. \frac{\partial X(u_i)}{\partial u_i} \right|_{u=\cdot} \quad (26)$$

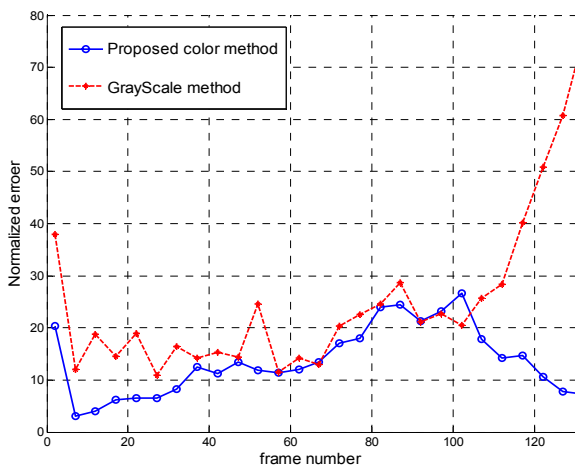
J_i ستون i ام ژاکوبین را تشکیل می‌دهد و برای اختصار از X_k به جای $F(X_{k-1})$ استفاده شده است. جمله اول ژاکوبین، $\partial g(p)/\partial p$ ، به انتخاب تابع اندازه‌گیری $g(\cdot)$ بستگی دارد که در روش پیشنهادی فاصله باتاچاریا بین هیستوگرام مرجع و داوطلب است

$$\frac{\partial g(p)}{\partial p} = \frac{\partial D^r}{\partial hist(b)} = \frac{\partial hist(b)}{\partial p} \quad (27)$$

$$\frac{\partial D^r}{\partial hist(b)} = -0.5 \times \sum_{b=1}^B \sqrt{\frac{q(b)}{hist(b)}} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial hist(b)}{\partial p} &= \frac{\partial Kr(p)}{\partial p} \cdot \exp \nu(I(p) - b) \\ &+ Kr(p) \cdot \frac{\partial \exp \nu(I(p) - b)}{\partial I(p)} \cdot \frac{\partial I(p)}{\partial p} \end{aligned} \quad (29)$$

$\partial Kr(p)/\partial p$ گرادیان ماتریس کرنل و $\partial I(p)/\partial p$ گرادیان تصویر تبدیل‌یافته با X_k است. اگر ماتریس تصویر I به شکل مجموعه‌ای از دو بردار $I = [I^{(v)} \ I^{(r)}] = [H \ S]$ باشد، گرادیان I در نقطه p برابر (۳۰) است



شکل ۷: نمودار خطای ردیابی آزمایش دوم.

که همیشه هدف داخل کادر تصویر باشد و به دلیل بزرگ‌نمایی تصویر، حرکت دقیق دوربین بر اساس سیگنال ردیاب تصویری نیاز است.

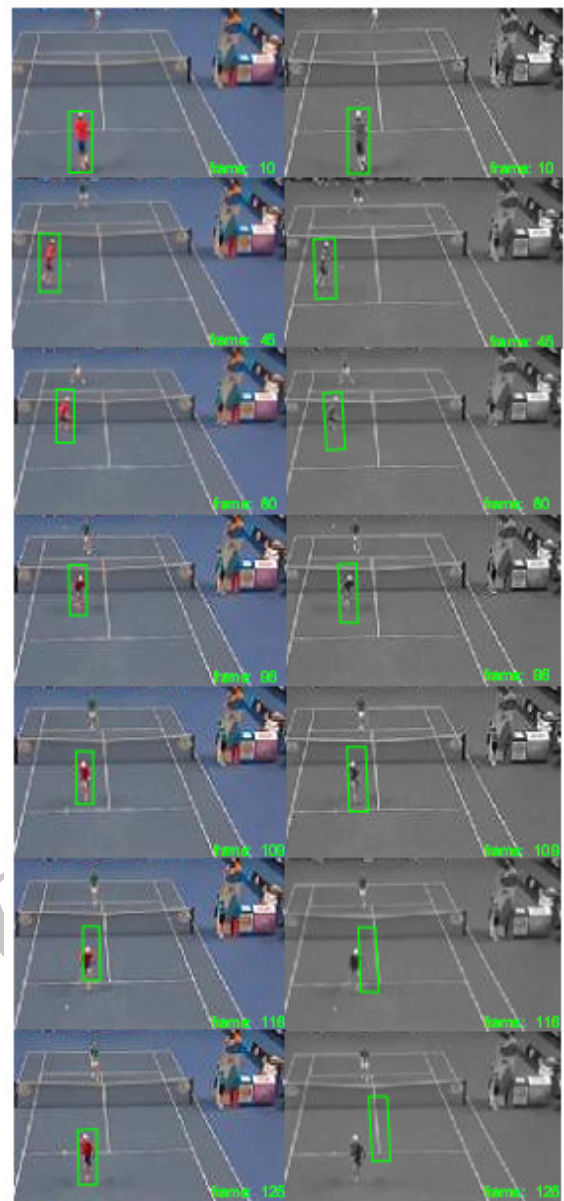
در ابتدا توپ تنیس به سمت راست و پایین حرکت می‌کند، در قاب ۱۰ به زمین برخورد کرده و تا قاب ۱۵ حرکت را به سمت راست و بالا ادامه می‌دهد. سپس دو مرتبه به سمت پایین رفته، در قاب ۱۸ به زمین برخورد می‌کند. الگوریتم سطح خاکستری تا قاب ۸، زاویه حرکت هدف را دنبال می‌کند ولی بعد از آن مسیر منحنی‌شکل هدف را دنبال نکرده، کادر ردیاب با همان زاویه قبلی به حرکت ادامه می‌دهد و هدف را گم می‌کند. روش پیشنهادی علاوه بر دنبال کردن مسیر منحنی‌شکل هدف تا قاب ۱۰، تغییرات جهت حرکت شیء (پایین و بالا رفتن) را نیز به خوبی ردیابی می‌کند. خطای ردیابی در شکل ۹ نیز گویای این مطلب است.

