

ساختار ابرگراف‌های کد مبنا و کاربرد آن‌ها در شبکه‌های حسگر بی‌سیم

محمد حمیدی^{۱*}، ارشام برومند سعید^۲، اکبر رضایی^۳، سید امجد ثمره‌هاشمی^۴

۱ و ۳- استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ۲- دانشیار بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان،

۴- مربی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران

(دریافت: ۹۸/۲/۱۰، پذیرش: ۹۸/۷/۱۰)

چکیده

در این مقاله یک ابرگراف که توسط کدهای خطی/غیرخطی (غیر) دوتایی ساخته می‌شود را یک ابرگراف کد مبنا نامیده و سپس خواص آن بررسی خواهد شد. یک رابطه هم‌ارزی انتقالی روی هر کد دلخواه (به‌عنوان مجموعه رئوس) تعریف و کلاس‌های هم‌ارزی آن را به‌عنوان ابريال‌های ابرگراف در نظر گرفته شده است. این رابطه انتقالی اطلاعات اولیه را که از مبدأ به‌صورت یک کد ویژه در نظر گرفته شده است به‌صورت زیرمجموعه‌ای از پیام‌های کد مورد نظر به ابريال‌ها انتقال می‌دهد و در نتیجه هر ابريال را با زیرمجموعه‌ای از پیام‌های کد در تناظر یک به یک قرار می‌دهد. این پژوهش نشان می‌دهد هر رابطه هم‌ارزی انتقالی روی کدها یک ساختار ابرگراف کد مبنا ارائه می‌دهد و اهمیت این موضوع در این است که اطلاعات به‌صورت کدهای خطی/غیرخطی می‌توانند به روش‌های متفاوت انتقال پیدا کنند. در پایان ابرگراف‌های کد مبنا را به کمک یک رابطه دوتایی به گراف‌های کد مبنا مرتبط نموده تا اهمیت و کاربرد آن در شبکه‌های مختلف مورد بررسی و استفاده قرار گیرد. به‌علاوه یک نمونه از کاربرد آن در شبکه‌های حسگر بی‌سیم ارائه و تشریح شده است.

کلید واژه‌ها: کد خطی/غیرخطی، (ابر) گراف کد مبنا، رابطه انتقالی، (ابر) شبکه پیچیده

۱. مقدمه

اطلاعاتی و ارتباطی، مهندسی مخابرات، الکترونیک، کامپیوتر و سایر علوم ارتباط دارد. در حال حاضر ترکیب نظریه ابرگراف‌ها و کدگذاری کاربردهای زیادی در مهندسی اطلاعات، نظریه زبان ماشین و نظریه اطلاعات و ارتباطات دارند و محققین زیادی در زمینه تلفیق گراف و کدگذاری و کدگذاری پژوهش می‌کنند که برای اطلاعات بیشتر منابع [۱۴-۴] دیده شود. هدف و انگیزه این پژوهش ایجاد یک رابطه انتقالی برای تبادل اطلاعات در یک جامعه متناهی که به‌صورت گروه‌های مختلف از نظر اندازه و کیفیت در کنار هم قرار گرفته‌اند، می‌باشد. علاوه بر نحوه ساختن کدهای اطلاعات با استفاده از ابرگراف‌ها بر اساس کدهای خطی/غیرخطی تلاش خواهد شد که نتیجه طبقه‌بندی این اطلاعات و انتقال آن‌ها را به‌صورت گراف بر اساس کدهای خطی/غیرخطی تجزیه، تحلیل و نشان داده شوند. این یک انگیزه کلی و مهم است که می‌تواند با معیارهای محاسباتی و در قالب الگوریتم‌های خاص صورت گیرد. این پژوهش دارای کاربردهای زیادی در شبکه‌های اطلاعاتی و ارتباطی می‌باشد که به‌عنوان نمونه به کاربرد آن‌ها در شبکه‌های حسگر بی‌سیم پرداخته خواهد شد. کاربرد شبکه‌های حسگر بی‌سیم در صنایع مختلف مانند نظارت بر محیط، میدان نبرد، ردیابی هدف، مسائل حفاظتی و استفاده از آن‌ها در مکان‌های غیرقابل دسترس باعث شده است که این شبکه‌ها مورد توجه زیادی قرار بگیرند. بنابراین، در این پژوهش جنبه نگهداری این شبکه‌ها تحت ترکیب کانال‌های

در سال ۱۹۶۰ نظریه ابرگراف‌ها توسط برگ^۲ [۳] به‌عنوان تعمیمی از گراف‌ها معرفی شد. انگیزه معرفی ابرگراف‌ها را می‌توان برای حل مشکل گراف‌ها دانست بدین نحو که گراف توانایی ارتباط حداکثر دو گره را دارند و زمانی که بحث ارتباط یا بررسی چگونگی، تجزیه و تحلیل بیش از دو گره مطرح می‌شود عملاً نمی‌توان فقط از ابزار گراف‌ها استفاده نمود. اما ابرگراف‌ها می‌توانند ارتباط بین مجموعه‌ی متناهی و حتی نامتناهی از گره‌ها را مورد بررسی، تجزیه و تحلیل قرار دهند. از طرفی نظریه‌ی کدگذاری به بررسی مساله انتقال و دریافت سالم اطلاعات که مجموعه‌ای از گره‌ها می‌باشد از یک کانال یا مخزن میانی دریافت و به کانال یا مخزن دیگری انتقال می‌یابند، می‌پردازد. می‌توان به سیستم‌های مخابراتی مانند رادیو، تلویزیون، تلگراف، تلگرام، تلفن و یا سیستم‌های ذخیره اطلاعات اشاره کرد. این نظریه نخستین بار توسط شانون^۳ [۲] در سال ۱۹۴۸ مطرح و بعد از آن بر حسب اهمیت و ضرورت این مساله نظریه کدگذاری و کدگشائی ادامه پیدا کرد. نظریه کدگذاری کاربردهای زیادی در علوم مختلف به‌خصوص کدگذاری، ترکیب اطلاعات، شبکه‌های

* رایانامه نویسنده مسئول: m.hamidi@pnu.ac.ir

^۲Berge

^۳Shanon

کدگذاری شده مورد توجه و بررسی قرار داده شده است. این ترکیب در هر جامعه متنهای و یا نامتنهای با برچسبگذاری اعضا با کدهای مورد نظر در کانال اول و با روابط انتقالی که برای هدفگذاری (یعنی معرفی یک رابطه انتقالی هدفدار که کد مورد نظر را به ابرگراف کد مبنا انتقال دهد) طراحی می شوند به صورت ابرگرافهای کد مبنا در کانال دوم استخراج شده و بعد از آن در کانال نهایی با توجه به یک رابطه دوتایی به گرافهای کد مبنا تبدیل می گردند. در این پژوهش شبکههای پیچیده را به صورت ابرگرافها، ابرشبکههای پیچیده کددار را به صورت ابرگرافهای کد مبنا در نظر گرفته که ابرشبکههای پیچیده ارتباط جمعی مجموعههای متفاوت از عناصر را بررسی می کند. در واقع ابرشبکههای پیچیده ابرادات شبکههای پیچیده را مرتفع می کنند. در این پژوهش با مدل سازی ریاضی ابرشبکههای پیچیده به شبکههای پیچیده تبدیل خواهند شد.

