

## ارائه الگوریتم شاخه و برش برای حل مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی با استفاده از نامعادلات معتبر

جواد بهنامیان<sup>۱\*</sup>، فاطمه کمیجانی<sup>۲</sup>

۱. دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.  
 ۲. کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.

### خلاصه

در این مقاله مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی در نظر گرفته شده که در عین کاربردی بودن آن به عنوان یکی از مسائل پیچیده در مبحث بهینه‌سازی ترکیبیاتی مطرح بوده و این امر باعث توجه روز افزون محققین به این مسئله شده است. در این مسئله با فرض وجود تعدادی کارگاه، تعداد کار بایستی با مسیر تولیدی که از قبل معلوم است در این کارگاه‌ها پردازش شوند. به منظور حل این مسئله، در این مقاله، ابتدا مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی به صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مدل گردیده است. سپس با توجه به محدودیت حل مسئله به صورت دقیق با استفاده از این مدل، روش برش سطحی به منظور ایجاد نامعادلاتی که برای مسئله معتبرند در قالب الگوریتم شاخه و برش پیشنهاد گردیده است. هدف از اضافه کردن این مجموعه از نامعادلات، ایجاد کران پایینی است که در عین حال که جواب‌های شدنی توسط آن‌ها حذف نمی‌شود، باعث تسریع حل در قالب الگوریتم شاخه و برش می‌شود. برای حل مسئله به صورت بهینه، نتایج نشان می‌دهد که حدود پایین ایجاد شده توسط مدل مجدداً فرموله شده، قوی‌تر از حدود پایین ایجاد شده توسط مدل اصلی آزاد شده می‌باشد.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۶/۰۹/۲۹

پذیرش ۱۳۹۷/۱۱/۱۶

### کلمات کلیدی:

زمان‌بندی  
 مسئله تولید کارگاهی  
 الگوریتم شاخه و برش  
 نامعادلات معتبر

مناسب از بازار مشتریان خود، در تلاش‌اند تا به بهترین شکل، تخصیص و توالی فعالیت‌های خود را تعیین کنند.

مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی به عنوان یکی از مهم‌ترین زیر مجموعه‌های مسائل زمان‌بندی، شامل مجموعه‌ای از کارهاست که بایستی روی مجموعه‌ای از ماشین‌ها زمان‌بندی شود به طوری که هر کار باید به ترتیبی از پیش تعیین شده پردازش خاصی روی هر ماشین داشته باشد. این مسئله نه تنها Np-hard<sup>۲</sup> است بلکه از نظر اجرایی دارای کاربردهای واقعی زیادی بوده و نمونه کلی‌تری از مسئله زمان‌بندی جریان کارگاهی است. مشکل غیرقابل حل بودن این مسئله در زمان معقول نیز یکی از دلایلی است که این مسئله مورد توجه محققین زیادی در زمینه بهینه‌سازی قرار گرفته است. به

### ۱- مقدمه

زمان‌بندی با تخصیص کارها و فعالیت‌ها به منابع و ماشین‌آلات و تعیین توالی کارهای تخصیص یافته به هر یک از منابع و ماشین‌آلات، سر و کار دارد. تعیین توالی عملیات با تلاش‌های هنری گانت<sup>۱</sup> از ابتدای قرن نوزدهم به عنوان موضوعی مهم وارد صنعت شد. در فضای رقابتی امروز با توجه به افزایش روزافزون قدرت مشتریان، ارائه برنامه زمان‌بندی مناسب برای هر یک از سازمان‌های تولیدی و خدماتی امری اجتناب ناپذیر است؛ هر یک از سازمان‌های تولیدی و خدماتی به منظور رسیدن به اهداف خود و کسب سهم

\* نویسنده مسئول: جواد بهنامیان

تلفن: ۰۵-۳۸۲۹۲۵۰۸۱-۰۸۱، پست الکترونیکی: behnamian@basu.ac.ir

1. Henry Gantt

2. Non-deterministic polynomial-time hard

پیشنهاد دادند که نشان دهنده قدرت خود می باشد. در نهایت جواب های تولیدی نشان دهنده اثربخشی الگوریتم شاخه و برش با استفاده از نامعادلات پیشنهادی می باشد. کیانفر<sup>۷</sup> [۶] نامعادلات معتبری را برای سه زیرساخت مسئله کوله پشتی عدد صحیح مختلط یا ضرایب غیر منفی دلخواه معرفی کرد.

دلا کروچی<sup>۸</sup> و همکاران [۷] مسئله زمان بندی تک ماشینی را با زمان های آزادی در نظر گرفتند. آن ها الگوریتم جستجوی همسایگی را در مقیاس بزرگ بر اساس برنامه ریزی ریاضی ارائه دادند، که این الگوریتم های ابتکاری از فرمولاسیون زمان تکمیل وابسته به موقعیت از مسئله برای اضافه کردن نامعادلات معتبر استفاده می کنند. پسان و نرون<sup>۹</sup> [۸] مسئله زمان بندی ماشین آلات موازی را بررسی کردند و چندین کران پایین را برای آن پیشنهاد دادند. نتایج محاسباتی نشان دهنده اثربخشی کران های پایین پیشنهادی می باشد. گیکوئل و مینوکس<sup>۱۰</sup> [۹] مسئله زمان بندی و مسئله تعیین اندازه دسته تولید چند محصوله را با توالی وابسته به تغییرات هزینه را بررسی کردند. آن ها با هدف توسعه رویکرد جواب های دقیق از رویکرد شاخه و برش برای مسئله بهینه سازی ترکیبیاتی فوق استفاده کردند. برای دستیابی به این هدف، خانواده ای از نامعادلات معتبر را با در نظر گرفتن تناقض بین محصولات مختلف که به طور هم زمان نیازمند تولید روی منابع هستند را پیشنهاد دادند. سپس الگوریتم ابتکاری و دقیقی را بر اساس الگوریتم تولید برش سطحی را ارائه دادند. در نهایت، نتایج محاسباتی بیانگر سودمندی نامعادلات در تقویت فرمولاسیون مختلط عدد صحیح و خطی مسئله و کاهش زمان محاسباتی کل می باشد. بهدانی و اسمیت<sup>۱۱</sup> [۱۰] مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط را برای مسئله فروشنده دوره گرد اقلیدسی یا مسئله فروشنده دوره گرد به اندازه کافی نزدیک فرموله کردند. پس از حل نامعادلات معتبری که موجب بهبود کران و قابلیت حل این فرمولاسیون می شود را پیشنهاد کردند.

