



## تخمین نقطه‌ی تغییر پله‌ای در پایش پروفایل‌های خطی ساده‌ی خودهمبسته با استفاده از روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی

حمیدرضا میربیک<sup>۱</sup>، رضا برادران کاظم‌زاده<sup>۲</sup>، امیرحسین امیری<sup>۳\*</sup>

۱. کارشناسی ارشد مهندسی صنایع؛ دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲. دانشیار مهندسی صنایع؛ دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳. دانشیار مهندسی صنایع؛ دانشگاه شاهد، تهران

### خلاصه

در بیشتر تحقیقات صورت گرفته در حوزه‌ی پایش پروفایل‌ها، فرض شده است که مشاهدات درون پروفایل‌ها از یکدیگر مستقل هستند، در صورتی که در بسیاری از کاربردهای واقعی به دلیل نزدیک شدن نمونه‌گیری‌ها از لحاظ زمانی استقلال بین مشاهدات نقض می‌شود. از طرف دیگر، معمولاً زمان واقعی تغییر در فرآیند (نقطه‌ی تغییر) با زمانی که نمودارهای کنترل هشدار مبنی بر خارج از کنترل بودن فرآیند را اعلام می‌کنند، متفاوت است. پیدا کردن نقطه‌ی تغییر در فرآیند باعث صرفه جویی زمان و هزینه در پیدا کردن علل ریشه‌ای خروج فرآیند از حالت تحت کنترل می‌شود. در این مقاله به‌طور خاص فرض می‌شود که کیفیت فرآیند با استفاده از یک پروفایل خطی ساده خودهمبسته از نوع  $AR(1)$  مدل می‌شود. سپس نقطه‌ی واقعی تغییر در فرآیند بعد از دریافت هشدار از نمودار کنترل  $T^2$  هتلینگ، طراحی شده در فاز ۲، با استفاده از دو روش ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی محاسبه می‌شود و عملکرد دو روش با استفاده از شبیه‌سازی مقایسه می‌شود. در نهایت کاربرد روش‌های پیشنهادی در قالب یک مطالعه‌ی موردی نشان داده می‌شود.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۳/۱۰/۱۶

پذیرش ۱۳۹۵/۰۲/۲۲

کلمات کلیدی:

پروفایل خطی ساده

نقطه‌ی تغییر

خود همبستگی

خوشه‌بندی

ماکزیمم درست‌نمایی

### ۱- مقدمه

در بسیاری از کاربردهای کنترل فرآیند آماری، کیفیت یک محصول یا فرآیند به‌وسیله ارتباط بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل مشخص می‌شود که به این رابطه پروفایل گفته می‌شود. در صورتی که تعداد متغیرهای مستقل یکی باشد، رابطه‌ی پروفایل، به یک رابطه خطی ساده تبدیل می‌شود که به دلیل سادگی و کاربردهای فراوانی که بخصوص در بحث کالیبراسیون دارند بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

پایش پروفایل‌ها در دو فاز ۱ و ۲ صورت می‌گیرد. هدف از تحلیل فاز ۱، ارزیابی پایداری فرآیند و تخمین پارامترهای پروفایل تحت

کنترل می‌باشد. در فاز ۲، به دنبال کشف هر چه سریعتر شیف و روند در پارامترهای فرآیند می‌باشیم.

نویسندگان متعددی پایش پروفایل‌ها در دو فاز ۱ و ۲ را مورد بررسی قرار داده‌اند. از جمله تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌توان به کنگ و آلباین [۱]، محمود و وودال [۲] و استور و بریل [۳] در فاز ۱ و زوو و همکاران [۴]، کاظم‌زاده و همکاران [۵] و امیری و همکاران [۶]، در فاز ۲ اشاره نمود. در اغلب مطالعات انجام شده بر روی پروفایل‌ها، فرض شده که باقیمانده‌ها با یکدیگر ناهمبسته هستند. این فرض اغلب در عمل نقض می‌شود و در نتیجه به غیرکاربردی شدن این مطالعات می‌انجامد. سلیمانی و همکاران [۷]، نشان دادند که مقادیر مختلف ضریب خودهمبستگی در مدل منجر به کاهش محسوس تخمین واریانس نسبت به واریانس واقعی فرآیند می‌شود. برای رفع این مشکل، آنها از یک روش تبدیل برای از بین

\* نویسنده مسئول: امیرحسین امیری

تلفن: ۰۲۱-۵۱۲۱۲۰۶۵، پست الکترونیک: amiri@shahed.ac.ir

پارامترهای پروفایل‌های گاما را ارائه کردند. همچنین سوگندی و امیری [۲۰]، تخمین زنده یکنوا را برای میانگین متغیرهای پاسخ پروفایل‌های خطی تعمیم‌یافته توسعه دادند.

تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های خودهمبسته تنها توسط کرامت‌پور و همکاران [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته است. آنها با استفاده از سه روش  $GLT/R$ ،  $EWMA$  و آماره‌ی  $T^2$ ، بعد از حذف اثر خودهمبستگی توسط روش تبدیل سلیمانی و همکاران [۷]، پروفایل‌های چندجمله‌ای را پایش کردند و با استفاده از روش ماکزیمم درست‌نمایی نقطه‌ی تغییر در فرآیند را شناسایی کردند.

با توجه به مزایای فراوان تخمین نقطه‌ی تغییر از جمله محدود کردن بازه زمانی پیدا کردن سریع‌تر انحراف با دلیل و صرفه‌جویی در زمان و هزینه و همچنین کاربردهای فراوانی که پروفایل‌های خطی ساده خودهمبسته در صنایع مختلف از جمله صنعت باغداری (مثال درخت سیب در مطالعه موردی مقاله حاضر) دارند، بکار بردن تخمین زنده‌هایی با صحت و دقت بالا برای تخمین نقطه تغییر در پروفایل‌های خطی ساده خودهمبسته، دارای اهمیت می‌باشد. به همین منظور، در این مقاله، مسأله‌ی شناسایی نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های خطی ساده‌ی خودهمبسته با ساختار همبستگی اتورگرسیو مرتبه‌ی اول مورد توجه قرار می‌گیرد. برای شناسایی نقطه‌ی تغییر از دو روش ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی استفاده می‌شود. این دو روش برای تخمین نقطه‌ی تغییر در فرآیندهای مختلف، توسط محققان متعددی مورد استفاده قرار گرفته است و نتایج به دست آمده از تحقیقات آنها نشان از کارایی بالای این روش‌ها در به دست آوردن تخمین‌های دقیق دارد. در نهایت، نتایج، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه می‌شوند.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش دوم، مسأله مورد بررسی مدل‌سازی شده و مفروضات مربوطه بیان شده است. در بخش سوم، روش پایش پروفایل‌های خطی ساده خودهمبسته اتورگرسیو مرتبه‌ی اول ارائه شده است. در بخش چهارم، روش‌های پیشنهادی برای تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های خطی ساده خودهمبسته اتورگرسیو مرتبه‌ی اول شامل روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی ارائه شده است. در بخش پنجم با استفاده از یک مثال عددی به مقایسه‌ی صحت و دقت روش‌های پیشنهادی پرداخته شده است. کاربرد روش‌های پیشنهادی در قالب یک مطالعه‌ی موردی در بخش ششم توصیف شده است. بخش هفتم بخش نهایی و نتیجه‌گیری می‌باشد.

