

تصویرسازی سریع در رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی زمین‌پایه

سید روح‌الله ثمره هاشمی^۱، سید علیرضا سیدین^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری ۲- دانشیارگروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت: ۲۵/۰۴/۹۳، پذیرش: ۲/۱۲/۹۳)

چکیده

با توجه به تفاوت سابقه فاز سیگنال سمت و الگوی مهاجرت برد در رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی نسبت به رادار با حرکت خطی، الگوریتم‌های تصویرسازی سامانه خطی در سامانه گردشی از کارایی لازم برخوردار نیست. در این مقاله با استفاده از تقریب معادله برد در سامانه گردشی، مدل سیگنال در حوزه فرکانس دوبعدی استخراج و یک الگوریتم تصویرسازی حوزه فرکانس با استفاده از رابطه حاصل پیشنهاد شده که با توجه به ثبات مسیر و سرعت حرکت آنتن، علاوه بر دقت از سرعت بالایی برخوردار است. شبیه‌سازی‌ها دقت این الگوریتم را در تشکیل تصویر اهداف در مختصات قطبی تأیید می‌کند. در این تحقیق نشان داده شده در مورد اهداف با برد نزدیک به برد مرجع، می‌توان با حذف یک مرحله جبران فاز، حجم پردازش و سخت‌افزار مورد نیاز را کاهش داد. در نهایت مکان این اهداف تحت عنوان «ناحیه تصویرسازی سریع» با توجه به هندسه و مشخصات سامانه محاسبه گردیده است.

واژگان کلیدی

رادار دهانه ترکیبی، رادار دهانه ترکیبی گردشی، الگوریتم تشکیل تصویر حوزه فرکانس، خطای فاز.

۱. مقدمه

ترکیبی به مراتب طولانی‌تر از دهانه فیزیکی آنتن شبیه‌سازی می‌شود و بدین ترتیب می‌توان به قدرت تفکیک بالا در سمت (راستای حرکت) دست یافت. برای این منظور لازم است رادار روی یک سکوی متحرک (مانند هواپیما یا ماهواره) قرار گیرد. یکی از انواع رادارهای دهانه ترکیبی، رادار دهانه ترکیبی گردشی (CSAR) است که در آن سکوی حامل رادار یک مسیر دایروی را طی می‌کند. در این حالت در صورتی که پرتو آنتن^۷ روی یک ناحیه متمرکز بماند، می‌توان با استفاده از سیگنال دریافتی از یک گستره ۳۶۰ درجه حول آن ناحیه به تصویر سه بعدی دست یافت [۵-۲]. یکی دیگر از انواع CSAR، سامانه‌ای است که در آن آنتن، حین حرکت نسبت به سکو ثابت بوده و پرتو آنتن یک ناحیه حلقوی را جاروب^۸ می‌کند (شکل

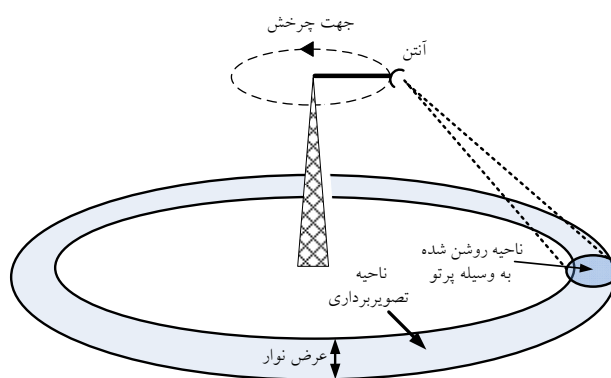
رادار دهانه ترکیبی (SAR)^۱ در دهه‌های اخیر برای تهیه تصاویر سطح زمین بسیار مورد توجه قرار گرفته است. از جمله مزایای این سامانه بر سامانه‌های تصویربرداری نوری می‌توان به عدم وابستگی به نور، کارایی در شرایط آب و هوایی مختلف، حد تفکیک^۲ سمت^۳ مستقل از برد^۴ و قابلیت تشخیص اهداف پنهان را نام برد [۱]. مشخصه اصلی این نوع رادار وجود حرکت نسبی بین رادار و هدف حین ارسال و دریافت سیگنال می‌باشد. در واقع با حرکت رادار نسبت به هدف ساکن و پردازش همدوس^۵ سیگنال دریافتی، یک دهانه

*رایانامه نویسنده پاسخگو: seyedin@um.ac.ir

^۶ Circular SAR^۷ Antenna Beam^۸ Scan^۱ Synthetic Aperture Radar^۲ Resolution^۳ Azimuth^۴ Range^۵ Coherent

