

## توسعه روش آزادسازی لاگرانژین برای حل مسأله زمانبندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف پذیر

ابراهیم اسدی گنرج<sup>۱\*</sup>، نسیم نهاوندی<sup>۲</sup>

۱. استادیار مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی مکانیک؛ دانشگاه صنعتی بابل

۲. دانشیار مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی؛ دانشگاه تربیت مدرس تهران

### خلاصه

مسأله زمانبندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف پذیر شامل تعیین توالی در یک مسأله جریان کارگاهی می باشد که در هر مرحله حداقل یک یا چند ماشین موازی غیرمشابه وجود دارد. تابع هدف مسأله کمینه سازی حداکثر زمان تکمیل کارها می باشد. برای حل این مسأله از روش آزادسازی لاگرانژین استفاده شده است. برای حل زیرمسأله های تولید شده با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژین نیز از دو رویکرد ساده سازی زیرمسأله ها و توسعه قوانین چیرگی استفاده شده است. نتایج نشان می دهد که هر دو روش می توانند به جواب های نزدیک به بهینه در زمان های نسبتاً معقول دست پیدا کنند ولی تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند. همچنین روش ساده سازی زیرمسأله ها در مدت زمان کوتاه تری می تواند به جواب های مورد نظر دست یابد.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۴/۰۳/۲۰

پذیرش ۱۳۹۴/۱۰/۰۵

کلمات کلیدی:

جریان کارگاهی انعطاف پذیر

دوره ساخت

آزادسازی لاگرانژین

قوانین چیرگی

### ۱- مقدمه

دارند. بنابراین همه کارها در داخل خط تولید از یک مسیر واحد عبور می کند تا به انتهای خط تولید برسد. در هر مرحله فقط باید یکی از ماشین های موازی برای فرآیند شدن یک کار انتخاب شود و هر ماشین در هر لحظه فقط امکان فرآیند یک کار را دارد و بین مراحل فضای کافی برای انبار قطعات نیمه ساخته وجود دارد. تعداد ماشین ها در هر مرحله نیز متفاوت است [۱].

این مسأله با توجه به کاربرد روبه رشد آن در محیط های کاری مختلف، توجه زیادی را در سال های اخیر به خود جلب کرده است [۲]. این محیط کاری در صنایع مختلفی نظیر صنایع تولید فولاد [۳]، صنعت بسته بندی [۴] و خطوط مونتاژ اتومبیل [۵] وجود دارد. در سال های اخیر محققان روش های مختلفی را برای حل مسأله FFS پیشنهاد داده اند که می توان به روش های دقیق، روش های ابتکاری و فرآیندکاری اشاره نمود. مرسلی و پوچت [۶] یک روش شاخه و کران برای مسأله جریان کارگاهی انعطاف پذیر برای

زمانبندی به عنوان یکی از زمینه های تحقیقاتی جدید از سال ۱۹۵۴ مطرح شده است. زمانبندی یک فرآیند تصمیم گیری است که نقش مهمی را در سیستم های تولید ایفا می کند؛ به گونه ای که یک برنامه زمانبندی مؤثر و کارا می تواند سبب بهبود معیارهای عملکردی هر سیستم تولیدی شود.

در این مقاله یک مسأله زمانبندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف پذیر (FFS) با در نظر گرفتن ماشین های موازی غیرمشابه مورد بررسی قرار می گیرد. تابع هدف در نظر گرفته شده برای این مسأله کمینه سازی حداکثر زمان تکمیل کارها است. در این محیط کاری تعدادی ماشین موازی در برخی و یا همه مراحل تولیدی وجود

\* نویسنده مسئول. ابراهیم اسدی گنرج  
تلفن: ۰۱۱-۲۲۳۴۲۰۵؛ پست الکترونیکی: e.asadi@nit.ac.ir

این مسأله کمینه‌کردن مقدار وزن‌دار زودکرد و دیرکرد می‌باشد. آنها برای حل این مسأله دو محدودیت اندازه بافر و رابطه بین مراحل را آزاد نمودند.

سان و نوبل [۱۶] مسأله زمان‌بندی در محیط کار کارگاهی را با زمان آماده‌سازی وابسته به توالی مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از روش جابجایی گلوگاه مسأله به چند مسأله تک‌ماشین تجزیه شده است. سپس برای حل این مسائل تک‌ماشین از روش آزادسازی لاگرانژین استفاده نمودند.

لیو و چنگ [۱۷] مسأله زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر را با در نظر گرفتن زمان و هزینه آماده‌سازی وابسته به توالی مورد بررسی قرار داده و با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژین حل نمودند. آنها مسأله کلی را به دو زیرمسأله زمان‌بندی بخش‌های تولید و زمان‌بندی ماشین‌ها تقسیم نمودند.

اگرچه مسائل زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر، بسیار زیاد مورد بررسی و حل قرار گرفته‌اند اما این مقاله از روش آزادسازی لاگرانژین برای حل مسأله زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با در نظر گرفتن ماشین‌های موازی غیرمشابه استفاده می‌کند که برای حل زیرمسأله‌های حاصل از دو رویکرد ساده‌سازی زیرمسأله‌های و توسعه قوانین چیرگی<sup>۴</sup> استفاده شده است. ادامه این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است: بخش (۲) مدل ریاضی توسعه‌یافته توسط نهانندی و اسدی گنگرج [۱۸] را معرفی می‌کند و بخش (۳) روش آزادسازی لاگرانژین برای مسأله جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با تابع هدف کمینه‌سازی Makespan را تشریح می‌کند. بخش (۴) به ارزیابی الگوریتم توسعه‌یافته می‌پردازد و در نهایت بخش (۵) مهم‌ترین یافته‌های این تحقیق و زمینه‌های موجود در تحقیقات آینده را مورد بررسی قرار می‌دهد.

## ۲- مدل ریاضی

### ۲-۱ توضیح مسأله

مسأله مورد بررسی در این تحقیق می‌تواند به صورت زیر بیان شود. تعداد  $n$  کار باید بوسیله  $m$  مرحله که به صورت سری قرار دارند فرآیند شوند. هر مرحله  $i$  از  $i$  ماشین موازی غیرمشابه تشکیل شده است. هر کاری مانند  $j$  در مرحله  $i$  بر روی ماشین  $k$  به مدت زمان  $P_{ijk}$  برای فرآیند شدن نیاز دارد. شکست کارها در طول فرآیند کارها مجاز نمی‌باشد و همه کارها در ابتدای فرآیند زمان‌بندی در دسترس می‌باشند. هر ماشین در هر لحظه فقط یک کار را فرآیند می‌کند و هر کار فقط بر روی یک ماشین در هر مرحله فرآیند می‌شود. هدف مسأله کمینه‌کردن حداکثر زمان تکمیل کارها می‌باشد.

