نشریه علمی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
سال هشتم، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹، ص ۱۶۰-۱۵۳

علمی- پژوهشی

توابع کاردینال هرمیت و کاربرد آن‌ها در حل مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری

فائزه سادات یوسفی[1]، یدالله اردوخانی[2]*

۱- دانشجوی دکتری و ۲- استاد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا(س)

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۳۰ پذیرش:۱۳۹۹/۰۸/۰۵)

چکیده

در این مقاله، یک روش عددی جدید برای حل مسأله کنترل بهینه کسری با تأخیر در زمان ارائه شده است. انتگرال کسری از نوع ریمان-لیوویل و مشتق کسری از نوع کاپوتو می‌باشد. در این روش، از توابع کاردینال هرمیت به‌عنوان توابع پایه برای تقریب توابع استفاده می‌شود. در ادامه، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری و تأخیری به‌دست می‌آید و آن‌ها برای حل مسأله کنترل بهینه به‌کار برده می‌شوند. با استفاده از روش هم‌مکانی، مسأله مورد مطالعه به یک دستگاه معادلات جبری منجر شده که با استفاده از روش تکراری نیوتن جواب مساله محاسبه می‌شود. در پایان، با ارائه مثال‌های عددی کارایی روش بررسی شده است.

کلیدواژه‌ها: مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری، ماتریس عملیاتی، توابع کاردینال هرمیت

۱- مقدمه[1]

در طول چند دهه گذشته، موضوع محاسبات کسری اعم از نظریه‌های مشتقات و انتگرال‌ها در توصیف بسیاری از پدیده‌های زندگی واقعی مانند مدل‌های هیدرولوژیکی [۱]، پزشکی [۲]، مدل انتقال حرارت [۳]، مدل‌سازی دینامیکی [۴]، امور مالی [۵]، کنترل دما و موتور [۶] به‌وجود آمده است. از این‌رو، ساخت روش‌های تحلیلی و عددی جدید برای حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال کسری، به یک موضوع مهم در آنالیز عددی تبدیل شده است.

مسائل کنترل بهینه کسری شامل شرایطی هستند که توسط عملگرهای دیفرانسیل یا انتگرال کسری ظاهر می‌شوند. همانند انواع مختلف معادلات کسری، بسیاری از این مسائل راه حل‌های تحلیلی و دقیق ندارند. به همین دلیل، پیدا کردن روش‌های عددی قوی و با دقت بالا برای حل انواع مختلفی از این مسائل به یک تحقیق فعال تبدیل شده است.

اولین بار یک راه حل و یک فرمول کلی برای مسائل کنترل بهینه کسری در [۷] معرفی شد. در مرجع [۸] روش مستقیم عددی برای حل آن ارائه داده شد. در [۹] یک سیستم یک بعدی برای حل با استفاده از روش توابع خاص ارائه شده است. در مرجع [۴] روش گارکین برای حل آن به‌کار رفته است.

یکی از انواع مسائل کنترل بهینه کسری، مسأله کنترل بهینه کسری تأخیر زمانی است که دارای کاربردهای مهمی می‌باشد. به‌طور مثال تأخیر در فرایندهای شیمیایی، سیستم‌های الکترونیکی، سیستم‌های حمل ونقل [۱۰] به‌طور مرتب رخ می‌دهد. نمود این تأخیر در مسأله در تابع وضعیت و یا تابع کنترل ظاهر می گردد.

برای حل این مسأله روش‌های مختلفی ارائه شده است. در [۱۱] با پایه‌های چند جمله ای لژاندر مسأله حل شده است. نویسندگان در [۱۲] و [۱۳] با ارائه روشی بر پایه موجک‌ها جواب مناسبی به‌دست آورده‌اند. در مرجع [۱۴] با استفاده از توابع پایه‌ای بوباکر و در [۱۵] با استفاده از توابع برنشتاین به حل مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری پرداخته شده است.

در مقاله حاضر، توابع کاردینال هرمیت [۱۶] به‌عنوان توابع پایه معرفی می شود و ساختار مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، مفهوم حساب کسری و توابع کاردینال هرمیت را بیان کرده و ماتریس‌های عملیاتی تأخیری و انتگرال ارائه می‌شود. در بخش ۳، فرایند حل مسأله با استفاده از توابع کاردینال هرمیت نشان داده شده است. در بخش ۴، با ارائه مثال‌هایی، کارایی روش عددی بررسی شده است.

۲- تعاریف

۲-۱- مقدماتی در حساب کسری

تعریف ۱. انتگرال کسری ریمان- لیوویل به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۷]:

* رایانامه نویسنده مسئول: ordokhani@alzahra.ac.ir

$$I^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x \dfrac{u(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds, & \alpha>0, x>0\\ u(x), & \alpha=0\end{cases}$$

تعریف ۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α و برای $n\in \mathrm{N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$D^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{u^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha+1-n}}ds,\quad n-1<\alpha\le n.$$

مشتق کاپوتو دارای ویژگی‌های زیر است [۱۷]:

a) $D^{\alpha}I^{\alpha}u(x)=u(x),$

b) $I^{\alpha}D^{\alpha}u(x)=u(x)-\sum_{i=0}^{n-1}u^{(i)}(0)\dfrac{x^i}{i!},$

c) $D^{\alpha}x^{\beta}=\begin{cases}0, & \alpha\in \mathrm{N}_0,\ \beta<\alpha\\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}x^{\beta-\alpha}, & otherwise.\end{cases}$

d) $D^{\alpha}c=0,$

که در آن، c یک عدد ثابت است.

