

مدل سازی مسیر حرکتی ماهواره های LEO و ردگیری آن ها با

فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) و فیلتر کالمن نمونه بردار (UKF)

جواد سالم^{۱*}، محمد ضیغمی^۲، سید محمد علوی^۳

۱- کارشناس ارشد ۲- مربی ۳- استادیار، دانشگاه جامع امام حسین^(ع)

(دریافت: ۲۰/۰۱/۹۳، پذیرش: ۱۱/۰۶/۹۳)

چکیده

یکی از بهترین روش های ردگیری ماهواره های مدار پائین زمین (LEO)، ردگیری راداری است. از آنجا که فیلترهای خطی مرسوم، قادر به تخمین موقعیت دقیق و ردگیری سیستم های با دینامیک غیرخطی مثل ماهواره ها نیستند و ردگیری آن ها با خطای فراوانی همراه است، باید از فیلترهای غیرخطی استفاده نمود. در این مقاله، ابتدا مسیر حرکت ماهواره به دور زمین با استفاده از معادلات کول تولید شده و سپس مشاهدات رادار اندازه گیر از این معادلات استخراج و به طور جداگانه به فیلترهای غیرخطی کالمن توسعه یافته (EKF) و فیلتر کالمن نمونه بردار (UKF) اعمال می شود. در نهایت با بررسی خطای RMS موقعیت و خطای تخمین، عملکرد فیلترها برای ردگیری ماهواره مورد ارزیابی قرار می گیرد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد فیلتر کالمن نمونه بردار در مقایسه با فیلتر کالمن توسعه یافته دقت و عملکرد بهتری دارد.

واژگان کلیدی

ماهواره های LEO، مشاهدات رادار، فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF)، فیلتر کالمن نمونه بردار (UKF).

۱. مقدمه

می گردد و سپس سیگنال برگشتی توسط رادار دریافت می شود. اگرچه معمولاً از رادار این گونه برداشت می شود که سیگنالی به ماهواره بتاباند و انعکاس آن را آشکارسازی کند، ولی امروزه یک ترانسپوندر^۱ (بازارسال کننده) روی ماهواره نصب می گردد که با یک فعالیت راداری خاص فعال می گردد و با این کار، ردیابی ماهواره های خودی را تسهیل کرده و دقت و فاصله ردیابی را افزایش می دهد [۱]. لکن بایستی توجه داشت که وقتی استفاده از رادار به منظور نظارت فضایی مطرح است، اصولاً باید توانایی ارسال سیگنال های بسیار قوی و آشکارسازی سیگنال انعکاسی که عموماً بسیار ضعیف است را داشته باشد. در این مقاله، منظور ما از سیستم ردیابی راداری همین معنای اخیر است و رادارهایی را که لزوماً همراه با یک بازارسال کننده نصب شده بر روی ماهواره به کار می روند، جزو سیستم های ردیابی رادیویی طبقه بندی می کنیم [۲].

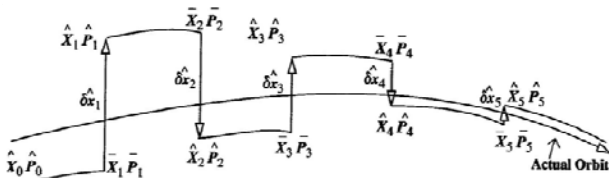
یکی از مهم ترین اصول پدافندی هر کشور، کشف و ردگیری انواع اهداف تهدیدکننده امنیت در حوزه های مختلف می باشد. امروزه با توسعه روزافزون علوم و فناوری های فضایی، به خصوص رشد روزافزون تعداد ماهواره ها که نقش بسیار مهم و تعیین کننده ای در زمینه های مختلف مانند ارتباطات و مخابرات، سیستم های ناوبری، سنجش از دور، جاسوسی نظامی و تجاری، هواشناسی و ... ایفا می کنند، اهمیت کشف، شناسایی و ردگیری ماهواره ها برای ما دوچندان می شود.

ابتدایی ترین فن ردیابی در ناوبری و نظارت فضایی، روش ردیابی راداری است که از همان ابتدای عصر فضا برای تعیین مدار ماهواره ها به ویژه در مدارهای ارتفاع پایین به کار رفته است. در ساده ترین شکل، از یک ایستگاه راداری، سیگنالی به سوی هدف ارسال می شود که این سیگنال توسط هدف منعکس شده و یا توسط آن بازارسال

^۱ Transponder

* رایانامه نویسنده پاسخگو: krhajimd@ihu.ac.ir

پس از تخمین موقعیت ماهواره و ایجاد مسیر تخمین زده شده^۵، باید اختلاف مسیر تخمینی با مسیر واقعی در طول چند مشاهده به حداقل رسانده شود که این مسئله فرآیند تصحیح^۶ نامیده می شود و در شکل ۲ قابل مشاهده است. مطابق شکل، اختلاف بین نقاط پیش بینی^۷ (\bar{x}_n, \bar{p}_n) و نقاط تخمینی^۸ (\hat{x}_n, \hat{p}_n) که δx_n است، باید در طی چند مرحله محدود حداقل شود [۳].



شکل ۲. نمایی از فرآیند تصحیح

۲. مدل سازی مسیر حرکت ماهواره

بر طبق قاعده اصلی قانون حرکات نجومی کپلر، اگر جرم ماهواره در مقابل جرم زمین ناچیز باشد و زمین کروی فرض شود، آنگاه طبق قانون جاذبه نیوتن، شتاب ماهواره (\vec{r}) از رابطه زیر محاسبه می شود [۵]:

$$\ddot{r} = -(\mu/r^3)r + a_p \quad (1)$$

این معادله (معادله کاول^۹) ساده ترین و طبیعی ترین انتشارگر مداری عددی برای حرکت یک ماهواره است. که در آن، r بردار مکان ماهواره و r اندازه آن است. μ ثابت گرانشی جسم مرکزی و a_p شتاب اختلالی کل است که برابر است با [۵]:

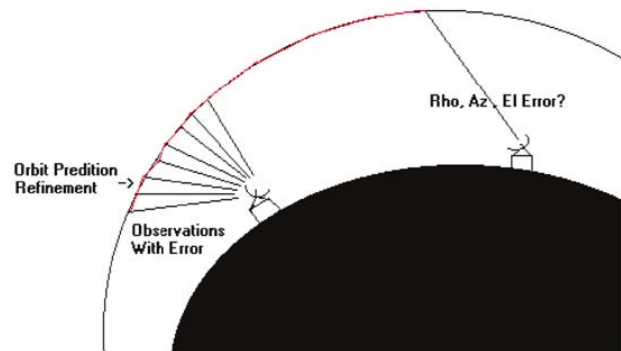
$$a_p = \nabla R(r, t) + F(r, \dot{r}, t) \quad (2)$$

که در آن، $R(r, t)$ پتانسیل اسکالری است که گرادیان آن با شتاب ناشی از نیروهای اختلالی پایا^{۱۰} (همان نیروهای گرانشی در حوزه مکانیک سماوی) برابر است و $F(r, \dot{r}, t)$ نیز شتاب ناشی از نیروهای غیرپایا (نیروهای غیرگرانشی) را نمایش می دهد.