## ۲- مدل‌سازی و بیان مفروضات

فرض می‌کنیم که برای  $n$  آزمین نمونه‌ی جمع‌آوری شده در طول زمان، مشاهدات به صورت  $(x_i, y_{ij}) \quad i=1, 2, \dots, n$  می‌باشند. وقتی که فرآیند تحت کنترل آماری است ارتباط بین متغیر پاسخ و متغیر مستقل به صورت روابط (۱) و (۲) می‌باشد:

بردن خودهمبستگی درون مشاهدات استفاده کردند و روش‌هایی مبتنی بر باقیمانده‌ها برای پایش پروفایل‌های خودهمبسته اتورگرسیو مرتبه‌ی اول ارائه دادند و عملکرد روش‌های پیشنهادی را در فاز ۲، با معیار متوسط طول دنباله مقایسه کردند. جنسن و همکاران [۸]، به‌منظور پایش پروفایل‌های خطی خودهمبسته از روش مدل ترکیبی خطی ( $LMM$ ) استفاده نمودند. آن‌ها نتایج را با روش حداقل مربعات ( $LS$ ) مقایسه نمودند و فهمیدند که وقتی داده‌ها نامتقارن هستند روش  $LMM$  عملکرد بهتری را نسبت به روش  $LS$  نشان می‌دهد. نورالسنا و همکاران [۹]، سه روش مختلف را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲، زمانی که خودهمبستگی بین پروفایل‌های خطی ساده وجود دارد، پیشنهاد کردند.

یکی از مسائلی که در کنترل هر فرآیندی از جمله پروفایل‌ها مهم می‌باشد شناخت زمان واقعی تغییر در فرآیند است. زیرا با دانستن این زمان می‌توانیم به‌راحتی با صرفه‌جویی بسیاری در زمان و هزینه، علت خارج شدن فرآیند از کنترل را متوجه شویم و با رفع مشکلات ایجاد شده در فرآیند، آن را به حالت تحت کنترل برگردانیم. به این زمان واقعی تغییر در فرآیند، نقطه‌ی تغییر می‌گویند. به‌منظور تخمین نقطه‌ی تغییر روش‌های مختلفی توسط محققان ارائه شده است که از جمله می‌توان به روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی اشاره کرد. شرفی و همکاران [۱۰]، تخمین نقطه‌ی تغییر تدریجی در پروفایل‌های باینری را ارائه دادند و عملکرد روش پیشنهادی را با استفاده از شبیه‌سازی تأیید کردند. زند و همکاران [۱۱]، در حوزه‌ی پروفایل‌های لجستیک، نقطه‌ی تغییر پله‌ای را در فاز ۱ محاسبه کردند. آن‌ها با ایجاد شیفت پله‌ای در پارامترها، با استفاده از دو روش نسبت درست‌نمایی و خوشه‌بندی نقطه‌ی تغییر را به دست آوردند. نتایج شبیه‌سازی کارایی هر دو روش را تأیید نمود. اللهیاری و امیری [۱۲]، با استفاده از روش خوشه‌بندی، یک تخمین زنده برای تخمین نقطه‌ی تغییر در فرآیندهای چند متغیره با توزیع نرمال چند متغیره برای مشاهدات، ارائه نمودند. آنها نتایج را با روش ماکزیمم درست‌نمایی مقایسه کردند و نتیجه گرفتند که روش خوشه‌بندی برای شیفت‌های کوچک بهتر از روش ماکزیمم درست‌نمایی عمل می‌کند و نتایج بهتری به دست آوردند. محمود و همکاران [۱۳]، یک رویکرد نقطه‌ی تغییر را برای کنترل پارامترهای رگرسیونی، در فاز ۱ پروفایل‌های خطی ساده پیشنهاد کردند. کاظم‌زاده و همکاران [۱۴]، یک تخمین زنده ماکزیمم درست‌نمایی را برای تخمین نقطه‌ی تغییر پله‌ای و تدریجی در پارامترهای رگرسیونی پروفایل‌های خطی چند متغیره توسعه دادند. همچنین کاظم‌زاده و همکاران [۱۵ و ۱۶]، به ترتیب تخمین زنده‌های نقطه تغییر یکنوا و بی‌نظم را در میانگین متغیرهای پاسخ پروفایل‌های خطی چند متغیره توسعه دادند. شرفی و همکاران [۱۷]، یک تخمین زنده ماکزیمم درست‌نمایی برای تخمین نقطه‌ی تغییر پله‌ای روی پارامترهای رگرسیونی پواسون پیشنهاد دادند. سوگندی و امیری [۱۸ و ۱۹]، تخمین زنده‌های نقطه تغییر پله‌ای و تدریجی در

در حالی که:

$$A'_0 = A_0(1 - \rho), \quad (9)$$

$$A'_1 = A_1. \quad (10)$$

بنابراین به کمک متغیرهای تبدیل یافته  $x'_i, y'_{ij}$  یک مدل پروفایل خطی ساده استاندارد با باقیمانده‌های مستقل حاصل شده است. این بدان معنی است که روش حداقل مربعات معمول، برای تخمین پارامترهای مدل قابل استفاده است.

### ۳- روش پایش پروفایل‌ها

برای پایش پروفایل‌ها، از نمودار کنترلی  $T^2$  پیشنهادی کنگ و آلباین [۱] استفاده می‌شود. بخاطر کاهش اثر خودهمبستگی که بین عبارات خطای درون هر پروفایل وجود دارد، شیب و عرض از مبدا در مدل اصلی، با مقدارهای تبدیل یافته در رابطه‌ی (۷) جایگزین می‌شوند. در نتیجه، آماره‌ی  $T^2$  بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$T_j^2 = B^T \Sigma^{-1} B, \quad (11)$$

که در رابطه‌ی (۱۱)،  $B$  و  $\Sigma$  بصورت روابط (۱۲) و (۱۳) مشخص می‌شوند:

$$B = ([\hat{A}'_{0j} \hat{A}'_{1j}] - [A'_0 \ A'_1]), \quad (12)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 \left( \frac{1}{n-1} + \frac{\bar{x}'^2}{s_{x'x'}} \right) & -\sigma^2 \frac{\bar{x}'}{s_{x'x'}} \\ -\sigma^2 \frac{\bar{x}'}{s_{x'x'}} & \frac{\sigma^2}{s_{x'x'}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

که  $\Sigma$  ماتریس کوواریانس و  $s_{x'x'}$  مجموع مربعات خطای متغیرهای مستقل تبدیل یافته می‌باشد. وقتی که فرآیند تحت کنترل آماری است،  $T_j^2$  از یک توزیع مربع کای مرکزی با دو درجه‌ی آزادی تبعیت می‌کند. از اینرو، حد بالای کنترل برای نمودار  $UCL = \chi^2_{2,\alpha}$  است، که در آن  $\chi^2_{2,\alpha}$  مقدار  $(1 - \alpha) \times 100\%$  از توزیع مربع کای با دو درجه‌ی آزادی را نشان می‌دهد.