آن می‌باشد. در واقع به دلیل تفاوت الگوی تغییرات فاصله در این سامانه نسبت به SAR خطی، سیگنال حوزه سمت دیگر مدولاسیون فرکانس خطی (LFM)^۸ نخواهد داشت. در برخی پژوهش‌های این حوزه با فرض پهنای پرتو^۹ باریک و اهداف دور، معادله برد تقریب زده شده است [۷، ۱۲ و ۱۳] اما در بخش‌های بعد نشان داده خواهد شد در این سامانه برای داشتن حد تفکیک مناسب در سمت، لازم است پرتو سمت هرچه پهن‌تر باشد، لذا فرض پرتو باریک برخلاف سامانه خطی معمولاً برقرار نیست. در [۱۴] تشکیل تصویر در مختصات سه بعدی به وسیله الگوریتم همبستگی حوزه زمان (TDC)^{۱۰} انجام شده است که از نظر محاسباتی بسیار پرحجم است. در [۱۵] با تقریب رابطه برد با فرض پرتو سمت باریک و استفاده از الگوریتمی بر مبنای مقیاس‌بندی چیرپ^{۱۱}، حجم محاسبات الگوریتم ذکر شده در [۱۴] کاهش داده شده است، اما تقریب سیگنال حوزه سمت با چیرپ تنها در حالت باریک بودن پرتو امکان‌پذیر است. در [۱۶] از الگوریتم تغییر یافته $\omega - k$ برای تصویرسازی استفاده شده است که در آن معادله برد در مختصات سه بعدی به وسیله چند جمله‌ای درجه ۴ تقریب زده شده و با استفاده از این تقریب، رابطه سیگنال در حوزه فرکانس دوبعدی استخراج شده است اما پیچیدگی روابط باعث شده جبران‌سازی جملات مختلف فاز مربوط به اهداف در بردهای متفاوت و نیز تصحیح مهاجرت برد (RCMC)^{۱۲} تنها با توجه به برد مرجع صورت گیرد. در مقاله حاضر با توجه به محدودیت شعاع چرخش آنتن، تقریب جدیدی از رابطه برد در هندسه سه بعدی استخراج و نشان داده شده این تقریب در هندسه‌های معمول و کاربردی سامانه زمین‌پایه از دقت کافی برخوردار است. با این تقریب و استفاده از اصل فاز ایستادن (POSP)^{۱۳}، طیف سیگنال در حوزه فرکانس دو بعدی استخراج شده و بر آن اساس ضمن محاسبه حد تفکیک در برد و سمت، یک الگوریتم تصویرسازی حوزه فرکانس برای تشکیل تصویر در مختصات قطبی پیشنهاد شده است. لازم به ذکر است به دلیل ثبات سرعت آنتن در این سامانه، استفاده از الگوریتم حوزه فرکانس به راحتی امکان‌پذیر بوده و تشکیل تصویر نسبت به الگوریتم‌های حوزه زمان با سرعت بالاتری انجام خواهد شد. در الگوریتم پیشنهادی ابتدا سیگنال دریافتی و سیگنال مرجع در حوزه فرکانس دو بعدی ضرب می‌شوند. در صورت منطبق بودن سیگنال مرجع و هدف، می‌توان با یک مرحله IFFT دوبعدی از سیگنال حاصل، به تصویر نهایی دست یافت. نشان داده شده به دلیل عدم مطابقت سیگنال دریافتی و سیگنال مرجع، سیگنال حاصل دارای خطای فاز

(۱)، لذا این سامانه همان SAR نواری^۱ با حرکت گردشی است. به دلیل تشکیل یک تصویر ۳۶۰ درجه از اطراف یک ناحیه مشخص، این سامانه می‌تواند در کاربردهای رصد و دیده‌بانی بسیار سودمند باشد. از مزایای دیگر آن امکان تصویرسازی از یک ناحیه وسیع در زمان جاروب نسبتاً کم، زمان بازدید کم^۲ و امکان جاروب‌های متوالی کاملاً هم‌مسیر است.



شکل ۱. هندسه سه بعدی رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی

از داده جاروب‌های متوالی می‌توان برای افزایش SNR، کاهش نویز لکه‌ای^۳ (با تغییر زاویه لوجی^۴ در هر جاروب)، تشخیص تغییرات، تشخیص اهداف متحرک یا تصویرسازی سه بعدی (با تغییر ارتفاع در جاروب‌های متوالی) استفاده نمود. نوع زمین‌پایه^۵ این سامانه که در آن رادار واقع در انتهای یک محور چرخان نصب شده روی یک خودرو، دکل، ساختمان یا کوه است، می‌تواند بدون نیاز به سکوی پرنده گزینه مناسبی برای تهیه تصاویر دو یا سه بعدی از پیرامون یک منطقه مشخص باشد. در ضمن به دلیل نصب آنتن روی یک محور و استفاده از موتور الکتریکی برای چرخاندن آن و در نتیجه ثبات سرعت و مسیر، خطای فاز ناشی از انحراف سرعت و مسیر آنتن، و به تبع آن نیاز به الگوریتم‌های جبران‌سازی حرکت بسیار کمتر خواهد بود. همچنین به دلیل محدوده وسیع سرعت‌های قابل اختیار، فرکانس تکرار پالس (PRF)^۶ می‌تواند در گستره وسیع تری انتخاب شود و محدودیت ناشی از سرعت سکو روی PRF کمتر است. تا کنون نمونه‌هایی از این سامانه با کاربردهای مختلف پیشنهاد یا ساخته شده‌اند [۱۱-۶]. یکی از چالش‌های اصلی در تشکیل تصویر در این سامانه، منحنی بودن مسیر حرکت مرکز فاز آنتن (APC)^۷ و لذا ناکارآمدی الگوریتم‌های تشکیل تصویر SAR با حرکت خطی در

^۸ Linear FM

^۹ Beam Width

^{۱۰} Time-Domain Correlation

^{۱۱} Chirp Scaling

^{۱۲} Range Cell Migration Correction

^{۱۳} Principle Of Stationary Phase

^۱ Strip-Map

^۲ Revisit Time

^۳ Speckle Noise

^۴ Squint Angle

^۵ Ground-Based

^۶ Pulse Repetition Frequency

^۷ Antenna Phase Center

$$s_n(t, \theta) = \exp \left[j \pi \alpha_r \left(t - \frac{2R(\theta, \theta_n)}{c} \right)^2 \right] \exp \left[-j \frac{4\pi}{c} f_c R(\theta, \theta_n) \right], \quad (2)$$

$$0 \leq t \leq T_p, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

که c سرعت موج و $R(\theta, \theta_n)$ فاصله APC از هدف است. با اعمال تبدیل فوریه نسبت به متغیر t و استفاده از POSP خواهیم داشت:

$$S_n(f, \theta) = \exp \left(-j \frac{\pi}{\alpha_r} f^2 \right) \exp \left[-j \frac{4\pi}{c} (f + f_c) R(\theta, \theta_n) \right], \quad (3)$$

$$-\frac{f_B}{2} \leq f \leq \frac{f_B}{2}$$

که f_B پهنای باند^۱ و برابر با $T_p a_r$ است. سیگنال دریافتی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$S_n(k_r, \theta) = \exp \left[-j \frac{\pi}{\alpha_r} \left(\frac{ck_r}{4\pi} - f_c \right)^2 \right] \exp \left[-jk_r R(\theta, \theta_n) \right], \quad (4)$$

$$\frac{4\pi}{c} \left(f_c - \frac{f_B}{2} \right) \leq k_r \leq \frac{4\pi}{c} \left(f_c + \frac{f_B}{2} \right)$$

که k_r برابر با $\frac{4\pi}{c}(f_c + f)$ است. مقدار $R(\theta, \theta_n)$ با توجه به شکل ۲ به صورت زیر است:

$$R(\theta, \theta_n) = \sqrt{H^2 + r_n^2 + r_a^2 - 2r_n r_a \cos(\theta - \theta_n)} \quad (5)$$