معادله حرکت کاول شامل سه معادله اسکالر مرتبه دوم است که مستقیماً و با انتگرال گیری عددی برای محاسبه بردارهای r و \dot{r} به کار می رود. تابع پتانسیل گرانشی با معادله زیر تقریب زده می شود [۵]:

$$U = \frac{\mu}{r} [U_0 + U_{J_2}] = \frac{\mu}{r} \left[-1 + \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 J_2 \frac{1}{2} [3 \sin^2(\phi) - 1] \right] \quad (3)$$

که در آن، ϕ عرض جغرافیایی، μ پارامتر جاذبه ای زمین، R_e شعاع متوسط زمین در استوا و U_0 و U_{J_2} مطابق رابطه (۴) می باشند:



شکل ۱. نمایی از ردگیری راداری ماهواره [۳]

شکل ۱ نمایی از ردگیری راداری ماهواره را نشان می دهد.

از وظایف مهم واحد پردازش داده در رادار، تخمین پارامترهای حرکتی هدف نظیر موقعیت، سرعت و شتاب با استفاده از اندازه گیری های انجام شده مانند برد، زاویه سمت، زاویه ارتفاع و داپلر هدف است. یکی از روش هایی که برای تخمین مسیر حرکت هدف به کار می رود استفاده از الگوریتم های بازگشتی است. این روش ها به دلیل داشتن قابلیت تخمین مسیر هدف پس از هر بار اندازه گیری از جذابیت بسیار بالایی برخوردار هستند. از آنجا که اکثر فیلترهای ردگیری مرسوم که در حال حاضر در رادارها (در داخل کشور) مورد استفاده قرار می گیرند جزو فیلترهای خطی هستند و این فیلترها برای ردگیری ماهواره ها که معادلات غیرخطی دارند، مناسب نمی باشند و با خطای تخمین زیادی روبرو می شویم [۴]. اهمیت ردگیری ماهواره ها با فیلترهای غیرخطی بیشتر نمایان می شود.

فیلتر کالمن توسعه یافته^۱ (EKF) و فیلتر کالمن نمونه بردار^۲ (UKF) از جمله فیلترهای غیر خطی با الگوریتم بازگشتی هستند که ما در اینجا برای ردگیری ماهواره های LEO^۳ مورد استفاده قرار می دهیم. در این مقاله، ابتدا مسیر حرکتی ماهواره های LEO با در نظر گرفتن اغتشاشات مختلف مدل سازی شده و به عنوان مدار واقعی^۴ و یا مسیر مرجع در نظر گرفته می شود. سپس با توجه به مشاهدات رادار و داده های اندازه گیری شده از آن و همچنین با استفاده از دو فیلتر غیرخطی کالمن توسعه یافته (EKF) و کالمن نمونه بردار (UKF) مسیر حرکت ماهواره تخمین زده می شود. اگر چه فیلترهای غیرخطی دیگری از خانواده فیلتر کالمن برای ردگیری اهداف توسعه یافته اند، اما به دلیل پایه ای بودن این دو فیلتر و استفاده فراوان از آن ها در ردگیری اهداف غیرخطی، در این مقاله از این فیلترها استفاده می کنیم.

^۵ Estimated Trajectory

^۶ Correction Process

^۷ Prediction

^۸ Estimation

^۹ Cowell

^{۱۰} Conservative

^۱ Extended Kalman Filter

^۲ Unscented Kalman Filter

^۳ Low Earth Orbit

^۴ Actual Orbit

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

در رابطه فوق، v_x, v_y, v_z و مؤلفه های بردار سرعت ماهواره در دستگاه اینرسی و w_x, w_y, w_z نیز مؤلفه های شتاب اعمالی به ماهواره ناشی از سایر عوامل هستند.

۳. معادلات اندازه گیری رادار

از آنجایی که رادار موقعیت هدف را در سیستم مختصات ENU^T اندازه گیری می کند، به منظور ردگیری و فیلترکردن در سیستم مختصات ECEF بایستی روابط بین سیستم های مختصات ECEF و ENU محاسبه شود. با توجه به اینکه سیستم ENU به مرکزیت موقعیت رادار می باشد، لذا مختصات مبدأ سیستم ENU (یعنی مکان رادار) در سیستم ECEF با رابطه (۸) تعیین می شود [۶]:

$$\mathbf{O}_{ENU}^{ECEF} = \begin{bmatrix} (R_e + h_s) \cos(\phi) \cos(\lambda) \\ (R_e + h_s) \cos(\phi) \sin(\lambda) \\ (R_e + h_s) \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن، ϕ, λ و h_s به ترتیب طول جغرافیایی، عرض جغرافیایی و ارتفاع محل رادار و $R_e = 6378.173 \text{ km}$ شعاع زمین می باشند. به علاوه، ماتریس چرخش از سیستم ECEF به ENU به صورت رابطه (۹) بیان می شود:

$$\mathbf{M}(\phi, \lambda) = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda) \sin(\phi) & -\sin(\phi) \sin(\lambda) & \cos(\phi) \\ \cos(\lambda) \cos(\phi) & \cos(\phi) \sin(\lambda) & \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

بنابراین، تبدیل بردارها بین دو سیستم به صورت زیر می باشد:

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{M}(\phi, \lambda) [\mathbf{p} - \mathbf{O}_{ENU}^{ECEF}] \quad (10)$$

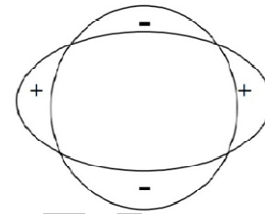
که $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$ و $\mathbf{p}_s = [x_s, y_s, z_s]^T$ به ترتیب بردارهای مکان در سیستم های مختصات ECEF و ENU هستند [۶]. با تبدیل \mathbf{p}_s به مختصات قطبی، روابط مربوط به برد r ، زاویه سمت θ و زاویه ارتفاع ϕ به صورت روابط زیر خواهد بود [۷]:

$$r(k) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (11)$$

$$\theta(k) = \tan^{-1} \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \quad (12)$$

$$U_0 = -\mu/r, \quad U_{J_2} = (\mu/r) \left[(R_e/r)^2 J_2 / 2 [3 \sin^2(\phi) - 1] \right] \quad (4)$$