۲-۲- توابع کاردینال هرمیت

یکی از انواع توابع کاردینال، توابع کاردینال هرمیت است که به‌صورت چهار مؤلفه‌ای زیر تعریف می‌گردد [۱۶]:

$$\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t),\xi_4(t))^T$$

که در آن:

$$\xi_1(t)=(t+1)^4(1-4t+10t^2-20t^3)\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(1+4t+10t^2+20t^3)\chi_{[0,1]}(t),$$

$$\xi_2(t)=(t+1)^4(t-4t+10t^3)\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(t+4t+10t^3)\chi_{[0,1]}(t),$$

$$\xi_3(t)=(t+1)^4(\frac{t^2}{2}-2t^3)\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(\frac{t^2}{2}+2t^3)\chi_{[0,1]}(t),$$

$$\xi_4(t)=(t+1)^4(\frac{t^3}{6})\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(\frac{t^3}{6})\chi_{[0,1]}(t),$$

و

$$\chi_{[t_0,t_1]}=\begin{cases}1, & t\in[t_0,t_1]\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

این توابع دارای خاصیت زیر هستند:

اگر $m\in\mathbb{Z}$ باشد:

$$\xi(m)=\delta_m[1,0,0,0]^T,\quad \xi'(m)=\delta_m[0,1,0,0]^T,$$
$$\xi''(m)=\delta_m[0,0,1,0]^T,\quad \xi'''(m)=\delta_m[0,0,0,1]^T,$$

که در آن:

$$\delta_m=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

در این مقاله از توابع کاردینال هرمیت در فاصله [0,1] با تغییر متغیر زیر استفاده می‌گردد [۱۸]:

$$\xi_{m,k}(t)=\xi_m(2^M t-k),\quad m=1,..,4,\ k=0,..,2^M$$

که در آن، M یک مقدار عدد صحیح مثبت دلخواه است. حال بردار $\psi(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(t)=[\xi_{1,0}(t),\ \xi_{2,0}(t),\ \xi_{3,0}(t),\ \xi_{4,0}(t)|\ .\ .\ .\ |\xi_{1,2^M}(t),\ \xi_{2,2^M}(t),\ \xi_{3,2^M}(t),\ \xi_{4,2^M}(t)]^T.$$

اکنون انتگرال حاصل‌ضرب زیر تعریف می‌گردد:

$$A=\int_0^1\psi(t)\psi^T(t)dt,$$

و به شکل زیر ظاهر می‌گردد:

$$A=\begin{bmatrix} R & H & 0 & \dots & 0\\ G & R_1 & H & 0 & \dots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ & & G & R_{2^M-1} & H\\ 0 & & 0 & G & R\end{bmatrix},\tag{۱}$$

که در آن، A یک ماتریس عددی بلوکی سه قطری از مرتبه $(2^M+1)4\times(2^M+1)4$ است. همچنین ماتریس‌های $R_i, i=1,...,2^M-1$ و R,G,H نیز بلوکی و از مرتبه 4×4 هستند.

۲-۳- تقریب تابع

تابع $f\in L^2[0,1]$ با استفاده از توابع کاردینال هرمیت به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$f(t)\approx\sum_{k=0}^{2^M}\sum_{m=1}^{4}c_{m,k}\xi_{m,k}(t)=C^T\psi(t),$$
$$C=[c_{1,0},\ c_{2,0},\ c_{3,0},\ c_{4,0}\,|c_{1,1},\ c_{2,1},\ c_{3,1},\ c_{4,1}\,|\dots|c_{1,2^M},\ c_{2,2^M},\ c_{3,2^M},\ c_{4,2^M}]^T.\tag{۲}$$

که در آن، C بردار ضرایب مجهول از مرتبه $4(2^M+1)$ است و با استفاده از ضرب داخلی $<\ ,\ >$ برای رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$< f(t),\psi(t) >= C^T < \psi(t),\psi(t) >$$

با به‌کارگیری رابطه (۱) به‌دست می‌آید:

$$< f(t),\psi(t) >= C^T A$$

بنابراین، بردار ضرایب مجهول از رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$C^T = F^T A^{-1}, \tag{۳}$$

که درآن:

$$F =< f(t),\psi(t) >=[f_{1,0}, f_{2,0}, f_{3,0}, f_{4,0} | \dots | f_{1,2^M}, f_{2,2^M}, f_{3,2^M}, f_{4,2^M}]^T$$

و

$$f_{i,j} = \int_0^1 f(t)\xi_{i,j}(t)dt, \quad i = 1,2,..,4, \quad j = 0,1,...,2^M.$$