لووکس<sup>۱۲</sup> و همکاران [۱۱] مسئله مسیریابی وسیله نقلیه کلاسیک را که در آن ظرفیت خودرو ثابت نیست را در نظر گرفتند. ابتدا مسئله را با رویکرد انتخاب ظرفیت و بهترین مسیر برای حداقل سازی هزینه بهره برداری و مسافت طی شده حل کردند. بر اساس نتایج محاسباتی، آن ها چندین نامعادله معتبر را معرفی کردند که موجب داشتن یک فرمولاسیون برنامه ریزی مختلط خطی و عدد صحیح از مسئله مسیریابی وسیله نقلیه را با ظرفیت وسیله نقلیه ثابت می باشد. اسماعیل بیگی<sup>۱۳</sup> و همکاران [۱۲] دو فرمولاسیون مسئله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط را برای مسئله زمان بندی

عنوان یک مثال، به دلیل مشکلات محاسباتی، نمود خاصی از مسئله که شامل ۱۰ کار و ۱۰ ماشین که در کتاب موث و تامسون<sup>۱</sup> [۱] در سال ۱۹۶۳ مدل شده بود به مدت ۲۰ سال به صورت غیر قابل حل باقی ماند. این نمود برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ توسط الگوریتم کارلیبر و پنسون<sup>۲</sup> [۲] که بهینگی را تضمین نمی کرد حل گشت و از آن پس یک روند بهبود الگوریتم ها برای حل آن ایجاد شد به طوری که بهبود الگوریتم حل در سال ۲۰۱۳ توسط آشور<sup>۳</sup> و همکاران [۳] به اوج خود رسید.

هدف از این پژوهش، توسعه روشی مؤثر برای ایجاد کران پایین برای مسئله زمان بندی در قالب الگوریتم های شاخه و برش است به طوری که زمان حل آن را بهبود بخشد. به طور دقیق تر می توان گفت که این روش سعی دارد با ایجاد کران پایینی با اضافه کردن مجموعه ای از نامعادلات با نام نامعادلات معتبر، در عین حال که جواب های شدنی را حذف نمی کند روند حل روش شاخه و کران<sup>۴</sup> که مشکل اساسی آن ها کندی است تسریع نماید. در حقیقت روش ارائه شده پس از ایجاد نامعادلات معتبر و کران های پایین، سعی دارد با استفاده از آنها در روش شاخه و کران زمان حل را کاهش و در نتیجه نمودهای بزرگ تری از مسئله را حل نماید.

ادامه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲ ادبیات نامعادلات معتبر و ادبیات زمان بندی تولید کارگاهی و در بخش ۳ تعریف و مدل بندی مسئله زمان بندی تولید کارگاهی انجام می گیرد. در بخش ۴ دو نامعادله معتبر و چگونگی محاسبات ارائه شده است. در بخش ۵ الگوریتم شاخه و کران پایه معرفی می شود و در نهایت نیز نتایج عددی ارائه می شود. نتیجه گیری و مطالعات آتی نیز در بخش ۶ ارائه شده است.

## ۲- ادبیات موضوع

در این بخش پیشینه تحقیق در دو بخش ادبیات نامعادلات معتبر و ادبیات زمان بندی تولید کارگاهی ارائه گردیده است.

### ۲-۱- نامعادلات معتبر

کاربیج و هوری<sup>۵</sup> [۴] مدل های برنامه ریزی عدد صحیح مختلط را برای مسئله زمان بندی جریان کارگاهی دو ماشینی با هدف حداقل سازی دیرکرد ارائه دادند. همچنین نامعادلات معتبری را با هدف تنگ کردن فضای حل پیشنهاد دادند. نتایج محاسباتی بیانگر اثربخشی مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط پیشنهادی می باشد. ژانگ<sup>۶</sup> و همکاران [۵]، الگوریتم برنامه نویسی پویا با زمان های چند جمله ای را برای مسئله تعیین اندازه دسته تولید با تقاضای متوسط ارائه دادند. سپس خانواده ای از نامعادلات معتبر را برای مسئله

7. Kianfar

8. Della Croce

9. Pessan &amp; Neron

10. Gicquel &amp; Minoux

11. Behdani &amp; Smith

12. Louveaux

13. Esmailbeigi

1. Muth &amp; Thompson

2. Carlier &amp; Pinson

3. Ashour

4. Branch &amp; Bound

5. Kharbeche &amp; Haouri

6. Zhang

تصادفی از بین می‌رود و سپس نامعادلات معتبر برای بازسازی جواب‌های کامل استفاده می‌شوند.

کرمی نسب و سیدحسینی<sup>۱۰</sup> [۲۱] یک فرمولاسیون عدد صحیح مختلط را به طور هم‌زمان برای مسئله تعیین اندازه دسته تولید و زمان‌بندی در محیط تولید کارگاهی ارائه دادند. یکی از مفروضات واقعی در رابطه با ماشین‌آلات انعطاف پذیر، توانایی مدیر تولید در تغییر سرعت ماشین‌هاست که موجب تولید تعدادی نامعادله معتبر بر اساس ساختار مسئله می‌شود. که این نامعادلات موجب کاهش بخش‌های غیر بهینه فضای حل می‌شوند. بنزیانی<sup>۱۱</sup> و همکاران [۲۲] مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی را با هدف حداقل سازی زمان تکمیل کل در نظر گرفتند، آن‌ها فرمولاسیون ریاضی‌ای را پیشنهاد دادند که تعدادی نامعادله معتبر را برای ایجاد کران پایین معرفی می‌کند. کریمی نسب و مدرس<sup>۱۲</sup> [۲۳] به طور هم‌زمان مسئله تعیین اندازه دسته تولید و زمان‌بندی را در محیط تولید کارگاهی در طول تعداد متناهی از دوره‌ها را بررسی کردند. به دلیل انعطاف‌پذیر بودن ماشین‌آلات، مدیر تولید قادر به تغییر سرعت آن‌ها بود. مسئله به صورت عدد صحیح مختلط فرموله شد. سپس تعدادی نامعادله معتبر بر اساس ساختار مسئله تولید شد. نامعادلات معتبر پیشنهادی به منظور سرعت بخشیدن به روند جستجو به فرمولاسیون مسئله اضافه شدند. سپس عملکرد نامعادلات با نرم افزار CPLEX بررسی شد.