با فرض $\gamma = \cos(\theta - \theta_n)$ ، مقدار $R(\theta, \theta_n)$ را می‌توان با استفاده از بسط حول نقطه $\gamma = 1$ (معادل $\theta = \theta_n$) به صورت زیر تقریب زد:

$$R(\theta, \theta_n) = R_{nc} - \frac{r_a r_n}{R_{nc}} (\gamma - 1) - \frac{r_a^2 r_n^2}{2R_{nc}^3} (\gamma - 1)^2 + \dots \quad (6)$$

R_{nc} کوتاه‌ترین فاصله APC از هدف است (شکل ۲):

$$R_{nc} = \sqrt{H^2 + (r_n - r_a)^2} \quad (7)$$

با چشم‌پوشی از جملات درجه ۲ به بالا، داریم:

$$R(\theta, \theta_n) \approx R_{nc} + \frac{r_a r_n}{R_{nc}} - \frac{r_a r_n}{R_{nc}} \cos(\theta - \theta_n) \quad (8)$$

در [۱۶] بسط تابع برد بر حسب متغیر زمان (در اینجا θ) نوشته

خواهد بود که این خطای فاز باعث محو شدن تصویر در حوزه سمت به ویژه برای اهداف با برد دورتر از برد مرجع خواهد شد. از آنجا که این خطای فاز به مختصات هدف بستگی دارد، در مرحله بعدی الگوریتم، سابقه فاز اهداف با برد متفاوت در حوزه برد-دایر از دیگر جدا شده و هر کدام در تابع اصلاح مناسب ضرب می‌شود. در ادامه نشان داده شده که خطای فاز سمت عمدتاً از نوع خطای فاز مربعی (QPE) است و از آنجا که حدی از QPE در تصویرسازی SAR قابل تحمل است، بنابراین در مورد اهداف با برد نزدیک به برد مرجع، می‌توان مرحله اصلاح خطای فاز را از الگوریتم حذف نمود که به افزایش نسبی سرعت و کاهش حجم حافظه و سخت افزار لازم منجر خواهد شد. گستره برد همه اهدافی که خطای فاز در تصویر آنها زیر حد مجاز است، تحت عنوان «ناحیه تصویرسازی سریع» استخراج شده است.

جهت تشریح موارد فوق، این مقاله در چند بخش تنظیم شده است. در بخش دوم، مدل سیگنال باند پایه دریافتی در حوزه فرکانس برد و فرکانس سمت با استفاده از تقریب رابطه برد استخراج شده است. در بخش سوم، با توجه به پهنای باند طیف دو بعدی سیگنال، حد تفکیک سامانه در برد و سمت محاسبه و با حد تفکیک سامانه نواری با حرکت خطی مقایسه شده است. در بخش چهارم، الگوریتم تشکیل تصویر تشریح شده است. در بخش پنجم با توجه به برد مرجع در تصویرسازی، ناحیه تصویرسازی سریع استخراج و با ناحیه روشن شده به وسیله پرتو آنتن تطبیق داده شده است. در بخش ششم نتایج شبیه‌سازی ارائه و در نهایت در بخش هفتم نتایج کار جمع‌بندی شده‌اند.

۲. مدل سازی سیگنال

شکل ۲ موقعیت APC را در هندسه سه بعدی نشان می‌دهد. پالس‌های ارسالی را با مدولاسیون LFM و به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$p_{LFM}(t) = \exp(j \pi \alpha_r t^2) \exp(j 2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_p \quad (1)$$

که f_c فرکانس حامل^۲، a_r نرخ چیرپ^۳ و T_p پهنای پالس^۴ ارسالی است. با فرض یک هدف نقطه‌ای نرمال (با بازتاب‌پذیری^۵ واحد) در مختصات استوانه‌ای $(r_n, \theta_n, 0)$ ، سیگنال باند پایه دریافتی هنگام قرار گرفتن آنتن در مختصات (r_a, θ, H) ، به صورت رابطه (۲) خواهد بود:

¹ Quadratic Phase Error

² Carrier Frequency

³ Chirp Rate

⁴ Pulse Width

⁵ Reflectivity

¹ Band Width

متغیرهای رابطه (۸) می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$R(\theta, \theta_n) = R_{nc} + \frac{r_a r_n}{R_{nc}} - \frac{r_a r_n}{R_{nc}} \cos(\theta - \theta_n) \quad (9)$$

$$R_n - r_{an} \cos(\theta - \theta_n)$$

که $R_n = R_{nc} + r_{an}$ و $r_{an} = \frac{r_a r_n}{R_{nc}}$ است. مطابق روابط پیوست ۱ می‌توان نشان داد r_{an} تقریباً برابر با طول تصویر شعاع چرخش آنتن روی راستای خط دید (LOS^۳) هدف و R_n برابر با فاصله هدف از مرکز دوران آنتن (نقطه $(0,0,H)$) است. با جای‌گذاری رابطه (۹) در رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$S_n(k_r, \theta) = \exp\left[-j \frac{\pi}{\alpha_r} \left(\frac{ck_r}{4\pi} - f_c\right)^2\right] \exp(-jk_r R_n) \exp[jk_r r_{an} \cos(\theta - \theta_n)] \quad (10)$$

برای دستیابی به مشخصات طیف دوبعدی سیگنال، باید تبدیل فوریه در راستای سمت (θ) اعمال شود:

$$S_n(k_r, k_\theta) = \exp\left[-j \frac{\pi}{\alpha_r} \left(\frac{ck_r}{4\pi} - f_c\right)^2\right] \exp(-jk_r R_n) \int_{\frac{\theta_{Bn}}{2}}^{\frac{\theta_{Bn}}{2}} \exp[jk_r r_{an} \cos(\theta - \theta_n)] \exp(-jk_\theta \theta) d\theta \quad (11)$$

برای محاسبه این انتگرال از POSP استفاده می‌کنیم. فاز انتگرال فوریه به‌صورت زیر است:

$$\Theta(\theta) = k_r r_{an} \cos(\theta - \theta_n) - k_\theta \theta \quad (12)$$