۲-۴- ماتریس عملیاتی انتگرال کسری و تأخیری:

ماتریس عملیاتی انتگرال کسری $P^\alpha = [p_{i,j}]$ برای توابع کاردینال هرمیت به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$I^\alpha \psi(t) \approx P^\alpha \psi(t). \tag{۴}$$

که در آن،

$$I^\alpha \xi_i(t) = \sum_{j=1}^{(2^M+1)4} p_{i,j}\xi_j(t), \qquad i = 1,...,(2^M+1)4$$

همچنین تابع تأخیری $\xi_i(t-\upsilon)$ با توابع کاردینال هرمیت تقریب زده می شود:

$$\xi_i(t-\upsilon) = \sum_{j=1}^{(2^M+1)4} d_{i,j}\xi_j(t), \qquad i = 1,...,(2^M+1)4.$$

بنابراین، ماتریس عملیاتی تأخیری $D_\upsilon = [d_{i,j}]$ برای توابع کاردینال به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$\psi(t-\upsilon) \approx D_\upsilon \psi(t), \qquad t > \upsilon, 0 \le t \le t_f. \tag{۵}$$

مرتبه هر دو ماتریس انتگرال کسری و تأخیری $(2^M+1)4 \times (2^M+1)4$ است. همچنین مقادیر $[p_{i,j}]$ و $[d_{i,j}]$ از رابطه (۲) به‌دست می‌آید. برای مثال ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای $\alpha = 1$ و M=0 به‌صورت زیر است:

$$p = \begin{pmatrix}
\frac{2573}{5148} & \frac{145}{143} & -\frac{70}{143} & \frac{140}{13} & \frac{5147}{5148} & -\frac{2}{143} & -\frac{70}{143} & -\frac{140}{13} \\
-\frac{7729}{72072} & \frac{1}{143} & \frac{108}{143} & \frac{70}{13} & -\frac{1}{10296} & -\frac{1}{143} & -\frac{35}{143} & -\frac{70}{13} \\
\frac{4283}{360360} & \frac{1}{715} & -\frac{7}{143} & \frac{27}{13} & \frac{8573}{360360} & -\frac{1}{715} & -\frac{7}{143} & -\frac{14}{13} \\
-\frac{2581}{4324320} & \frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & \frac{7}{78} & -\frac{1}{617760} & -\frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & -\frac{7}{78} \\
\frac{1}{5148} & -\frac{2}{143} & \frac{70}{143} & -\frac{140}{13} & \frac{2575}{5148} & \frac{145}{143} & \frac{70}{143} & \frac{140}{13} \\
-\frac{1}{10296} & \frac{1}{143} & -\frac{35}{143} & \frac{70}{13} & -\frac{7729}{72072} & -\frac{1}{143} & \frac{108}{143} & -\frac{70}{13} \\
\frac{1}{51480} & -\frac{1}{715} & \frac{7}{143} & -\frac{14}{13} & \frac{4297}{360360} & \frac{1}{715} & \frac{7}{143} & \frac{27}{13} \\
-\frac{1}{617760} & \frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & \frac{7}{78} & -\frac{2581}{4324320} & -\frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & -\frac{7}{78}
\end{pmatrix}.$$

همچنین ماتریس عملیاتی تأخیری برای $\upsilon = \frac{1}{3}$ و M=0 به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix}
\frac{11652848}{14348907} & \frac{21059296}{14348907} & -\frac{7868560}{1594323} & -\frac{175567288}{1594323} & \frac{2433115}{14348907} & -\frac{25844896}{14348907} & -\frac{3322488}{1594323} & -\frac{266183120}{1594323} \\
-\frac{835584}{3720087} & -\frac{72384}{531441} & \frac{199680}{19683} & -\frac{5445920}{59049} & \frac{146216}{3720087} & -\frac{384639}{531441} & \frac{28320}{19683} & -\frac{837280}{59049} \\
\frac{366392}{14348907} & -\frac{643168}{14348907} & -\frac{663976}{1594323} & -\frac{16099520}{1594323} & \frac{138878}{14348907} & -\frac{1587592}{14348907} & -\frac{1359253}{1594323} & -\frac{38456568}{1594323} \\
-\frac{187736}{167403915} & -\frac{79432}{23914845} & \frac{419080}{1594323} & -\frac{811184}{177147} & \frac{2332}{3720087} & -\frac{91558}{23914845} & \frac{27018}{1594323} & \frac{28048}{531441} \\
-\frac{39224}{14348907} & \frac{1815296}{14348907} & -\frac{8343280}{1594323} & \frac{296564488}{1594323} & \frac{11891288}{14348907} & \frac{24349344}{14348907} & -\frac{2114568}{1594323} & \frac{165329920}{1594323} \\
\frac{48896}{100442349} & -\frac{671488}{14348907} & \frac{3192320}{1594323} & -\frac{78755840}{1594323} & -\frac{12888768}{100442349} & -\frac{770560}{14348907} & \frac{3537920}{1594323} & -\frac{86897920}{1594323} \\
-\frac{5632}{100442349} & \frac{98448}{14348907} & -\frac{453376}{1594323} & \frac{11749120}{1594323} & \frac{2591488}{100442349} & -\frac{421988}{14348907} & -\frac{189576}{1594323} & \frac{28293120}{1594323} \\
\frac{3432}{1506635235} & -\frac{57856}{215233605} & \frac{69376}{4782969} & -\frac{1954048}{4782969} & -\frac{371968}{301327047} & \frac{548096}{215233605} & -\frac{29696}{4782968} & -\frac{4991488}{4782968}
\end{pmatrix}$$