آزمایش چهارم اسکی روی آب با سرعت بالا است که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود. ردیابی هدف در فضای باز و پس‌زمینه نسبتاً شلوغ صورت می‌گیرد.

به دلیل حرکت‌های شدید قایق فیلم‌برداری، دوربین لرزش‌های ناخواسته دارد و شیء هدف نیز دچار پرش ناگهانی می‌شود. این لرزش‌ها در قاب ۲۹ چنان شدید است که موجب محوشدن شیء هدف می‌شود و الگوریتم سطح خاکستری [۱۱] نمی‌تواند هدف را به درستی ردیابی کند. همان‌طور که در ستون ب شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، در نظر گرفتن رنگ در تابع اندازه‌گیری الگوریتم پیشنهادی کمک می‌کند در حالت محوشدگی شیء هدف، هاله رنگی آن دنبال شود. در عین حال حضور یک شیء هم‌رنگ با هدف در نزدیکی آن ردیاب را دچار خطا نمی‌کند. به این ترتیب ردیاب رنگی پیشنهادی در شرایط محوشدگی هدف نسبت به ردیاب [۱۱] بهتر عمل می‌کند. شکل ۱۱ نمودار خطای این دو ردیاب را برای آزمایش چهارم نشان می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به کمک مدل هیستوگرام روشی برای به کار بردن اطلاعات رنگ در ردیابی با استفاده از حرکت افاین به شکل گروه $Aff(2)$ و فیلتر ذره‌ای ارائه شد. لحاظ کردن ویژگی‌های هندسی گروه افاین، تأثیر بسیار خوبی در ردیابی حرکت دوبعدی نگاشته‌شده از حرکت سه‌بعدی دارد. تخمین تابع اهمیت بهینه به جای معادله گذر حالت با خطی‌سازی تابع اندازه‌گیری انجام‌شده، افزایش دقت ردیاب و کاهش ذرات مورد نیاز را به دنبال دارد. استفاده از ویژگی با ثبات رنگ، قدرت ردیابی را افزایش می‌دهد.



(الف) (ب)

شکل ۶: آزمایش دوم، بازیکن تنیس، (الف) نتیجه ردیابی با الگوریتم [۱۱] و (ب) نتیجه ردیابی با الگوریتم پیشنهادی.