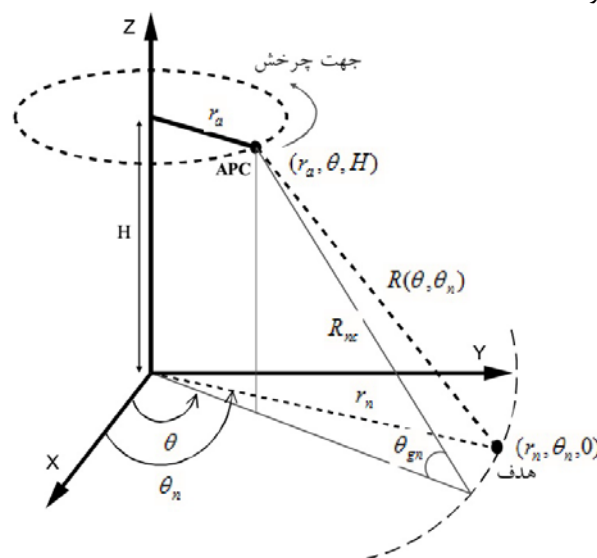
با مساوی قرار دادن مشتق $\Theta(\theta)$ با صفر خواهیم داشت:

$$k_\theta = -k_r r_{an} \sin(\theta - \theta_n) \Rightarrow \theta = \theta_n - \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{an}}\right) \quad (13)$$

بنابراین سیگنال حوزه فرکانس دو بعدی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_n(k_r, k_\theta) = \exp\left[-j \frac{\pi}{\alpha_r} \left(\frac{ck_r}{4\pi} - f_c\right)^2\right] \exp\left[-j(k_r R_n + k_\theta \theta_n)\right] \exp\left\{j \left[\sqrt{k_r^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} + k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{an}}\right) \right]\right\} \quad (14)$$

شده و برای رسیدن به دقت بیشتر جملات درجه بالا هم در نظر گرفته شده است، اما در اینجا چون بسط بر حسب $\cos(\theta - \theta_n)$ انجام شده، جملات درجه پایین نیز از دقت کافی برخوردار خواهند بود.



شکل ۲. مختصات رادار و هدف در سامانه

برای بررسی دقت باید میزان خطای فاز ناشی از این تقریب محاسبه شود. به همین منظور خطای فاز حاصل از تقریب یعنی $\frac{4\pi}{\lambda} \Delta R(\theta, \theta_n)$ (که اختلاف برد واقعی و برد تقریبی است) برحسب ارتفاع آنتن (H) و زاویه خراش (θ_{gn}) (در شکل ۲) محاسبه و با مقدار مجاز مقایسه شده است. می‌دانیم که حد خطای فاز پذیرفته‌شده $\frac{\pi}{4}$ است [۱۷]. شکل ۳ نتیجه این مقایسه را برای شعاع چرخش ۱/۵ و ۵ متر و با فرض پهنای پرتو ۱۰ و ۳۰ درجه در سمت به‌وسیله یک نمودار حد فاصلی^۲ نشان می‌دهد. برای محاسبه $\Delta R(\theta, \theta_n)$ مقدار $\theta - \theta_n$ برابر با مقداری که در آن بیشترین خطای تقریب رخ می‌دهد در نظر گرفته شده است. فرض می‌کنیم محور آنتن هنگامی که هدف در پرتو قرار دارد زاویه θ_{Bn} را می‌پیماید، بنابراین بیشترین خطای تقریب در $\theta - \theta_n = \frac{\theta_{Bn}}{2}$ رخ خواهد داد. مقدار θ_{Bn} بر حسب پهنای پرتو آنتن و برد هدف در پیوست ۱ محاسبه شده است. عدد روی خطوط شکل ۳، نسبت بیشینه اختلاف فاز به $\frac{\pi}{4}$ را نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در بخش‌های (الف) و (ب) و (ج) این شکل، در ارتفاع و زوایای خراش مختلف همواره بیشینه خطای تقریب کمتر از آستانه است. در بخش (د) تنها در ارتفاع زیر ۲۰ متر و زوایای خراش بالای ۶۵ درجه بیشینه خطای فاز به آستانه مجاز رسیده است که این زوایا به دلیل تضعیف حد تفکیک برد، در کاربردهای معمول SAR مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. بنابراین می‌توان گفت این تقریب در هندسه‌های معمول سامانه زمین‌پایه از دقت کافی برخوردار است. جهت ارائه یک تعبیر هندسی از

³ Line Of Sight

¹ Grazing Angle

² Contour

۳. حد تفکیک

است که θ_{az} پهناى پرتو آنتن در سمت می‌باشد. بنابراین پهناى باند حوزه k_θ به صورت زیر خواهد بود:

$$B_{k_\theta} = 2k_r r_{am} \sin\left(\frac{R_{nc} \theta_{az}}{r_n 2}\right) \quad (17)$$

حد تفکیک در سمت را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{B_{k_\theta}} = \frac{\pi}{k_r r_{am} \sin\left(\frac{R_{nc} \theta_{az}}{r_n 2}\right)} \quad (18)$$

همانطور که مشخص است، مقدار حد تفکیک هم به فرکانس برد (k_r) و هم به موقعیت هدف در برد وابسته است. با فرض باندباریک^۱ بودن سیگنال ($f_B \ll f_c$) می‌توان مقدار k_r را به صورت $\frac{4\pi}{\lambda}$ تقریب زد. بنابراین:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{4r_{am} \sin\left(\frac{R_{nc} \theta_{az}}{r_n 2}\right)} \quad (19)$$

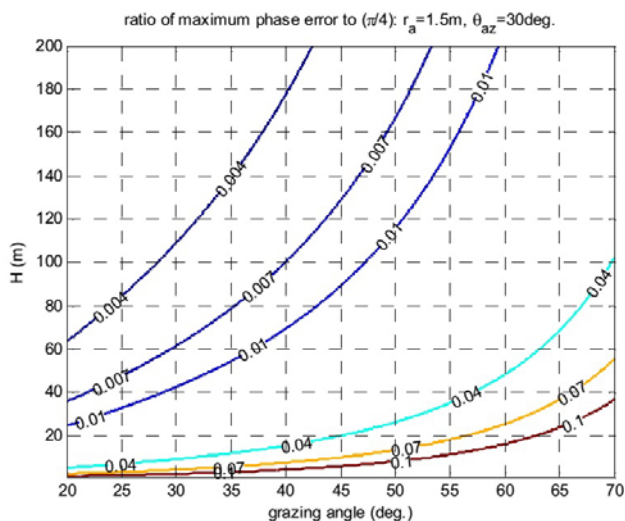
حد تفکیک در برد (مایل)^۱ را می‌توان با توجه به حدود متغیر k_r در رابطه (۴) به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\Delta r = \frac{2\pi}{B_{k_r}} = \frac{2\pi}{4\pi f_B} = \frac{c}{2f_B} \quad (15)$$