تعریف ۲-۴: [۲] فرض کنید C یک $[n, k]_q$ -کد روی میدان F_q باشد. در این حالت C شامل q^k کد واژه است و دارای پایه‌ای به صورت $B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ است که برای هر $1 \leq i \leq k$ ، u_i ها دارای n واژه هستند. در این صورت به ماتریس $G = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k]^t$ که هر سطر آن یک کد دارای n واژه است، ماتریس مولد کد C گفته می شود. با توجه به عملیات سطری مقدماتی می توان $G = [I_k | k]$ نوشت که این نمایش را ماتریس مولد استاندارد کد خطی C نامیده می شود (منظور از I_k برداری n بعدی است که مولفه k ام آن ۱ و بقیه مولفه‌ها ۰ می باشند).

۳. ابرگرافهای کد مبنا

در این بخش با در نظر گرفتن یک کد دلخواه خطی/غیرخطی (غیر) دوتایی به بررسی مفهوم ابرگراف کد مبنا پرداخته خواهد شد. در واقع ابريال‌های یک ابرگراف کد مبنا متشکل از کد واژه‌هایی هستند که به عنوان مجموعه گره‌های این ابرگراف از یک کد دلخواه انتخاب و با معیار خاص در کنار هم قرار خواهند گرفت. در این پژوهش معیار تشکیل ابريال‌ها را وزن کد واژه‌ها در نظر گرفته به این نحو که کد واژه‌هایی با ویژگی وزنی یکسان در یک ابريال قرار داده خواهند شد.

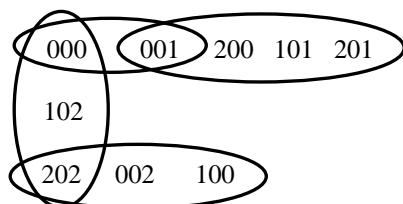
تعریف ۳-۱: فرض کنید G یک کد خطی/غیرخطی (غیر) دوتایی و $H = (G, \{E_x\}_{x \in G})$ یک ابرگراف روی G باشد. در این صورت به H ابرگراف کد مبنا گفته می شود.

مثال ۳-۲: فرض کنید $[3, k]_3$ -کد خطی غیر دوتایی $C = \{000, 001, 002, 100, 101, 102, 200, 201, 202\}$ داده شده باشد.

با در نظر گرفتن $E_1 = \{000, 001\}$

$E_2 = \{002, 100, 202\}$

$E_3 = \{200, 101, 201, 001\}$ ، $E_4 = \{000, 102, 202\}$ دیده می شود که $H = (C, \{E_i\}_{i=1}^4)$ یک ابرگراف کد مبنا است که در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): ابرگراف کد مبنا متناظر با $[3, k]_3$ -کد خطی غیر دوتایی

۲. مقدمات و پیش نیازها

تعریف ۲-۱: [۳] فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ (اعداد طبیعی دلخواه) و $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ یک مجموعه از عناصر دلخواه داده شده باشند. به زوج مرتب $H = (G, \{E_i\}_{i=1}^m)$ که در آن $E_i \subseteq G$ ، $E_i \neq \emptyset$ برای هر $1 \leq i \leq m$ و $G = \bigcup_{i=1}^m E_i$ یک ابرگراف روی G گفته می شود. در هر ابرگراف، E_i ها را ابريال‌ها و عناصر g_1, g_2, \dots, g_n را رئوس یا گره‌های ابرگراف نامیده می شوند. علاوه بر این ابرگرافها را به صورت:

$H = (G, \{E_x\}_{x \in G})$ می توان نمایش داد که در آن برای هر $x \in G$ منظور از E_x ، ابريالی است که گره x را شامل است. دو ابرگراف $H = (G, \{E_x\}_{x \in G})$ و $H' = (G', \{E'_x\}_{x \in G'})$ یکرخت نامیده می شوند هرگاه $|G| = |G'|$ و یک تناظر یک به یک گره‌ای- ابريالی برقرار باشد که در این صورت با $H \cong H'$ نشان داده خواهد شد.

تعریف ۲-۲: [۱] فرض کنید $F_q = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ یک میدان متنهای از مرتبه عدد اول q باشد. عناصر این میدان را الفبای کد نامیده و برای هر زیرمجموعه $A \subseteq F_q$ و عناصر دلخواه داده شده $u = (u_1, \dots, u_n) \in A$ بردار $u = (u_1, \dots, u_n)$ را یک کد واژه به طول n و u یک کد واژه روی A می گویند. در حالتی که $C \subseteq F_q^n$ یک زیرفضای برداری از F_q^n باشد به طوری که $[F_q^n, F_q] = k$ ، آن گاه C را یک کد خطی به طول n و بعد k نامیده می شود که به صورت $[n, k]_q$ -کد نشان داده می شود. اگر $q = 2$ ، آن گاه کدها را خطی و در غیر این صورت، غیرخطی نامیده می شوند.

تعریف ۲-۳: [۳] فرض کنید $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ و $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ دو کد واژه دلخواه باشند. در این صورت

اثبات: (۱) چون θ یک رابطه هم‌ارزی روی کد C است بنابراین $P = \{E_x = \theta(x)\}_{x \in C} = \bar{C}$ یک افزاز از C است. بنابراین، $H = (C, \bar{C})$ یک ابرگراف است. به‌علاوه چون مجموعه گره‌ها کد واژه‌ها هستند بنابراین، $H = (C, \bar{C})$ یک ابرگراف کد مینا است.