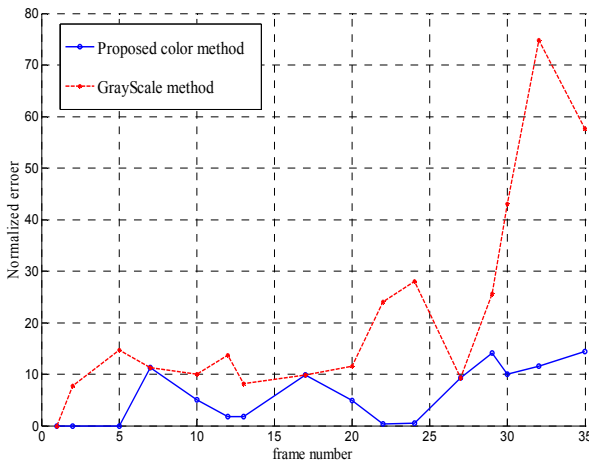
آزمایش دوم حرکت سریع بازیکن تنیس در زمین مسابقه است. هدف به واسطه دویدن و نشستن دچار تغییر شکل و پنهان‌شدگی جزئی می‌شود. چنانچه در ستون الف شکل ۶ مشاهده می‌شود، الگوریتم [۱۱] تا قاب ۹۶ هدف را ردیابی می‌کند اما بعد از آن تغییر جهت حرکت هدف به چپ و تغییر شکل آن را تشخیص نداده و از قاب ۱۱۷ هدف را گم می‌کند. الگوریتم پیشنهادی تغییر جهت حرکت هدف را دنبال کرده و خطای ایجادشده در کادر ردیاب در قاب ۱۱۶ را تصحیح می‌کند. همچنین با توجه به ناحیه داخل کادر در قاب اولیه، کادر ردیاب پیشنهادی در طول ردیابی ناحیه دقیق‌تری را نشان می‌دهد. شکل ۷ نمودار خطای این دو ردیاب را برای آزمایش دوم نشان می‌دهد.

در آزمایش سوم هدفی کوچک با سرعت حرکت بالا ردیابی می‌شود (شکل ۸). اهداف کوچک در فاصله دور را به کمک بزرگ‌نمایی تصویر می‌توان مشاهده و ردیابی کرد اما در این حالت دنبال کردن هدفی کوچک با سرعت زیاد ساده نخواهد بود. این مسأله از آن جهت اهمیت دارد که معمولاً خواستار آن هستیم که ردیابی تصویر هدف طوری انجام پذیرد



(الف) (ب)

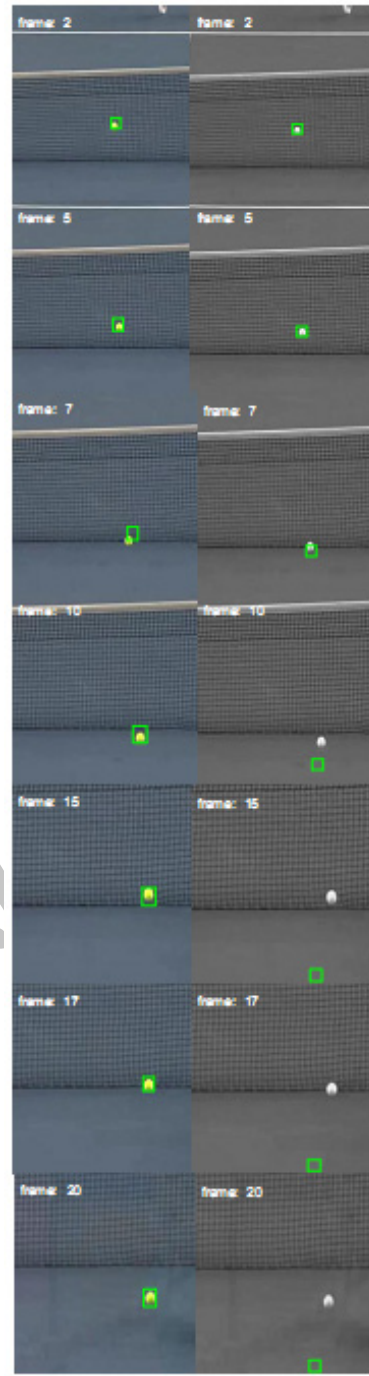
شکل ۱۰: آزمایش چهارم، اسکی روی آب، (الف) نتیجه ردیابی با الگوریتم [۱۱] و (ب) نتیجه ردیابی با الگوریتم رنگی پیشنهادی.



شکل ۱۱: نمودار خطی ردیابی آزمایش چهارم.