هام<sup>۱۳</sup> و همکاران [۲۴] مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی انعطاف‌پذیر با ماشین‌آلات پردازش موازی دسته‌ای را مورد بررسی قرار دادند. ابتدا، آن‌ها یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط پیشرفته را ارائه دادند، سپس چند نامعادله معتبر برای کاهش فضای حل به مسئله افزودند.

### ۳- تعریف مسئله، پیچیدگی و مدل‌سازی

مسئله شامل  $n$  کار  $J_1, \dots, J_n$  و  $m$  ماشین متفاوت  $M_1, \dots, M_m$  را در نظر بگیرید. هر کار  $J_j$  شامل  $n_i$  عملیات  $o_{i1}, \dots, o_{in_i}$  است. بعلاوه فرض می‌شود عملیات  $o_{ik}$  می‌تواند تنها توسط ماشین  $u_{ik}(i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n_i)$  پردازش شود، زمان پردازش مربوطه توسط  $p_{ik}$  نشان داده می‌شود. تنها یک ماشین از هر نوع وجود دارد که می‌تواند یک عملیات را در یک زمان پردازش کند. بعلاوه یک کار نمی‌تواند به صورت هم‌زمان توسط دو ماشین پردازش شود. طبق این محدودیت‌ها باید ترتیبی از همه  $o_{ik}$  عملیات برای هر ماشین  $u_{ik} = M_j$  پیدا کنیم به طوری که برای زمان‌بندی مربوطه ( $C_{max}$ ) حداکثر زمان اتمام همه کارها باید حداقل شود. مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی، یکی از مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی است که زیاد مورد مطالعه قرار گرفته است با این حال

جریان کارگاهی ارائه دادند. برای سرعت بخشیدن به رویکرد حل، چندین تکنیک از قبیل پیش پردازش و نامعادلات معتبر را ارائه دادند. یک مطالعه گسترده محاسباتی با استفاده از مثال‌های مختلف نشان دهنده کارایی فرمولاسیون جدید در مقایسه با روش‌های دیگر می‌باشد. سوبرمانیم و گونریس<sup>۱</sup> [۱۳] سه فرمولاسیون مختلط عدد صحیح و خطی را برای مسئله فروشنده دوره گرد سازگار ارائه دادند و کلاسی از نامعادلات معتبر را برای تقویت این فرمولاسیون معرفی کردند. ساندر و راتینام<sup>۲</sup> در سال ۲۰۱۵ فرمولاسیون برنامه‌ریزی عدد صحیح را برای مسئله فروشنده دوره گرد با نامعادلات معتبری که برنامه‌ریزی خطی آزاد شده را تقویت می‌کند ارائه دادند. گیانسی<sup>۳</sup> و همکاران [۱۴] الگوریتم شاخه و برش و شاخه و قیمت را برای مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با متوسط دوباره پرسازی امکانات را پیشنهاد دادند. سپس با افزودن نامعادلات معتبر موجب تقویت مسئله خطی آزادسازی شده شدند.

در تحقیق جدیدی گئورگی و کیس<sup>۴</sup> [۱۵] برای حداقل سازی حداکثر تأخیر در مسئله زمان‌بندی تک ماشین با محدودیت مواد اولیه، روش شاخه و برش ارائه نمودند. هافمن و بوشر<sup>۵</sup> [۱۶] برای مسئله شکل‌دهی جریان قوس در زمان‌بندی خدمه راه آهن با نرخ حضور و غیاب نامعادلات معتبری توسعه دادند. سیلوستر و همکاران<sup>۶</sup> [۱۷] الگوریتمی جدید با استفاده از روش شاخه و برش برای حداقل سازی شاخه‌های رؤس مسئله حداقل درخت فراگیر به تازگی ارائه نمودند. دالمیجر و اسلیت<sup>۷</sup> [۱۸] در مسئله تخصیص پنجره زمانی در مسیریابی وسایل نقلیه از روش شاخه و برش بهره جستند. برای مسئله مسیریابی-موجودی با استفاده از کشتی، تجزیه و تحلیلی برای یک روش پیشرفته برای شاخه و برش توسط لفور و همکاران<sup>۸</sup> [۱۹] ارائه نمودند.

جمع‌بندی از کاربرد روش شاخه و برش در جدول ۱ خلاصه شده است. همچنان که ملاحظه می‌کنید تاکنون روش شاخه و برش با استفاده از نامعادلات معتبر برای مسئله زمان‌بندی تولید بکار نرفته است و بنابراین در این تحقیق بر آن شدیم تا این روش را بکار ببریم.

### ۲-۲- زمان‌بندی تولید کارگاهی

در سال ۲۰۰۸ فیمنس و لورنکو<sup>۹</sup> [۲۰] یک روش جستجوی بهینه را برای مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی ارائه دادند که از ترکیب روش جستجوی ممنوع با نامعادلات معتبر به دست می‌آید. بخشی از جواب به دست آمده از جستجوی ممنوع توسط روش حریمانه

1. Subramanyam & Gounaris
2. Sundar & Rathinam
3. Gianessi
4. Györgyi and Kis
5. Hoffmann and Buscher
6. Silvestri et al.
7. Dalmeijer and Spliet
8. Lefever et al.
9. Fernandes & Lourenco