### ۴- روش‌های پیشنهادی تخمین نقطه‌ی تغییر

در این بخش دو روش ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی برای تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل خطی ساده‌ی خودهمبسته اتورگرسیو مرتبه‌ی اول ارائه می‌شود:

#### ۴-۱- روش ماکزیمم درست‌نمایی (MLE)

در این روش، برای نوشتن تابع درست‌نمایی ابتدا باید توزیع  $y'_{ij}$  را بدست آوریم. با توجه به نرمال بودن توزیع  $u_{ij}$  ها، می‌توان نتیجه گرفت که  $y'_{ij}$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $a'_0 + a'_1 x'_i$  و واریانس  $\sigma^2$  است. یعنی تابع چگالی احتمال مشاهدات بصورت رابطه‌ی (۱۴) می‌باشد:

$$y_{ij} = A_0 + A_1 x_i + \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \rho \varepsilon_{(i-1)j} + u_{ij}. \quad (2)$$

که در روابط (۱) و (۲)،  $\varepsilon_{ij}$  ها خطای تصادفی خودهمبسته با ساختار  $AR(1)$  را نشان می‌دهند،  $u_{ij}$  ها نیز متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال  $u_{ij} \sim NI(0, \sigma^2)$  هستند. همچنین  $y_{ij}$  مقادیر متغیرهای پاسخ و  $x_i$  ها نیز مقادیر متغیر مستقل را نشان می‌دهند. فرض می‌شود که  $x_i$  ها مقدار ثابتی دارند و برای همه‌ی پروفایل‌ها یکسان هستند. در این مقاله، محاسبات فاز ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد بعبارت دیگر فرض می‌شود که مقادیر پارامترهای  $A_0, A_1, \sigma^2$  معلوم می‌باشند. ساختار  $AR(1)$  که در باقیمانده‌ها وجود دارد نشان دهنده‌ی ساختار خود همبستگی درون پروفایل است که اینجا برای مقابله با این ساختار خودهمبستگی از روش تبدیل سلیمانی و همکاران [۷] استفاده می‌شود. مشاهدات هر پروفایل را می‌توان بصورت رابطه (۳) بیان نمود:

$$y_{ij} = A_0 + A_1 x_i + \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

$$y_{(i-1)j} = A_0 + A_1 x_{i-1} + \varepsilon_{(i-1)j}, \quad (4)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۳) و رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۳) خواهیم داشت:

$$y'_{ij} = (A_0 + A_1 x_i + \varepsilon_{ij}) \quad (5)$$

$$-\rho(A_0 + A_1 x_{i-1} + \varepsilon_{(i-1)j})$$

که در رابطه‌ی فوق  $y'_{ij} = y_{ij} - \rho y_{(i-1)j}$  است. پس از ساده نمودن رابطه‌ی (۵) داریم:

$$y'_{ij} = A_0(1 - \rho) + A_1(x_i - \rho x_{i-1}) \quad (6)$$

$$+ (\varepsilon_{ij} - \rho \varepsilon_{(i-1)j}),$$

بنابراین با توجه به رابطه  $u_{ij} = \varepsilon_{ij} - \rho \varepsilon_{(i-1)j}$  خواهیم داشت:

$$y'_{ij} = A'_0 + A'_1 x'_i + u_{ij}, \quad (7)$$

که  $u_{ij}$  ها خطاهای مستقل می‌باشند. بنابراین با استفاده از متغیر تبدیل یافته  $y'_{ij}$  مدل پروفایل شامل باقیمانده‌های مستقل خواهد شد. در حالیکه مدل (۷) همچنان یک مدل پروفایل ساده خطی با متغیر  $X$  جدید  $x'_i = x_i - \rho x_{i-1}$  است. بنابراین رابطه (۷) را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۸) نوشت:

$$y'_{ij} = A_0(1 - \rho) + A_1(x_i - \rho x_{i-1}) + u_{ij}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - a_1'' x'_i) = \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n a_0'' \\ \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (x'_i y'_{ij} - a_0'' x'_i) = \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n a_1'' x_i'^2, \end{cases} \quad (19)$$

با حل دستگاه بالا خواهیم داشت :

$$a_0'' = \left\{ \left( \sum_{i=1}^n x_i'^2 \right) \left( \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y'_{ij} \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i' \right) \left( \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y'_{ij} x'_i \right) \right\} \div (T - \tau) \left( \sum_{i=1}^n x_i'^2 \right) \quad (20)$$

$$a_1'' = \left\{ \left( \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y'_{ij} \right) - n(T - \tau) a_0'' \right\} \div (T - \tau) \left( \sum_{i=1}^n x_i' \right) \quad (21)$$

حال مقادیر محاسبه شده‌ی  $a_0''$  و  $a_1''$  را در رابطه‌ی (۱۸) جایگذاری کرده و با ساده‌سازی به رابطه‌ی (۲۲) می‌رسیم و در نهایت نقطه‌ی تغییر با استفاده از رابطه‌ی (۲۳) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ln(a_1'', a_0'', \tau | y') = & -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2 \right. \\ & \left. - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2 \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\hat{\tau} = \arg \max \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n ((y'_{ij} - (\hat{a}_0'' + \hat{a}_1'' x'_i))^2) \right) \right]. \quad (23)$$

در این رابطه  $\hat{\tau}$  بیانگر تخمین زنده‌ی ماکزیمم درست‌نمایی آخرین پروفایلی است که در حالت کنترل قرار دارد.

#### ۴-۲- روش خوشه‌بندی

در روش خوشه‌بندی، داده‌های با ویژگی‌های مشابه در یک گروه قرار می‌گیرد و در نتیجه کل داده‌ها به گروه‌های متمایزی تقسیم می‌شود، که به این گروه‌ها خوشه گفته می‌شود. مدل‌های نقطه‌ی تغییر، دارای مشترکات زیادی با روش‌های خوشه‌بندی هستند: (۱) در مدل‌های نقطه‌ی تغییر، دو وضعیت تحت کنترل و خارج از کنترل وجود دارد که بطور موثری با دو خوشه‌ی تحت کنترل و خارج از کنترل در روش خوشه‌بندی مطابقت دارد. (۲) در مدل‌های نقطه‌ی تغییر، تقریباً همه‌ی مشاهدات تحت کنترل به‌عنوان یک الگوی تصادفی مورد توجه قرار داده می‌شوند و همه‌ی مشاهدات خارج از کنترل الگویی غیر تصادفی را نمایان می‌کنند. (۳) مشابه با روش‌های خوشه‌بندی،

$$f(y'_{ij}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2\right\}. \quad (14)$$

که در آن مقدار پاسخ  $i$  امین متغیر پیشگو در  $j$  زمین پروفایل است. پس از مدتی و در پروفایل نامعلوم  $\tau$ ، فرآیند از حالت تحت کنترل خارج شده و  $a_0''$  و  $a_1''$  بصورت روابط (۱۵) و (۱۶) تغییر می‌کنند و تا زمانی که نمودار کنترل هشدار می‌بندی بر وقوع حالت خارج از کنترل صادر نکرده است، در این وضعیت باقی می‌ماند:

$$a_1'' = a_1' + \lambda_1 \sigma, \quad (15)$$

$$a_0'' = a_0' + \lambda_2 \sigma. \quad (16)$$

بمنظور برآورد پارامترهای مجهول با استفاده از روش ماکزیمم درست‌نمایی با فرض وقوع تغییر در نقطه‌ی  $\tau$ ، تابع درست‌نمایی مدل بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} L(a_1'', a_0'', \tau | y') = & \frac{1}{\prod_{j=1}^T \prod_{i=1}^n \sigma\sqrt{2\pi}} \times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2 \right) \right. \\ & \left. + \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