(۲) چون C یک $[n, \log_2 |C|]$ -کد است بنابراین برای هر $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ وزن کد داده‌شده بنا به تعریف به‌صورت $w(u) = \sum_{k=1}^n u_k$ محاسبه خواهد شد. در نتیجه هر دو کد واژه u و v در C در رابطه $u\theta v$ صدق می‌کنند اگر و تنها اگر $w(u) = w(v)$.

در ادامه مثالی در مورد مراحل کدگذاری اطلاعات هدف به‌صورت کد C' ، تبدیل آن به کد C با استفاده از ماتریس مولد استاندارد، تبدیل کد C به ابرگراف کد مینا بر اساس رابطه انتقالی θ ارائه خواهد شد. به‌علاوه با توجه به مقدمه پژوهش سعی خواهد شد مراحل گفته‌شده را به کمک یک رابطه هم‌ارزی θ' متمایز با رابطه انتقالی θ انجام داده و ابرگراف‌های کد مینای به‌دست‌آمده را مقایسه نمود تا اهمیت روابط انتقالی را برای انتقال اطلاعات هدف نشان داده شود.

مثال ۳-۷: فرض کنید $[6, 3]$ ، کد خطی دوتایی $C = \{100011, 010101, 001110\}$ داده شده باشد. ماتریس مولد استاندارد این کد به‌صورت زیر است:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حال کد واژه $u = (x_1, x_2, x_3)$ را در نظر گرفته و عمل ضرب ماتریس مولد استاندارد را روی آن به‌صورت $uG = (x_1, x_2, x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$ نظر گرفته شود در این‌صورت uG یک کد واژه در C است. فرض کنید $C' = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ یک کد دلخواه دیگر باشد و هر کد پیام از C' را بر اساس C کدگذاری و انتقال داده شود در این‌صورت جدول (۱) نتیجه خواهد شد.

جدول (۱): تبدیل پیام از کد C' به پیام در کد C

u	uG
000	000000
001	001110
010	010101
011	011011
100	100011
101	101101
110	110110
111	111000

بنا به قضیه ۲-۶، ابرگراف کد مینای $H = (C, \bar{C})$ در شکل (۲)

قضیه ۳-۳: فرض کنید p یک عدد اول باشد اگر عدد طبیعی n چنان موجود باشد به نحوی که $q = p^n$ ، در این‌صورت داریم:

(۱) یک کد خطی غیر دوتایی مانند C چنان موجود است $|C| = q$

(۲) اگر $H = (G, \{E_x\}_{x \in C})$ یک ابرگراف باشد به‌قسمی که $|G| = q$ ، آن‌گاه H با یک ابرگراف کد مینا یکرخت است.

اثبات: (۱) با مفروضات گفته‌شده اگر کد C را به‌صورت زیر $C = \{uu : u \in F_q\}$ در نظر گرفته شود در این‌صورت C یک کد خطی غیر دوتایی با اندازه q می‌باشد.

(۲) فرض کنید $H = (G, \{E_i\}_{i=1}^n)$ یک ابرگراف باشد. اگر $|G| = 1$ ، آن‌گاه کد $C = \{00\}$ را در نظر گرفته خواهد شد. اگر $|G| = q$ ، آن‌گاه بنا به (۱) یک کد (غیر) دوتایی C وجود دارد به‌قسمی که $|C| = q$. بنابراین، تابع دوسویی $\varphi: G \rightarrow C$ را با ضابطه $\varphi(u) = uu \in C$ تعریف نموده که از آن نتیجه خواهد شد $H' = (\varphi(G), \varphi(\{E_i\}_{i=1}^n))$ ابرگراف مورد نظر است به نحوی که $H \cong H'$

نتیجه ۳-۴: هر ابرگراف دلخواه با یک ابرگراف کد مینا یکرخت است.

در تعریف زیر به گره‌ها در ابريال‌ها یک کد واژه اختصاص داده و برای طبقه‌بندی کد واژه‌های مرتبط با هر گره دلخواه در قالب ابريال‌های یک ابرگراف کد مینا ارائه و از آن به‌عنوان یک ابزار برای ابرگراف‌های کد مینا در ادامه متن استفاده خواهد شد.

تعریف ۳-۵: فرض کنید C یک کد دلخواه باشد. برای اعداد طبیعی n و r رابطه زیر را تعریف می‌کنیم. اگر $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ و $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ دو کد واژه دلخواه در کد C باشند، آن‌گاه:

$$u\theta_r v \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n v_k = r$$

دیده می‌شود که $\theta_r = \cup_{r \geq 0} \theta_r$ یک رابطه هم‌ارزی روی کد C است. حال $\bar{C} = \{\theta(u) : u \in C\}$ را به‌عنوان مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی کد C ، تحت رابطه θ در نظر گرفته و در کل مقاله از همین نماد استفاده خواهد شد در غیر این‌صورت به آن اشاره خواهد شد.

قضیه ۳-۶: فرض کنید C یک کد دلخواه باشد. در این‌صورت داریم:

(۱) (C, \bar{C}) یک ابرگراف کد مینا است،

(۲) اگر C یک $[n, \log_2 |C|]$ -کد باشد، آن‌گاه $u\theta v$ اگر و تنها اگر $w(u) = w(v)$.

نتیجه خواهد شد. نتیجه ۳-۹: فرض کنید C یک کد خطی دلخواه باشد. در این صورت داریم:

(۱) اگر C یک $[2, \log_q |C|]$ -کد باشد، آن گاه برای هر $|C_i| = i + 1, 0 \leq i \leq q - 1$.

(۲) اگر C یک $[n, \log_2 |C|]$ -کد باشد، آن گاه برای هر $0 \leq i \leq n$ ، عدد $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ وجود دارد به قسمی که

$$|C_i| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{i+n-1-2k}{n-1}.$$

در ادامه قضیه زیر را برای ارتباط بین ابرگرافهای کد مبنا با پایه کدهای خطی/غیرخطی و گرافهای کد مبنا (گرافهایی که بر اساس ابرگرافهای کد مبنا استخراج می شوند) ارائه و نتایج آن بررسی خواهد شد.

قضیه ۳-۱۰: فرض کنید C یک کد خطی/غیرخطی دلخواه، $H = (C, \{E_x\}_{x \in C})$ ابرگراف کد مبنای متناظر با θ باشد. در این صورت رابطه دوتایی "*" روی H/θ موجود است به قسمی که H/θ یک گراف ساده است.