10. Karimi nasab & Seyedhoseini

11. Benziani

12. Karimi nasab & Modarres

13. Ham

جدول (۱): کاربرد الگوریتم شاخه و برش

روش	سال	فروشنده دوره گرد	کوله پشتی	مسیریابی وسیله نقلیه	جریان کارگاهی	تولید کارگاهی	تک ماشینی	ماشین های موازی
	۱۹۵۴	√						
	۱۹۷۰		√					
	۱۹۹۱					√		
	۱۹۹۷			√	√			
	۲۰۰۶							√
شاخه و برش	۲۰۰۸					√		
	۲۰۱۱	√			√		√	√
	۲۰۱۲		√		√			
	۲۰۱۳					√	√	√
	۲۰۱۴	√	√	√		√		
	۲۰۱۵	√		√	√	√		
	۲۰۱۶			√		√		
	۲۰۱۷			√				
	۲۰۱۸			√				
	۲۰۱۸						√	

روی بردار  $(x_{j\alpha}; j \in J, \alpha \in M)$  برای ارائه زمان به صورت روابط ۱ تا ۳ هستند. برای شرکت دادن تابع هدف، یک متغیر اضافی  $Z$  که به صورت رابطه ۴ استفاده می شود. رابطه ۵ مدل بندی را به صورت کلی نشان می دهد.

$$x_{j\alpha} \geq 0 \quad \forall j \in J, \alpha \in M \quad (1)$$

$$x_{j\sigma_t} \geq x_{j\sigma_{t-1}} + P_{j\sigma_{t-1}} \quad \forall j \in J, t = 2, \dots, m \quad (2)$$

$$x_{i\alpha} \geq x_{j\alpha} + P_{j\alpha} \quad \text{or} \quad x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{i\alpha} \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M \quad (3)$$

$$Z \geq x_{j\sigma_m} + P_{j\sigma_m} \quad \text{for all } j \in J \quad (4)$$

$$\text{minimize}\{Z: \text{s. to (1), (2), (3) and (4)}\} \quad (5)$$

این فرمولاسیون مسئله با نام برنامه ریزی گسسته معروف بوده [۲۶-۲۸]، که در آن از محدودیت این یا آن<sup>۱</sup> در محدودیت شماره (۳) استفاده شده است. با تبدیل مستقیم، می توان مسئله برنامه ریزی گسسته را به مسئله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط تبدیل کرد که در آن باید یک متغیر  $Y_{ij}^\alpha$  برای هر شرط (۳) که به صورت باینری است معرفی شود و  $K$  به عنوان یک عدد ثابت بزرگ بکار رود. با این تعریف می توان چنین گفت که  $Y_{ij}^\alpha$  برابر ۱ است اگر  $i$  قبل از  $j$  روی ماشین  $\alpha$  زمان بندی شود و اگر  $j$  قبل از  $i$  روی ماشین  $\alpha$  زمان بندی شود  $Y_{ij}^\alpha$  برابر صفر است.

$$x_{i\alpha} \geq x_{j\alpha} + P_{j\alpha} - K * Y_{ij}^\alpha \quad (6)$$

$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{i\alpha} - K * (1 - Y_{ij}^\alpha) \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M$$

روش برش سطحی را می توانیم برای دو حالت گسسته و عدد

هنوز مشکل حل بهینه آن به صورت چالش باقی مانده است. با وجود آنکه برخی از موارد خاص مسئله زمان بندی تولید کارگاهی مانند مسئله با ۲ ماشین و کمتر از ۳ عملیات برای هر کار و مسئله با ۲ ماشین و زمان پردازش واحد می تواند در زمان چند جمله ای حل شود، به صورت کلی مسئله زمان بندی تولید کارگاهی، مسئله Np-hard است [۲۵] و به همین دلیل برای یافتن جواب بهینه تلاش محاسباتی فراوانی انجام شده که یکی از مهم ترین آنها استفاده از الگوریتم شاخه و کران است.

روش شاخه و کران، روشی دقیق و روش بهینه سازی برای پیدا کردن یک جواب بهینه است که به روش شاخه زنی و تخمین حدود بالا و پایین بستگی دارد. اگر حد پایین برای برخی از گره های درخت (مجموعه ای نامزدها) بیشتر از حد بالا برای برخی گره های دیگر باشد، گره درخت از جستجو حذف می شود. این روش تا زمانی که یک زمان بندی کامل برای ماشین به دست بیاید انجام می شود. برای حل این مسئله ابتدا مجموعه محدود  $J$  از کارها و مجموعه محدود  $M$  از ماشین ها را به عنوان ورودی ها در نظر گرفته شده که در آن برای هر کار  $j \in J$  ترتیب  $(\sigma_1^j, \dots, \sigma_m^j)$  از ماشین ها را ( $m = |M|$ ) که ترتیب پردازش  $j$  بر روی ماشین ها مفروض است. با این مقدمه می توان گفت که کار  $j$  بایستی ابتدا بر روی  $\sigma_1^j$  و سپس روی  $\sigma_2^j$  و ... پردازش شود. همچنین برای هر کار  $j$  و ماشین  $\alpha$  باید زمان پردازش، عدد صحیح غیر منفی  $P_{j\alpha}$  را از  $j$  روی  $\alpha$  داشته باشیم. هدف، پیدا کردن زمان بندی  $J$  روی  $M$  حداقل کردن حداکثر زمان تکمیل کارهای  $J$  است. برای هر کار  $j$  و ماشین  $\alpha$ ،  $x_{j\alpha}$  را زمان شروع کار  $j$  روی ماشین  $\alpha$  قرار می دهیم. محدودیت ها

1. Either-or

گومری که برای آن فرمول و روش حل وجود دارد و برخی دیگر که فرمولی برای آنها وجود ندارد. پس از تولید این نامعادلات با روش‌های مختلف و افزودن نامعادلات به مسئله اصلی، روند جستجو تسریع می‌شود. در برخی موارد، برخی نامعادلات معتبر بر نامعادلاتی که از آنها مشتق شده‌اند، دلالت می‌کنند بنابراین نامعادله اصلی را باید از مسئله حذف کرد. در بین تمام روش‌های موجود حل مسائل Np-hard، روش برش سطحی در کاهش زمان حل مدل‌های ریاضی توسط حل‌کننده‌های تجاری مانند CPLEX بسیار قدرتمند است. مسائل زیادی تاکنون با این الگوریتم حل شده‌اند که در جدول ۱ به آنها اشاره شده است. پس از حل باید نتایج زیر به دست بیاید [۳۰]:

۱- با این روش، تعدادی محدودیت به ازای هر مجموعه برش به فرمولاسیون اصلی اضافه می‌شود.