کمینه‌سازی makespan توسعه دادند. آنها برای این کار از چند روش ابتکاری برای محاسبه کران بالا و آزادسازی زیرمسأله تک‌ماشین برای محاسبه کران پایین استفاده نمودند. یانگ و همکاران [۷] سه روش ابتکاری مبتنی بر روش‌های تجزیه و جستجوی محلی برای مسأله جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با تابع هدف کمینه‌سازی مجموع دیرکردهای وزن‌دار توسعه دادند. فتاحی و همکاران [۸] یک روش شاخه‌وکران را برای مسأله جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با در نظر گرفتن زمان‌های آماده‌سازی و عملیات مونتاژ معرفی نموده‌اند که تابع هدف در نظر گرفته شده کمینه‌سازی makespan می‌باشد. راینه و همکاران [۹] یک روش شاخه‌وکران را برای مسأله جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر سه‌مرحله‌ای توسعه دادند.

روش شاخه‌وکران و روش‌های ابتکاری دو روشی است که برای حل مسأله جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر بسیار زیاد مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]. برای مسائل واقعی با محیط‌های کاری پیچیده، روش‌های ابتکاری بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد زیرا روش‌های شاخه و کران بسیار زمان‌بر می‌باشند. از طرف دیگر روش‌های ابتکاری نمی‌توانند ضمانت رسیدن به یک جواب مناسب را بدهند. بنابراین لازم است که یک روش مؤثر و کارا برای این مسأله توسعه داده شود. روش آزادسازی لاگرانژین (LR)<sup>۱</sup> یک ابزار قدرتمند برای مسائل بهینه‌سازی پیچیده می‌باشد که می‌تواند یک روش حل مناسب برای مسأله جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با ماشین‌های غیرمشابه باشد [۱۱].

لیو و لوه [۱۲] یک مسأله جریان کارگاهی با در نظر گرفتن فرض یکسان بودن توالی کارها در مراحل مختلف<sup>۲</sup> را مورد بررسی قرار دادند و یک روش آزادسازی لاگرانژین را برای این مسأله با تابع هدف کمینه‌سازی جریمه‌های تأخیرات تولید و فرستادن زود هنگام مواد به داخل خط تولید توسعه دادند.

لوه و هویتومت [۱۳] روش آزادسازی لاگرانژین را برای سه مسأله زمان‌بندی، شامل کارهای تک‌فرآیندی بر روی ماشین‌های مشابه، کارهای چندفرآیندی با محدودیت‌های پیش‌نیازی بر روی ماشین‌های مشابه و کار کارگاهی توسعه دادند.

چنگ، لیاو و هسیه [۱۴] از روش آزادسازی لاگرانژین و رویکرد جریان شبکه برای حل مسأله زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر بدون هزینه‌های آماده‌سازی استفاده نمودند. تابع هدف مسأله کمینه‌کردن مقدار زودکردها و دیرکردها می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد روش ارائه شده می‌تواند جواب‌های نزدیک به بهینه را در مدت زمان معقول ارائه دهد.

ایروهارا [۱۵] از روش آزادسازی لاگرانژین برای حل مسأله زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با در نظر گرفتن انبار میانی محدود استفاده نمود. تابع هدف در نظر گرفته شده برای

4 Dominance Rules

1 Lagrangian Relaxation

2 Unrelated Parallel Machines

3 Permutation

## ۲-۲ مدل

$$W_{ijl} \geq X_{ijk} + X_{ilk} - 1; \quad (7)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; i = 1, 2, \dots, m$$

$$X_{ijk}, Y_{ijl} \in \{0, 1\}; j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R$$

$$i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, S_i \quad (8)$$

$$W_{ijl} \in \{0, 1\}; j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

تابع هدف (۱) به دنبال کمینه نمودن  $C_{max}$  است و محدودیت (۲) بر این نکته تأکید دارد که هر کار می‌تواند فقط بر روی یک ماشین در هر مرحله فرآیند شود. محدودیت (۳) نشان می‌دهد که زمان تکمیل کار  $j$  در مرحله اول بزرگ‌تر یا مساوی مدت زمان فرآیند آن در مرحله اول است. رابطه میان زمان تکمیل کار  $j$  در دو مرحله متوالی در محدودیت (۴) بیان شده است. مجموعه محدودیت‌های (۵) و (۶) نشان‌دهنده رابطه میان دو کار متوالی که بر روی یک ماشین می‌باشد. به عبارت دیگر در یک زمان فقط یکی از این محدودیت‌ها مؤثر است به گونه‌ای که اگر کار  $j$  قبل کار  $l$  فرآیند شود محدودیت (۵) مؤثر است و اگر کار  $l$  قبل کار  $j$  فرآیند شود محدودیت (۶) مؤثر است. محدودیت (۷) نشان می‌دهد که اگر دو کار  $l$  و  $j$  به یک ماشین در مرحله  $i$  تخصیص یابند ( $X_{ijk} + X_{ilk} = 2$ ) مقدار متغیر  $W_{ijl}$  مساوی ۱ خواهد شد. سرانجام مجموعه محدودیت‌های (۸) و (۹) حدود تغییرات متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهد.

## ۳- روش آزادسازی لاگرانژین

روشی که در این تحقیق برای حل مسأله زمانبندی FFS استفاده شده است روش آزادسازی لاگرانژین می‌باشد. با توجه مدل ریاضی ارائه شده برای مسأله زمانبندی در محیط FFS، تنها محدودیتی که رابطه بین دو مرحله را نشان می‌دهد محدودیت شماره (۴) در مدل ریاضی مسأله زمانبندی می‌باشد. بنابراین با آزاد کردن این محدودیت و قرار دادن آن در تابع هدف با ضریب  $u_{ij}$  خواهیم داشت:

$$LR: \text{Min } Z = \max \{C_{mj}\} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^m u_{i-1,j} \left\{ C_{i-1,j} - C_{ij} + \sum_{k=1}^{S_i} P_{ijk} X_{ijk} \right\} \quad (10)$$

$$\text{Constraints } \{2,3,5-9\} \quad (11)$$

$$u_{ij} \geq 0 \quad (12)$$

با توجه به مسأله بالا تمامی اعضای بردار ضرایب لاگرانژین مقادیر غیرمنفی هستند. بنابراین مسأله دوگان لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

این بخش به معرفی مدل ریاضی توسعه یافته توسط ناهوندی و اسدی گنگرج [۱۸] برای مسأله زمانبندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف پذیر پرداخته می‌شود که رابطه میان کارها در مراحل متوالی و در هر مرحله در یک مسأله را نشان می‌دهد. تابع هدف در نظر گرفته شده برای مسأله، کمینه سازی بیشینه طول دوره ساخت یا  $C_{max}$  می‌باشد. نشانه‌هایی که برای نمایش این مدل ریاضی استفاده شده است به شرح زیر می‌باشد:

$j, l$ : اندیس کارها

$i$ : اندیس مراحل

$k$ : اندیس ماشین‌های هر مرحله

$n$ : تعداد کارها

$m$ : تعداد مراحل

$R$ : مجموعه اندیس‌های مورد نیاز برای تعریف متغیرهای تصمیم به گونه‌ای که  $R = \{j, l | j < l\}$

$S_i$ : تعداد ماشین‌های در مرحله  $i$

$P_{ijk}$ : مدت زمان فرآیند کار  $j$  در مرحله  $i$  بر روی ماشین

$M$ : عدد بسیار بزرگ

$C_{ij}$ : زمان تکمیل کار  $j$  در مرحله  $i$

$X_{ijk}$ : اگر کار  $j$  به ماشین  $k$  در مرحله  $i$  تخصیص یابد برابر با ۱ در غیر این صورت ۰.