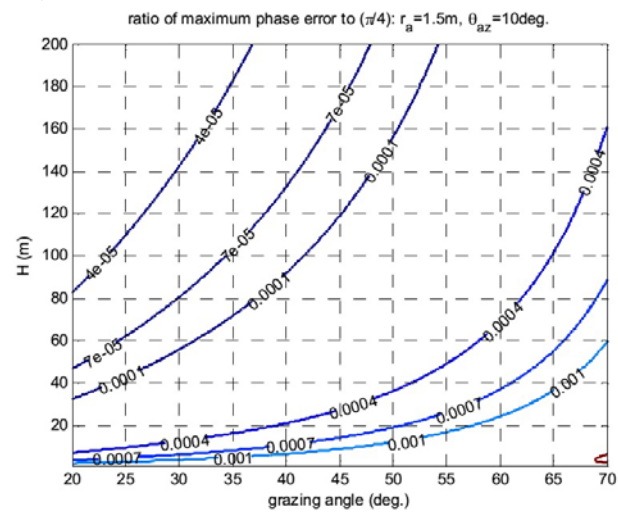
که B_{k_r} پهناى باند در حوزه k_r است. حد تفکیک در برد زمینی به صورت $\frac{c}{2f_B \cos(\theta_{gr})}$ می‌باشد که زاویه خراش در برد r_n است [۱۸]. با توجه به رابطه (۱۳) و با فرض لوچی صفر، حوزه تعریف سیگنال در k_θ به صورت زیر خواهد بود:

$$-k_r r_{am} \sin\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) \leq k_\theta \leq k_r r_{am} \sin\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) \quad (16)$$

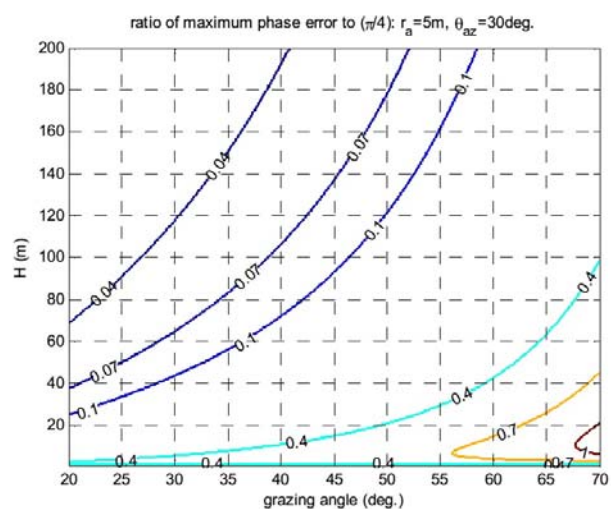
در پیوست ۱ نشان داده شده که مقدار θ_{Bn} تقریباً برابر با $\frac{R_{nc} \theta_{az}}{r_n}$



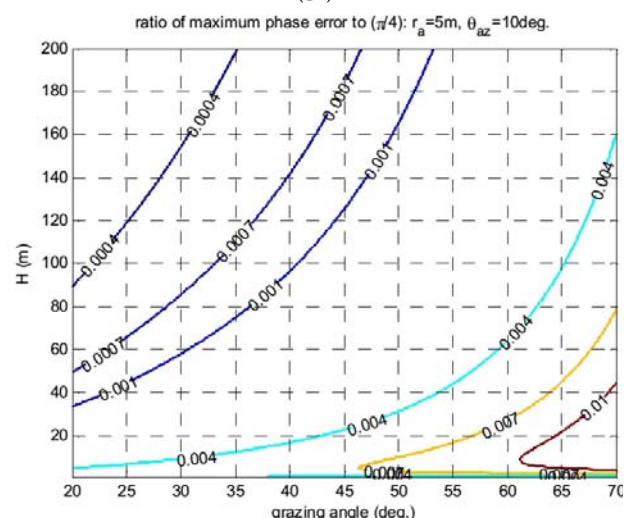
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۳. نسبت بیشینه خطای فاز (ناشی از تقریب رابطه (۸)) به $\frac{\pi}{4}$ در هندسه‌های مختلف برحسب زاویه خراش و ارتفاع: (الف) شعاع چرخش ۱/۵ متر و پهناى پرتو ۱۰ درجه، (ب) شعاع چرخش ۱/۵ متر و پهناى پرتو ۳۰ درجه، (ج) شعاع چرخش ۵ متر و پهناى پرتو ۱۰ درجه، (د) شعاع چرخش ۵ متر و پهناى پرتو ۳۰ درجه.

² Narrowband

¹ Slant Range

در صورتی که سیگنال دریافتی از هدف مرجع نرمال واقع در مختصات $(r_0, \theta_0, 0)$ به صورت $S_0(k_r, k_\theta)$ باشد، تصویر اولیه حوزه فرکانس حاصل از این هدف را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
 IMG_n(k_r, k_\theta) &= S_n(k_r, k_\theta) S_0^*(k_r, k_\theta) \quad (23) \\
 &= \sigma_n \exp[-jk_r(R_n - R_0) - jk_\theta(\theta_n - \theta_0)] \\
 &\quad \times \exp \left\{ j \left[\sqrt{k_r^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_r^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{an}}\right) - k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{a0}}\right) \right] \right\} \\
 &= \sigma_n \exp[-jk_r(R_n - R_0) - jk_\theta(\theta_n - \theta_0)] \\
 &\quad \times \exp[j\phi_{en}(k_r, k_\theta)]
 \end{aligned}$$