اثبات. فرض کنید $\theta(u)$ و $\theta(v)$ دو عضو دلخواه از H/θ باشند. رابطه دوتایی "*" را روی H/θ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\theta(u) * \theta(v) = \begin{cases} \theta(u), \theta(v) & \text{اگر } \frac{|\theta(u)|}{|\theta(v)|} \in \mathbb{N} \text{ یا } \frac{|\theta(v)|}{|\theta(u)|} \in \mathbb{N} \\ \bar{\emptyset} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

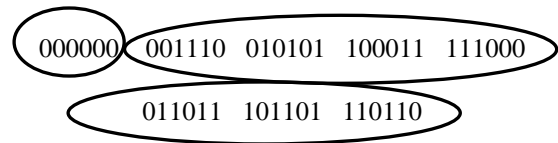
که در آن، برای هر دو کد واژه $u, v \in C$ ، $\theta(u), \theta(v)$ نشان دهنده یک یال ساده بین گره های $\theta(u)$ و $\theta(v)$ و $\bar{\emptyset}$ نشان دهنده عدم یال بین رئوس مورد نظر است. به سادگی می توان بررسی کرد که H/θ یک گراف ساده است.

گزاره ۳-۱۱: فرض کنید C یک کد خطی و $H = (C, \bar{C})$ ابرگراف متناظر با آن باشد. اگر برای هر کد واژه $u \in C$ داشته باشیم $|\theta(u)| = 1$ ، آن گاه:

- (۱) H/θ یک گراف همبند است،
- (۲) $|E| \geq |\bar{C}|$
- (۳) $|E| \geq n + 1$

اثبات: (۱) فرض کنید کد واژه $u \in C$ طوری باشد که $|\theta(u)| = 1$. بنا به تعریف "*" برای هر کد واژه $v \in C$ چون $|\theta(u)||\theta(v)| = (\theta(u), \theta(v))$ پس رابطه $\theta(u) * \theta(v) = \theta(u)$ برقرار است. در نتیجه H/θ یک گراف همبند است.

نتیجه خواهد شد.

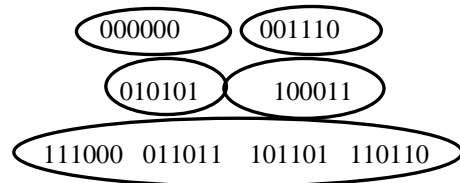


شکل (۲): ابرگراف کد مبنا متناظر با جدول (۱) و رابطه θ

اگر فرض کنیم $a_2 = 001110, a_1 = 000000$
 $a_5 = 111000, a_4 = 100011, a_3 = 010101$
 $a_6 = 011011, a_7 = 101101, a_8 = 110110$ و رابطه هم‌ارزی θ' را به صورت:

$$\theta' = \{(u_i, u_i): 1 \leq i \leq 8\} \cup \{(u_i, u_j), (u_j, u_i): 5 \leq i, j \leq 8\}$$

تعریف شود، آن گاه $\theta' \neq \theta$ و به علاوه ابرگراف $H = (C, \{E_i\}_{i=1}^5)$ به صورت شکل (۳) به دست خواهد آمد:



شکل (۳): ابرگراف کد مبنا متناظر با رابطه هم‌ارزی θ'

با تعریف رابطه های هم‌ارزی متفاوت ابرگرافهای کد مبنای متفاوت استخراج می گردد.

در ادامه از رابطه هم‌ارزی θ تعریف شده در تعریف ۳-۵ استفاده خواهد شد.

قضیه ۳-۸: فرض کنید q یک عدد اول و C یک $[n, \log_q |C|]$ -کد خطی (غیر) دوتایی باشد. در این صورت داریم:

$$|\bar{C}| = nq - n + 1 \quad (۱)$$

2) عدد $0 \leq k \leq \lfloor \frac{nq-n}{q} \rfloor$ ، $0 \leq i \leq nq - n$ و $kq \leq i \leq (k+1)q - 1$ وجود دارد به قسمی که $|C_i| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{nq-n}{q} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{i+n-1-kq}{n-1}$.

اثبات: (۱) فرض کنید $u = (u_1, u_2, \dots, u_q) \in C$ چون u یک $[n, \log_q |C|]$ -کد است بنابراین، رابطه $\sum_{i=1}^n u_i \in \{0, 1, 2, \dots, n(q-1)\}$ بنا به تعریف داریم: $|\bar{C}| = nq - n + 1$.

(۲) با به کار بردن اصل شمول و طرد شمول و قسمت (۱) به دست می آید.

می‌توان به هر یک از حروف واقع در ابرگراف‌های ابرگراف H کدهای دلخواه زیر را نسبت داد.

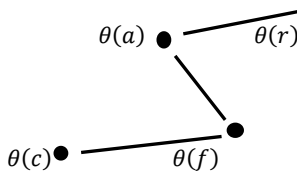
جدول (۲): کد واژه غیر دوتایی متناظر با گره‌های ارتباطی

کد	کد واژه اختصاصی
a	۲۰
b	۱۱
c	۳۰
d	۲۱
e	۱۲
f	۶۰
g	۵۱
h	۴۲
k	۳۳
l	۲۴
m	۱۵
r	۴۰
s	۳۱
p	۲۲
q	۱۳

در نتیجه ابرگراف H یک ابرگراف کد مینا است. با قرار دادن $u = u_1 u_2$ و بنا به تعریف θ (برای هر $u'_1 u'_2 = u_1 u_2$ اگر و فقط اگر $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$) داریم:

برای $u \in \{a, b\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 2$ آن‌گاه $\theta(a) = \{a, b\}$
 برای $u \in \{c, d, e\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 3$ بنابراین، $\theta(c) = \{c, e, d\}$
 برای $u \in \{f, g, h, k, l, m\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 6$ در نتیجه
 برای $u \in \{r, s, p, q\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 4$ برای $\theta(f) = \{f, g, h, k, l, m\}$
 بنابراین: $\theta(r) = \{r, s, p, q\}$

در نتیجه $|\theta(r)| = 4$ ، $|\theta(f)| = 6$ ، $|\theta(c)| = 3$ ، $|\theta(a)| = 2$. از طرفی $|\theta(a)||\theta(r)|$ ، $|\theta(a)||\theta(f)|$ و $|\theta(c)||\theta(f)|$ بنابراین، گراف θ -کد مینای H/θ شکل (۶) به‌دست خواهد آمد.



شکل (۶): گراف θ -کد مینای H/θ متناظر با ابرگراف شکل (۵)

از آنجائی که $H/\theta \cong P_4$ بنابراین گراف مسیر P_4 یک گراف θ -کد مینا است.