یکی از مهم ترین نیروهای اختلالی موثر در حرکت مداری، ضریب پهن شدگی در قطبین زمین J_2 می باشد. J_2 هارمونیک مداری دوم مدار یک ماهواره است. از نظر پتانسیلی، زمین می تواند با هارمونیک J_2 به عنوان یک مدل چرخشی بیضوی به طور دقیق مدل شود. شکل زیر، اثر J_2 در صفحه هم پتانسیل زمین را برای جاذبه غیرمتعارف مثبت و منفی نشان می دهد. شعاع قطبی زمین بیضوی حدود ۲۰ کیلومتر کوچک تر از شعاع استوایی است. این اثر عمدتاً ناشی از جنبش مرکز جرم خط استوا به دلیل نیروی مایل به مرکز ناشی از چرخش زمین است [۱]. لازم به ذکر است در این مقاله، مقدار J_2 برابر $1082.626925638815 \times 10^{-6}$ در نظر گرفته شده است.



علامت (+) نشان دهنده جاذبه غیرمتعارف مثبت
علامت (-) نشان دهنده جاذبه غیرمتعارف منفی

در معادله (۳)، تابع پتانسیل فقط به ارتفاع ماهواره از صفحه استوایی زمین بستگی دارد. طبق سیستم مختصات اینرسی، ϕ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sin(\phi) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (5)$$

در رابطه فوق x, y و z مؤلفه های بردار موقعیت ماهواره در دستگاه اینرسی هستند. با در نظر گرفتن تابع $\sin(\phi)$ در تابع پتانسیل گرانش زمین، میزان شتاب های اعمالی در راستای x, y و z مطابق معادلات زیر خواهد شد.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \mu \left[-\frac{x}{r^3} + A_{J_2} \left(15 \frac{xz^2}{r^7} - 3 \frac{x}{r^5} \right) \right] \quad (6)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \mu \left[-\frac{y}{r^3} + A_{J_2} \left(15 \frac{yz^2}{r^7} - 3 \frac{y}{r^5} \right) \right]$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \left[-\frac{z}{r^3} + A_{J_2} \left(15 \frac{z^3}{r^7} - 9 \frac{z}{r^5} \right) \right]$$

که در آن، $A_{J_2} = 1/2 J_2 R_e^2$ است. بر این اساس، معادلات حرکت مداری ماهواره به صورت رابطه (۷) حاصل می شوند [۷]:

^T Earth Centered (Earth) Fixed

¹ Oblate Earth Coefficient

فرض شده است، که w نویز فرایند با کواریانس Q و v نویز اندازه‌گیری با کواریانس R ، مطابق رابطه (۱۸) هستند:

$$Q = 2\sigma_m^2 \tau_m \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T^2/2 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن، σ_m, τ_m ثابت زمانی مانور هدف با انحراف استاندارد هستند. همچنین روابط (۱۹) معادلات پیش‌بینی و روابط (۲۰) معادلات تخمین فیلتر غیرخطی EKF را نشان می‌دهد [۱].

$$\hat{x}(k|k-1) = f(\hat{x}(k-1|k-1)) \quad (19)$$

$$P(k|k-1) = F_{k-1} P(k-1|k-1) F_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

$$B_k = y(k) - h(\hat{x}(k|k-1))$$

$$S_k = H_k P(k|k-1) H_k^T + R$$

$$K(k) = P(k|k-1) H_k^T S_k^{-1} \quad (20)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k) B_k$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k) S_k K^T(k)$$

که در دو رابطه فوق، $\hat{x}(k|k-1)$ پیش‌بینی برای مرحله k ام و $P(k|k-1)$ ماتریس کواریانس خطای پیش‌بینی، $K(k)$ بهره فیلتر در لحظه k ام، $\hat{x}(k|k)$ تخمین در مرحله k ام و $P(k|k)$ ماتریس کواریانس خطای تخمین می‌باشد. F_k و H_k نیز به ترتیب ژاکوبین‌های $f(\cdot)$ و $h(\cdot)$ هستند که با استفاده از رابطه (۲۱) محاسبه شده‌اند. در این رابطه X_j مؤلفه j ام بردار حالت x می‌باشد.

$$[F_k]_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}(k|k-1)}, [H_k]_{i,j} = \left. \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}(k|k-1)} \quad (21)$$

۵. فیلتر کالمن نمونه‌بردار (UKF)

اگرچه فیلتر EKF بطور موفقیت‌آمیزی در بسیاری از کاربردها مورد استفاده قرار گرفت، اما چندین عیب و کمبود داشت. فیلتر EKF با تقریب توزیع حالت یک متغیر تصادفی گوسی^۱ (GRV) کار می‌کند و در خطی‌سازی مرتبه اول سیستم غیرخطی گسترش می‌یابد. در یکی از روش‌هایی که برای بهبود EKF ارائه شد، همگرایی فیلتر مرتبه اول با تکرار کردن در مرحله بروز رسانی اندازه‌گیری، انجام می‌شود. این فیلترهای کالمن توسعه‌یافته تکرار شده^۲ (IEKF) اثر نویز اندازه‌گیری را کاهش می‌دهند [۹].

$$\phi(k) = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \right) \quad (13)$$

که در آن، x_i, y_i, z_i مختصات رادار مورد نظر و k اندیس زمان می‌باشد. معادله اندازه‌گیری نیز به شکل زیر بیان می‌شود:

$$y(k) = [r(k) \ \theta(k) \ \phi(k)]^T = h(x(k)) + v(k) \quad (14)$$

که در آن، $x(k) = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$ بردار بردار خطای اندازه‌گیری می‌باشد. ماتریس ژاکوبین معادله اندازه‌گیری نیز بدین صورت است [۷]:

$$H(k) = \frac{\partial h(k)}{\partial x(k)} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

که در آن:

$$H_{11} = r_x(k)/r(k), H_{12} = r_y(k)/r(k), H_{13} = r_z(k)/r(k),$$

$$H_{21} = -r_y(k)/(r_x^2(k) + r_y^2(k)), H_{22} = -r_x(k)/(r_x^2(k) + r_y^2(k)),$$

$$H_{31} = -r_z(k)r_x(k)/((r_x^2(k) + r_y^2(k))^{1/2} r^2),$$

$$H_{32} = -r_z(k)r_y(k)/((r_x^2(k) + r_y^2(k))^{1/2} r^2),$$

$$H_{33} = (r_x^2(k) + r_y^2(k))^{1/2} / r^2 \quad (16)$$

$$r_x(k) = x(k) - x_i(k),$$

$$r_y(k) = y(k) - y_i(k),$$

$$r_z(k) = z(k) - z_i(k),$$

$$r^2(k) = r_x^2(k) + r_y^2(k) + r_z^2(k),$$

۴. فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF)