۳- بیان مسأله

در این بخش مساله کنترل بهینه کسری با تاخیر زمانی معرفی می‌شود. هدف از حل این مساله کمینه کردن تابع هزینه

$$J = \frac{1}{2}X^T(t_f)NX(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)]dt,$$

تحت شرایط زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
D^\alpha X(t) &= W(t)X(t) + K(t)X(t-\upsilon) + G(t)U(t) \\
&\quad + Z(t)U(t-\mu), \qquad 0 \le t \le t_f, \\
X(0) &= X_0, \\
U(0) &= U_0, \\
X(t) &= \phi(t), \qquad -\upsilon \le t < 0, \\
U(t) &= \theta(t), \qquad -\mu \le t < 0.
\end{aligned}$$

همچنین بردار $X(t)$ بردار وضعیت و $U(t)$ بردار کنترل نام دارد که هر دو مجهول و به‌صورت برداری زیر هستند:

$$X(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\ \dots,x_n(t)]^T,$$
$$U(t)=[u_1(t),\ u_2(t),\ \dots,u_m(t)]^T.$$

ماتریس‌های $W(t),K(t),G(t),Q(t),R(t),Z(t),N$ ماتریس‌های معلوم هستند .

هدف اصلی یافتن بردار وضعیت و بردار کنترل با شرایط داده شده که مقدار تابع هزینه J را به حداقل برساند.

در ابتدا توابع مجهول وضعیت و کنترل را با توابع کاردینال بسط داده می‌شود که در آن‌ها بردار ضرایب مجهول هستند و در روند حل مسأله بایستی به‌دست بیایند. همچنین ماتریس‌های $W(t),K(t),G(t),Q(t),R(t),Z(t)$ و بردارهای داده شده $X_0,U_0,\phi(t),\theta(t)$ را با توابع کاردینال هرمیت بسط داده می‌شود. اکنون هر یک از عناصر توابع بردارهای وضعیت و کنترل به شکل زیر تقریب زده می‌شود:

$$x_i(t)=\psi(t)^T X_i\,,\qquad i=1,\dots,n,$$
$$u_j(t)=\psi(t)^T U_j\,,\qquad j=1,\dots,m.$$

در نهایت رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$X(t)=\psi_1^T(t)X,\qquad U(t)=\psi_2^T(t)U,\tag{۶}$$

که در رابطه فوق، $\psi_1(t)=I_n\otimes\psi(t)$ و $\psi_2(t)=I_m\otimes\psi(t)$ ماتریس‌های گسترش‌یافته در ابعاد مسأله هستند و $\otimes$ نماد ضرب کرونکر است [۱۹]. همچنین بردار ضرایب X و U نیز به فرم زیر می‌باشند:

$$X=[X_1,\ X_2\ ,\ \dots,X_n],$$
$$U=[U_1,\ U_2\ ,\ \dots,U_m].$$

اکنون ماتریس‌های $W(t),K(t),G(t),Z(t)$ نیز با توابع کاردینال هرمیت بسط داده می شود:

$$\begin{aligned}W(t)&=[W_{10},W_{11},\dots,W_{12^M},\dots,W_{40},W_{41},\dots,W_{42^M}]^T\psi_1(t)\\&=W^T\psi_1(t),\\K(t)&=[K_{10},K_{11},\dots,K_{12^M},\dots,K_{40},K_{41},\dots,K_{42^M}]^T\psi_1(t)\\&=K^T\psi_1(t),\\G(t)&=[G_{10},G_{11},\dots,G_{12^M},\dots,G_{40},G_{41},\dots,G_{42^M}]^T\psi_2(t)\\&=G^T\psi_2(t),\\Z(t)&=[Z_{10},Z_{11},\dots,Z_{12^M},\dots,Z_{40},Z_{41},\dots,Z_{42^M}]^T\psi_2(t)\\&=Z^T\psi_2(t).\end{aligned}\tag{۷}$$

در ادامه بردار وضعیت تأخیری بسط داده می‌شود:

$$X(t-\upsilon)=\begin{cases}\phi(t-\upsilon), & 0\le t<\upsilon,\\ X(t-\upsilon), & \upsilon\le t\le t_f,\end{cases}$$

با استفاده از ماتریس تأخیری (۴) برای بردار وضعیت به‌دست می‌آید:

$$X(t-\upsilon)=\begin{cases}\psi_1^T(t)E_1, & 0\le t<\upsilon,\\ \psi_1^T(t)\hat{D}_1X, & \upsilon\le t\le t_f.\end{cases}\tag{۸}$$