که در این رابطه،  $T$  شماره‌ی اولین پروفایلی است که از حالت کنترل خارج می‌شود. به عبارت دیگر، برای پروفایل‌های  $j=1, 2, \dots, \tau$  مقدار پارامترهای فرآیند برابر با  $a_0'$  و  $a_1'$  بوده و برای پروفایل‌های  $j=\tau+1, \tau+2, \dots, T$  مقدارها به  $a_0''$  و  $a_1''$  تغییر می‌کنند. پارامترهای مجهول فرآیند  $\tau$ ،  $a_0''$  و  $a_1''$  می‌باشند که باید محاسبه شوند. ماکزیمم درست‌نمایی  $\tau(\hat{\tau})$ ، مقداری از  $\tau$  است که تابع درست‌نمایی را ماکزیمم نماید. با لگاریتم گرفتن از رابطه (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} \ln(a_1'', a_0'', \tau | y') = & \ln\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^T \prod_{i=1}^n \sigma\sqrt{2\pi}}\right) \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2 \right) \\ & + \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (y'_{ij} - (a_0'' + a_1'' x'_i))^2, \end{aligned} \quad (18)$$

در این عبارت  $\tau$ ،  $a_0''$  و  $a_1''$  مجهول هستند و باید با گرفتن مشتق جزئی نسبت به این عبارات آنها را محاسبه نمود. با گرفتن مشتق جزئی نسبت به  $a_0''$  و  $a_1''$  و مساوی صفر قرار دادن این مشتق‌ها، داریم:

## ۵- ارزیابی عملکرد تخمین زنده‌های پیشنهادی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، به ارزیابی عملکرد تخمین زنده‌های پیشنهادی می‌پردازیم. به این منظور با در نظر گرفتن چهار مقدار برای سطوح متغیر مستقل در هر پروفایل، بردار  $X$  بصورت زیر می‌باشد:

$$X = [2 \ 4 \ 6 \ 8]$$

در حالت تحت کنترل، مدل پروفایل را به صورت رابطه‌ی خطی  $y_{ij} = 3 + 2x_i + \varepsilon_{ij}$  در نظر می‌گیریم، که در آن باقیمانده‌ها دارای ساختار  $AR(1)$  و به صورت  $\varepsilon_{ij} = \rho\varepsilon_{(i-1)j} + u_{ij}$  می‌باشند.  $u_{ij}$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است. بعد از تبدیل داده‌ها خواهیم داشت:

$$x'_i = x_i - \rho x_{i-1}, \quad (26)$$

$$y'_{ij} = y_{ij} - \rho y_{(i-1)j}, \quad (27)$$

$$a'_1 = 3(1 - \rho), \quad (28)$$

$$a'_0 = 2. \quad (29)$$

حد بالای کنترل نمودار  $T_j^2$  برابر با  $10.59 = \chi_{2,0/005}^2$  است.

پس از مدتی و در پروفایل نامعلوم  $\tau$ ، فرآیند از حالت کنترل خارج شده و پارامترهای  $a_0$  و  $a_1$  بصورت  $a'_0 = a_0 + \lambda_1$  و  $a'_1 = a_1 + \lambda_2$  تغییر می‌کنند، که در آن  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر نامعلومی هستند که باعث تغییر در پارامترهای  $a_0$  و  $a_1$  شده‌اند. با وقوع اولین نمونه خارج از کنترل، تولید داده متوقف شده و نقطه‌ی تغییر فرآیند تخمین زده می‌شود. نقطه‌ی تغییر فرآیند در  $\lambda = 50$  شبیه‌سازی می‌شود. برای پروفایل‌های  $j=1,2,\dots,50$ ، مشاهدات تبدیل یافته مستقل از یک توزیع نرمال با میانگین  $3+2x_i$  و واریانس یک تولید شده و از پروفایل ۵۱ام، فرآیند از حالت تحت کنترل خارج شده و تولید مشاهدات مستقل با شیب تغییر یافته ادامه پیدا می‌کند تا زمانی که نمودار کنترل  $T^2$  هشدار را مبنی بر وقوع حالت خارج از کنترل صادر کند. شماره‌ی این پروفایل  $T$  در نظر گرفته می‌شود. سپس تولید مشاهدات متوقف شده و برای تمام پروفایل‌ها  $j = 1, 2, \dots, T$  تخمین زنده‌ی نقطه‌ی تغییر مورد استفاده قرار می‌گیرد تا نقطه‌ی تغییر را تخمین بزنند. این رویه برای هر یک از مقادیر  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  ۱۰۰۰۰ بار تکرار می‌شود و میانگین  $\bar{t}$  و خطای استاندارد  $(se_{\bar{t}})$  محاسبه می‌شود.

نتایج حاصل از این شبیه‌سازی در جداول ۱ تا ۴ آمده است. جداول ۱ و ۲ شیف‌های ایجاد شده در پارامتر  $a_1$  با وجود خود همبستگی ۰/۱ و ۰/۹ را گزارش می‌کند. در این جداول، نتایج محاسبات مربوط به تخمین نقطه‌ی تغییر و مقدار خطای استاندارد برآوردکننده از نقطه‌ی واقعی تغییر، آورده شده است. با افزایش مقدار شیف‌ها، تخمین نقطه‌ی تغییر به مقدار واقعی نزدیکتر می‌شود و مقدار خطای استاندارد که به صورت تقسیم انحراف معیار بر جذر تعداد تکرارها ( $g$ ) می‌باشد  $(std/\sqrt{g})$ ، کاهش می‌یابد. مقدار برآورد

در مدل‌های نقطه‌ی تغییر، یک مشاهده بعنوان یک مشاهده‌ی خارج از کنترل مشخص می‌شود وقتی که این مشاهده بر اساس پارامترهای خارج از کنترل ایجاد شده باشد.

برای استفاده از روش خوشه‌بندی، ابتدا مانند روش ماکزیمم درست‌نمایی، بر اساس روش تبدیل سلیمانی و همکاران [۷]، داده‌ها را تغییر فرم می‌دهیم و اثر خودهمبستگی میان مشاهدات را کاهش می‌دهیم. حال بر روی داده‌های بعد از حذف اثر خودهمبستگی، روش خوشه بندی را بکار می‌بریم و نقطه‌ی تغییر را شناسایی می‌کنیم. ساختار روش خوشه بندی که در این مقاله استفاده می‌شود به این شکل است:

فرض کنید که نمودار کنترل در زمان  $T$ ، یک سیگنال خارج از کنترل را صادر نماید. تلاش بر این است که زمان  $\tau$ ، یعنی زمان واقعی تغییر در پارامترهای فرآیند محاسبه شود. برای این منظور، دو خوشه‌ی تحت کنترل و خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شوند. همه‌ی مشاهدات قبل از  $\tau$ ، متعلق به خوشه‌ی تحت کنترل و مابقی مشاهدات در خوشه‌ی خارج از کنترل قرار می‌گیرند. در ادامه‌ی محاسبه‌ی نقطه‌ی تغییر، یک شاخص تعریف می‌شود. این شاخص برای همه‌ی ترکیبات ممکن از تخصیص مشاهدات به هر یک از خوشه‌های تحت کنترل و خارج کنترل، محاسبه می‌شود. نقطه‌ای که در آن شاخص، کمترین مقدار را داشته باشد، به عنوان نقطه‌ی تغییر در نظر گرفته می‌شود.