$Y_{ijl}$ : اگر کار  $l$  قبل از کار  $j$  در مرحله  $i$  فرآیند شود برابر با ۱ در غیر این صورت ۰.

$W_{ijl}$ : اگر کارهای  $l$  و  $j$  در مرحله  $i$  بر روی یک ماشین فرآیند شوند برابر با ۱ در غیر این صورت ۰.

در این قسمت به توضیح اولین مدل ریاضی ارائه شده برای مسأله FFS پرداخته می‌شود. این مدل به شرح زیر می‌باشد:

$$\text{Min } Z = \max \{C_{mj}\} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{S_i} X_{ijk} = 1; j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$C_{1j} \geq \sum_{k=1}^{S_1} P_{1jk} \cdot X_{1jk}; j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$C_{ij} \geq C_{i-1,j} + \sum_{k=1}^{S_i} P_{ijk} \cdot X_{ijk};$$

$$j = 1, 2, \dots, n; i = 2, \dots, m \quad (4)$$

$$C_{ij} + M(1 - Y_{ijl}) \geq C_{il} + \sum_{k=1}^{S_i} P_{ijk} X_{ijk}; \quad (5)$$

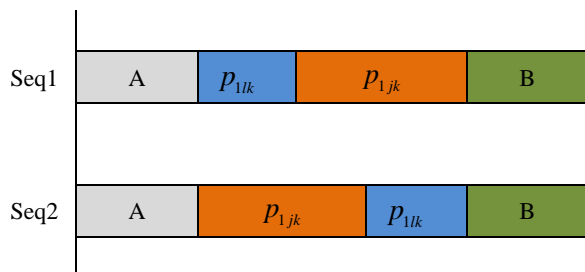
$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; i = 1, 2, \dots, m$$

$$C_{il} + M(1 - W_{ijl} + Y_{ijl}) \geq C_{ij} + \sum_{k=1}^{S_i} P_{ilk} X_{ilk}; \quad (6)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; i = 1, 2, \dots, m$$

۳-۱ رویکرد اول برای حل زیرمسأله‌ها: ساده‌سازی زیرمسأله‌ها

با توجه به نوع زیرمسأله‌ها  $(P_m \parallel \sum W_j C_j)$  یافتن توالی بهینه برای این زیرمسأله‌ها، مخصوصاً با افزایش تعداد کارها و مراحل، بسیار مشکل می‌باشد و زمان حل روش LR را افزایش می‌دهد؛ این در حالی است که در مسائل بزرگ ممکن است رسیدن به جواب بهینه در مدت زمان معقول امکان پذیر نباشد. بنابراین با توسعه دادن تعدادی قاعده و اضافه کردن آنها به عنوان محدودیت به هر یک از زیرمسأله‌ها، سعی می‌شود از پیچیدگی آنها کاسته شود. همانطور که ملاحظه می‌شود برای هر زیرمسأله، دو تصمیم باید به صورت همزمان گرفته شود: تعیین تخصیص کارها به ماشین‌ها و تعیین توالی کارها بر روی هر ماشین. در اینجا برای ساده‌سازی هر چه بیشتر مسأله سعی می‌شود با توسعه تعدادی محدودیت جدید، توالی کارها بر روی هر ماشین به صورت ساده‌تری و با توجه به شرایط خاص مسأله انجام گیرد و فقط تخصیص کارها به ماشین‌ها توسط مدل ریاضی انجام گیرد. این روابط براساس تحقیق سلماسی و همکاران [۱۹] توسعه یافته است. برای انجام این ساده‌سازی‌ها فرض می‌شود دو کار  $l$  و  $z$  به صورت همزمان بر روی یک ماشین مانند  $k$  در مرحله  $i$  فرآیند می‌شوند. دو سناریو مختلف Seq1 و Seq2 برای این دو کار وجود دارد که در شکل زیر دیده می‌شود. در این دو سناریو فرض می‌شود زمان تکمیل کارها تا رسیدن به این دو کار بر روی ماشین  $k$  با هم برابر می‌باشند و فقط ترتیب قرار گرفتن این دو کار با هم متفاوت است.



شکل (۱): سناریوهای مختلف برای دو کار  $l$  و  $z$

الف) ساده‌سازی زیرمسأله  $Sub_1(u)$

همانطور که اشاره شد، فرض کنیم که دو کار  $l$  و  $z$  بر روی ماشین  $k$  در مرحله اول فرآیند می‌شوند و زمان تکمیل وزن دار سناریو Seq1 بیشتر از سناریو Seq2 می‌باشد. بنابراین با فرض بزرگتر بودن این معیار برای Seq1 نسبت به Seq2 داریم:

$$u_{1l}(p_A + p_{1lk}) + u_{1j}(p_A + p_{1lk} + p_{1jk}) \geq u_{1j}(p_A + p_{1jk}) + u_{1l}(p_A + p_{1jk} + p_{1lk})$$

$$\Rightarrow \frac{p_{1lk}}{u_{1l}} \geq \frac{p_{1jk}}{u_{1j}}$$

با در نظر گرفتن متغیرهای  $W_{ij}$  و  $Y_{ij}$  و رابطه بالا می‌توانیم

$$LD : \max_{u_j} \left[ \begin{aligned} & \max_j \{C_{mj}\} + \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^m u_{i-1,j} (C_{i-1,j} - C_{ij}) + \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{s_j} u_{i-1,j} P_{ijk} X_{ijk} \end{aligned} \right] \quad (13)$$

Constraints {2,3,5-9} (14)

$$u_{ij} \geq 0 \quad (15)$$

با توجه نوع تابع هدف و محدودیت‌ها در مسأله آزاد شده (LR)، می‌توان مسأله را به گونه‌هایی بازنویسی کرد که این مسأله به چند زیرمسأله (به تعداد مراحل) تبدیل شود. با توجه به شکل کلی محدودیت‌های مسأله و همچنین تابع هدف، کلیه محدودیت‌ها و همچنین تابع هدف را می‌توان به سه بخش کاملاً مجزا، شامل بخش اول مربوط به مرحله اول، بخش دوم مربوط به مراحل ۲ تا  $m-1$  و بخش سوم مربوط به مرحله آخر دسته‌بندی نمود. این تقسیم‌بندی به گونه‌ایی صورت گرفته است که تابع هدف مرحله اول فقط شامل متغیرهای مرحله اول  $(C_{1j})$ ، تابع هدف مرحله دوم شامل متغیرهای مرحله اول  $(C_{ij})$  و  $(X_{ijk})$  و تابع هدف مرحله سوم شامل متغیرهای مرحله سوم  $(C_{3j})$  و  $(X_{3jk})$  می‌باشد. بنابراین با توجه به توضیحات ارائه شده، تابع هدف هر یک از زیرمسأله‌ها به شکل زیر خواهد بود:

$$SP_i(u) = \sum_{j=1}^n u_{ij} C_{ij}; i = 1 \quad (16)$$

$$SP_i(u) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{(u_{ij} - u_{i-1,j}) C_{ij} + u_{i-1,j} \sum_{k=1}^{s_j} P_{ijk} X_{ijk}}{u_{i-1,j}} \right]; i \neq 1, m \quad (17)$$

$$SP_i(u) = \sum_{j=1}^n \left[ -u_{i-1,j} \left( C_{ij} + \sum_{k=1}^{s_j} P_{ijk} X_{ijk} \right) + \max_j \{C_{mj}\}; i = m \right] \quad (18)$$