به‌طور مشابه برای بردار کنترل تأخیری حاصل می‌گردد:

$$U(t-\mu)=\begin{cases}\psi_2^T(t)E_2, & 0\le t<\mu,\\ \psi_2^T(t)\hat{D}_2U, & \mu\le t\le t_f,\end{cases}\tag{۹}$$

که در آن:

$$\hat{D}_1=I_n\otimes D_\upsilon\ ,\ \hat{D}_2=I_m\otimes D_\mu.$$

برای بردار دلخواه V، ضرب دو بردار کاردینال هرمیت به شکل زیر تقریبی زده می‌شود که در آن $\tilde{V}$ ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب می‌باشد و در حل مسأله نقش مهمی ایفاء می‌کند:

$$V^T\psi_i(t)\psi_i^T(t)\approx\psi_1^T(t)\tilde{V},\qquad i=1,2.\tag{۱۰}$$

در نهایت با استفاده از رابطه‌های (۵)، (۶) و (۹) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}W(t)X(t)&=W^T\psi_1(t)\psi_1^T(t)X=\psi_1^T(t)\tilde{W}^TX,\\G(t)U(t)&=G^T\psi_2(t)\psi_2^T(t)U=\psi_1^T(t)\tilde{G}^TU.\end{aligned}\tag{۱۱}$$

در ادامه مانند رابطه (۱۰) برای وضعیت تأخیری با استفاده از رابطه (۷) فرم زیر حاصل می‌شود:

$$I^\alpha K(s)X(s-\upsilon)=\begin{cases}\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^TE_1, & 0\le t<\upsilon,\\ \psi_1^T(t)S\tilde{K}^TE_1+\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^T\hat{D}_1^TX, & \upsilon\le t\le t_f,\end{cases}\tag{۱۲}$$

که در آن، $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\nu}\frac{\psi_1^T(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds=\psi_1^T(t)S$ یک تقریب برای انتگرال کسری است و $\hat{P}_1=I_n\otimes P$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری است. همچنین برای بردار کنترل به‌دست می‌آید:

$$I^\alpha Z(s)U(s-\mu)=\begin{cases}\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^TE_2, & 0\le t<\mu,\\ \psi_1^T(t)M\tilde{Z}^TE_2+\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T\hat{D}_2^TU, & \mu\le t\le t_f,\end{cases}\tag{۱۳}$$

که در آن، $\hat{P}_2=I_m\otimes P$ ماتریس‌های عملیاتی انتگرال کسری در ابعاد مسأله است و $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\mu}\frac{\psi_2^T(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds=\psi_1^T(t)M$ نیز همانند قبل تقریب انتگرال می‌باشد.

اکنون با اعمال انتگرال کسری در شرط مشتق کسری مسأله

رابطه (۱۳) حاصل می‌شود:

$$X(t)-X(0)=I^{\alpha}(W(t)X(t)+K(t)X(t-\upsilon) \\ +G(t)U(t)+Z(t)U(t-\mu)), \quad 0\le t\le t_f. \qquad (۱۴)$$

حال با در نظر گرفتن $X(0)=\psi_1^T(t)F$ و با جایگذاری روابط (۶-۱۲) در رابطه (۱۳) به‌دست می‌آید:

$$\psi_1^T(t)X-\psi_1^T(t)F=\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{W}^T X+\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^T E_1 \\ +\psi_1^T(t)S\tilde{K}^T E_1+\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^T\hat{D}_1^T X \\ +\psi_1^T(t)\hat{P}^T\tilde{G}^T U+\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T E_2 \\ +\psi_1^T(t)M\tilde{Z}^T E_2+\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T\hat{D}_2^T U.$$

لذا رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$B=F+(-I+\hat{P}_1^T\tilde{W}^T++\hat{P}_1^T\tilde{K}^T\hat{D}_1^T)X+\hat{P}_1^T\tilde{K}^T E_1 \\ +S\tilde{K}^T E_1+(\hat{P}^T\tilde{G}^T+\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T\hat{D}_2^T)U \\ +\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T E_2+M\tilde{Z}^T E_2=0. \qquad (۱۵)$$

علاوه بر این، با جایگزینی تقریب‌های معرفی‌شده (۵) در تابع هزینه، به‌دست می‌آید:

$$J=\frac{1}{2}X^T\psi_1(t_f)N\psi_1^T(t_f)X+ \\ \frac{1}{2}X^T\left[\int_0^{t_f}\psi_1(t)Q(t)\psi_1^T(t)dt\right]X+ \\ \frac{1}{2}U^T\left[\int_0^{t_f}\psi_2(t)R(t)\psi_2^T(t)dt\right]U.$$

در حال حاضر مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری به یک مسأله بهینه سازی تبدیل شده است. بنابراین، طبق آنچه ذکر شد، هدف یافتن بردار ضرایب X و U است به‌طوری‌که رابطه زیر را حداقل کند:

$$J^*(X,U,\lambda)=J(X,U)+\lambda^T B,$$

که در آن، λ بردار ضرایب لاگرانژ است. برای به‌دست آوردن پاسخ رابطه فوق بایستی سیستم معادلات جبری زیر با استفاده از روش تکراری نیوتن حل گردد:

$$\frac{\partial}{\partial X}J^*(X,U,\lambda)=0, \\ \frac{\partial}{\partial U}J^*(X,U,\lambda)=0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}J^*(X,U,\lambda)=0.$$