۲- افزودن هر مجموعه برش باید به فرمولاسیون اولیه، باید حدود LP آن را به طور معنی داری بهبود دهد.

۳- فاکتور مهم، پیدا کردن جواب شدنی مورد نیاز از مسئله با زمان پردازش کوتاهی می‌باشد.

۴- اگر جواب شدنی‌ای از فرمولاسیون در زمان کوتاهی با شکاف کم بین حدود بالا و پایین به دست بیاید، می‌توانیم ادعا کنیم که کیفیت خوبی را به دست آورده‌ایم.

۵- بدیهی است که برش‌های پیشنهادی باید به طور معنی داری زمان کل پردازش را بهبود دهند.

در این مسئله، ما می‌توانیم نامعادلات معتبری که شامل متغیر  $Y$  هستند را استفاده کنیم. نامعادلات به خوبی برای فرمولاسیون گسسته توسعه داده شده‌اند. در این پژوهش دو برش مثلثی و برش ناقص را برای حالت عدد صحیح مختلط ایجاد می‌کنیم.

#### ۴-۱- برش مثلثی

برش مثلثی به صورت زیر مدل بندی می‌شود.

$$\text{Min } Z \quad (10)$$

$$x_{j\alpha} \geq 0 \quad \text{for all } j \in J, \alpha \in M \quad (11)$$

$$x_{j\sigma_t} \geq x_{j\sigma_{t-1}} + P_{j\sigma_{t-1}} \quad \forall j \in J, t = 2, \dots, m \quad (12)$$

$$x_{i\alpha} \geq x_{j\alpha} + P_{j\alpha} - K * Y_{ij}^\alpha \quad \text{and} \quad (13)$$

$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{i\alpha} - K * (1 - Y_{ij}^\alpha) \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M \quad (14)$$

$$Z \geq x_{j\sigma_m} + P_{j\sigma_m} \quad \forall j \in J \quad (15)$$

$$0 \leq Y_{ij}^\alpha \leq 1 \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M \quad (16)$$

$$Y_{ij}^\alpha + Y_{jk}^\alpha + Y_{ki}^\alpha \leq 2 \quad \forall i, j, k \in J \quad (17)$$

برای هر ۳ کار  $i, j, k$  و هر ماشین  $\alpha$ ، باید نامعادله ساده مثلثی را در نظر بگیریم. تعریف این نامعادله بدین صورت است که اگر  $i$  قبل  $j$  زمان‌بندی شود و  $j$  قبل  $k$ ، سپس باید  $i$  قبل  $k$  زمان‌بندی شود. برای نوشتن این نامعادله ما به حداقل ۳ کار نیاز داریم. برای نوشتن این نامعادله ما نیاز داریم به جایگزین،  $1 - Y_{ij}^\alpha$  و بستگی دارد که چطور متغیر  $Y$  را تخصیص دهیم.

صحيح مختلط توسعه دهيم اما در اين پژوهش فقط مسئله برنامه‌ريزی عدد صحيح مختلط را در نظر می‌گیريم. در مورد حالت گسسته ابتدا باید مسئله خطی آزاد شده آن را حل کنیم و سپس بررسی کنیم که آیا محدودیت ۳ را ارضا می‌کند یا خیر. بدین ترتیب:

$$\text{minimize } \{Z: \text{subject to } (1), (2), \text{ and } (4)\} \quad (7)$$

سپس نامعادلاتی که در بخش بعد توسعه داده خواهد شد را به فرمولاسیون اضافه می‌کنیم که برای بردار  $x$  که زمان‌بندی را ارائه می‌دهد معتبرند اما جواب بهینه فعلی را برای مسئله خطی آزاد شده ارضا نمی‌کنند.

مقدار بهینه مسئله خطی حدهای پایین قوی برای مقدار بهینه زمان‌بندی فراهم می‌کند. به طور مشابه، در فرمولاسیون عدد صحيح مختلط، ابتدا حدود  $Y$  را به صورت زیر می‌نویسیم و با آزادسازی رابطه ۹ به دست می‌آید.

$$0 \leq Y_{ij}^\alpha \leq 1 \quad \text{for all } i, j \in J, \alpha \in M \quad (8)$$

$$\text{minimize } \{Z: \text{s. to } (1), (2), (4), (6) \text{ and } (8)\} \quad (9)$$

#### ۴- نامعادلات معتبر

نامعادلات معتبر توسط فالکرسن، دنتزیک و جانسون<sup>۱</sup> در سال‌های ۱۹۵۴ تا ۱۹۵۹ در مطالعه مسئله فروشنده دوره گرد معرفی شده‌اند. آنها با این روش به طرز موفقیت آمیزی مسئله بزرگ و متقارن فروشنده دوره گرد را به صورت بهینه حل کردند. کار اولیه آنها بر نامعادلات ترکیبی یا استنتاجات منطقی که می‌تواند از ساختار مسئله و متغیرهای ۰-۱ به دست بیاید، دلالت داشت. مطالعه اولیه دیگری نیز از این نوع توسط مارکوویتز و مین<sup>۲</sup> در سال ۱۹۷۵ انجام شد. مطالعات اولیه نامعادلات معتبر که برای مسائل عدد صحيح عمومی انجام شده است به تنهایی توسط گومری<sup>۳</sup> در اواخر سده ۱۹۵۰ و اوایل ۱۹۶۰ انجام شد. کار او بر ایجاد تعداد محدودی از نامعادلات معتبر برای حل مسئله برنامه‌ريزی عدد صحيح عمومی تأکید می‌کرد [۲۹].