که $R_{0c} = \frac{r_a r_0}{R_{0c}}$ ، $r_{a0} = \frac{r_a r_0}{R_{0c}}$ نزدیک‌ترین فاصله آنتن به هدف مرجع، $R_0 = R_{0c} + r_{a0}$ و $\phi_{en}(k_r, k_\theta)$ خطای فاز تصویر در حوزه فرکانس است:

$$\begin{aligned}
 \phi_{en}(k_r, k_\theta) &= \\
 &\sqrt{k_r^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_r^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2} \quad (24) \\
 &+ k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{an}}\right) - k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{a0}}\right)
 \end{aligned}$$

در صورتی که این خطای فاز از رابطه (۲۳) حذف شود، می‌توان با یک عکس تبدیل فوریه دوبعدی به تصویر نهایی رسید:

$$PSF_n(r, \theta) = \sigma_n \text{sinc}\left(\frac{r - (R_n - R_0)}{\Delta r}\right) \text{sinc}\left(\frac{\theta - (\theta_n - \theta_0)}{\Delta \theta}\right) \quad (25)$$

که $PSF_n(r, \theta)$ تابع پخش نقطه‌ای^۲ مربوط به هدف واقع در مختصات $(r_0, \theta_0, 0)$ ، Δr حد تفکیک در برد مایل و $\Delta \theta$ حد تفکیک در سمت (رابطه (۱۸)) است.

طبق رابطه (۱۹) با توجه به داده‌های جدول ۱، مقدار حد تفکیک سمت این سامانه در برد ۱۰۰ متر برابر با ۱/۱۲ درجه و در برد ۳۰۰ متر برابر با ۱/۱۱ درجه می‌باشد. با فرض باریک بودن پهناهای پرتو آنتن در سمت می‌توان تقریب زیر را به کار برد:

$$\sin\left(\frac{R_{nc} \theta_{az}}{r_n}\right) \approx \frac{R_{nc} \theta_{az}}{r_n} \approx \frac{1}{2} \frac{R_{nc} \lambda}{r_n L_a} \quad (20)$$

که L_a طول آنتن است. بنابراین با توجه به فرضیات گفته شده و روابط (۱۹) و (۲۰) حد تفکیک سمت به صورت زیر است:

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{4 \frac{r_a r_n}{R_{nc}} \frac{1}{2} \frac{R_{nc} \lambda}{r_n L_a}} = \frac{L_a}{2 r_a} \quad (21)$$

یعنی حد تفکیک زاویه‌ای سمت برابر با نسبت طول آنتن به قطر دایره چرخش آنتن و مستقل از طول موج است. ضمناً حد تفکیک فاصله‌ای (متریک^۱) سمت در برد r_n برابر با $\frac{L_a}{2 r_a}$ است. از آنجا که حد تفکیک سمت یک SAR نواری خطی برابر با $\frac{L_a}{2}$ است [۱۹]، بنابراین می‌توان گفت در سامانه نواری گردشی، حد تفکیک سمت به نسبت $(\frac{r_n}{r_a})$ برابر ضعیف‌تر از حد تفکیک سامانه نواری خطی است. شکل ۴ تغییرات حد تفکیک سمت و برد (زمینی) را به ازای داده‌های جدول ۱ و در بردهای مختلف نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، در برد زمینی حدود ۱۰۰ متر، حد تفکیک برد و سمت مساوی و تقریباً برابر با ۲ متر هستند.

۴. تشکیل تصویر

سیگنال دریافتی از هدف واقع در مختصات با بازتاب پذیری طبق رابطه (۱۴) به صورت زیر به دست آمد:

$$\begin{aligned}
 S_n(k_r, k_\theta) &= \\
 &\sigma_n \exp\left[-j \frac{\pi}{\alpha_r} \left(\frac{ck_r}{4\pi} - f_c\right)^2\right] \\
 &\exp[-j(k_r R_n + k_\theta \theta_n)] \\
 &\exp\left\{ j \left[\sqrt{k_r^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} + k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{an}}\right) \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (22)$$

جدول ۱. مشخصات سامانه نمونه و سیگنال استفاده شده در شبیه‌سازی‌ها

مشخصات سیگنال			مشخصات سامانه		
مقدار	نماد	مشخصه	مقدار	نماد	مشخصه
0.03m	λ	طول موج حامل	1.5m	r_a	شعاع چرخش
100MHz	f_B	پهنای باند	30 deg.	θ_{az}	پهنای پرتو در سمت
0.2 μ s	T_p	پهنای پالس	2 π rad/s	ω_a	سرعت چرخش آنتن
400Hz	PRF	فرکانس تکرار پالس	100m	H	ارتفاع

² Point Spread Function

¹ Metric

$\beta_0(k_r, k_\theta)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\beta_n(k_r, k_\theta) \triangleq \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{an}}\right), \quad \beta_0(k_r, k_\theta) \triangleq \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_r r_{a0}}\right) \quad (27)$$

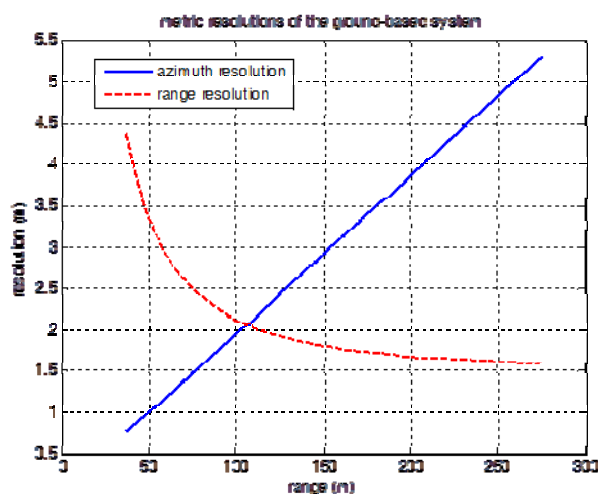
حال نسبت ضریب جمله درجه ۲ به ضریب جمله خطی در رابطه (۲۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{-k_\theta^2}{2k_{rc} \sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2}} = \\ & \frac{-\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{an}} \frac{k_\theta}{k_{rc} r_{a0}}}{2k_{rc} \sqrt{1 - \left(\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{an}}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{a0}}\right)^2}} \quad (28) \\ & = \frac{-\sin[\beta_n(k_{rc}, k_\theta)] \sin[\beta_0(k_{rc}, k_\theta)]}{2k_{rc} \cos[\beta_n(k_{rc}, k_\theta)] \cos[\beta_0(k_{rc}, k_\theta)]} = \\ & -\frac{\lambda}{8\pi} \tan[\beta_n(k_{rc}, k_\theta)] \tan[\beta_0(k_{rc}, k_\theta)] \end{aligned}$$