در حالت خاص، اگر $Q(t)=k$ و $R(t)=k'$ عدد ثابت و بعد مسأله $M=N=1$ باشد، تابع هزینه به شکل زیر ظاهر می‌گردد:

$$J=\frac{1}{2}X^T\psi(t_f)N\psi^T(t_f)X+\frac{k}{2}X^T\left[\int_0^{t_f}\psi(t)\psi^T(t)dt\right]X \\ +\frac{k'}{2}U^T\left[\int_0^{t_f}\psi(t)\psi^T(t)dt\right]U.$$

که با استفاده از رابطه (۱) به‌دست می‌آید:

$$J=\frac{1}{2}X^T\psi(t_f)N\psi^T(t_f)X+\frac{k}{2}X^T AX+\frac{k'}{2}U^T AU.$$

۴- مثال‌ها

مثال (۱): مسأله کنترل بهینه زیر با شرایط تأخیری در تابع وضعیت و کنترل داده شده است [۱۹]:

$$\min\ J=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x^2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)\right]dt,$$

با شرایط

$$D^{\alpha}x(t)=-x(t)+x(t-\frac{1}{3})+u(t)+\frac{1}{2}u(t-\frac{2}{3}),$$

$$x(t)=1, \quad -\frac{1}{3}\le t\le 0,$$

$$u(t)=0, \quad -\frac{2}{3}\le t\le 0.$$

که در آن، $\phi(t)=1$ و $\theta(t)=0$ می‌باشد. در ابتدا تابع وضعیت و تابع کنترل با توابع کاردینال هرمیت بسط داده می‌شود و ماتریس عملیاتی تأخیری برای مقادیر $\upsilon=\frac{1}{3}$ و $\mu=\frac{2}{3}$ محاسبه می‌گردد:

$$\psi(t-\frac{1}{3})=D_{\frac{1}{3}}\psi(t), \\ \psi(t-\frac{2}{3})=D_{\frac{2}{3}}\psi(t),$$

با استفاده از رابطه (۱۱) حاصل می‌شود:

$$I^{\alpha}x(s-\frac{1}{3})ds=\begin{cases} E_1^T P\psi(t), & 0\le t\le\frac{1}{3}, \\ M^T P\psi(t)+X^T D_{\frac{1}{3}}P\psi(t), & \frac{1}{3}\le t\le 1. \end{cases}$$

همانند تقریب فوق برای تأخیر در تابع کنترل نتیجه می‌شود:

$$I^{\alpha}u(s-\frac{2}{3})ds=\begin{cases} 0, & 0\le t\le\frac{2}{3}, \\ U^T D_{\frac{2}{3}}P\psi(t), & \frac{2}{3}\le t\le 1. \end{cases}$$

حال با استفاده از روابط بالا و رابطه (۱۴) شرط زیر برای کمینه کردن تابع هزینه به‌دست می‌آید:

$$B = X^T(I + P - D_{\frac{1}{3}}P) - U^T(P - \frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P) - (E_1^T P + F^T + M^T P).$$

در نهایت تابع هزینه به شکل زیر است:

$$J^* = \frac{1}{2}[X^T AX + \frac{1}{2}U^T AU] + \lambda[X^T(I + P - D_{\frac{1}{3}}P) - U^T(P - \frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P) - (E_1^T P + F^T + M^T P)]$$

مقدار تقریبی تابع هزینه برای $\alpha = 1$ و با M=1 و M=2 در جدول (۱) نمایش داده شده و با روش‌های ارائه‌شده در [۱۹،۱۳،۱۲،۱۱] مقایسه شده است. همچنین در جدول (۲) نیز پاسخ مسأله برای $\alpha = 0.8$ و با M=1 و M=0 نشان داده شده و با روش‌های [۱۳ و ۱۱] مقایسه شده است.

جدول (۱): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha = 1$ در مثال۱

روش‌ها	J
روش [۱۹]	
M=۵	۰/۳۷۳۱۱۲۵۳
M=۶	۰/۳۷۳۱۱۲۴۱
روش [۱۲]	
M=۵	۰/۱۰۹۵
M=۶	۰/۱۰۲۷
روش [۱۳]	۰/۳۷۳۱۱۲۶۴
روش [۱۱]	۰/۰۱۴۵۱
روش حاضر	
M=۱	۰/۰۲۵۳۶۴۰۲
M=۲	۰/۰۱۲۱۳۸۷۱

جدول (۲): مقدارتقریبی **J** برای $\alpha = 0.8$ در مثال۱

روش‌ها	J
روش [۱۳]	
M=۳	۰/۳۵۵۱۲۹۱
M=۶	۰/۳۵۵۱۱۸۵
روش [۱۱]	۰/۰۲۳۸۵
روش حاضر	
M=۰	۰/۱۰۷۱۳۲۵
M=۱	۰/۰۸۳۲۰۱۴

مثال (۲): در این مثال تابع وضعیت و تابع کنترل طوری پیدا می‌شود که عملکرد تابع هدف [۲۰]:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]dt,$$

با شرایط:

$$D^\alpha x(t) = -x(t) + u(t) - \frac{1}{2}u(t - \frac{2}{3}), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$x(0) = 1,$$

$$u(t) = 0, \qquad -\frac{2}{3} \le t \le 0.$$

را به حداقل برساند.