قضیه ۳-۱۶: هر گراف همبند، یک گراف θ -کد مینا است.

اثبات. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف دلخواه که در آن

(۲) بنابر رابطه (۱)، $\frac{H}{\theta} = (V, E)$ یک گراف همبند است. از طرفی چون کد واژه $u \in C$ چنان موجود است که $|\theta(u)| = 1$ پس $\theta(u)$ با سایر رئوس V در ارتباط است. بنابراین، اندازه گراف H/θ حداقل برابر با $|C|$ است.

(۳) چون C یک $[n, \log_q |C|]$ -کد است پس، طول هر کد واژه عدد n است. بنابراین، بنا به تعریف θ (تعریف ۲-۵)، برای هر کد واژه $u \in C$ $v \neq u$ که در آن $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ رابطه $\sum_{i=0}^n v_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ در نتیجه $|E| \geq n + 1$.

نتیجه ۳-۱۲: فرض کنید p یک عدد اول C ، یک $[n, \log_q |C|]$ -کد و $H = (C, \bar{C})$ ابرگراف کد مینای متناظر با آن باشد. در این صورت برای هر گراف H/θ داریم:

$$|V| = 2q - 1 \quad (۱)$$

$$(۲)$$

$$\bar{C} = \left\{ \theta(00), \theta(10), \dots, \theta((q-1)0), \theta((q-1)1), \dots, \theta((q-1)(q-1)) \right\} \quad (۳)$$

$$|E| = (q+1) + 4 \left(\left\lfloor \frac{2q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q-1}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2q-1}{q-1} \right\rfloor \right)$$

قضیه ۳-۱۳: فرض کنید C یک $[n, \log_2 |C|]$ -کد باشد و $2k \leq i \leq 2k+1 \leq n$ در این صورت داریم:

$$|C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{i+n-1-2k}{n-1}$$

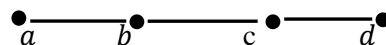
اثبات. فرض کنید $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ چون $2k \leq i \leq 2k+1$ بنابراین، $2k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq 2k+1$ در نتیجه داریم:

$$\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$$

بنابراین، کران بالای k به‌صورت $k \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$ است.

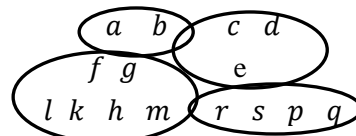
تعریف ۳-۱۴: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف دلخواه باشد. گراف G ، θ -کد مینا نامیده می‌شود، هرگاه یک ابرگراف کد مینای $H = (C, \bar{C})$ چنان موجود باشد که $H/\theta \cong G$.

مثال ۳-۱۵: با در نظر گرفتن گراف مسیر P_4 در شکل (۴)



شکل (۴): گراف مسیر P_4

ابرگراف $H = (C, \{E_i\}_{i=1}^4)$ در شکل (۵) ساخته خواهد شد.

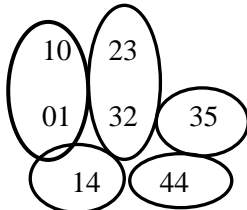


شکل (۵): ابرگراف $H = (C, \{E_i\}_{i=1}^4)$

اگر رابطه θ' برای هر $u = (u_1, u_2) \in C$ و $u' = (u'_1, u'_2)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\prod_{i=1}^2 u_i = \prod_{i=1}^2 u'_i \text{ اگر و فقط اگر } u\theta'u'$$

آن گاه، θ' یک رابطه هم‌ارزی روی کد C است و ابرگراف کد مبنای متناظر با کد C و رابطه θ' به صورت شکل (۹) به دست خواهد آمد.



شکل (۹): ابرگراف کد مبنای H' متناظر با کد C و رابطه θ'

بنابر رابطه θ' و فرض $u = u_1u_2$ داریم:

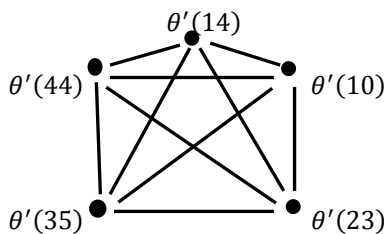
برای $u \in \{10,01\}$ داریم $\prod_{i=1}^2 u_i = 0$ بنابراین،
 $\theta'(10) = \{10,01\}$

برای $u \in \{23,32\}$ داریم $\prod_{i=1}^2 u_i = 6$ در نتیجه
 $\theta'(23) = \{23,32\}$

برای $u \in \{14\}$ داریم $\prod_{i=1}^2 u_i = 4$ آن گاه:
 $\theta'(14) = \{14\}$

برای $u \in \{44\}$ داریم $\prod_{i=1}^2 u_i = 16$ در نتیجه
 $\theta'(44) = \{44\}$ و برای $u \in \{35\}$ داریم $\prod_{i=1}^2 u_i = 15$
 بنابراین؛ $\theta'(35) = \{35\}$

حاله داریم: $|\theta'(10)| = |\theta'(23)| = 2$ و
 $|\theta'(14)| = |\theta'(44)| = |\theta'(35)| = 1$ بنابراین، گراف θ' -کد مبنای H/θ' شکل (۱۰) به دست خواهد آمد که یک گراف کامل است.



شکل (۱۰): گراف θ' -کد مبنای H/θ'

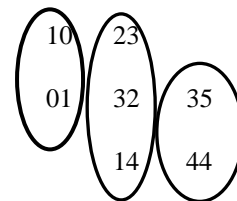
در این مثال دیده شد که اگر رابطه هم‌ارزی دیگری روی کد C مانند $\theta \neq \theta'$ تعریف کنیم علاوه بر این که ابرگراف‌های کد مبنای H و H' یکرخت نیستند گراف‌های θ -کد مبنای H/θ و θ' -کد مبنای H/θ' نیز یکرخت نمی‌شوند.

حال اگر رابطه θ داده شده باشد. حال اگر رابطه $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ که در آن $\widehat{a_r}, \widehat{a_s} = e_{rs} \in E$ برقرار باشد، آن گاه کد واژه‌های u_r و u_s را به طول حداکثر n^n ($n \in \mathbb{N}$)، به گره‌های a_r و a_s چنان نظیر خواهند شد که $|\theta(u_r)|$ یا $|\theta(u_s)|$.