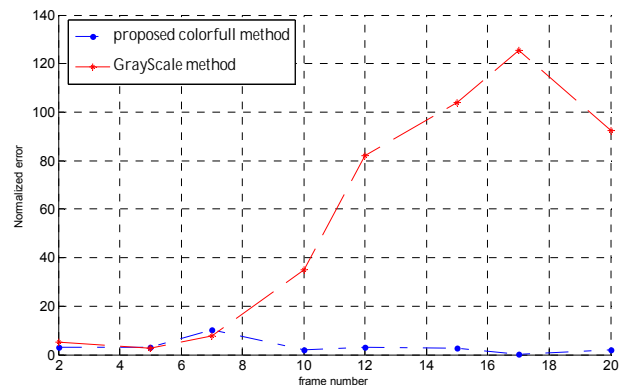
در الگوریتم پیشنهادی مدل هدف هیستوگرام رنگی وزن دار در فضای HSI در نظر گرفته شده و فاصله باتاچاریا بین هیستوگرام مرجع و داوطلب درست‌نمایی را تعیین می‌کند. برای خطی‌سازی محلی تابع اندازه‌گیری، تابع دلتای کرونیگر با تابع تحلیلی شبه‌گوسی تقریب زده شده است. الگوریتم پیشنهادی در برابر حرکت ناگهانی و نامنظم هدف، تغییر شکل هدف، پنهان‌شدگی جزئی و حضور کلاتر مقاوم است. علاوه بر آن به دلیل وزن‌دهی بیشتر به پیکسل‌های مرکزی، نسبت به تعیین دقیق کادر اولیه در قاب آغازین حساس نیست.

در ادامه این پژوهش می‌توان استفاده از مدل‌های توسعه‌یافته هیستوگرام رنگی مانند هیستوگرام جهت‌دار یا هیستوگرام چندسطحی با ساده‌سازی‌های مناسب و یا انتخاب کرنل‌های وزنی دیگر به جای کرنل



(الف) (ب)

شکل ۱۸: آزمایش سوم، حرکت توپ تنیس، (الف) نتیجه ردیابی با الگوریتم [۱۱] و (ب) نتیجه ردیابی با الگوریتم رنگی پیشنهادی.



شکل ۱۹: نمودار خطی ردیابی آزمایش سوم.

- [16] Y. Lui, "Advances in matrix manifolds for computer vision," *Image and Vision Computing*, vol. 30, no. 6-7, pp. 380-388, Jun. 2012.
- [17] Z. Khan, T. Balch, and F. Dellaert, "A Rao-Blackwellized particle filter for eigentracking," in *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'04*, pp. 980-986, Jun. 2004.
- [18] Z. Zivkovic and B. Krose, "An EM-like algorithm for color-histogram-based object tracking," in *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'04*, pp. 798-803, Jun. 2004.
- [19] J. Czyz, B. Ristic, and B. Macq, "A particle filter for joint detection and tracking of color objects," *Image and Vision Computing*, vol. 25, no. 8, pp. 1271-1281, Aug. 2007.

[۲۰] ن. قاسمی، پ. معلم و م. ف. صباحی، "ردیابی تصویری به روش فیلتر ذره‌ای هندسی با استفاده از مدل هیستوگرام،" *یازدهمین کنفرانس سیستم‌های هوشمند ایران، JCS'13*، اسفند ۹۱.

- [21] D. Comaniciu, V. Ramesh, and P. Meer, "Kernel-based object tracking," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, no. 5, pp. 564-577, May 2003.

نگین قاسمی در سال ۱۳۸۹ مدرک کارشناسی مهندسی برق الکترونیک خود را از دانشگاه اصفهان و در سال ۱۳۹۱ مدرک کارشناسی ارشد مهندسی برق مخابرات خود را از دانشگاه اصفهان دریافت نمود. وی هم‌اکنون در پژوهشکده اویونیک دانشگاه صنعتی اصفهان مشغول فعالیت می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه نامبرده شامل موضوعاتی مانند ردیابی تصاویر ویدئویی، الگوریتم فیلترهای ذره‌ای، همسان‌سازی کانال و مخابرات سیار می‌باشد.

پیمان معلم دانش‌آموخته کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی الکترونیک، به‌ترتیب در سال ۱۳۷۰ و ۱۳۷۴ از دانشگاه صنعتی اصفهان و دانشگاه صنعتی امیرکبیر می‌باشد. نامبرده در سال ۱۳۸۲ موفق به اخذ درجه دکترا در مهندسی برق از دانشگاه صنعتی امیرکبیر گردید. دکتر معلم از سال ۱۳۸۲ به عنوان عضو هیأت علمی در دانشگاه اصفهان مشغول خدمت گردید و هم‌اکنون دانشیار گروه مهندسی برق دانشکده فنی و مهندسی و عضو گروه پژوهشی پردازش کاربردی تصویر و سیگنال دانشگاه اصفهان می‌باشد. زمینه‌های علمی مورد علاقه ایشان شامل موضوعاتی مانند پردازش تصاویر و ماشین بینایی، توسعه شبکه‌های عصبی و پردازش هوشمند سیگنال‌ها می‌باشد. اجرای بیش از ۳۰ پروژه کاربردی، تألیف بیش از ۲۲۵ عنوان مقاله در مجلات و کنفرانس‌های معتبر بین‌المللی و ملی و نیز تألیف ۳ عنوان کتاب در فعالیت‌های پژوهشی ایشان دیده می‌شود. ایشان در سال‌های ۱۳۸۸ و ۱۳۹۰ به عنوان پژوهشگر برتر استان اصفهان در حوزه مهندسی انتخاب شده و در سال ۱۳۹۱ عنوان پژوهشگر برتر در دومین جشنواره بین‌المللی تحقیق و توسعه ایران را کسب کرده‌اند.