نامعادلات معتبر، نامعادلاتی هستند از ابتدا در میان محدودیت‌های ما نیستند و در واقع آنها را با توجه به فضای جواب استخراج می‌کنیم و روش تولید آنها برای انواع مدل‌های خطی و عدد صحيح متفاوت می‌باشد. این نامعادلات به دو دسته نامعادلات معتبر و نامعادلات معتبر قوی تقسیم می‌شوند. نامعادلات معتبر برای مسائل عدد صحيح و عدد صحيح مختلط کاربرد دارند، همچنین تکنیک‌های عمومی‌ای هم برای تولید تمام نامعادلات معتبر ایجاد شده است. نامعادلات معتبر قوی نیز برای مسائل برنامه‌ريزی عدد صحيح Np-hard کاربرد دارند. تعیین خانواده نامعادلات معتبر قوی بیشتر هنر است تا یک روش رسمی. بنابراین روش‌های ایجاد این نامعادلات متنوع‌اند، برخی از آنها مانند روش

1. Fulkerson, Dantzig & Johnson
2. Markowitz & Manne
3. Gomory

$$x_{I\alpha} \geq x_{J\alpha} + P_{J\alpha} - K * Y_{ij}^\alpha \text{ and} \quad (20)$$

$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{I\alpha} - K * (1 - Y_{ij}^\alpha) \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M$$

$$Z \geq x_{j\sigma_m} + P_{j\sigma_m} \quad \forall j \in J \quad (21)$$

$$0 \leq Y_{ij}^\alpha \leq 1 \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M \quad (22)$$

$$x_{K\alpha} \geq E_{S\alpha} + \sum_{j \in S \setminus \{K\}} Y_{jk}^\alpha P_{J\alpha} \quad \forall S \subseteq J, \alpha \in M, K \in S \quad (23)$$

۴-۳- یک مثال عددی

در اینجا مسئله را با ۳ کار که هر کار دارای ۳ عملیات می باشد و ۴ ماشین و فرم عدد صحیح مختلط مسئله زمان بندی تولید کارگاهی، در نظر می گیریم. همان طور که در شکل ملاحظه می کنید کار A دارای سه عملیات روی سه ماشین به ترتیب اول، سوم و چهارم بوده و کار B نیز به ترتیب به ماشین های اول، دوم و چهارم و کار C به ترتیب به ماشین های دوم، سوم و اول برای تکمیل نیاز دارند. در اینجا ابتدا مسئله را با ترتیب پردازش کارها روی ماشین ها حل می کنیم. مسئله زیر را حل می کنیم و نتایج را برای ۳ حالت MIP و RMIP + B&C (یعنی ریلکس شده متغیر  $Y_{ij}^\alpha$  مسئله به همراه برش های اضافه شده) در جدول ۲ است.

Min Z

$$x_{j\alpha} \geq 0 \text{ for all } j \in J, \alpha \in M, J = 3, M = 4 \quad (24)$$

$$x_{j\sigma_t} \geq x_{j\sigma_{t-1}} + P_{j\sigma_{t-1}} \text{ for all } j \in J, t = 2, \dots, m \quad (25)$$

$$Z \geq x_{j\sigma_m} + P_{j\sigma_m} \text{ for all } j \in J \quad (26)$$

$$x_{I\alpha} \geq x_{J\alpha} + P_{J\alpha} - K * Y_{ij}^\alpha \text{ and} \quad (27)$$

$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{I\alpha} - K * (1 - Y_{ij}^\alpha) \text{ for all } i, j \in J, \alpha \in M \quad (28)$$

$$\begin{cases} Y_{ij}^\alpha = 1 & \text{اگر } i \text{ قبل } j \text{ زمان بندی شود روی } \alpha \\ Y_{ij}^\alpha = 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (29)$$

جدول (۲): نتایج اولیه

RMIP + B&C X	RMIP X	MIP X	
۰	۰	۰	A.m <sub>۱</sub>
۵	۵	۱۳	A.m <sub>۳</sub>
۱۲	۱۲	۲۰	A.m <sub>۴</sub>
۵	۵	۵	B.m <sub>۱</sub>
۸	۸	۸	B.m <sub>۳</sub>
۱۳	۲۰	۱۳	B.m <sub>۴</sub>
۱۴/۰۷۳	۲۱	۱۳	C.m <sub>۱</sub>
۰	۰	۰	C.m <sub>۳</sub>
۴/۰۷۳	۱۲	۴	C.m <sub>۴</sub>
۲۰	۲۷	۲۸	Z

جدول (۳): مقایسه اولیه

زمان	حد پایین	بهینه	روش	مدل	m×n
۰/۰۴۷		۲۷		RMP	۳×۴
۰/۰۳۱	۲۰		B&C	RMIP + B&C	۳×۴

$$d_{JI} = \max(0, E_{j\alpha} + P_{j\alpha} + P_{i\alpha} + F_{i\alpha} - LB) \quad (32)$$

$$a_{IJ} = \min(d_{IJ}, d_{JI}) \quad (33)$$

$$v_{IJ} = \max(d_{IJ} - d_{JI}) \quad (34)$$

اکثر مقدار  $v_{IJ}$  را انتخاب می‌کنیم و بدین ترتیب شاخه زنی را انجام می‌دهیم. در این پژوهش، الگوریتم شاخه و کران را استفاده نمی‌کنیم ولی در حالت کلی می‌توان پس از اضافه کردن نامعادلات معتبر، با استفاده از شاخه زنی کران‌های پایینی به دست آورد و روش شاخه و کران را با روش شاخه و برش مقایسه کرد.

### ۶- نتایج عددی

ابتدا مسئله را با ۳ کار و ۴ ماشین در نظر گرفتیم و برای آن نامعادلات معتبر تولید کردیم. در اینجا تعداد کارها را به عدد ۷ افزایش می‌دهیم. پس از اضافه کردن برش‌ها و حل مسئله با تعداد کارهای مختلف، نتایج در جدول شماره ۴ نمایش داده می‌شود.