با توجه به روابط (۱۳) و (۲۷) حداکثر مقدار $\beta_0(k_{rc}, k_\theta)$ و $\beta_n(k_{rc}, k_\theta)$ به ترتیب برابر با $\frac{\theta_{a0}}{2}$ و $\frac{\theta_{an}}{2}$ است، بنابراین مقدار قدر مطلق عبارت رابطه (۲۸) برحسب k_θ^2 از صفر تا $\frac{\lambda}{8\pi} \tan\left(\frac{\theta_{a0}}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta_{an}}{2}\right)$ متغیر است. به عنوان مثال با توجه به داده‌های جدول ۱ و به ازای $r_n = 150\text{m}$ و $r_0 = 100\text{m}$ مقدار بیشینه این عبارت حدود 1.5×10^{-4} خواهد بود، لذا می‌توان گفت نسبت ضریب جمله درجه ۲ به ضریب جمله خطی در بسط رابطه (۲۶) (به ویژه در حالت پرتو سمت باریک) بسیار کوچک است و می‌توان از جملات درجه ۲ به بالا چشم‌پوشی نمود:

$$\begin{aligned} \phi_{en}(k_r, k_\theta) & \approx \sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2} \\ & + k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{an}}\right) - k_\theta \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{a0}}\right) \quad (29) \\ & + \frac{\sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2}}{k_{rc}} (k_r - k_{rc}) \\ & = a_{en}(k_\theta) + k_r b_{en}(k_\theta) \end{aligned}$$

که $a_{en}(k_\theta)$ و $b_{en}(k_\theta)$ به ترتیب برابر با $k_\theta \left[\arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{an}}\right) - \arcsin\left(\frac{k_\theta}{k_{rc} r_{a0}}\right) \right]$ و $\frac{\sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2}}{k_{rc}}$ می‌باشند. در شکل (۵-الف) مقدار تابع $\phi_{en}(k_r, k_\theta)$ بر حسب k_r به ازای داده‌های جدول ۱،



شکل ۴. حد تفکیک برد و سمت در بردهای مختلف برای سامانه نمونه جدول ۱

به دلیل اینکه دامنه طیف سیگنال در هر دو بعد مستطیلی فرض شده، در تصویر قطبی تابع sinc به وجود آمده است. در صورتی که تفاضل r_{a0} و r_{an} (تفاضل طول تصویر شعاع چرخش آنتن روی راستای LOS هدف و مرجع) زیاد باشد، خطای فاز منجر به محو شدن تصویر شده و لذا باید اصلاح شود. از آنجا که خطای فاز به برد هدف وابسته است، برای اصلاح این خطا لازم است سابقه فاز اهداف در بردهای مختلف از یکدیگر جدا شده و سپس با استفاده از فیلتر مناسب اصلاح شود، بنابراین باید سیگنال تصویر اولیه ساخته شده در رابطه (۲۳) به حوزه برد-دایر منتقل شود. برای اعمال عکس تبدیل فوریه در حوزه k_r $IMG_n(k_r, k_\theta)$ روی تابع لازم $\phi_{en}(k_r, k_\theta)$ است تابع به صورت یک چندجمله‌ای تقریب زده شود. با بسط تابع $\phi_{en}(k_r, k_\theta)$ بسط تا $\frac{4\pi}{\lambda}$ حول k_{rc} (که k_{rc} مقدار مرکزی است) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi_{en}(k_r, k_\theta) & = \phi_{en}(k_{rc}, k_\theta) + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial k_r} \Big|_{k_r=k_{rc}} (k_r - k_{rc}) + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial k_r^2} \Big|_{k_r=k_{rc}} (k_r - k_{rc})^2 + \dots \quad (26) \\ \frac{\partial \phi_{en}}{\partial k_r} \Big|_{k_r=k_{rc}} & = \frac{\sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2}}{k_{rc}} \\ \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial k_r^2} \Big|_{k_r=k_{rc}} & = \frac{-k_\theta^2 \left(\sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2} \right)}{k_{rc}^2 \sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2}} \end{aligned}$$

نسبت ضریب جمله درجه ۲ به ضریب جمله خطی در رابطه (۲۶) برابر با $\frac{-k_\theta^2}{2k_{rc} \sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2}}$ است. زوایای $\beta_n(k_r, k_\theta)$ و

در برد بالا باشد، با در نظر گرفتن مرکز نوار به عنوان مرجع ممکن است RCM باقی مانده با حد تفکیک در برد قابل مقایسه و در نتیجه غیر قابل چشم پوشی باشد. در این حالت لازم است برای سبدهای برد دور از برد مرجع مطابق رابطه $b_{en}(k_\theta)$ یک مرحله RCMC صورت گیرد که البته این مسأله برای هندسه زمین پایه با توجه به شعاع محدود چرخش به ندرت رخ خواهد داد. با توجه به رابطه (۳۱) مشخص است که قبل از انجام عکس تبدیل فوریه در سمت، جهت تکمیل عملیات تشکیل تصویر، لازم است خطای فاز ایجاد شده در سمت اصلاح شود. بدین منظور باید هر کدام از ستون‌های داده فشرده شده در برد در تابع اصلاح خطای فاز مناسب ضرب شود. با توجه به رابطه (۳۱) تابع اصلاح خطای فاز سمت برای ستون برد n را می توان به صورت زیر استخراج نمود:

$$F_{az_n}(k_\theta) = \exp\{-j[a_{en}(k_\theta) + k_{rc}b_{en}(k_\theta)]\} \quad (32)$$

با چشم پوشی از تغییرات RCM باقی مانده و جای گذاری کمینه مقدار آن $(r_{an} - r_{a0})$ در رابطه (۳۱)، سیگنال حوزه برد- داپلر پس از ضرب در تابع اصلاح خطای فاز سمت $F_{az_n}(k_\theta)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{img}_{n_PC}(r, k_\theta) = \\ \text{img}_n(r, k_\theta) F_{az_n}(k_\theta) = \\ \exp[-jk_\theta(\theta_n - \theta_0)] \text{sinc}\left[\frac{r - (R_{nc} - R_{0c})}{\Delta r}\right] \end{aligned} \quad (33)$$