Subject to: Constraints {2,3,7-12} (19)

که برای هر یک از زیرمسأله‌ها مقدار  $i$  ثابت و برابر با شماره مرحله می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود با توجه غیرمنفی بودن ضرایب لاگرانژ، ممکن است ضرایب برخی از توابع هدف منفی گردد. برای حل این زیرمسأله‌ها از دو رویکرد ساده‌سازی زیرمسأله‌ها و توسعه قوانین چیرگی استفاده شده است. این رویکردها سعی می‌کنند که توالی کارها را با استفاده از خواص مسأله به صورت ساده‌تری تعیین کنند تا از پیچیدگی زیرمسأله‌ها کاسته شود.

$$\begin{aligned}
 & -u_{m-1,l} [P_A + P_{ilk} + P_{ilk}] - \\
 & u_{m-1,j} [P_A + P_{mlk} + P_{mjk} + P_{mjk}] \\
 & + C_{\max} \geq -u_{m-1,j} [P_A + P_{mjk} + P_{mjk}] \\
 & -u_{m-1,l} [P_A + P_{mjk} + P_{mlk} + P_{mlk}] + C_{\max} \\
 \Rightarrow & \frac{u_{m-1,l}}{P_{mlk}} \geq \frac{u_{m-1,j}}{P_{mjk}}
 \end{aligned}$$

بنابراین دو محدودیت زیر برای زیرمسئله  $Sub_m(u)$  تعریف می‌گردد:

$$Y_{mlj} \geq W_{mlj} \left( \frac{u_{m-1,l}}{P_{mlk}} - \frac{u_{m-1,j}}{P_{mjk}} \right); \quad (24)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; k = 1, 2, \dots, S_1$$

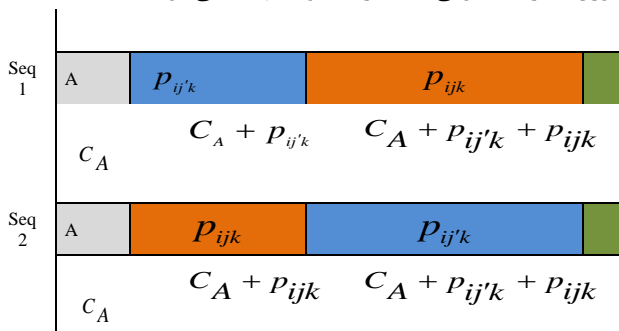
$$Y_{mlj} \leq 1 + W_{mlj} \left( \frac{u_{m-1,l}}{P_{mlk}} - \frac{u_{m-1,j}}{P_{mjk}} \right); \quad (25)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; k = 1, 2, \dots, S_1$$

که مانند دو محدودیت‌های (۲۰) و (۲۱) عمل می‌نمایند.

۲-۳ رویکرد دوم برای حل زیرمسئله‌ها: توسعه قوانین چیرگی رویکرد دوم که برای حل زیرمسئله‌های تولیدشده حاصل از روش LR استفاده از قوانین چیرگی می‌باشد. با توجه به خواص زیرمسئله‌ها و نوع تابع هدف، می‌توان آنها را به شکل ساده‌تری حل نمود. این روابط براساس تحقیق تنگ و همکاران در سال ۲۰۰۵ [۱۱] توسعه یافته است. برای حل این زیرمسئله‌ها ابتدا لم زیر توسعه داده می‌شود:

لم ۱. اگر  $suse_p, suse_n, suse_z$  نشان‌دهنده وزن زیرمجموعه‌ای از کارها باشند که وزن آنها در تابع هدف به ترتیب مثبت، منفی و صفر باشد، در توالی بهینه بر روی هر ماشین، ابتدا کارها با وزن مثبت، سپس کارها با وزن صفر و سپس کارها با وزن منفی قرار می‌گیرند و در داخل هر زیرمجموعه کارها با وزن مثبت و منفی، کارها با توالی WSPT ترتیب بندی می‌شوند و برای کارها با وزن صفر همه توالی‌ها منجر به جواب بهینه می‌شود.



شکل (۲): سناریوهای مختلف برای دو کار  $j$  و  $j'$

اثبات: فرض کنیم در یک ترتیب بهینه (Seq1) حداقل یک کار در زیرمجموعه  $SS_p$  (کار  $j$ ) بعد از یک کار در زیرمجموعه  $suse_n$

توالی کارها را بر روی هر ماشین به صورت ساده‌تری به دست بیاوریم. برای این منظور می‌توانیم روابط زیر تشکیل و در مدل ریاضی  $Sub_1(u)$  قرار دهیم:

$$Y_{ij} \geq W_{ij} \left( \frac{P_{ilk}}{u_{il}} - \frac{P_{ijk}}{u_{ij}} \right); \quad (20)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; k = 1, 2, \dots, S_1$$

$$Y_{ij} \leq 1 + W_{ij} \left( \frac{P_{ilk}}{u_{il}} - \frac{P_{ijk}}{u_{ij}} \right); \quad (21)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R; k = 1, 2, \dots, S_1$$

بنابراین اگر مقدار داخل پرانتز در محدودیت (۲۰) مثبت شود نشان می‌دهد که کار  $j$  باید قبل از کار  $l$  فرآیند شود. بنابراین اگر مقدار متغیر  $W_{ij}$  برابر با ۱ باشد مقدار متغیر  $Y_{ij}$  نیز یک خواهد شد که نشان می‌دهد که در مرحله اول کار  $j$  قبل از کار  $l$  فرایند می‌شود. اما اگر مقدار داخل پرانتز منفی باشد سمت راست محدودیت (۲۱) کمتر از ۱ خواهد شد که سبب می‌شود مقدار متغیر  $Y_{ij}$  مقدار صفر را بگیرد.