در توسعه فیلتر کالمن استاندارد برای حل معادلات غیرخطی می‌توان از روش EKF استفاده نمود که بر اساس بسط تیلور معادلات غیرخطی عمل می‌کند. از آنجا که اغلب در عمل رابطه بین داده‌ها و پارامترهای دینامیکی ماهواره‌ها غیرخطی است، با وجود پیچیدگی زیاد محاسباتی و پیدا نشدن جواب‌های صریح برای معادلات، برای عملکرد بهتر، از فیلتر کردن غیرخطی استفاده می‌شود. در عمل به لحاظ مقدور نبودن استفاده از روابط فیلتر غیرخطی بهینه از فیلترهای غیرخطی شبه‌بهینه استفاده می‌شود. به طور کلی معادلات دینامیکی (حالت) و معادلات اندازه‌گیری (خروجی) در یک سیستم غیرخطی و در فرم گسسته به صورت روابط (۱۷) می‌باشد [۸].

$$x(k+1) = f(x(k)) + w_k, \quad y(k) = h(x(k)) + v_k \quad (17)$$

که در آن، w و v فرایندهای گوسی سفید با میانگین صفر

^۱ Gaussian Random Variable

^۲ Iterative Extended Kalman Filter

$$\mathbf{X}_{i,k-1} = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & , i=0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma \left(\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}} \right)_i & , i=0,1,\dots,L \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma \left(\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}} \right)_{i-L} & , i=L+1,\dots,2L \end{cases} \quad (23)$$

که در آن، $\left(\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}} \right)_i$ به ستون i ام ماتریس $\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}}$ اشاره دارد و $\gamma = \sqrt{L+\lambda}$ است و نقاط سیگما از بین سیستم غیرخطی زیر منتشر می‌شوند:

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1}) \quad (24)$$

همچنین متوسط پسین $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ و کواریانس $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-$ از نقاط سیگمای آماری انتشار یافته طبق روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathbf{X}_{i,k|k-1} \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \left(\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right)^T \quad (26)$$

وزن‌های W_i^m و W_i^c هم از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$W_0^m = \lambda / (L + \lambda) \quad (27)$$

$$W_0^c = [\lambda / (L + \lambda)] + 1 - \alpha^2 + \beta$$

$$W_i^c = W_i^m = 1 / 2(L + \lambda), \quad i = 1, \dots, 2L$$

که در آن، λ یک پارامتر مقیاس‌دهی مرکب^۱ و برابر $\lambda = \alpha^2(L+K) - L$ و L معمولاً برابر بعد حالت در نظر گرفته می‌شود (در این مقاله $L=6$ در نظر گرفته شده است). ثابت α گستره نقاط سیگمای اطراف $\bar{\mathbf{x}}$ را تعیین می‌کند و معمولاً با یک مقدار مثبت کوچک مقیاس‌دهی می‌شود ($1 \leq \alpha \leq 10^{-4}$). همچنین β برای یکی کردن اطلاعات قبلی توزیع \mathbf{x} استفاده می‌شود (برای توزیع گوسی، $\beta=2$ بهینه است) و ثابت K یک پارامتر مقیاس‌دهی درجه دوم^۲ است که معمولاً با صفر یا $L-3$ مقداردهی می‌شود.

عناصر ماتریس اندازه‌گیری تخمینی $\mathbf{Y}_{i,k|k-1}$ ، نیز با نقاط سیگمای تبدیل شده با استفاده از مدل اندازه‌گیری غیرخطی زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{Y}_{(i,k|k-1)} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}) \quad (28)$$

متوسط اندازه‌گیری $\hat{\mathbf{y}}_k^-$ و کواریانس اندازه‌گیری $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k}$ بر پایه نقاط سیگمای آماری تبدیل شده به دست می‌آید:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m \mathbf{Y}_{i,k|k-1} \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \left(\mathbf{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right) \left(\mathbf{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right)^T + \mathbf{R} \quad (30)$$

^۱ composite scaling parameter

^۲ secondary scaling parameter

فیلتر کالمن نمونه‌بردار، توسط جولیر^۱، اهلن^۲ و دورانت وایت^۳ بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۴ پیشنهاد و توسعه داده شد [۱۰]، که دارای تخمین بهتری نسبت به EKF می‌باشد. UKF یک بسط سنتی فیلتر کالمن برای تخمین سیستم‌های غیرخطی است که تبدیل نمونه بردار^۴ (UT) را پیاده‌سازی می‌کند. تبدیل نمونه‌بردار از مجموعه‌ای از نمونه‌ها یا بردارهای سیگما^۵ که از یک متوسط و کواریانس پیشین حالت، تعیین شده است استفاده می‌کند. این روش، مشخصات همگرایی بهتری داشته و دقت بیشتری از EKF برای سیستم‌های غیرخطی می‌دهد. برای آشنایی بیشتر با تبدیل نمونه‌بردار، به مراجع [۹ و ۱۰] مراجعه شود. اگر بخواهیم الگوریتم فیلتر کالمن نمونه‌بردار برای تخمین اهداف را بیان کنیم، روند نمای شکل ۳ به خوبی بیانگر این مطلب است [۱۱].



شکل ۳. روند نمای فرآیند UKF

۵-۱. معادلات فیلتر UKF

مقداردهی اولیه این فیلتر با متوسط و کواریانس حالت پیش‌بینی شده زیر صورت می‌گیرد [۱۲]:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0] \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = E\left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \right]$$

نقاط سیگما از متوسط و کواریانس حالت پیشین طبق رابطه (۲۳) محاسبه می‌شوند:

^۱ Julier

^۲ Uhlman

^۳ Durrant-Whyte

^۴ Unscented Transform

^۵ Sigma vectors

جدول ۱. پارامترهای مداری ماهواره CHAMP

ردیف	مقدار	نام پارامتر
۱	۶۷۳۹,۱۳۷ Km	Semi-major axis (a)
۲	۰,۰۰۰۳۳	Eccentricity (e)
۳	۸۷,۲۳۴۶°	Inclination (i)
۴	۳۰۳,۳۷۱۳°	Right ascension of ascending node (Ω)
۵	۸۱,۵۶۵۳°	Argument of apogee (ω)
۶	۸۰°	Initial Mean Anomaly (M)

ارتفاع ۳۶۰ کیلومتری زمین واقع شده و یک دور کامل آن به دور زمین حدود ۹۱ دقیقه طول می‌کشد. جدول ۱ پارامترهای مداری این ماهواره را نشان می‌دهد.