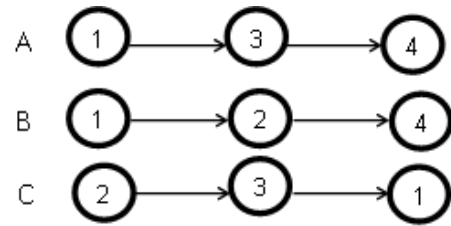
جدول (۴): مقایسه روش شاخه و برش برای مسئله با تعداد کارهای

ابعاد	تکرار	زمان	بهینه	حد		درصد شکاف
				پایین	بهبود	
۳×۴	۴۷	۰/۰۳۱	۲۷	۲۰	۲۵	۰
۴×۴	۵۹	۰/۰۳۱	۲۷	۲۰	۲۵	۰
۵×۴	۱۴۴	۰/۰۱۵	۳۱	۲۰/۰۵۶	۳۵	۱۲
۶×۴	۳۲۱	.	۳۵	۲۰/۰۵۶	۴۲	۲۶
۷×۴	۲۶۷۶	.	۳۹	۲۰/۰۵۶	۴۸	۴۵۷

نتایج نشان می‌دهند که با افزایش تعداد کارها، زمان حل کاهش می‌یابد ولی شکاف افزایش می‌یابد و از جواب بهینه دورتر می‌شویم. هدف از اضافه کردن برش‌ها رسیدن سریع‌تر به جواب بهینه می‌باشد که این هدف برآورده شده است. برای بهبود بیشتر این مساله، می‌توانیم تعداد بیشتری نامعادله معتبر به مدلمان اضافه کنیم. برای حل مسائل Np-hard مانند مساله زمانبندی تولید کارگاهی با تعداد کار و ماشین‌های زیاد در زمان معقول، بهتر است که از الگوریتم‌های فراابتکاری استفاده کنیم.

### ۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مسئله زمانبندی تولید کارگاهی به وضوح مسئله سختی در مبحث بهینه‌سازی ترکیبیاتی می‌باشد. در این مقاله، ما مسئله زمانبندی تولید کارگاهی را به دو حالت گسسته و عددصحیح مختلط بررسی کردیم. برای حل مسئله به صورت بهینه، نامعادلاتی را به مدل اولیه اضافه کردیم که این نامعادلات، کران‌های پایینی را ایجاد کردند که



شکل (۱): اطلاعات مثال عددی با ۳ کار، ۳ عملیات و ۴ ماشین

### ۵- شاخه زنی

رویه شاخه زنی برای مسائل زمانبندی تولید کارگاهی به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از قوی‌ترین رویه‌های مورد بحث، می‌تواند به صورت مستقیم از فرمولاسیون گسسته مسئله زمانبندی نتیجه شود. ابتدا چند ماشین  $\alpha \in M$  و  $2$  کار  $i, j \in J$  را انتخاب می‌کنیم و بر محدودیت ۳ تأکید داریم، سپس زیر مسئله  $P_1$  را ایجاد می‌کنیم، که  $i$  قبل از  $j$  روی  $\alpha$  زمانبندی می‌شود. دومین زیر مسئله که  $P_2$  است و در آن  $i$  قبل از  $j$  زمانبندی می‌شود. ایده این است که اگر ما بتوانیم یک انتخاب خوب از  $\alpha$  و  $i$  و  $j$  داشته باشیم می‌توانیم بعضی از ناسازگاری‌های اساسی را در زمانبندی حل کنیم و بنابراین بهبود چشم‌گیری را در حدود پایین ایجاد کنیم. برای آزمون این رویه، الگوریتم‌های ساده زیر را بکار می‌گیریم.

### ۵-۱- شاخه زنی مسئله زمانبندی تولید کارگاهی

فرض می‌کنیم زیر مسئله‌های  $P_1, \dots, P_K$  را ایجاد کرده‌ایم. زیر مسئله  $P_1$  را که دارای حد پایین انحصاری است،  $LB(P_1)$  حداقل می‌باشد. پردازش  $P_1$ ، زیر مسئله جدید  $P_{K+1}$  و  $P_{K+2}$  را ایجاد می‌کند، با شاخه زنی روی ماشین  $\alpha$  و کار  $i$  و  $j$  به طوری که  $\min\{LB(P_{K+1}), LB(P_{K+2})\}$  حداکثر است. هنگامی که یک مسئله  $P_1$  دارای شرایط  $LB(P_1) \geq UB$  باشد، آن می‌تواند از لیست زیر مسئله‌ها حذف شود. در این رویه اگر یک ماشین  $\alpha$ ، یک زیرمجموعه  $S \subseteq J$  و یک کار  $j \in J$  وجود داشته باشد داریم:

$$\min_{j \in S\{I\}} E_{j\alpha} + P_{S\alpha} + F_{S\alpha} \geq UB \quad (30)$$

سپس  $i$  باید روی  $\alpha$  قبل از هر کار دیگری در مجموعه  $S$  پردازش شود. در  $\alpha$  را انتخاب و کارهای  $i$  و  $j$  را برای شاخه زنی انتخاب می‌کنیم. محدوده توجه به ماشینی که دارای بدترین حد اولیه می‌باشد و این روند تا جایی که ماشین به صورت کامل زمانبندی شود ادامه دارد و سپس همه ماشین‌های باقیمانده در نظر گرفته می‌شوند.

$$d_{IJ} = \max(0, E_{I\alpha} + P_{I\alpha} + P_{J\alpha} + F_{J\alpha} - LB) \quad (31)$$

- [12] Esmailbeigi, R., Charkhgard, P., Charkhgard, H., (2016). "Order acceptance and scheduling problems in two-machine flow shops: New mixed integer programming formulations", *European Journal of Operational Research*, 251(2): 419-431.
- [13] Subramanyam, A., Chrysanthos, E.G., (2016). "A branch-and-cut framework for the consistent traveling salesman problem", *European Journal of Operational Research*, 248(2): 384-395.
- [14] Sundar, K., Sivakumar, R., (2016). "Generalized multiple depot traveling salesmen problem—Polyhedral study and exact algorithm", *Computers & Operations Research*, 70: 39-55.
- [15] Györgyi, P., Kis, T., (2018). "Minimizing the maximum lateness on a single machine with raw material constraints by branch-and-cut", *Computers & Industrial Engineering*, 115: 220-225.
- [16] Hoffmann, K., Buscher, U., (2018). "Valid inequalities for the arc flow formulation of the railway crew scheduling problem with attendance rates", *Computers & Industrial Engineering*, In press.
- [17] S., Silvestri, Laporte, G., Cerulli, R. (2017). "A branch-and-cut algorithm for the minimum branch vertices spanning tree problem", *Computers & Operations Research*, 81: 322-332.
- [18] Dalmeijer, K., Spliet, R., (2018). "A branch-and-cut algorithm for the Time Window Assignment Vehicle Routing Problem", *Computers & Operations Research*, 89: 140-152.
- [19] Lefever, W., Aghezzaf, E.H., Bernard Penz, K.H.H., (2018). "Analysis of an improved branch-and-cut formulation for the Inventory-Routing Problem with Transshipment", *Computers & Operations Research*, 98: 137-148.
- [20] Fernandes, S., Helena R.L. (2008). "Optimised search heuristic combining valid inequalities and tabu search", *International Workshop on Hybrid Metaheuristics*, Springer Berlin Heidelberg.
- [21] Karimi-Nasab, M., Seyedhoseini, S.M., (2013). "Multi-level lot sizing and job shop scheduling with compressible process times: A cutting plane approach", *European Journal of Operational Research*, 231(3): 598-616.
- [22] Benziani, Y., Kacem, I., Laroche, P., (2013). "Lower and upper bounds for the Job Shop Scheduling problem with min-sum criteria. Control", *Decision and Information Technologies (CoDIT)*, 2013 International Conference on. IEEE.
- [23] Karimi-Nasab, M., Modarres, M., (2015). "Lot sizing and job shop scheduling with compressible process times: A cut and branch approach", *Computers & Industrial Engineering*, 85: 196-205.