مشاهدات طبقه بندی شده در هر خوشه، باید بیشترین شباهت را به ویژگی‌ها و خصوصیات آن خوشه داشته باشد. بنابراین تغییرات درون دو خوشه، برای رسیدن به بهترین طبقه بندی از مشاهدات باید کمترین مقدار را داشته باشد. تغییرات درون هر خوشه، فاصله نمونه‌ها از مرکز خوشه‌هایشان را نشان می‌دهند و بصورت روابط (۲۴) و (۲۵) تعریف می‌شود:

$$SSW = SSW_{in} + SSW_{out} \quad (24)$$

$$SSW = \sum_{j=1}^{\tau} M' \Sigma_0^{-1} M + \sum_{j=\tau+1}^T N' \Sigma_0^{-1} N, \quad (25)$$

$$M = [(\hat{a}'_{0j} \hat{a}'_{1j}) - (a'_0 \ a'_1)],$$

$$N = [(\hat{a}'_{0j} \hat{a}'_{1j}) - C_{out}].$$

در رابطه‌ی بالا،  $C_{out} = (\sum_{j=\tau+1}^T \frac{\hat{a}'_{0j}}{(T-\tau)} \sum_{j=\tau+1}^T \frac{\hat{a}'_{1j}}{(T-\tau)})$  بعنوان مرکز خوشه‌ی خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $\Sigma_0^{-1}$  معکوس ماتریس کوواریانس فرآیند است که در رابطه‌ی (۱۳) تعریف گردید.  $SSW_{in}$  و  $SSW_{out}$  تغییرات درون خوشه‌ی تحت کنترل و خوشه‌ی خارج از کنترل را نشان می‌دهند. وقتی که شاخص به کمترین مقدار خود دست می‌یابد، بدین معناست که مشاهدات به مناسب‌ترین خوشه تخصیص یافته‌اند. بنابراین نقطه‌ی تغییر،  $\tau$  ای خواهد بود که مقدار شاخص در آن مینیمم شود.

(۰/۱) میان مشاهدات، نشان می‌دهد که در شیفت‌های کوچکتر، روش ماکزیمم درست‌نمایی مقادیر انحراف استاندارد کوچک‌تری را ارائه می‌نماید ولی هر چه مقدار شیفت‌ها بزرگتر می‌شوند روش خوشه‌بندی مقادیر انحراف استاندارد کمتری را نشان می‌دهد که نشان از عملکرد بهتر روش خوشه‌بندی در شیفت‌های بزرگتر دارد. در حالت وجود خودهمبستگی قوی (۰/۹) میان مشاهدات، روش خوشه‌بندی در تمام شیفت‌های ایجاد شده در پارامتر عرض از مبدا، مقدار انحراف استاندارد خطای کمتری در مقایسه با روش ماکزیمم درست‌نمایی نمایش می‌دهد که این مسئله نشان‌دهنده عملکرد بسیار مناسب‌تر روش خوشه‌بندی در مقایسه با روش ماکزیمم درست‌نمایی است.

نتایج جداول ۱ تا ۶ در کل نشان می‌دهند که هر دو روش پیشنهادی برای تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های خطی ساده با وجود همبستگی ضعیف درون پروفایل‌ها، نتایج خوبی ارائه می‌دهند ولی در حالت همبستگی قوی درون پروفایل‌ها روش خوشه‌بندی بهتر از روش ماکزیمم درست‌نمایی تخمین‌ها را ارائه می‌کند.

#### ۶- مطالعه‌ی موردی

در این بخش، برای نشان دادن عملکرد روش‌های پیشنهادی در کاربردهای عملی، از یک مجموعه داده‌ی واقعی بر اساس سلیمانی و همکاران [۷] استفاده می‌شود. در این مطالعه‌ی موردی، ده درخت سیب داریم که از هر درخت بیست و پنج سیب بطور تصادفی انتخاب می‌شود. تحلیل روی سیب‌هایی انجام می‌شود که قطر اولیه آنها از ۲/۷۵ اینچ بیشتر باشد. در نتیجه از ۲۵۰ سیب موجود، ۸۰ سیب باقی می‌ماند. هر دو هفته یک‌بار به مدت ۱۲ هفته، قطر هر یک از سیب‌ها اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین برای هر یک از سیب‌ها ۶ اندازه‌ی مختلف داریم که هر سیب یک پروفایل خطی ساده را شکل می‌دهد. تست‌ها، یک ساختار خودهمبستگی اتورگرسیو مرتبه‌ی اول بین مشاهدات هر پروفایل را تأیید می‌کنند. در این مثال، ارتباط بین قطر و زمان یک مشخصه‌ی کیفی مهم است که باید در طول زمان پایش شود. از این رو، برای هر یک از سیب‌ها یک پروفایل ایجاد می‌شود و بر اساس روش  $T^2$  پایش می‌شوند و در نهایت با استفاده از روش‌های پیشنهادی در بخش‌های قبل، نقطه‌ی تغییر محاسبه می‌شود.

تحلیل داده‌ها بر اساس محاسبات فاز ۱، مقدارهای ۲/۶۸، ۰/۰۲ و ۰/۷ را به ترتیب برای عرض از مبدا، شیب خط رگرسیون و ثابت خودهمبستگی فراهم می‌کند. واریانس  $a_{ij}$  ها نیز ۰/۰۰۴ بدست می‌آید. معادله‌ی بدست آمده بصورت  $\varepsilon_{ij} = 2.68 + 0.02x_i + \varepsilon_{ij}$  است که در آن  $\varepsilon_{ij} = 0.7\varepsilon_{(i-1)j} + a_{ij}$  ساختار خودهمبستگی  $AR(1)$  را نشان می‌دهد.  $a_{ij}$  نیز دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۰/۰۰۴ می‌باشد. بعد از تبدیل داده‌ها و پایش پروفایل‌ها با استفاده از روش  $T^2$ ، شیفت‌هایی در  $a_1$  ایجاد می‌نماییم و برای هر یک از شیفت‌ها مقدار نقطه‌ی تغییر تخمین زده می‌شود. همانطور که از جدول (۷) پیداست نقاط تغییر تخمین زده شده خیلی نزدیک به

فاصله‌ای بصورت نسبت دفعاتی که تخمین زنده، نقطه‌ی تغییر را با فاصله  $i$  نمونه برآورد می‌کند  $p(|\hat{t} - \tau| \leq i)$  نیز در ادامه‌ی جداول آورده شده است،  $(i=1,2,\dots,15)$ . در جدول (۱)، وجود همبستگی (۰/۱) درون پروفایل‌ها در نظر گرفته شده است. شیفت‌های مختلفی نیز در پارامتر  $a_1$  ایجاد شده است و نقاط تغییر با هر دو روش پیشنهادی تخمین زده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که هر دو روش تخمین‌های خوبی را برای نقطه‌ی تغییر ارائه می‌کنند ولی در شیفت‌های کوچکتر روش خوشه‌بندی مقادیر مناسب‌تری نسبت به روش ماکزیمم درست‌نمایی دارد. در جدول (۲)، شیفت‌های مختلف در پارامتر  $a_1$  ایجاد شده است ولی میزان خود همبستگی درون پروفایل‌ها ۰/۹ است. نتایج این جدول حکایت از این دارد که روش خوشه‌بندی در تمام شیفت‌ها عملکرد مناسب‌تری نسبت به روش ماکزیمم درست‌نمایی ارائه می‌دهد و این موضوع را می‌توان در احتمال‌های بدست آمده به وضوح مشاهده کرد. جدول (۳)، نتایج حاصل از شیفت‌های ایجاد شده در پارامتر  $a_0$  در حالت وجود خود همبستگی ۰/۱ درون پروفایل‌ها را نشان می‌دهد. در این مورد نیز همانند جدول (۱)، هر دو روش پیشنهادی مقادیر خوبی را برای نقطه‌ی تغییر تخمین می‌زنند ولی در شیفت‌های کوچکتر روش خوشه‌بندی بهتر عمل می‌کند. در جدول (۴)، هر دو روش تخمین‌هایی نزدیک به هم ارائه می‌کنند اما روش خوشه‌بندی در تمام شیفت‌ها اندکی بهتر از روش ماکزیمم درست‌نمایی عمل می‌کند.