(ب) ساده‌سازی زیرمسئله‌های  $Sub_i(u); i = 2, \dots, m-1$

با در نظر گرفتن همین روند برای زیرمسئله‌های  $Sub_2(u)$  تا  $Sub_{m-1}(u)$  و دو سناریوی Seq1 و Seq2 خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 & (u_{il} - u_{i-1,l}) [P_A + P_{ilk}] + u_{i-1,l} P_{ilk} + \\
 & (u_{ij} - u_{i-1,j}) [P_A + P_{ilk} + P_{ijk}] + u_{i-1,j} P_{ijk} \geq \\
 & (u_{ij} - u_{i-1,j}) [P_A + P_{ijk}] + u_{i-1,l} P_{ijk} + \\
 & (u_{il} - u_{i-1,l}) [P_A + P_{ijk} + P_{ilk}] + u_{i-1,l} P_{ilk} \\
 \Rightarrow & \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{P_{ijk}} \geq \frac{u_{il} - u_{i-1,l}}{P_{ilk}}
 \end{aligned}$$

بنابراین بهمانند بالا دو محدودیت زیر برای زیرمسئله‌های  $Sub_2(u)$  تا  $Sub_{m-1}(u)$  تعریف می‌گردد:

$$Y_{ij} \geq W_{ij} \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{P_{ijk}} - \frac{u_{il} - u_{i-1,l}}{P_{ilk}} \right); \quad (22)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R;$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, S_i$$

$$Y_{ij} \leq 1 + W_{ij} \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{P_{ijk}} - \frac{u_{il} - u_{i-1,l}}{P_{ilk}} \right); \quad (23)$$

$$j, l = 1, 2, \dots, n \ \& \ (j, l) \in R;$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, S_i$$

که نحوه عملکرد این دو محدودیت نیاز مشابه محدودیت‌های (۲۰) و (۲۱) می‌باشد.

(ج) ساده‌سازی زیرمسئله  $Sub_m(u)$

مشابه دو قسمت قبل، برای زیرمسئله  $Sub_m(u)$  داریم:

مانند زیرمسأله اول، محیط کاری مربوط به این زیرمسأله ماشین‌های موازی غیرمشابه خواهد بود. اما تابع هدف دارای دو بخش می‌باشد: بخش اول  $\sum_{j=1}^n (u_{ij} - u_{i-1,j}) C_{ij}$  نشان‌دهنده کمینه‌سازی مجموع تابع هدف وزن دار با وزن  $(u_{ij} - u_{i-1,j})$  می‌باشد که وزن آن می‌تواند مقادیر مثبت، منفی و یا صفر را نیز در نظر بگیرد. بخش دوم شامل مجموع حاصل ضرب ضرایب لاگرانژین  $\sum_{j=1}^n u_{i-1,j} \sum_{k=1}^{s_j} P_{ijk} X_{ijk}$  در مدت زمان فرآیند هر یک از کارها بر روی ماشین انتخابی در هر مرحله است. عبارت  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{s_j} P_{ijk} X_{ijk}$  نشان‌دهنده مجموع زمان تکمیل آخرین کار بر روی هر ماشین در هر مرحله است که اگر ضریب زمان تکمیل این کارها  $u_{i-1,j}$  به عبارت اول اضافه شود با توجه به غیرمنفی بودن ضرایب لاگرانژین سبب افزایش وزن هر یک از این کارها در تابع هدف می‌باشد. در نتیجه دو دسته کار در این زیرمسأله وجود دارد که در دسته اول، وزن کارها در تابع هدف برابر با  $u_{ij} - u_{i-1,j}$  است که در انتهای توالی بر روی هر ماشین قرار نمی‌گیرند و برای دسته دوم وزن کارها برابر با  $u_{ij}$  می‌باشد که در انتهای توالی قرار می‌گیرند.

لم ۲. با فرض اینکه کار  $j'$  کاری است که در انتهای توالی بر روی هر ماشین قرار دارد و برای مراحل  $i = 2, \dots, m-1$ ، رابطه زیر بین کار  $j'$  و  $j, j \neq j', j = 1, 2, \dots, n$  کار برقرار باشد:

$$\frac{P_{ijk}}{P_{ij'k}} \leq \frac{u_{ij}}{u_{ij'}} - \frac{u_{i-1,j}}{u_{i-1,j'}} \quad (26)$$

اثبات: با توجه به توضیحات ارائه شده در زیرمسأله ۲، برای آخرین کار در هر توالی، مقدار وزن آن در تابع هدف برابر با  $u_{ij}$  و برای سایر کارها  $u_{ij} - u_{i-1,j}$  می‌باشد. از طرفی با توجه به غیرمنفی بودن ضرایب لاگرانژین و همچنین لم ۱ (در توالی بهینه کارها با ضرایب منفی در انتهای توالی قرار می‌گیرند)، می‌توان نتیجه گرفت که وزن تمامی کارها در تابع هدف مثبت است. بنابراین داریم:

$$\frac{P_{ijk}}{u_{ij} - u_{i-1,j}} \leq \frac{P_{ij'k}}{u_{ij'}} \Rightarrow \frac{u_{ij'}}{u_{ij} - u_{i-1,j}} \leq \quad (27)$$

$$\frac{P_{ij'k}}{P_{ijk}} \Rightarrow \frac{P_{ijk}}{P_{ij'k}} \leq \frac{u_{ij}}{u_{ij'}} - \frac{u_{i-1,j}}{u_{i-1,j'}}$$

ج) زیرمسأله  $Sub_m(u)$

به‌مانند دو زیرمسأله قبلی، محیط کاری این زیرمسأله نیز ماشین‌های موازی غیرمشابه خواهد بود و تابع هدف آن دارای سه بخش می‌باشد. بخش اول  $\sum_{j=1}^n -u_{i-1,j} C_{ij}$  که مجموع وزن دار زمان تکمیل کارها با وزن  $-u_{i-1,j}$  را کمینه می‌کند. بخش دوم که

$(j')$  قرار دارد. با جابجایی دو کار  $j$  و  $j'$  توالی جدید Seq2 تولید خواهد شد؛ حال براساس شکل بالا داریم:

با توجه به توالی کارها مقدار زمان تکمیل کارها برای دو کار  $j$  و  $j'$  برای توالی Seq2 برابر با  $w_j(c_A + p_{ijk}) + w_{j'}(c_A + p_{ij'k} + p_{ij'k})$  و برای Seq1 برابر با  $w_{j'}(c_A + p_{ij'k}) + w_j(c_A + p_{ijk} + p_{ij'k})$  می‌باشد. در نتیجه اختلاف میان این دو زمان تکمیل کارها Seq1 و Seq2 است با  $w_{j'} p_{ij'k} - w_j p_{ij'k}$ . با توجه به مثبت بودن  $w_j$  و منفی بودن  $w_{j'}$  مقدار عبارت  $w_{j'} p_{ij'k} - w_j p_{ij'k}$  منفی خواهد بود که این سبب کاهش مقدار تابع هدف می‌شود که خلاف فرض این است که Seq1 بهینه است. بنابراین در توالی بهینه، کارهایی با وزن مثبت قبل از کارها با وزن منفی قرار می‌گیرند.

به همین روش می‌توان اثبات نمود که در توالی بهینه، کارها در زیرمجموعه  $suse_z$  قبل از کارهای زیرمجموعه  $suse_n$  قرار می‌گیرند.