نتایج نشان دادند حدود پایین ایجاد شده توسط مدل مجددا فرموله شده، قوی تر از حدود پایین ایجاد شده توسط مدل اصلی آزاد شده می باشد. برای مطالعات آتی می توان مدل فوق را با الگوریتم شاخه و کران حل کرد و نتایج آن را با الگوریتم شاخه و برش مقایسه نمود. همچنین استفاده از روشهای ترکیبی ابتکاری- دقیق نیز می تواند روش مناسبی برای حل مسائل با این درجه سختی بخصوص در ابعاد بزرگ مسئله می باشد.

## مراجع

- [1] Muth J.F., Thompson G.L. (1963). "Industrial scheduling", Thompson, Gerald Luther, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
- [2] Carlier, J., Pinson, E., (1989). "An Algorithm for Solving the Job-Shop Problem", *Management Science*, 35(2): 164-176.
- [3] Ashour, S., Hiremath, S.R., (1973). "A branch-and-bound approach to the job-shop scheduling problem", *International Journal of Production Research*, 11(1): 47-58.
- [4] Kharbeche, M., Mohamed. H., (2013). "MIP models for minimizing total tardiness in a two-machine flow shop", *Journal of the Operational Research Society*, 64(5): 690-707.
- [5] Zhang, M., Simge, K., Hande, Y., (2012). "A polyhedral study of multiechelon lot sizing with intermediate demands", *Operations Research*, 60(4): 918-935.
- [6] Kianfar, K., (2012). "On n-step MIR and partition inequalities for integer knapsack and single-node capacitated flow sets, *Discrete Applied Mathematics*, 160(10): 1567-1582.
- [7] Della, C.F., Salassa, F., T'kindt, V., (2014). "A hybrid heuristic approach for single machine scheduling with release times", *Computers & Operations Research*, 45: 7-11.
- [8] Pessan, C., Emmanuel, N., Mohamed, H., (2013). "Development of lower bounds for the scheduling of setup tasks in serial production lines", *European Journal of Industrial Engineering* 7, 5: 558-576.
- [9] Gicquel, C., Michel, M., (2015). "Multi-product valid inequalities for the discrete lot-sizing and scheduling problem", *Computers & Operations Research*, 54: 12-20.
- [10] Behdani, B., Cole, J.S., (2014). "An integer-programming-based approach to the close-enough traveling salesman problem", *INFORMS Journal on Computing*, 26(3): 415-432.
- [11] Louveaux, F.V., Salazar-González, J.J., (2014). "Solving the Single Vehicle Routing Problem with Variable Capacity", *Transportation Science*, 50(2): 708-719.



- [28] Balas, E., (1985). "On the facial structure of scheduling polyhedra, Springer Berlin Heidelberg, 24: 179-218.
- [29] Gokce, E.I., Wilbert, E.W., (2015). "Valid inequalities for the multi-dimensional multiple-choice 0-1 knapsack problem", Discrete Optimization, 17: 25-54.
- [30] Laurence, A., (1998). Wolsey, Integer Programming, Wiley.
- [24] Ham, A.M., Eray, C., (2016). "Flexible job shop scheduling problem with parallel batch processing machines: MIP and CP approaches", Computers & Industrial Engineering, 102: 160-165.
- [25] Barker, J.R., (1981). "Primal search tree algorithms for the general job shop problem".
- [26] Balas, E., (1969). "Machine sequencing via disjunctive graphs: an implicit enumeration algorithm", Operations research, 17(6): 941-957.
- [27] Balas, E., (1979). "Disjunctive programming", Annals of Discrete Mathematics, 5: 3-51.





## Branch & Cut Algorithm for Solving job Shop Scheduling Problem Using Valid Inequalities

J. Behnamian<sup>1,\*</sup>, F. Komijani<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Industrial Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamadan, Iran, Iran.

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 20 December 2017

Accepted 05 February 2019

#### Keywords:

Scheduling  
Job shop problem  
Branch and cut  
Valid inequalities

### ABSTRACT

In this paper, the problem of scheduling the job shop production is considered, which, while being applicable as one of the complex issues in the field of combinatorial optimization, has been raised and this has caused the researchers to pay more attention to this problem. In this problem, given the existence of a number of workshops, the number of jobs should be processed in the workshop with a known production path that is already known. In order to solve this problem, in this paper, the problem of production scheduling is firstly modeled as a mixed integer programming. Then, due to the limitations of the exact solving using this model, the surface cutting method is proposed to create inequalities this is valid for the problem in the framework of branching and cutting algorithm. The aim of adding this set of inequalities is to create a lower bound, which, while the feasible solutions are not eliminated by them, accelerates the solution in the framework of branch & cut algorithm. To solve the problem optimally, the results show that the lower bound created by the re-formulated model is stronger than the lower bound created by the original relaxed model.

\* Corresponding author. Javad Behnamian

Tel.: 081-38292505; E-mail address: [behnamian@basu.ac.ir](mailto:behnamian@basu.ac.ir)