همچنین در جداول (۵) و (۶)، مقادیر انحراف استاندارد بدست آمده با استفاده از دو روش خوشه‌بندی و ماکزیمم درست‌نمایی، برای تغییرات مختلف در پارامترهای شیب و عرض از مبدا و در دو حالت وجود خودهمبستگی قوی (۰/۹) و ضعیف (۰/۱)، با هم مقایسه می‌شوند.

در جدول (۵)، که نتایج بدست آمده برای تغییرات در پارامتر شیب هستند، نشان می‌دهد که در تغییرات کوچکتر (۰/۰۱ و ۰/۰۲)، دو روش عملکرد تقریباً یکسانی دارند ولی هر چه مقدار تغییرات بزرگتر می‌شوند مقادیر انحراف استاندارد بدست آمده با استفاده از روش ماکزیمم درست‌نمایی کوچکتر از مقادیر انحراف استاندارد بدست آمده با استفاده از روش خوشه‌بندی است که این موضوع نشان از عملکرد بهتر روش ماکزیمم درست‌نمایی دارد. در حالت وجود خود همبستگی قوی (۰/۹) میان مشاهدات و در شیفت‌های کوچکتر در پارامتر شیب، روش خوشه‌بندی مقادیر انحراف استاندارد کوچکتری از روش ماکزیمم درست‌نمایی ارائه می‌دهد که نشان‌دهنده‌ی بهتر بودن روش خوشه‌بندی در مقایسه با روش ماکزیمم درست‌نمایی می‌شود ولی هر چه مقدار شیفت‌ها بزرگتر می‌شوند کارایی دو روش بهم نزدیک می‌شود.

در جدول (۶)، مقادیر انحراف استاندارد بدست آمده با استفاده از دو تخمین زنده‌ی خوشه‌بندی و ماکزیمم درست‌نمایی، زمانی که شیفت‌ها در پارامتر عرض از مبدا اتفاق می‌افتند، گزارش می‌شود. مقایسه این دو تخمین زنده در حالت وجود خودهمبستگی ضعیف

درست‌نمایی و خوشه‌بندی به‌منظور تخمین نقطه‌ی تغییر در پروفایل‌های خودهمبسته با ساختار همبستگی  $AR(1)$  استفاده شد. برای پایش پروفایل‌های ساده‌ی خطی خودهمبسته در فاز ۲، از نمودار کنترل  $T^2$  استفاده گردید. نتایج نیز در دو حالت خود همبستگی قوی و ضعیف تحت شیفت‌های مختلف در دو پارامتر  $a_0$  و  $a_1$  مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که هر دو روش پیشنهادی در همبستگی ضعیف (۰/۱) درون مشاهدات، نتایج خوبی را ارائه می‌کنند و در حالتی که همبستگی قوی (۰/۹) درون مشاهدات وجود دارد روش خوشه‌بندی نتایج بهتری را نسبت به روش ماکزیمم درست‌نمایی نشان می‌دهد.

توسعه‌ی این روش برای سایر ساختارهای همبستگی نظیر  $ARIMA$ ،  $ARMA$ ،  $MA$  و ... بررسی شیفت‌های ایجاد شده در فرآیند شامل شیفت‌های تدریجی، ایزوتونیک و ... به‌عنوان مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود.

مقدار نقطه‌ی تغییر در نظر گرفته شده هستند. ولی روش خوشه‌بندی اندکی بهتر از روش ماکزیمم درست‌نمایی عمل می‌نماید. بر اساس مشاهدات یکی از تکرارهای شبیه‌سازی داده‌های درخت سیب، نمودار کنترل  $T^2$  در شکل (۱) نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در نمونه‌ی ۲۷ام نمودار کنترل هشدار خارج از کنترل بودن فرآیند را صادر می‌کند و نقطه‌ی تغییر با استفاده از دو روش پیشنهادی تخمین زده می‌شود که در شکل (۱) با علائمی این نقاط مشخص شده‌اند. کاربرد روش پیشنهادی برای داده‌های درخت سیب، مفید بودن روش‌های پیشنهادی در عمل را تأیید می‌کند.

**۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای مطالعات آتی**

پروفایل‌های خطی ساده از جمله فرآیندهای پرکاربرد در صنایع مختلف، به‌خصوص در صنعت کالیبراسیون هستند که در بسیاری از موارد در دنیای واقعی، مشاهدات درون پروفایل‌ها به‌دلیل رشد فناوری و کم‌شدن فاصله زمانی نمونه‌گیری دارای ساختار خودهمبستگی هستند. در نتیجه تخمین نقطه‌ی تغییر در پایش این پروفایل‌ها دارای اهمیت می‌باشد. در این مقاله از دو روش ماکزیمم

جدول (۱): شیفت در  $a_1$  به  $a_1 + \lambda_2 \sigma$  و تخمین نقطه‌ی تغییر با استفاده از روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی با وجود خود همبستگی ۰/۱ (نقطه‌ی واقعی تغییر ۵۰ در نظر گرفته شده است)

$\lambda_2$	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۰۶	۰/۰۸
روش‌های تخمین نقطه تغییر	ماکزیمم درست‌نمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درست‌نمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درست‌نمایی
$\hat{t}$	۷۴/۷۹	۶۶/۸۳	۶۱/۱۴	۵۵/۸۶	۵۰/۸۸
$se_{\hat{t}}$	۰/۵۹	۰/۴۹	۰/۴۸	۰/۳۵	۰/۱۹
$p( \hat{t} - \tau  = 0)$	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۱۱
$p( \hat{t} - \tau  \leq 1)$	۰/۰۵	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱۵	۰/۲۴
$p( \hat{t} - \tau  \leq 2)$	۰/۰۸	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۲۲	۰/۳۴
$p( \hat{t} - \tau  \leq 3)$	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۱۷	۰/۲۷	۰/۴۱
$p( \hat{t} - \tau  \leq 4)$	۰/۱۹	۰/۲۵	۰/۲۶	۰/۴۱	۰/۵۸
.....					
$p( \hat{t} - \tau  \leq 15)$	۰/۳۴	۰/۴۵	۰/۴۸	۰/۶۶	۰/۸۱

جدول (۲): شیفت در  $a_1$  به  $a_1 + \lambda_2 \sigma$  و تخمین نقطه‌ی تغییر با استفاده از روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی با وجود خود همبستگی ۰/۹ (نقطه‌ی واقعی تغییر ۵۰ در نظر گرفته شده است)