۶-۱. معیارهای بهینگی فیلترها

در این مقاله با توجه به منبع [۱۴]، معیارهای بهینگی فیلترهای مورد نظر را می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد: مقدار عددی خطای RMS موقعیت^۱ بعد از همگرا شدن نمودار خطا، میزان حداکثر خطای (پیک) نمودار RMS موقعیت، زمان رسیدن به همگرایی خطای RMS موقعیت و هموار بودن خطا بعد از نقطه همگرایی.

مقدار خطای RMS موقعیت برای هر فیلتر که حاصل جمع خطای RMS در راستای x، y و z می‌باشد از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۴]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left((x_k^i - \hat{x}_k^i)^2 + (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2 + (z_k^i - \hat{z}_k^i)^2 \right)} \quad (35)$$

که در آن، N تعداد مرتبه تکرار مونت کارلو^۲، x_k^i, y_k^i, z_k^i مسیر واقعی هدف برای زمان k در آمین مرتبه تکرار و $\hat{x}_k^i, \hat{y}_k^i, \hat{z}_k^i$ موقعیت تخمینی هدف در هر لحظه می‌باشد. در این مقاله فاصله زمانی بین مشاهدات رادار $\Delta T = 0.1 \text{ sec}$ ، تعداد تکرار فرآیند ردگیری برابر ۱۰۰ مرتبه مونت کارلو (RUN=100)، احتمال آشکارسازی (P_D) برابر ۰/۹۵، مدت زمان حضور ماهواره در دید رادار ۷ دقیقه (۴۲۰ ثانیه) و زاویه دید رادار ۱۷۰ درجه است. همچنین نویز اندازه‌گیری که می‌تواند به عنوان نویز سفید گوسی با میانگین صفر و ماتریس کواریانس رابطه (۱۸) مدل شود، با انحراف معیارهای مقادیر $\sigma_r = \sqrt{1000m}$ ، $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0.017 \text{ rad} = 1^\circ$ [۳]. لازم به ذکر است شرایط اولیه موقعیت، از روی اندازه‌گیری رادار در اسکن اول به دست آمده است.

پس از انتخاب مقادیر اولیه مناسب برای پارامترهای مورد نیاز، به

کواریانس همبستگی متقابل $P_{x_k y_k}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \left(\mathcal{X}_{i,k} |_{k-1} - \hat{x}_k^- \right) \left(\mathcal{Y}_{i,k} |_{k-1} - \hat{y}_k^- \right)^T \quad (31)$$

ماتریس بهره کالمن از همبستگی متقابل و کواریانس اندازه‌گیری زیر، تقریب زده می‌شود:

$$K_k = P_{x_k y_k} P_{y_k y_k}^{-1} \quad (32)$$

همچنین معادلات به‌روزرسانی اندازه‌گیری، استفاده شده برای تعیین متوسط \hat{x}_k^- و کواریانس $P_{x_k}^-$ بدین صورت هستند:

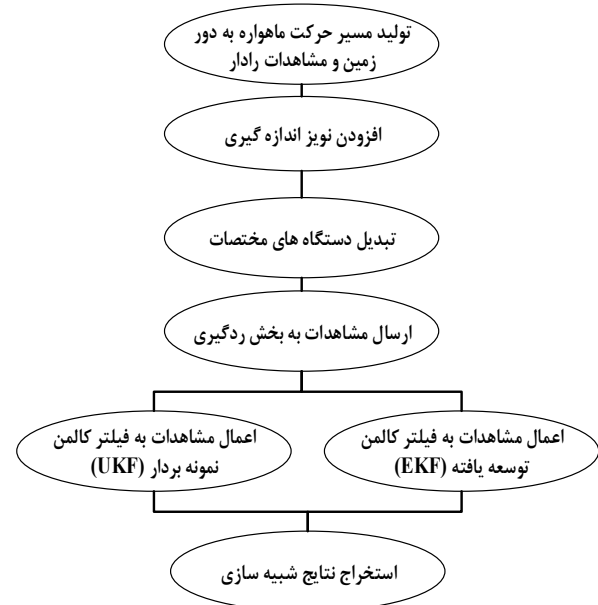
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k^-) \quad (33)$$

$$P_k = P_k^- - K_k P_{y_k y_k} K_k^T \quad (34)$$

برای جزئیات بیشتر، منابع [۹ و ۱۲] را ملاحظه کنید.

۶. نتایج شبیه‌سازی

شبیه‌سازی در این مقاله از سه بخش اصلی تشکیل شده است: ۱- قسمت مدل‌سازی مسیر حرکت ماهواره، ۲- قسمت تولید مشاهدات رادار و ۳- قسمت فرآیند ردگیری و فیلترینگ. شکل ۴ بلوک دیاگرام فرآیند تولید مسیر حرکت ماهواره و ردگیری آن را نشان می‌دهد.

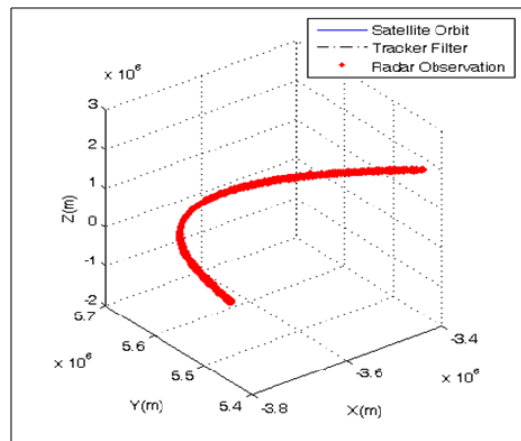
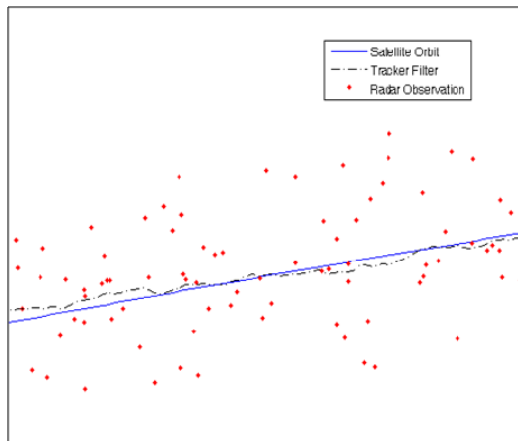