محمدفرزان صباحی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی مهندسی الکترونیک و کارشناسی ارشد مهندسی مخابرات به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۷۷ و ۱۳۷۹ در دانشگاه صنعتی اصفهان و در مقطع دکتری مهندسی برق در سال ۱۳۸۶ و در همان دانشگاه به پایان رسانده است. دکتر صباحی از سال ۱۳۸۷ در دانشکده مهندسی دانشگاه اصفهان مشغول به فعالیت گردید و هم‌اکنون عضو هیأت علمی این دانشگاه می‌باشد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: پردازش سیگنال‌های آماری، تئوری مخابرات و رادار.

گوسی را مورد بررسی قرار داد. از طرفی از آنجایی که به طور کلی عملکرد فیلتر ذره‌ای هندسی به کوارینانس نویز حالت وابستگی زیادی دارد پیشنهاد می‌شود که ماتریس کوارینانس نویز برای هر محیط آزمایش به طور هوشمند تعیین شود.

مراجع

- [1] H. Yang, L. Shao, F. Zheng, L. Wang, and Z. Song, "Recent advances and trends in visual tracking: a review," *Neurocomputing*, vol. 74, no. 18, pp. 3823-3831, Nov. 2011.
- [2] A. Yilmaz, O. Javed, and M. Shah, "Object tracking: a survey," *ACM Comput. Surv.*, vol. 38, no. 4, pp. 13-57, Dec. 2006.
- [3] J. Kwon, M. Choi, F. Park, and C. Chun, "Particle filtering on the euclidean group: framework and applications," *Robotica*, vol. 25, no. 6, pp. 725-737, Nov. 2007.
- [4] W. Yan, C. Weber, and S. Wermter, "A hybrid probabilistic neural model for person tracking based on a ceiling-mounted camera," *J. of Ambient Intelligence and Smart Environments*, vol. 3, no. 3, pp. 237-252, Jul. 2011.
- [5] S. Zhou, R. Chellappa, and B. Moghaddam, "Visual tracking and recognition using appearance-daptive models in particle filters," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 13, no. 11, pp. 1491-1506, Nov. 2004.
- [6] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu, "On sequential monte carlo sampling methods for Bayesian filtering," *Stat. Comput.*, vol. 10, no. 3, pp. 197-208, Jul. 2000.
- [7] R. Merwe, A. Doucet, N. Freitas, and E. Wan, "The unscented particle filter," *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 13, pp. 584-590, Aug. 2001.
- [8] X. Li, W. Hu, Z. Zhang, X. Zhang, and G. Luo, "Robust visual tracking based on incremental tensor subspace learning," in *Proc. of the 11th IEEE Int. Conf. on Computer Vision*, vol. 11, 8 pp., Oct. 2007.
- [9] D. Ross, J. Lim, R. S. Lin, and M. H. Yang, "Incremental learning for robust visual tracking," *International J. of Computer Vision*, vol. 77, no. 1-3, pp. 125-141, May 2008.
- [10] J. Kwon and F. Park, "Visual tracking via particle filtering on the affine group," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 29, no. 2-3, pp. 198, 2010..
- [11] J. Kwon, K. Mu Lee, and F. Park, "Visual tracking via geometric particle filtering on the affine group with optimal importance functions," in *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'09*, pp. 991-998, Jun. 2009.
- [12] C. Choi and H. I. Christensen, "Robust 3D visual tracking using particle filtering on the SE(3) group," in *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, ICRA'11*, pp. 4384-4390, May 2011.
- [13] J. Xavier and J. Manton, "On the generalization of AR process to Riemannian manifolds," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP'06*, vol. 5, May 2006.
- [14] S. Saha, P. Mandal, Y. Boers, and H. Driessen, "Gaussian proposal density using moment matching," *Stat. Comput.*, vol. 19, no. 2, pp. 203-208, Jun. 2009.
- [15] M. Li, T. Tan, W. Chen, and K. Huang, "Efficient object tracking by incremental self-tuning particle filtering on the affine group," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 21, no. 3, pp. 1298-1313, Mar. 2012.