حال اگر برای هر $k \notin \{r, s\}$ روابط $\widehat{a_r}, \widehat{a_k} = e_{rk} \in E$ و $\widehat{a_k}, \widehat{a_s} = e_{ks} \notin E$ را متناظر با a_k در نظر گرفته به قسمی که رابطه‌های $|\theta(u_r)|$ یا $|\theta(u_k)|$ یا $|\theta(u_s)|$ با شرط‌های $1 = (|\theta(u_r)|, |\theta(u_k)|)$ م.م.ب و $1 = (|\theta(u_k)|, |\theta(u_s)|)$ م.م.ب برقرار باشند (توجه شود که لزومی ندارد گره‌های a_r و a_s یکتا باشند چون ساختنی هستند بنابراین u_r و u_s متناظر با آن‌ها به دست خواهند آمد). با ادامه این روش می‌توان کد $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ را ساخت. بنابراین $G = (V, E)$ یک گراف θ -کد مبنای می‌باشد.

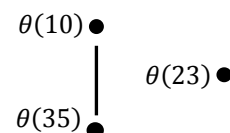
در مثال زیر نشان داده خواهد شد که عکس قضیه ۳-۱۶، لزوماً برقرار نیست یعنی گراف θ -کد مبنایی وجود دارد به قسمی که یک گراف همبند نیست.

مثال ۳-۱۷: فرض کنید کد غیرخطی به طول ۲ $C = \{10,01,23,14,32,35,44\}$ داده شده باشد. ابرگراف کد مبنای متناظر با کد C به صورت زیر می‌باشد.



شکل (۷): ابرگراف کد مبنای H متناظر با کد C

با قرار دادن $u = u_1u_2$ و بنا به تعریف رابطه θ (برای هر $u' = u'_1u'_2$ اگر و فقط اگر $u\theta'u'$) داریم: برای $u \in \{10,01\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 1$ آن گاه $\theta(10) = \{10,01\}$ برای $u \in \{23,32,14\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 5$ در نتیجه $\theta(23) = \{23,32,14\}$ برای $u \in \{35,44\}$ داریم $\sum_{i=1}^2 u_i = 8$ بنابراین $\theta(35) = \{35,44\}$ در نتیجه $|\theta(10)| = 2$ ، $|\theta(23)| = 3$ ، $|\theta(35)| = 2$ از طرفی $|\theta(10)|$ یا $|\theta(35)|$ بنابراین گراف θ -کد مبنای H/θ شکل (۸) به دست خواهد آمد که ناهمبند است.



شکل (۸): گراف θ -کد مبنای H/θ

۴. کاربرد در شبکه‌های حسگر بی‌سیم

در ادامه به کاربردی از مطالب و نتایج گفته‌شده اشاره خواهد شد که این می‌تواند شامل کاربرد ابرگراف‌ها و گراف‌های کد مینا از نوع کدهای خطی باشد. شبکه‌ها نقش مهم و اساسی را در حوزه‌های اطلاعات و ارتباطات پیاده‌سازی می‌کنند. به‌عنوان مثال می‌توان به اهمیت آن‌ها در علوم اجتماعی، علوم مهندسی، بیولوژی، علوم کامپیوتر و فناوری اطلاعات و ارتباطات تحت عنوان شبکه‌های پیچیده اشاره کرد. در علوم مهندسی و فناوری اطلاعات و ارتباطات شبکه‌های حسگر بی‌سیم^۱ که به‌صورت اختصاری WSNs نشان داده می‌شوند به‌عنوان یک شبکه حساس و مهم در زمینه تبادل اطلاعات و یک راه‌حل برای تبادل اطلاعات به مناطقی که دسترسی اطلاعات فیزیکی بسیار سخت و دشوار می‌باشد بکار برده شوند. یک شبکه حسگر متشکل از تعداد زیادی گره‌های حسگر است که در یک محیط به‌طور گسترده پخش شده و به جمع‌آوری اطلاعات از محیط یا بازپخش آن‌ها می‌پردازد [۹]. لزوماً مکان قرار گرفتن گره‌های حسگر از قبل تعیین نشده و معلوم نیست. در یک موقعیت کاملاً تصادفی این ویژگی بارز باعث می‌شود که بتوان آن‌ها را در مکان‌های غیرقابل دسترس و حتی خطرناک رها کرد.

مثال ۱-۴: فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\}$ یک WSN باشد طوری باشد که اعضای مجموعه X ، گره‌های متناظر آن هستند. یک کدگذاری دلخواه در جدول (۳) ارائه خواهد شد.

جدول (۳): کد واژه غیرخطی و غیر دوتایی متناظر با گره‌های ارتباطی \bar{X} , WSN

کد	کدواژه اختصاصی
a	۱۲۳
b	۲۳۱
c	۴۱۲
d	۵۲۰
e	۶۰۱
f	۱۱۵
g	۴۳۱
h	۲۳۴
k	۷۱۱
l	۴۳۲

با قرار دادن $u = u_1u_2u_3$ و بنا به تعریف رابطه θ (برای هر $u' = u'_1u'_2u'_3$ اگر و فقط اگر $u\theta u'$) داریم:

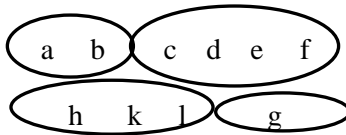
برای $u \in \{a, b\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 6$ بنابراین، $\theta(a) = \{a, b\}$

برای $u \in \{c, d, e, f\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 7$ آن‌گاه $\theta(c) = \{c, d, e, f\}$

برای $u \in \{g\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 8$ پس $\theta(g) = \{g\}$

برای $u \in \{h, k, l\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 9$ در نتیجه $\theta(h) = \{h, k, l\}$

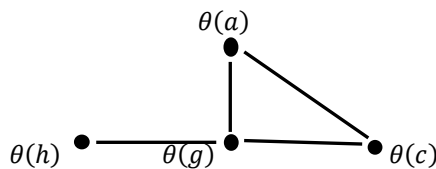
حال با توجه به مطالب گفته‌شده ابرگراف کد مینای $H = (C, \bar{C})$ متناظر با جدول (۳) به‌صورت شکل (۱۱) خواهد شد.



شکل (۱۱): ابرگراف کد مینای با جدول (۳)

حال با توجه به رده‌های هم‌ارزی H بنا به قضیه ۳-۱۲، داریم:

$|\theta(a)| = 2$, $|\theta(c)| = 4$, $|\theta(g)| = 1$
 $|\theta(k)| = 3$. از طرفی $|\theta(a)||\theta(c)|$, $|\theta(a)||\theta(g)|$, $|\theta(g)||\theta(c)|$ و $|\theta(g)||\theta(k)|$ بنابراین گراف θ -کد مینای H/θ شکل (۱۲) نتیجه خواهد شد.