شکل ۴. بلوک دیاگرام فرآیند تولید مسیر حرکت ماهواره و ردگیری آن

برای مدل‌سازی مسیر حرکت ماهواره با استفاده از روش کاول، به مقادیر عناصر کلاسیک مداری نیاز است که در این مقاله از عناصر مداری ماهواره CHAMP استفاده شده است [۱۳]. این ماهواره در

^۱ RMSE Position

^۲ Monte Carlo



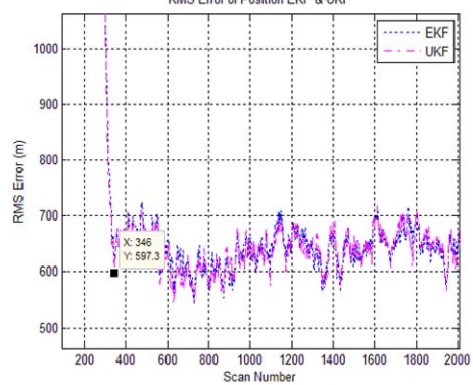
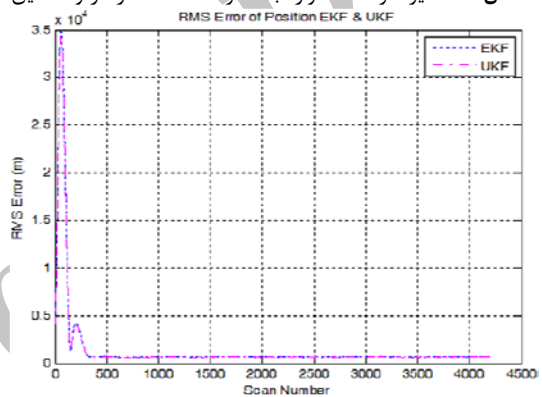
شکل ۵. مسیر حرکت ماهواره به همراه مشاهدات رادار و تخمین توسط فیلتر (سمت راست: تصویر با دید کلی، سمت چپ: تصویر با دید نزدیک‌تر)

رسم نمودارهای خطا برای فیلترهای EKF و UKF می‌پردازیم. ابتدا در شکل ۵ مسیر حرکتی ماهواره به همراه مشاهدات رادار و فیلتر مورد نظر را به دو صورت دید کلی و تصویر از دید نزدیک‌تر مشاهده می‌کنیم. در این شکل خط ممتد، مدار حرکت ماهواره، خط‌چین‌ها فیلتر ردگیر و نقاط دایره، مشاهدات رادار را نشان می‌دهد.

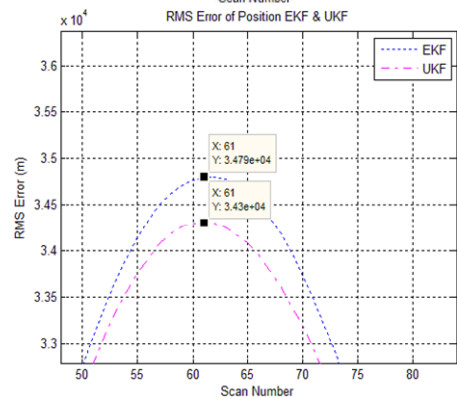
خطای RMS موقعیت برای فیلترهای EKF و UKF، تصویر زوم‌شده نمودار آن پس از رسیدن به همگرایی و در نقطه حداکثر خطای نمودار در شکل ۶ مشاهده می‌شود. در این تصاویر، خطای RMS موقعیت برحسب متر و فاصله بین هر اسکن برابر ۰/۱ ثانیه می‌باشد. در ضمن خطوط نقطه‌چین نشانگر فیلتر EKF و خطوط نقطه‌چین نشانگر فیلتر UKF است. مطابق شکل، حداکثر خطای نمودار RMS موقعیت برای فیلتر EKF برابر ۳۴۷۹۰ متر و برای فیلتر UKF برابر ۳۴۳۰۰ متر، زمان رسیدن به همگرایی هم برای هر دو فیلتر حدود ۳۳ ثانیه و مقدار خطا بعد از همگرایی حدود ۶۴۵ متر است.

در شکل ۷ خطای مشاهدات و اندازه‌گیری‌های رادار در دستگاه مختصات کروی دیده می‌شود. ضمن اینکه مقایسه خطای RMSE موقعیت و مشاهدات در این شکل آورده شده است. همان‌طور که در شکل سمت راست دیده می‌شود، خطایی که فیلترها تخمین می‌زنند نسبت به خطای مشاهدات و اندازه‌گیری‌های رادار بسیار کم می‌شود به نحوی که خطای مشاهدات رادار که در حدود ۴۰۰۰ متر است، توسط فیلترها به حدود ۶۵۰ متر کاهش می‌یابد. همچنین در شکل‌های ۸ و ۹، به ترتیب خطای تخمین موقعیت ماهواره در دو دستگاه مختصات کروی (در راستای x, y و z) و دستگاه مختصات

کارترین (در راستای φ, θ, R) مشاهده می‌شود.

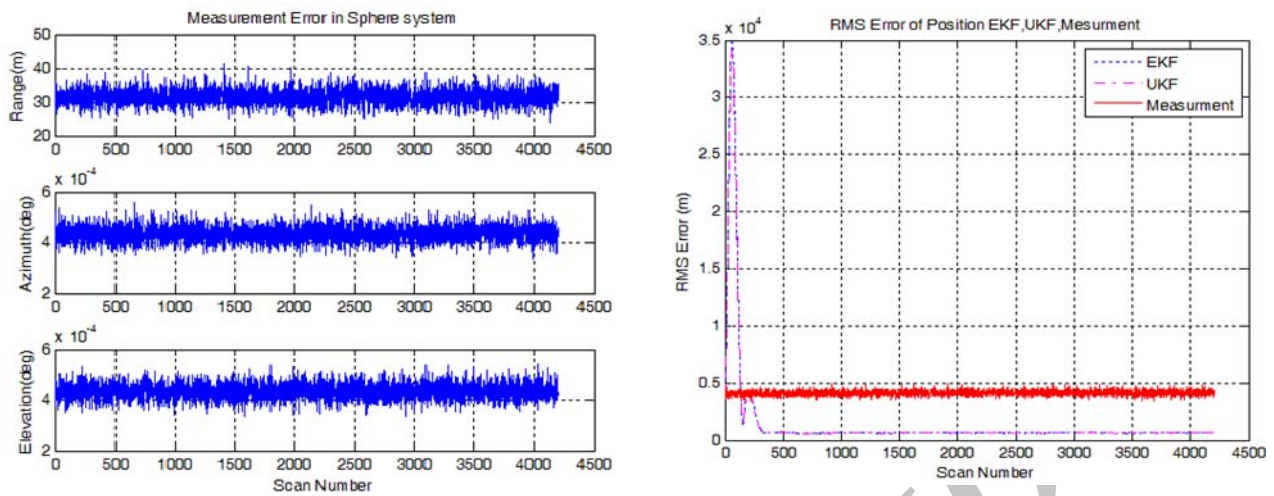


(الف)