بخش دوم این اثبات مربوط به توالی کارها در هر یک از زیرمجموعه‌ها است. برای زیرمجموعه  $suse_p$  و با توجه مثبت بودن وزن‌ها، اثبات شده است که قاعده WSPT جواب بهینه را می‌دهد. برای زیرمجموعه  $suse_z$  و با توجه به صفر بودن وزن‌ها، جابجایی کارها هیچ تأثیری بر تابع هدف ندارد. حال به اثبات، قاعده WSPT برای زیرمجموعه  $SS_n$  پرداخته می‌شود. فرض کنیم برای

دو کار  $j$  و  $j'$  داریم:  $\frac{P_{ijk}}{w_j} \geq \frac{P_{ij'k}}{w_{j'}}$ . حال براساس شکل

۲ فرض می‌کنیم که در توالی بهینه (Seq2) کار  $j$  قبل از کار  $j'$  در قرار دارد. حال با جابجایی دو کار  $j$  و  $j'$ ، توالی Seq1 تولید خواهد شد. به‌مانند قسمت قبلی اختلاف بین زمان تکمیل کارها در دو توالی Seq1 و Seq2 برابر است با  $w_{j'} p_{ij'k} - w_j p_{ij'k}$ . با توجه به رابطه

$$\frac{P_{ijk}}{w_j} \geq \frac{P_{ij'k}}{w_{j'}} \quad \text{کاملاً مشخص است که اختلاف}$$

$w_{j'} p_{ij'k} - w_j p_{ij'k}$  مثبت می‌باشد. در نتیجه زمان تکمیل کارها در Seq2 بزرگ‌تر از Seq1 است که این خلاف فرض بهینگی Seq2 می‌باشد.

با توجه به نوع تابع هدف و محدودیت‌های موجود در این بخش به بررسی هر یک از زیرمسأله‌ها پرداخته می‌شود.

الف) زیرمسأله  $Sub_1(u)$

با توجه به نوع تابع هدف مشخص است که  $Sub_1(u)$  تبدیل به مسأله کمینه‌سازی مجموع تابع هدف وزن دار (با وزن  $u_{ij} \geq 0$ ) در محیط ماشین‌های موازی غیرمشابه شده است. بنابراین براساس لم ۱، اگر کارها بر روی هر ماشین با الگوی WSPT مرتب گردند مقدار تابع هدف کمینه خواهد شد.

ب) زیرمسأله  $Sub_i(u); i = 2, \dots, m-1$

برای حل گونه‌هایی از مسائل دوگان لاگرانژ استفاده می‌کند که نیاز به حل بهینه همه زیرمسئله‌ها دارند به گونه‌ای که یک‌جهت زیرگرایان به دست می‌آید. این الگوریتم به شرح ذیل است:

۱. تعیین مقادیر اولیه برای پارامترهای

$$0 < \pi < 2$$

$$LB = -\infty$$

$$UB = \infty$$

$$NLI = 0 \text{ (تعداد مراحل لاگرانژ)}$$

۲. معیارهای اتمام الگوریتم: تعداد مراحل (NLI=50)، زمان

حل (CPU Time=600 Sec.)،  $UB - LB = 0$  و

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (G_{ij}^t)^2 = 0$$

۳. تعیین مقدار اولیه برای  $u_{ij}$  ها، حل زیرمسئله‌ها با استفاده

لم‌های توسعه داده شده و محاسبه کران پایین با استفاده از

رابطه LD (رابطه ۱۳)

۴. تعیین مقادیر  $x_{ijk}$  ها در هر مرحله با استفاده از حل

زیرمسئله‌ها (براساس لم‌ها یا محدودیت‌های توسعه یافته)

۵. موجه کردن جواب هر یک از زیرمسئله‌ها محاسبه کران

بالا (در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود).

۶. محاسبه زیرگرایان براساس رابطه  $G_{ij}^t = C_{i-1,j} +$

$$C_{ij} + \sum_{k=1}^{S_i} P_{ijk} X_{ijk}$$

۷. محاسبه اندازه گام با استفاده از رابطه

$$T = \frac{\pi(UB - LB)}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (G_{ij}^t)^2}$$

۸. به‌روزرسانی ضرایب لاگرانژین با استفاده از رابطه

$$u_{ij}^{t+1} = \max(0, u_{ij}^t + TG_{ij}^t)$$

۹. در صورتی که یکی از معیارهای توقف برآورده نشده است به

گام (۲) بروید؛ در غیر این صورت به مرحله (۱۰) بروید.

۱۰. توقف.

با توجه به اینکه در حل مسائل به روش آزادسازی لاگرانژین،

ممکن است جواب‌های بدست آمده از زیرمسئله‌ها، تعدادی از

محدودیت‌های آزاد شده را نقض کنند، بنابراین لازم است با استفاده

از یک رویکرد ابتکاری یک جواب شدنی را با استفاده از این جواب

ساخت. جزئیات این الگوریتم ابتکاری به شرح ذیل می‌باشد:

• جواب‌های به‌دست آمده از حل زیرمسئله‌ها را به‌عنوان

زمانبندی اولیه در نظر بگیرید.

به‌مانند قسمت قبل مجموع زمان تکمیل آخرین کار بر روی هر ماشین را نشان می‌دهد که این سبب دو برابر شدن وزن این کارها در تابع هدف می‌شود و قسمت سوم زمان تکمیل آخرین کاری را نشان می‌دهد که دارای بیشترین مقدار زمان تکمیل را دارا می‌باشد. در نتیجه کارها در این زیرمسئله به سه دسته تقسیم می‌شوند: دسته اول کارهایی هستند که در انتهای توالی قرار نمی‌گیرند و وزن آنها در تابع هدف برابر با  $-u_{i-1,j}$  می‌باشد. دسته دو کارهایی هستند که در انتهای توالی بر روی هر ماشین قرار دارند و وزن آنها در تابع هدف برابر با  $-2u_{i-1,j}$  است و سرانجام دسته سوم کاری است که مقدار بیشترین زمان فرآیند را دارد و وزن آن در تابع هدف برابر با  $1 - 2u_{i-1,j}$  می‌باشد. بنابراین برای این زیرمسئله ترتیب WSPT توانایی بهینه نمودن توالی کارها بر روی هر ماشین را دارا می‌باشد.

لم ۳. با فرض اینکه کار  $j'$  کاری است که در انتهای توالی بر روی هر ماشین قرار دارد و برای مرحله  $i = m$ ، رابطه زیر بین کارهای  $j'$  و  $j \neq j', j = 1, 2, \dots, n$  برقرار باشد:

$$\frac{P_{ijk}}{P_{ijk}} \leq 2 * \frac{u_{ij}}{u_{ij'}} \quad (28)$$

اثبات: با توجه به توضیحات بالا، کارهایی که در آخر توالی قرار

می‌گیرند دارای وزن  $-2u_{i-1,j}$  و سایر کارها دارای وزن  $-u_{i-1,j}$  می‌باشند. بنابراین با توجه به قاعده WSPT داریم:

$$\frac{P_{ijk}}{-u_{ij}} \leq \frac{P_{ij'k}}{-2u_{ij'}} \Rightarrow \frac{P_{ijk}}{P_{ij'k}} \leq 2 * \frac{u_{ij'}}{u_{ij}} \quad (29)$$