$\lambda_2$	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۰۶	۰/۰۸
روش‌های تخمین نقطه تغییر	ماکزیمم درست‌نمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درست‌نمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درست‌نمایی
$\hat{t}$	۷۶/۰۹	۷۴/۰۳	۷۱/۴۳	۶۵/۵۴	۶۱/۲۶
$se_{\hat{t}}$	۰/۶۶	۰/۶۱	۰/۵۹	۰/۴۸	۰/۴۴
$p( \hat{t} - \tau  = 0)$	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳
$p( \hat{t} - \tau  \leq 1)$	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۶	۰/۰۷
$p( \hat{t} - \tau  \leq 2)$	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۹	۰/۱۳
$p( \hat{t} - \tau  \leq 3)$	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۱۲	۰/۱۵
$p( \hat{t} - \tau  \leq 4)$	۰/۱۳	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۷	۰/۲۱
.....					
$p( \hat{t} - \tau  \leq 15)$	۰/۳۳	۰/۳۵	۰/۳۴	۰/۳۹	۰/۴۶

جدول (۳): شیفت در  $a_0$  به  $a_0 + \lambda_1 \sigma$  و تخمین نقطه‌ی تغییر با استفاده از روش‌های ماکزیمم درستنمایی و خوشه‌بندی با وجود خود همبستگی ۰/۱ (نقطه‌ی تغییر ۵۰ در نظر گرفته شده است)

$\lambda_1$	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۱	
روش‌های تخمین نقطه تغییر	ماکزیمم درستنمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درستنمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درستنمایی	خوشه‌بندی
$\hat{\tau}$	۷۰/۵۴	۷۲/۷۴	۶۰/۲۱	۶۷/۷۸	۵۱/۱۴	۵۳/۵۰
$SE_{\hat{\tau}}$	۰/۵۲	۰/۵۱	۰/۳۶	۰/۳۸	۰/۱۸	۰/۱۹
$p( \hat{\tau} - \tau  = 0)$	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۱۳	۰/۱۰
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 1)$	۰/۰۶	۰/۰۶	۰/۱۱	۰/۰۹	۰/۲۶	۰/۲۴
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 2)$	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۱۷	۰/۱۳	۰/۳۶	۰/۳۴
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 3)$	۰/۱۶	۰/۱۲	۰/۲۱	۰/۱۷	۰/۴۴	۰/۴۱
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 4)$	۰/۲۱	۰/۱۷	۰/۲۶	۰/۲۰	۰/۵۱	۰/۴۶
.....						
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 15)$	۰/۴۲	۰/۳۶	۰/۵۵	۰/۵۰	۰/۸۴	۰/۸۲

جدول (۴): شیفت در  $a_0$  به  $a_0 + \lambda_1 \sigma$  و تخمین نقطه‌ی تغییر با استفاده از روش‌های ماکزیمم درستنمایی و خوشه‌بندی با وجود خود همبستگی ۰/۹ (نقطه‌ی تغییر ۵۰ در نظر گرفته شده است)

$\lambda_1$	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۱	
روش‌های تخمین نقطه تغییر	ماکزیمم درستنمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درستنمایی	خوشه‌بندی	ماکزیمم درستنمایی	خوشه‌بندی
$\hat{\tau}$	۷۲/۶۷	۷۱/۲۶	۷۲/۲۹	۷۱/۱۱	۶۹/۹۵	۶۲/۸۲
$SE_{\hat{\tau}}$	۰/۶۳۹	۰/۶۱۳	۰/۶۳۳	۰/۶۰۱	۰/۶۳۲۷	۰/۵۷
$p( \hat{\tau} - \tau  = 0)$	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۰۴
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 1)$	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۶	۰/۰۵	۰/۰۷
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 2)$	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۱۳	۰/۰۷	۰/۱۴
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 3)$	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۰۹	۰/۱۷	۰/۱۰	۰/۱۸
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 4)$	۰/۱۱	۰/۱۲	۰/۱۱	۰/۱۸	۰/۱۳	۰/۲۰
.....						
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 15)$	۰/۳۳	۰/۳۷	۰/۳۴	۰/۳۹	۰/۳۵	۰/۴۳

جدول (۵): مقادیر انحراف استاندارد به دست آمده در تخمین نقطه‌ی تغییر  $(SE_{\hat{\tau}})$  با استفاده از دو تخمین زنده ماکزیمم درستنمایی و خوشه‌بندی، زمانی که شیفت در پارامتر شیب به وجود می‌آید برای دو حالت خودهمبستگی ۰/۱ و ۰/۹

$\rho$	مقدار تغییر	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۰/۱	ماکزیمم درستنمایی	۰/۵۹	۰/۴۹	۰/۳۰	۰/۱۹	۰/۱۴
	خوشه بندی	۰/۵۹	۰/۴۸	۰/۳۵	۰/۲۵	۰/۲۰
۰/۹	ماکزیمم درستنمایی	۰/۶۶	۰/۵۹	۰/۵۳	۰/۴۴	۰/۳۷
	خوشه بندی	۰/۶۱	۰/۵۳	۰/۴۸	۰/۴۲	۰/۳۸

جدول (۶): مقادیر انحراف استاندارد بدست آمده در تخمین نقطه‌ی تغییر  $(SE_{\hat{\tau}})$  با استفاده از دو تخمین زنده ماکزیمم درستنمایی و خوشه‌بندی، زمانی که شیفت در پارامتر عرض از مبدا به وجود می‌آید برای دو حالت خودهمبستگی ۰/۱ و ۰/۹

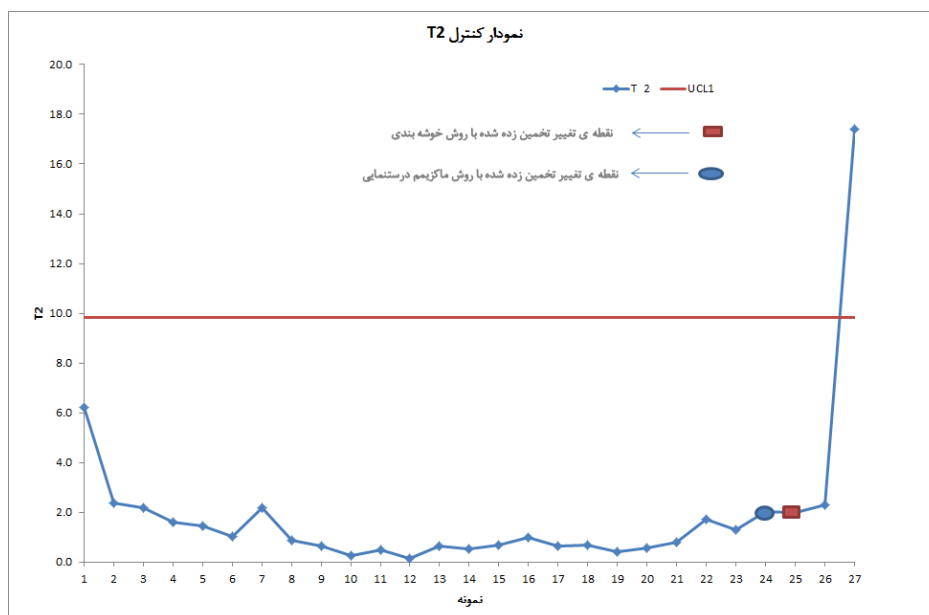
$\rho$	مقدار تغییر	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۱
۰/۱	ماکزیمم درستنمایی	۰/۵۲	۰/۳۶	۰/۱۸	۰/۱۲	۰/۰۷
	خوشه بندی	۰/۵۱	۰/۳۸	۰/۱۹	۰/۱۱	۰/۰۶
۰/۹	ماکزیمم درستنمایی	۰/۶۳۹	۰/۶۳۳	۰/۶۳۲	۰/۵۹	۰/۵۱
	خوشه بندی	۰/۶۱۳	۰/۶۰۱	۰/۵۷	۰/۵۶	۰/۵۰۲