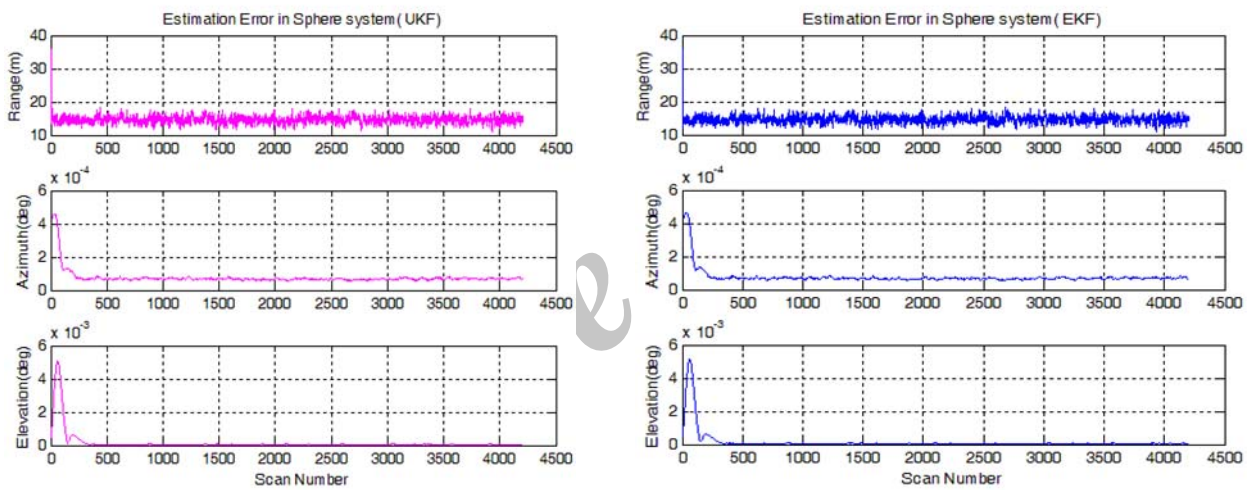


(ب)

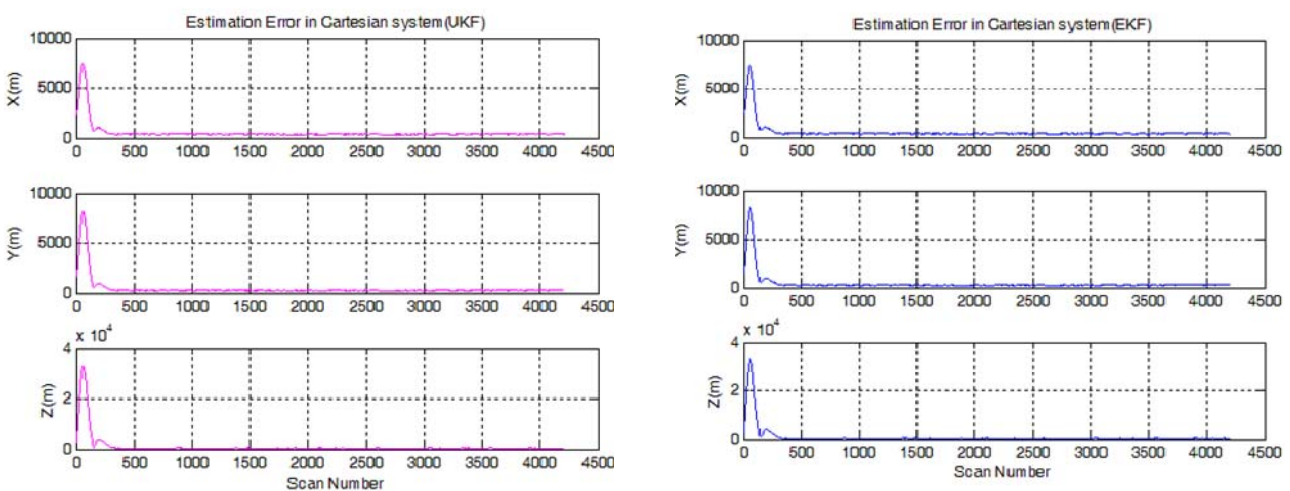
شکل ۶. مقایسه خطای RMSE موقعیت فیلترهای EKF و UKF (تصویر با دید نزدیک‌تر: شکل (الف)؛ پس از رسیدن به همگرایی. شکل (ب): نقطه حداکثر خطا)



شکل ۷. سمت راست: مقایسه خطای RMS موقعیت و مشاهدات رادار، سمت چپ: خطای مشاهدات رادار در دستگاه مختصات کروی



شکل ۸. خطای تخمین موقعیت ماهواره در دستگاه مختصات کروی (سمت راست: فیلتر EKF، سمت چپ: فیلتر UKF)



شکل ۹. خطای تخمین موقعیت ماهواره در دستگاه مختصات دکارتی (سمت راست: فیلتر EKF، سمت چپ: فیلتر UKF)

جدول ۲. مقایسه خطای فیلترهای EKF و UKF در دستگاه دکارتی

فیلتر UKF			فیلتر EKF			نوع فیلتر
بازه ناهمواری (متر)	زمان همگرایی (ثانیه)	حداکثر خطا (متر)	بازه ناهمواری (متر)	زمان همگرایی (ثانیه)	حداکثر خطا (متر)	پارامتر مورد ارزیابی
۷۰۰ تا ۶۰۰	۳۳	۳۴۷۰۰	۷۰۰ تا ۶۰۰	۳۳	۳۵۲۰۰	خطای RMSE موقعیت
۴۲۰ تا ۲۸۰	۲۹	۷۵۰۰	۴۵۰ تا ۳۰۰	۲۹	۷۶۰۰	خطای تخمین (X)
۲۹۵ تا ۱۹۰	۳۳	۸۲۰۰	۳۰۰ تا ۲۰۰	۳۲	۸۳۰۰	خطای تخمین (Y)
۴۹۰ تا ۳۴۰	۳۳	۳۲۹۰۰	۵۰۰ تا ۳۵۰	۳۲	۳۳۴۰۰	خطای تخمین (Z)
متر ۶۴۳			متر ۶۴۵			مقدار عددی RMSE