لم ۴. با فرض اینکه کار  $j''$  کاری است بیشترین مقدار زمان تکمیل را دارد و کارهای  $j'$  که در انتهای توالی بر روی هر ماشین قرار دارد و برای مرحله  $i = m$ ، رابطه زیر بین کارهای  $j''$  و  $j'$  برقرار باشد:

$$\frac{P_{ijk}}{-2u_{ij'}} \leq \frac{P_{ij''k}}{1 - 2u_{ij''}} \quad (30)$$

اثبات: توجه به توضیحات بالا، کارهایی که در آخر توالی قرار می-

گیرند دارای وزن  $-2u_{i-1,j'}$  و کاری که دارای بیشترین زمان

تکمیل را دارد دارای وزن  $1 - 2u_{i-1,j'}$  می‌باشند. بنابراین با توجه

به قاعده WSPT داریم:

$$\frac{P_{ijk}}{-2u_{ij'}} \leq \frac{P_{ij''k}}{1 - 2u_{ij''}} \Rightarrow 2u_{ij'} P_{ij''k} - P_{ij''k} \geq \quad (31)$$

$$2u_{ij'} P_{ij''k} \Rightarrow \frac{P_{ij''k}}{P_{ij''k}} \leq \frac{u_{ij''}}{u_{ij'}} - \frac{1}{2u_{ij'}}$$

۳-۳ ارزیابی کران پایین به‌دست آمده از روش آزادسازی

لاگرانژین

برای حل مسئله FFS با توجه به رابطه (۱۳)، از روش زیرگرایان

استفاده شده است. همان‌طور که می‌دانیم این روش به‌صورت عمومی

محاسبات می‌باشد. رابطه محاسبه درصد فاصله کران بالا از کران پایین به صورت زیر می‌باشد:

$$DG = \frac{UB - LB}{LB} * 100 \quad (۳۲)$$

جدول (۱): فاکتورهای مسأله برای تولید مسائل آزمایشی

فاکتورهای آزمایشی	مقدار
تعداد کارها	U[3,5]
تعداد مراحل	U[2,4]
تعداد ماشین‌ها در هر مرحله	U[1,3]
مدت زمان فرآیند کارها	U[5,100]

همان‌طور که مشاهده می‌شود مسائل آزمایشی دارای چهار فاکتور تعداد کارها، تعداد مراحل، تعداد ماشین‌ها در هر مرحله و مدت زمان فرآیند کارها در هر مرحله می‌باشند. برای حل مسائل ارائه‌شده، از دو نرم‌افزار Lingo 9.0 و Matlab استفاده شده است.

جدول ۲، دو رویکرد برای حل مسأله به روش آزادسازی لاگرانژین شامل ساده‌سازی زیرمسأله‌ها ( $LR_{SP}$ ) و توسعه قوانین چیرگی ( $LR_{SP}$ ) را با هم مقایسه کرده است. برای انجام این مقایسه از سه معیار مقایسه شامل متوسط درصد فاصله کران بالا از کران پایین (DG)، تعداد جواب‌های بهینه (NOS) و متوسط مدت زمان محاسبات (CPU Time) استفاده شده است. هر یک از مسائل آزمایشی ۱۰ بار با مدت زمان فرآیند مختلف اجرا شده است که متوسط این سه معیار برای دو رویکرد به شرح ذیل است:

- با استفاده ترتیب صعودی کارها براساس رابطه  $\Omega \in \{0, 1\}$  و  $C_{1j}e^{\sum_{i=1}^m \bar{p}_{ij}}$  یک توالی برای تمامی مراحل ایجاد نمایید.
- برای تخصیص کارها به ماشین‌ها، از بین تمامی ماشین‌های آزاد و یا در حال کار، ماشینی را انتخاب نمایید که در صورت تخصیص به آن ماشین کمترین زمان  $C_{max}$  به وجود آید.
- توقف.

#### ۴- ارزیابی الگوریتم

در این بخش به ارزیابی دو رویکرد ارائه‌شده برای حل مسأله زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با ماشین‌های موازی غیرمشابه پرداخته می‌شود. برای این منظور ۲۰ سری مسأله آزمایشی با ابعاد مختلف براساس فاکتورهای آزمایشی جدول ۱ تولید شده است. به خاطر خاصیت NP-complete بودن مسأله زمان‌بندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر، رسیدن به جواب بهینه برای تمامی مسائل موجود در این زمینه امکان‌پذیر نمی‌باشد یا از نظر زمانی توجیه‌پذیر نمی‌باشد؛ در نتیجه این مقایسه فقط برای مسائل با اندازه کوچک انجام شده است. برای مسائل آزمایشی مطرح‌شده سه معیار مقایسه استفاده شده است که شامل درصد فاصله کران بالا از کران پایین، تعداد جواب‌های بهینه در ۱۰ تکرار و مدت زمان

جدول (۲): ارزیابی جواب‌های به‌دست‌آمده از روش آزادسازی لاگرانژین

مسئله	تعداد کارها	تعداد مراحل	تعداد ماشین‌های هر مرحله	$LR_{DR}$			$LR_{SP}$		
				DG	CPU Time (Sec.)	NOS	DG	CPU Time (Sec.)	NOS
1	4	3	2 3 2	2.9%	38	5	2.0%	24	5
2	4	3	3 2 3	3.7%	74	3	3.1%	56	4
3	4	3	2 2 2	2.6%	132	4	2.5%	109	4
4	5	4	2 2 1 2	2.2%	214	5	1.8%	183	6
5	3	4	1 1 2 2	1.8%	344	6	1.3%	291	7
6	5	3	3 2 2	3.7%	71	3	3.4%	54	4
7	3	3	2 2 3	2.3%	111	4	2.1%	101	5
8	5	2	1 3	1.9%	206	5	1.3%	170	6
9	4	3	1 1 3	1.7%	393	6	1.9%	325	6
10	5	2	2 2	2.7%	516	4	2.3%	461	4
11	4	3	3 2 2	3.3%	54	3	2.8%	46	3
12	3	3	3 3 2	2.4%	83	5	2.4%	69	4
13	4	3	2 2 1	2.3%	176	6	1.8%	153	7
14	4	2	2 1	1.5%	233	7	1.4%	228	7
15	4	4	3 2 3 2	3.9%	394	2	3.8%	367	3
16	3	3	3 2 2	2.9%	91	4	2.6%	85	5
17	4	2	2 2	2.7%	131	5	2.3%	128	6
18	3	3	3 3 3	3.9%	227	2	3.1%	206	2
19	4	2	3 1	1.6%	284	6	1.4%	266	7
20	4	4	2 2 2 1	2.6%	412	5	2.4%	395	4
<b>Average</b>				<b>2.7%</b>	<b>209</b>	<b>4.5</b>	<b>2.3%</b>	<b>186</b>	<b>5.0</b>