شکل (۱۲): گراف θ -کد مینا مستخرج از WSN متناظر با جدول (۳)

این گراف شامل ۴ رأس است و ارتباط بین رئوس را در شکل (۱۲) نشان داده شده است. علاوه‌براین هر رأس نماینده‌ای از رده‌های هم‌ارزی ابرگراف کد مینا جدول (۳) می‌باشد. شکل (۱۲) نشان می‌دهد که برآیند تأثیر گره‌های ره‌اشده در یک منطقه قابل دسترس به ۴ قسمت تقسیم شده است که بر اساس هدف توزیع ۱۰ گره مفروض، ارتباط بین ۴ قسمت معین است.

مثال ۲-۴: گراف $G = (V, E)$ که در آن

$$V = \{a, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$$

$E = \{aa_1, aa_2, aa_3, ab_1, ab_2\}$ نشان داده شده در شکل (۱۳) را در نظر بگیرید.

$$u \in \left\{ \begin{matrix} 650, 614, 632, 623, 641, 605, \\ 560, 551, 542, 533, 524 \end{matrix} \right\}$$

داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 11$ بنابراین

$$\theta(650) = \left\{ \begin{matrix} 650, 614, 632, 623, 641, 605, \\ 560, 551, 542, 533, 524 \end{matrix} \right\}$$

در این کد هر کد واژه را به صورت سه مولفه‌ای (پایداری، سرعت، ظرفیت) در نظر گرفته شده است. هر کد واژه در این کد به صورت نمادین (x_1, x_2, x_3) نمایش داده شود به قسمی که:

$$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = k$$

و $k \in K = \{2, 3, 5, 6, 11, 18\}$. برای هر عدد صحیح $k \in K$ و

شرایط لحاظ شده، تعداد ابرپال‌ها در قضیه ۳-۸ محاسبه شده است که هر کد بر حسب شرایط لازم می‌تواند ابرگراف کد مبنا را با ابرپال‌های کد‌گذاری شده متفاوت ایجاد کند. حال قرار می‌دهیم:

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 18\},$$

$$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 2\},$$

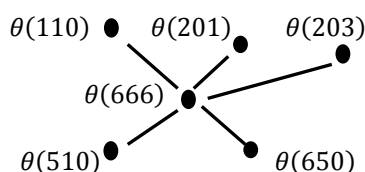
$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 3\},$$

$$E_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 5\},$$

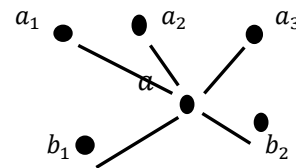
$$E_5 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 6\},$$

$$E_6 = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 11\}.$$

دیده می‌شود که $H = (C, \{E_i\}_{i=1}^6)$ یک ابرگراف کد مبنا است. حال داریم: $|\theta(110)| = 2$, $|\theta(201)| = 3$, $|\theta(666)| = 1$, $|\theta(203)| = 5$, $|\theta(510)| = 7$ و $|\theta(650)| = 11$. از طرفی چون $|\theta(666)||\theta(110)|$, $|\theta(666)||\theta(201)|$ و $|\theta(666)||\theta(510)|$ و $|\theta(666)||\theta(203)|$ شکل H/θ گراف θ -کد مبنا H/θ شکل (۱۵) نتیجه خواهد شد. با توجه به تعریف رابطه هم‌ارزی θ و عمل دوتایی * روی H ، یکریختی $H/\theta \cong G$ برقرار است. در واقع ابرگراف کد مبنا H به‌عنوان یک پایه و عامل اصلی شبکه حسگر بی‌سیم شکل (۱۴) است و با توجه به محاسبات انجام‌شده می‌توان پایه‌های دیگری بر حسب اهمیت، انتخاب یا هر معیار دیگری که هدف ما را از توزیع این گره‌ها معلوم می‌کند طراحی نمود.

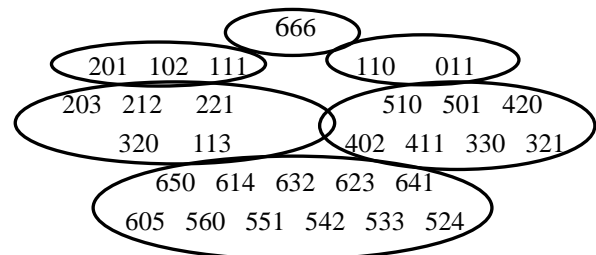


شکل (۱۵): گراف متناظر با ابرشبکه WSN متناظر با شکل (۱۴)



شکل (۱۳): شبکه حسگر بی‌سیم دریافت و انتقال اطلاعات گراف G

این گراف یک شبکه حسگر بی‌سیم را نشان می‌دهد که گره‌های a_1, a_2, a_3 به‌عنوان مبدأ و ارسال‌کننده بسته‌های اطلاعاتی به گره a هستند و گره‌های b_1 و b_2 به‌عنوان دریافت‌کننده اطلاعات از گره a هستند. اکنون یک مدل در شکل (۱۴) ارائه خواهد شد که به‌عنوان یک ابرگراف کد مبنا برای شبکه حسگر شکل (۱۴) را ایجاد می‌کند.



شکل (۱۴): ابرگراف کد مبنا متناظر با WSN متناظر با شکل (۱۳)

این ابرگراف با کد غیرخطی زیر متناظر است:

$$C = \left\{ \begin{matrix} 111, 102, 201, 110, 011, 666, \\ 203, 212, 221, 320, 113, 510, \\ 501, 420, 411, 402, 330, 321, \\ 650, 641, 632, 623, 614, 605, \\ 560, 551, 542, 532, 524 \end{matrix} \right\}$$