(محاسبات مشتق‌گیری) برای معادلات دینامیک و معادلات اندازه‌گیری نیاز می‌باشد که این محاسبات در فیلتر UKF حذف شده است. در نتیجه، در صورتی که معادلات ورودی به فیلتر EKF پیچیده باشد، تخمین این فیلتر با صرف زمان و دقت زیاد همراه می‌شود. از آنجا که معادلات اندازه‌گیری و دینامیک مورد استفاده در این مقاله از پیچیدگی بالایی برخوردار نمی‌باشند، لذا محاسبات ژاکوبین فیلتر EKF نسبتاً ساده می‌باشد و در مقابل، به دلیل حجم محاسباتی بالاتر فیلتر UKF، محاسبات پیچیده‌تری نسبت به فیلتر EKF به وجود می‌آید.

جدول ۳. مقایسه خطای فیلترهای EKF و UKF و مشاهدات رادار در مسیر تولیدی با متلب

خطای تخمین UKF	خطای تخمین EKF	مشاهدات رادار	RMSE
۱۴/۵۸ متر	۱۴/۵۹ متر	۳۱/۵۲ متر	برد ρ (متر)
۰/۰۶۷	۰/۰۶۸	۰/۴۳۵	زاویه سمت θ (میلی رادیان)
۰/۰۶۶۹	۰/۰۶۷	۰/۴۳۴	زاویه ارتفاع ϕ (میلی رادیان)

در جدول ۲ مقایسه‌ای میان RMS خطای موقعیت و خطای تخمین در دستگاه دکارتی و مقدار RMSE بعد از رسیدن به همگرایی برای فیلترهای EKF و UKF آورده شده است. همچنین مقایسه خطای تخمین و مشاهدات رادار در دستگاه مختصات کروی در جدول ۳ بیان شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در تمامی حالات، خطای فیلتر UKF از فیلتر EKF کمتر است.

۷. نتیجه‌گیری

از آن‌جا که فیلترهای خطی مرسوم قادر به ردگیری دقیق اهداف با دینامیک حرکتی غیرخطی (مانند ماهواره‌ها) نیستند، در این مقاله برای ردگیری ماهواره‌های مدار پایین‌زمین از فیلترهای غیرخطی EKF و UKF استفاده کردیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با وجود نزدیک بودن رفتار دو فیلتر به یکدیگر، در تمامی بخش‌های شبیه‌سازی، فیلتر UKF نسبت به فیلتر EKF رفتار بهتری دارد و خطای RMS موقعیت و خطای تخمین کمتری به وجود می‌آورد.

یکی از نکات مهم در مقایسه فیلترها، بهبود خطا در فیلتر مورد نظر نسبت به خطای مشاهدات می‌باشد. همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، میزان خطای تخمینی در فیلترهای EKF و UKF نسبت به خطای مشاهدات (خطای خروجی نسبت به خطای ورودی به فیلتر) در راستای برد تا حدود ۵۰٪ و در راستای سمت تا حدود ۸۰٪ کاهش یافته است. همچنین اگرچه فیلتر کالمن نمونه بردار دارای حجم معادلات و محاسبات بیشتری نسبت به فیلتر کالمن توسعه‌یافته است، اما در فیلتر EKF محاسبه ماتریس ژاکوبین

۸. مراجع

- [8] J.Rohde, "Kalman filter for attitude determination of student satellite", A master thesis of Norwegian University of Science and Technology Department of Engineering Cybernetics, (NTNU), July 2007.
- [9] A.Eric, W. and R. van der Merwe, "Kalman Filtering and Neural Networks, Edited by Simon Haykin", Department of Electrical and Computer Engineering, Oregon Graduate Institute of Science and Technology, ISBN: 978-0-471-36998-1, October 2001.
- [10] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems", in Proceedings of the SPIE AeroSense International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, (Orlando, Florida), April 20–25, 1997.
- [11] M. Ilyas, J. Lim, J. Gyu Lee, C. Gook Park, " Federated Unscented Kalman Filter Design for Multiple Satellites Formation Flying in LEO", International Conference on Control, Automation and Systems, Seoul, Korea, pp.453-458, Oct. 14-17, 2008.
- [12] M.C. VanDyke, J. L. Schwartz, C.D. Hall , " Unscented Kalman Filtering for spacecraft attitude state and parameter estimation ", Permission to publish granted to The American Astronautical Society, AAS-04-115, 2004
- [13] M. Forghani, M. Farrokhi "Satellite Orbit Estimation Using On-Line Neural Networks" 9th IFAC Workshop "Adaptation and learning in control and signal processing" (ALCOSP'07), Saint Petersburg, RUSSIA, August 29-31, 2007
- [14] H. Lan, Y. Liang, W. Zhang, F. Yang, Q. Pan, "Iterated Minimum Upper Bound Filter for Tracking Orbit Maneuvering Targets", Information Fusion (FUSION), 16th International Conference (IEEE), Istanbul, pp. 1051-1057, 9-12 July 2013.
- [1] J. Salem, M. Zeighami, S.M. Alavi, " Estimation of LEO satellites position and their tracking with Extended Kalman Filter & Unscented Kalman Filter", Master thesis of imam hossein university .2014 (In Persian)
- [2] O. Montenbruck, and E. Gill, "Satellite Orbits. Models, Methods and Applications", ISBN 3-540-67280-X, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001
- [3] P. Vergez , L . Sauter, and S. Dahlke" An Improved Kalman Filter for Satellite Orbit Predictions ". The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 52, No. 3, July–September 2004.
- [4] J. Salem, G. Saadatimoghadam, S.M. Alavi, " Modelling of LEO satellites trajectory and Performance evaluation of conventional filters tracker ", Second National Conference on Radar Systems Technology, imam hossein university .2013 (In Persian)
- [5] M. J.Sidi, "Spacecraft Dynamic and Control, A Practical Engineering Approach", Cambridge aerospace series 7, ISBN 0-521-55072-6, 1997.
- [6] A. Benavoli, L. Chisci and A.Farina, "Tracking of a ballistic missile with a-priori information", IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, Vol. 43, NO. 3, pp. 1000-1016, 2007.
- [7] W. Panlong, J. Kong, B. Yuming, " Modified iterated extended Kalman particle filter for single satellite passive tracking", Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, pp. 120 – 130, 2013.