- European Journal of Operational Research, 178:686–698.
- [2] Shahvaria, O., Salmasi, N., Logendran, L., Abbasi, B. (2012). An efficient tabu search algorithm for flexible flow shop sequence-dependent group scheduling problems, International Journal of Production Research, 50(15): 4237–4254.
- [3] Wittrock, R.J. (1988). An Adaptable Scheduling Algorithm for Flexible Flow Lines. Operations Research, 36: 445–453.
- [4] Agnetis, L., Pacifici, A., Rossi, F., Lucertini, M., Nicoletti, S., Nicolo, F. (1997). Scheduling of Flexible Flow Shop in an Automobile Assembly Plant. European Journal of Operation Research, 97(2):348–362.
- [5] Adler, L., Fraiman, N., Kobacker, E., Pinedo, M., Plotnicoff, J.C., Wu, T.P. (1993). BPSS: a Scheduling Support System for the Packaging Industry. Operations Research, 41: 641–648.
- [6] Moursli, O., Pochet, Y. (2000). A branch-and-bound algorithm for the hybrid flowshop, International Journal of Production Economics, 64: 113–25.
- [7] Yang Y., Kreipl, S., Pinedo, M. (2000). Heuristics for minimizing total weighted tardiness in flexible flowshops, Journal of Scheduling, 3: 71–88.
- [8] Fattahi, P., Hosseini, S.M.H., Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R. (2014). A branch and bound algorithm for hybrid flow shop scheduling problem with setup time and assembly operations, Applied Mathematical Modelling, 38: 119–134;
- [9] Riane, F., Artibas, A., Elmaghraby, S.E. (1998). A hybrid three stage flow shop problem: efficient heuristics to minimize makespan, European Journal of Operations Research, 109: 321–329.
- [10] Linn, R., Zhang, W. (1999) Hybrid flow shop scheduling: a survey, Computers and Industrial Engineering, 37: 57–61.
- [11] Tang, L., Xuan, H., Liu, J. (2006). A new Lagrangian relaxation algorithm for hybrid flowshop scheduling to minimize total weighted completion time, Computers & Operations Research 33: 3344–3359
- [12] Liu, G.D., Luh, P.B. (1997). Scheduling permutation flow shops using the Lagrangian

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود روش آزادسازی لاگرانژین با رویکرد ساده‌سازی زیرمسئله‌ها (با متوسط ۲.۳٪) دارای درصد فاصله کران بالا از کران پایین کمتری نسبت به روش توسعه قوانین چیرگی (با متوسط ۲.۷٪) می‌باشد. برای بررسی بیشتر این دو روش را در سطح اطمینان ۵٪ و با آزمون t-student مقایسه می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که p-value این مقایسه برابر با ۰.۱۴۶ می‌باشد که نشان می‌دهد دو روش در این سطح اطمینان تفاوت معناداری با هم ندارند. در معیار دوم مقایسه یعنی تعداد جواب‌های بهینه (NOS)، دو معیار نیز تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند که نتایج نشان می‌دهد p-value این مقایسه با استفاده از آزمون t-student برابر با 0.333 می‌باشد. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۲، در معیار دوم مقایسه یعنی مدت زمان محاسبات، روش  $LR_{SP}$  دارای وضعیت بهتری نسبت به روش  $LR_{DR}$  می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت این دو رویکرد از نظر کیفیت حل تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند اما رویکرد  $LR_{SP}$  در مدت زمان سریع‌تری می‌تواند به جواب برسد.

##### ۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این تحقیق مسئله زمانبندی در محیط جریان کارگاهی انعطاف‌پذیر با ماشین‌های موازی غیرمشابه با تابع هدف کمینه‌سازی حداکثر زمان تکمیل کارها مورد بررسی قرار گرفت. برای حل این مسئله از روش آزادسازی لاگرانژین استفاده شده است که برای حل زیرمسئله‌های تولیدشده با استفاده از این روش، از دو رویکرد ساده‌سازی زیرمسئله‌ها و توسعه قوانین چیرگی بهره جسته است. برای مقایسه این دو رویکرد از دو معیار درصد فاصله کران بالا از کران پایین و مدت زمان محاسبات استفاده شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که این دو روش از نظر کیفیت حل تفاوت معناداری (در سطح اطمینان ۵٪) با یکدیگر ندارند اما رویکرد ساده‌سازی زیرمسئله‌ها در مدت زمان سریع‌تری به جواب می‌رسد.

تحقیقات آینده در این زمینه می‌تواند بر روی توسعه روش‌های دیگر و سریع‌تر برای تولید جواب‌های امکان‌پذیر، مقایسه روش‌های ارائه‌شده با سایر روش‌های دقیق، ابتکاری و فراابتکاری متمرکز شود. همچنین استفاده از این رویکردها در حل سایر مسائل زمانبندی نیز می‌تواند از زمینه‌های تحقیقاتی آتی پیشنهادی باشد.

##### ۶- مراجع

- [1] Quadt, D., Kuhn, H. (2007). A taxonomy of flexible flow line scheduling procedures.

- relaxation technique. *Annals of Operations Research*, 70: 171–89.
- [13] Luh, P.B., Hoitomt, D.J. (1993). Scheduling of manufacturing systems using the Lagrangian relaxation technique, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 38(7): 1066–1079.
- [14] Chang, S.C., Liao, D.Y., Hsieh, F.S (1991). Scheduling flexible flow shops of no setup cost by a lagrangian relaxation and network flow approach, *Interactional Conference on Robotics and Automation*.
- [15] Irohara, T. (2010). Lagrangian relaxation algorithms for hybrid flow-shop scheduling problems with limited buffers. *Biomedical Soft Computing and Human Sciences*, 15(1): 21-28.
- [16] Sun, X., Noble, J.S. (1999). An Approach to Job Shop Scheduling with Sequence-Dependent Setups. *Journal of Manufacturing Systems*, 18(6).
- [17] Liu, C.Y., Chang, S.C. (2000). Scheduling Flexible Flow Shops with Sequence-Dependent Setup Effects, *IEEE transaction on robotics and automation*, 16(4): 408-419.
- [18] Nahavandi, N., Asadi Gangraj, E. (2014). A New Lower Bound for Flexible Flow Shop Problem with unrelated parallel machines, *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, 25(1): 65-70.
- [19] Salmasi, N., Logendran, L., Skandari, M.R. (2010). Total flow time minimization in a flowshop sequence-dependent group scheduling problem, *Computers & Operations Research* 37: 199 – 212.



## Developing a Lagrangian Relaxation Method for Flexible Flowshop Scheduling Problem

E. Asadi Gangraj<sup>1,\*</sup>, N. Nahavandi<sup>2</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Babol University of Technology, Babol, Iran.
2. Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

### ARTICLE INFO

#### **Article history:**

Received 10 June 2015

Accepted 26 December 2016

#### **Keywords:**

Flexible Flow Shop  
Makespan  
Lagrangian Relaxation  
Dominance Rules

### ABSTRACT

Flexible flow shop scheduling problem (FFS) with unrelated parallel machines contains sequencing in flow shop where, at any stage, there exists one or more unrelated parallel machines. The objective consists of minimizing the maximum completion time. A new Lagrangian relaxation (LR) method is developed to solve the candidate problem. To solve the sub-problems in LR, we use two approaches such as, simplicity of sub-problems and dominance rules. The results show that the both approaches can achieve the near-optimal solution in reasonable time; but there is no significant difference between them. On the other side, simplicity of sub-problems can achieve the solution in reasonable time.

\* Corresponding author. Ebrahim Asadi Gangraj  
Tel.: 011-3234205; E-mail addresses: [e.asadi@nit.ac.ir](mailto:e.asadi@nit.ac.ir)