و با قرار دادن $u = u_1 u_2 u_3$ و بنا به تعریف رابطه θ (برای هر

$$u' = u'_1 u'_2 u'_3 \text{ اگر و فقط اگر } u\theta u'$$

$$\text{داریم: } (u_1 + u_2 + u_3 = u'_1 + u'_2 + u'_3)$$

برای $u \in \{666\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 18$ بنابراین

$$\theta(666) = \{666\}$$

برای $u \in \{201, 102, 111\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 3$ آن‌گاه

$$\theta(201) = \{201, 102, 111\}$$

برای $u \in \{110, 011\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 2$ در نتیجه

$$\theta(110) = \{110, 011\}$$

برای $u \in \{212, 203, 221, 320, 113\}$ داریم $\sum_{i=1}^3 u_i = 5$

بنابراین:

$$\theta(203) = \{212, 203, 221, 320, 113\}$$

برای $u \in \{510, 501, 420, 411, 402, 330, 321\}$ داریم

$$\sum_{i=1}^3 u_i = 6$$

$$\theta(510) = \{510, 501, 420, 411, 402, 330, 321\}$$

۵. نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر نشان می‌دهد که اگر بخواهیم انتقال اطلاعات و ارتباطات را از چندین مجموعه عناصر به مجموعه‌های دیگر انجام دهیم لازم است از هر مجموعه یک عنصر به‌عنوان نماینده مجموعه در نظر گرفته شود تا اطلاعات توسط این عنصر انتقال پیدا کند. اهمیت محرمانه بودن اطلاعات از مجموعه‌ها و متفاوت بودن آن‌ها ایجاب می‌کند که هر مجموعه را در یک ابريال از یک ابرگراف قرار داده و برای طبقه‌بندی این اطلاعات یک رابطه انتقالی معرفی شود. این پژوهش با برچسب‌زنی اطلاعات روی کدهای طبقه‌بندی‌شده بر اساس ابريال‌ها و ایجاد یک رابطه روی ابرگراف‌ها، گراف‌های کد مینا برای انتقال اطلاعات معرفی می‌نماید. نتیجه مهم و اصلی این پژوهش این است که برای هر رابطه معرفی‌شده روی کدها اعم از تعیین فاصله، وزن یا هر معیار خاص دیگر می‌توان ابرگراف‌های کد مینای متفاوتی استخراج کرد که این نشان می‌دهد روش انتقال و طبقه‌بندی اطلاعات کددار یکتا نیست و می‌تواند بر اساس شرایط متفاوت الگوها را تغییر داد. علاوه بر این بعد از استخراج ابرگراف کد مینای به‌دست‌آمده می‌توان روابط متفاوتی را بر حسب شرایط حاکم طوری تعریف نمود که پیام‌های کدگذاری شده بعد از انتقال از کانال‌های مورد نظر در شکل‌های متفاوتی به‌صورت گراف‌های کد مینا کدگشائی شوند. این پژوهش می‌تواند یک زمینه تحقیقاتی پایه برای تحقیقات جدیدتر با در نظر گرفتن الگوریتم‌های چند ترکیبی از ابرگراف‌های کد مینا به گراف‌های کد مینا باشد و این می‌تواند برنامه‌نویسی با پیچیدگی زمانی و مکانی خاص خود را داشته باشد. در ادامه می‌توان یک ابرشبکه حسگر بی‌سیم امن و کارآمد طراحی و پیاده‌سازی کرد.

۶. مراجع

- [1] A. Barg, A. Mazumdar, and G. Zmor, "Weight distribution and decoding of codes on hyper-graphs," *Adv. Math. Commun.*, vol. 18, no. 2, pp. 433-450, 2008.
- [2] E. R. Berlekamp, "Algebraic coding theory," New York, Hill, 1968.
- [3] C. Berge, "Graphs and hypergraphs," North Holland, 1979.
- [4] O. Bilua and S. Hooryb, "On codes from hypergraphs," *European J. Combin.*, vol. 25, pp. 339-354, 2004.
- [5] P. Corsini and V. Leoreanu, "Applications of hyperstructure theory," Kluwer Academical Publications, Dordrecht, 2003.
- [6] Y. Hwang and J. Heo, "On the relation between a graph code and a graph state," *Quantum Inf. Comput.*, vol. 16, no. 3-4, pp. 237-250, 2016.
- [7] A. Khandekar, "Graph-based codes and iterative decoding," California Institute of Technology Pasadena, California, 2002.
- [8] M. Konarkhohi and H. Tavakoli, "Provides a new method for combining channel encoding and polar coding based encryption," *Journal of Electronical & Cyber Defence*, vol. 4, no. 1, pp. 1-8, 2016. (In Persian)
- [9] A. R. Mirghadri, R. Sharbanain, A. Mirghadri, "A light weight authentication scheme for wireless sensor networks," *Journal of Electronical & Cyber Defence*, vol. 4, no. 3, pp. 1-10, 2016. (In Persian)
- [10] S. K. Mothku and R. R. Rout, "Markov decision process and network coding for reliable data transmission in wireless sensor and actor networks," *Pervasive and Mobile Computer*, vol. 56, pp. 29-44, 2019.
- [11] P. Sole and T. Zaslavsky, "The covering radius of the cycle code of a graph," *Discrete Math.*, vol. 128, pp. 401-405, 1994.
- [12] G. Tallini, "On Steiner hyper groups and linear codes," *Convegno Ipergruppi, Altre Strutture multivoche e loro applicazioni*, Udine, pp. 87-91, 1985.
- [13] J. M. P. Urquidi, "Expander graphs and error correcting codes," *Universite de Bordeaux 1 Sciences et Technologies U.F.R. Math Ematiques et Informatique*, 2010.
- [14] S. Zhou, "Total perfect codes in Cayley graphs," *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 81, pp. 489-504, 2016.

Structure of code-based hypergraphs and their application in wireless sensor networks

M. Hamidi*, A. Borumand Saeid, A. Rezaei, S. A. Samareh Hashemi

*Tehran Porvince Payame Noor University Tehran Province, Tehran

(Received: 24/12/2017, Accepted: 13/10/2018)

ABSTRACT

In this paper, we call a hypergraph constructed by (non) binary linear/nonlinear codes a code-based hypergraph and study its properties. A transitive equivalence relation on any arbitrary code (as vertices) and its equivalence classes is defined as hyperedges of a hypergraph. This transitive relation, transfers the original information considered as a special code from the source in a form of subsets of special codes to hyper edges and therefore as a result, it puts each hyper edge in a one to one correspondence with a subset of special code. This research, shows that any transitive equivalence relation on codes provides a code-based hypergraph structure, and the significance of this topic is that the information in the form of linear/nonlinear codes can be transferred in different ways. Finally, this study relates code-based hypergraphs to code-based graphs via a binary relation, so that one could study and use its importance and application in different networks. In addition, one example of its application is introduced and described in wireless sensor networks.

Keywords: linear/nonlinear code, Code-based (hyper) graph, Transitive relation, Complex (hyper) network

* Corresponding Author Email: m.hamidi@pnu.ac.ir