جدول (۷): شیفت در  $\alpha_1$  به  $\alpha_1 + \lambda_2 \sigma$  و تخمین نقطه‌ی تغییر با استفاده از روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و خوشه‌بندی با وجود

خود همبستگی ۰/۷ برای داده‌های درخت سیب

$\lambda_2$	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۱
روش تخمین نقطه‌ی تغییر	خوشه‌بندی	ماکزیمم درست‌نمایی
$\hat{\tau}$	۴۹/۹۲	۴۹/۸۹
$se_{\hat{\tau}}$	۰/۱۲۴۱	۰/۱۲۴۹
$p( \hat{\tau} - \tau  = 0)$	۰/۷۱	۰/۶۷
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 1)$	۰/۹۲	۰/۹۰
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 2)$	۰/۹۷	۰/۹۵
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 3)$	۰/۹۹	۰/۹۷
$p( \hat{\tau} - \tau  \leq 4)$	۱	۰/۹۹



شکل (۱): نمودار کنترل  $T^2$  برای داده‌های درخت سیب و تخمین نقطه‌ی تغییر با استفاده از دو روش خوشه‌بندی و ماکزیمم درست‌نمایی، در حالتی که شیفت ۰/۰۰۰۰۹ در پارامتر  $\alpha_1$  ایجاد شده است (نقطه‌ی واقعی تغییر ۲۵ می‌باشد).

(2010), "A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry." *Quality and Reliability Engineering International*, 26(5): 509-520.

[7] Soleimani, P., Noorossana, R., Amiri, A., (2009), "Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation", *Computers & Industrial Engineering*, 57(3): 1015-1021.

[8] Jensen, W. A., Birch, J. B., Woodall, W. H., (2008), "Monitoring correlation within linear profiles using mixed models", *Journal of Quality Technology*, 40(2): 167-183.

[9] Noorossana, R., Amiri, A., Soleimani, P., (2008), "On the monitoring of autocorrelated linear profiles", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37(3): 425-442.

[10] Sharafi, A., Aminnayeri, M., Amiri, A., Rasouli, M., (2013), "Estimating the Change Point of Binary Profiles with a Linear Trend Disturbance", *International Journal of Industrial Engineering*, 24(2): 123-129.

[11] Zand, A., Yazdanshenas, N., Amiri, A., (2013),

## مراجع

- [1] Kang, L., Albin, S., (2000), "On-line monitoring when the process yields a linear", *Journal of Quality Technology*, 32(4): 418-426.
- [2] Mahmoud, M. A., Woodall, W. H., (2004), "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, 46(4): 380-391.
- [3] Stover, F.S., Brill, R.V., (1998), "Statistical quality control applied to ion chromatography calibrations", *Journal of Chromatography A*, 804(1): 37-43.
- [4] Zou, C., Qiu, P., Hawkins, D., (2009), "Nonparametric control chart for monitoring profiles using change point formulation and adaptive smoothing". *Statistica Sinica*, 19(3):1337-1357.
- [5] Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R., Amiri, A., (2009), "Monitoring polynomial profiles in quality control applications", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 42(7): 703-712.
- [6] Amiri, A., Jensen, W. A., & Kazemzadeh, R. B.,

- multivariate linear profiles with no change type assumption via dynamic linear model”, *Quality and Reliability Engineering International*, 32(2): 403-433.
- [17] Sharafi, A., Aminnayeri, M., Amiri, A., (2013), “An MLE approach for estimating the time of step changes in poisson regression profiles”, *Scientia Iranica*, 20(3): 855-860.
- [18] Sogandi, F., Amiri, A., (2014), “Estimating the time of a step change in Gamma regression profiles using MLE approach”, *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, 28(2): 224-231.
- [19] Sogandi, F., Amiri, A., (2014), “Change point estimation of gamma regression profiles with a linear trend disturbance”, *International Journal of Quality Engineering and Technology*, 4(4): 352-368.
- [20] Sogandi, F., Amiri, A., (2016), “Monotonic change point estimation of generalized linear model-based regression profiles”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*.
- [21] Keramatpour, M., Niaki, S., Khedmati, M., Soleymanian, M., (2013), “Monitoring and change point estimation of ar (1) autocorrelated polynomial profiles”, *International Journal of Engineering-Transactions C: Aspects*, 26(9): 933-942.
- “Change point estimation in phase I monitoring of logistic regression profile”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(2): 201-2311.
- [12] Allahyari, S., Amiri, A., (2011), “A Clustering Approach for Change Point Estimation in Multivariate Normal Processes”, *Proceedings of the 41th conference on Computers & Industrial Engineering*, Los Angeles, California, USA.
- [13] Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H. Hawkins, D.M., (2007), “A change point method for linear profile data”, *Quality and Reliability Engineering International*, 23(2): 247-268.
- [14] Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R., Ayoubi, M., (2015), “Change point estimation of multivariate linear profiles under linear drift”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44(6): 1570-1599
- [15] Ayoubi, M., Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R., (2014), “Estimating multivariate linear profiles change point with a monotonic change in the mean of response variables”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 75(9-12): 1537-1556.
- [16] Ayoubi, M., Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R., (2016), “Change point estimation in the mean of



## Step change point estimation in monitoring of auto-correlated simple linear profiles using clustering and maximum likelihood methods

H.R. Mirbeik<sup>1</sup>, R. Baradaran Kazemzadeh<sup>1</sup>, A. Amiri<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Department of Industrial Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Department of Industrial Engineering, Shahed University, Tehran, Iran.

### ARTICLE INFO

#### **Article history:**

Received 6 January 2015

Accepted 11 May 2016

#### **Keywords:**

Simple linear profile

Change point

Auto-correlation, clustering

Maximum likelihood

### ABSTRACT

#### **ABSTRACT**

In most of the researches in the area of profile monitoring, quality of a process is described by a relationship between a response variable and one explanatory variable, referred to as simple linear profile in the literature. Most of the papers in this field have assumed that observations within each profile are independent; however, the independency between the observations can be violated due to time collapse between two successive samplings in many real applications. On the other hand, usually real time of changes in process (change point) is different from the time control charts alarm the process is out-of-control. Finding the change point in the process saves time and money to find out root causes of the problem in the process. This paper specifically assumes that quality of process is modeled by using an AR(1) auto correlated simple linear profile. Then, the step change point of the process is estimated by using maximum likelihood and clustering methods after getting a signal from the  $T^2$  hotelling control chart in Phase II. Performance of the proposed methods is compared by using simulation studies. Finally, an application of the proposed methods is shown through a real case.

\* Corresponding author. Amirhossein Amiri

Tel.: 021-51212065; E-mail address: [amiri@shahed.ac.ir](mailto:amiri@shahed.ac.ir)