در ابتدا ماتریس عملیاتی تأخیری به‌دست می‌آید:

$$\psi(t - \frac{2}{3}) = D_{\frac{2}{3}}\psi(t).$$

با استفاده از رابطه (۱۲) برای تابع کنترل تأخیری فرم زیر نتیجه می‌شود:

$$I^\alpha u(s - \frac{2}{3})ds = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{2}{3}, \\ U^T D_{\frac{2}{3}} P\psi(t), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

اکنون رابطه (۱۴) برای کمینه کردن تابع هزینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$B = F + X^T(-I - P) + U^T(P - \frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P).$$

که در آن، $X(0) = 1 = F^T\psi(t)$ و P ماتریس عملیاتی انتگرال کسری می‌باشد. تابع هزینه نیز به شکل زیر حاصل می‌گردد:

$$J^* = \frac{1}{2}[X^T AX + U^T AU] + \lambda[X^T(-I - P) + U^T(P - \frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P) + F].$$

نتایج به‌دست‌آمده برای مقادیر J در جدول (۳) نشان داده شده است.

جدول (۳): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha = 1$ درمثال ۲

روش‌ها	J
روش [۲۰]	
M=۴	۰/۱۹۵۴۹۴۳۳۹۱۳۶
M=۵	۰/۱۹۵۴۹۴۳۳۹۱۳۶
M=۶	۰/۱۹۵۴۹۴۳۳۹۱۳۶
روش حاضر	
M=۱	۰/۰۳۷۸۹۱۶۴۱۳۳۱
M=۲	۰/۰۳۲۹۹۹۳۸۹۳۸۵
M=۳	۰/۰۲۸۶۵۱۵۹۸۷۲۲

جدول (۴): مقدار تقریبی $\mathbf{J}$ برای $\alpha=1$ در مثال۳

روش‌ها	J
روش [۱۳]	۱/۶۴۷۸۷۴۱۹
روش [۱۲]	۰/۳۰۴۸
روش [۱۱]	۰/۴۷۲۷۴۶۴
روش حاضر	۰/۰۶۰۵۴۶۳

جدول (۵): مقدار تقریبی $\mathbf{J}$ برای $\alpha=0.9$ در مثال۳

روش‌ها	J
روش [۱۳]	۱/۶۲۴۸۷۸۵
روش [۱۱]	۰/۵۰۲۱۹۰۰
روش حاضر	۰/۲۰۰۰۴۱

مثال۳. تابع وضعیت و کنترل طوری یافت می‌شود که تابع [۱۳]:

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}\int_0^2 (u(t)^2+x(t)^2)dt,$$

با شرایط:

$$D^{\alpha}x(t)=u(t)+x(t-1),\quad 0\le t\le 2, 0\le \alpha<1,$$

$$x(t)=1,\quad -1\le t<0,$$

حداقل گردد. در این مثال ابتدا با تغییر متغیر $t=2s$ بازه $[0,2]$ را به $[0,1]$ انتقال داده می‌شود. بنابراین مسأله فوق به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\mathrm{J}=\int_0^1 (u(s)^2+x(s)^2)ds,$$

با شرایط:

$$D^{\alpha}x(s)=2(u(s)+x(s-\frac{1}{2})),\quad 0\le s\le 1,\ 0\le \alpha<1,$$

$$x(s)=1,\quad -\frac{1}{2}\le s\le 0,$$

نتایج به‌دست‌آمده برای $\alpha=1$ در جدول (۴) و $\alpha=0.9$ در جدول (۵) و $\alpha=0.7$ در جدول (۶) نشان داده شده است. با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با توابع کاردینال هرمیت با سایر روش‌ها این نتیجه حاصل می‌شود که پاسخ به‌دست‌آمده دارای دقت مناسبی است.

جدول (۶): مقدار تقریبی $\mathbf{J}$ برای $\alpha=0.7$ در مثال ۳

روش‌ها	J
روش [۱۳]	۱/۵۵۱۹۸۵۹
روش حاضر	۰/۰۳۱۰۰۷

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، یک روش کارآمد و با تقریب مناسب برای حل یک گروه گسترده از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری ارائه شده است. در این روش از توابع کاردینال هرمیت به‌عنوان پایه استفاده شده است. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری همراه با ماتریس عملیاتی تأخیری برای حل مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری استفاده شده است که با استفاده از آن‌ها، مسأله به یک مجموعه معادلات جبری تبدیل می‌شود. نتایج به‌دست آمده از روش ارائه شده در مثال‌ها نشان می‌دهد که روش کارآمد است.

۶- مراجع

[1] D. A. Benson, M. M. Meerschaert, J. Revielle, “Fractional calculus in hydrologicmodeling: a numerical perspective,” Adv. Water Resour, vol. 51, pp. 479–497, 2013.

[2] J. K. Popovic, D.T. Spasic, J. Tosic, J. L Kolarovic, and R. Malti, “Fractional model for pharmacokinetics of high dose methotrexate in children with acute lymphoblastic leukaemia,” Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 22, pp. 451–471, 2015.

[3] D. Sierociuk, A. Dzielinski, G. Sarwas, I. Petras, I. Podlubny, and T. Skovranek, “ Modelling heat transfer in heterogeneous madia using fractional calculus,” Phil. Trans. R. Soc. A., vol. 371, pp. 2013-2046, 2013.

[4] S. Larsson, M. Racheva, and F. Saedpanah, “Discontinuous Galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity,” Comput. Method. Appl. Mech. Eng., vol. 283, pp. 196–209, 2015.

[5] Y. Jiang and X. Wang, “On a stochastic heat equation with first order fractional noises and applications to finance,” J. Math. Anal. Appl., vol. 396, pp. 656–669, 2012.

[6] G. Bohannan, “Analog fractional order controller in temperature and motor control applications,” J. Vib. Contr., vol. 14, pp. 1487–1498, 2008.

[7] O. P. Agrawal, “A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems,” J. Vib. Control, vol. 14, pp. 1291–1299, 2008.

[8] A. Lotfi, S. A. Yousefi, and M. Dehghan, “Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre orthonormal basis combined with the operationalmatrix and the Gauss quadrature rule,” J. Comput. Appl. Math., vol. 250, pp. 143–160, 2013.

[9] O. P. Agrawal, “Fractional optimal control of a distributed system using eigenfunctions,” ASME. J. Comput. Nonlinear Dyn., vol. 3, pp. 2- 6, 2008.

[10] M. Jamshidi and C. M. Wang, “A computational algorithm for large-scale nonlinear time-delay systems,” IEEE Trans. Syst. Man Cybern., vol. 14, pp. 2–9, 1984.

[11] A. H. Bhrawy and S. S. Ezz-Eldien, "A new Legendre perational technique for delay fractional optimal control problems," Calcolo, vol. 53(4), pp. 521–543, 2016.

[12] P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, and E. Babolian, "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems," Nonlinear Dynamics, vol. 86(3), pp. 1649–1661, 2016.

[13] L. Moradi, F. Mohammadi, and D. Baleanu, "A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets," J. Vib. Contr., vol. 25, pp. 1–15, 2018.

[14] K. Rabiei, Y. Ordokhani, and E. Babolian, "Fractional-order Boubaker functions and their applications in solving delay fractional optimal control problems," J. Vib. Contr., vol. 24, pp. 3370-3383, 2018.

[15] E. Safaie, M. H. Farahi, and M. F. Ardehaie, "An approximate method for numerically solving multi-dimensional delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials," Comput. Appl. Math., vol. 34, pp. 831–846, 2015.

[16] B. Han and Q. Jiang, "Multiwavelets on the interval," Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 12, pp. 100–127, 2002.

[17] E. Keshavarz, Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, "Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations," Appl. Math. Model., vol. 38(24), pp. 6038–6051, 2014.

[18] E. Ashpazzadeh, M. Lakestani, and M. Razzaghi, "Nonlinear Constrained Optimal Control Problems and Cardinal Hermite Interpolant Multiscaling Functions," Asian. J. Control., vol. 20, pp. 558–567, 2018.

[19] H. R. Marzban and M. Razzaghi, "Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials," J. Frankl. Inst., vol. 341, pp. 279–293, 2004.

[20] M. H. Farahi and M. Dadkhah, "Solving nonlinear time delay control systems by Fourier series," Int. J. Eng. Res. Appl., vol. 5, pp. 217–226, 2014.

Journal of Electronical & Cyber Defence
Vol. 8, No. 4, 2021, Serial No. 32

Cardinal Hermit Functions and their Application in Solving the Time-Delay Fractional Optimal Control Problems

F. Yosefi, Y. Ordokhani*

*Department of Mathematics,, Faculty of Mathematical Sciences,, Alzahra University, Tehran, Iran

(Received: 20/08/2020, Accepted: 26/10/2020)

ABSTRACT

In this paper, a new numerical method for solving the fractional optimal control problem of the time delay is presented. The fractional integral and the fractional derivative are the Riemann-Liouville type and the Caputo type, respectively. In this method, the cardinal Hermite functions are used as a basis to approximate functions. Moreover, we obtain the fractional and delay integral operational matrices and use them to solve this optimal control problem. Using the collocation method, the problem leads to a system of algebraic equations, that is solved by Newton's iterative method. Finally, numerical examples are presented to investigate the efficiency of this method.

Keywords: Fractional Optimal Control Problem of Time Delay, Operational Matrices, Cardinal Hermite Functions

* Corresponding Author Email: ordokhani@alzahra.ac.ir