که $\text{mg}_{n_PC}(r, k_\theta)$ تصویر حوزه برد- داپلر پس از اصلاح خطای فاز است. لازم به ذکر است جمله ثابت $k_{rc}(R_n - R_0)$ از فاز تابع $\text{img}_n(r, k_\theta)$ حذف شده است. مرحله آخر در تشکیل تصویر، عکس تبدیل فوریه در سمت است:

$$\begin{aligned} PSF_n(r, \theta) = \\ \mathcal{F}_{k_\theta}^{-1}\{\text{img}_{n_PC}(r, k_\theta)\} = \\ \text{sinc}\left[\frac{r - (R_{nc} - R_{0c})}{\Delta r}\right] \text{sinc}\left[\frac{\theta - (\theta_n - \theta_0)}{\Delta \theta}\right] \end{aligned} \quad (34)$$

شکل ۷ نمودار بلوکی^۳ الگوریتم پیشنهادی را نشان می دهد. تعداد عملیات ممیز شناور (FLOPS)^۴ لازم برای انجام یک FFT مختلط با طول N در [۱۶] برابر با $5N \log_2 N$ عملیات و برای یک ضرب مختلط، ۶ عملیات ذکر شده است. بنابراین اگر تعداد

$k_\theta = \frac{4\pi}{\lambda} r_{a0} \sin\left(\frac{\theta_{B0}}{2}\right)$ و $k_\theta = 0$ در $r_n = 150\text{m}$ و $r_0 = 100\text{m}$ رسم شده است. شکل (۵-ب) قدر مطلق تفاضل تابع $\phi_{en}(k_r, k_\theta)$ و تقریب خطی آن را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود در $k_\theta = 0$ خطای تقریب، صفر و در بیشینه مقدار k_θ خطا نزدیک به صفر است؛ لذا می توان گفت که $\phi_{en}(k_r, k_\theta)$ روی k_r با تقریب بسیار خوبی خطی است. با جای گذاری رابطه (۲۹) در رابطه (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} \text{IMG}_n(k_r, k_\theta) = \\ \sigma_n \exp\{-jk_r[R_n - R_0 - b_{en}(k_\theta)] \\ -jk_\theta(\theta_n - \theta_0)\} \exp[ja_{en}(k_\theta)] \end{aligned} \quad (30)$$

حال با اعمال عکس تبدیل فوریه از $\text{IMG}_n(k_r, k_\theta)$ روی k_r سیگنال دریافتی در حوزه برد- داپلر به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \text{img}_n(r, k_\theta) = \mathcal{F}_{k_r}^{-1}\{\text{IMG}_n(k_r, k_\theta)\} = \\ \exp[-jk_\theta(\theta_n - \theta_0)] \exp[ja_{en}(k_\theta)] \\ \times \text{sinc}\left[\frac{r - [R_n - R_0 - b_{en}(k_\theta)]}{\Delta r}\right] \\ \exp\{-jk_{rc}[R_n - R_0 - b_{en}(k_\theta)]\} \end{aligned} \quad (31)$$

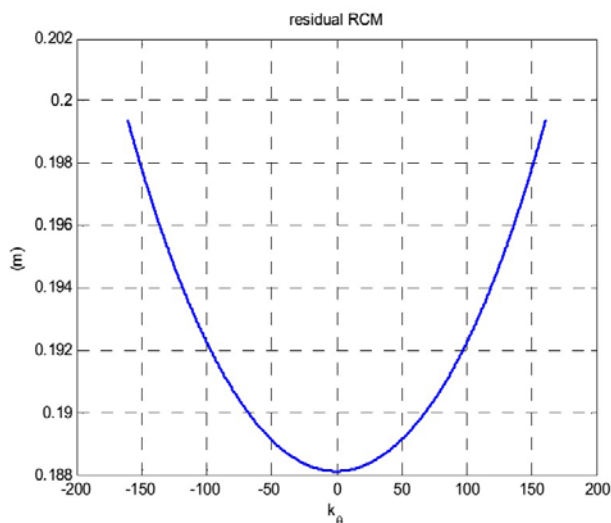
که $\mathcal{F}_{k_r}^{-1}\{\}$ عملگر عکس تبدیل فوریه روی متغیر k_r است. لازم به ذکر است جمله $\exp\{-jk_{rc}[R_n - R_0 - b_{en}(k_\theta)]\}$ به دلیل باند میانی بودن سیگنال در حوزه k_r ظاهر شده است. در ضمن وجود $b_{en}(k_\theta)$ در متغیر تابع sinc در رابطه بالا نشان می دهد که اثر هدف در حوزه برد- داپلر، به طور کامل در یک r واحد قرار نگرفته و بر حسب k_θ جابجایی^۱ های متفاوتی وجود دارد. این اثر همان RCM باقی مانده^۲ است که در اثر منطبق نبودن کامل سیگنال هدف و سیگنال مرجع به وجود می آید [۲۰]. مقدار این جابجایی بر حسب k_θ برابر با $\sqrt{r_{an}^2 - \left(\frac{k_\theta}{k_{rc}}\right)^2} - \sqrt{r_{a0}^2 - \left(\frac{k_\theta}{k_{rc}}\right)^2}$ است و بنابراین با توجه به شعاع چرخش محدود در سامانه زمین پایه و نزدیک بودن r_{an} و r_{a0} ، مقدار این جابجایی در مقایسه با حد تفکیک در برد کوچک و قابل چشم پوشی است. به عنوان مثال با توجه به داده های جدول ۱، $r_n = 150\text{m}$ و $r_0 = 100\text{m}$ ، مقدار تابع $b_{en}(k_\theta)$ بر حسب k_θ در شکل ۶ رسم شده است. مقدار تغییرات این نمودار حدود ۱.۱۳cm است که در برابر حد تفکیک در برد (۱.۵m) بسیار کم و قابل چشم پوشی است. در حالتی که نوار مورد تصویربرداری، عریض و دقت تفکیک

^۱ Block Diagram

^۲ Floating Point Operations

^۱ Shift

^۲ Residual Range Cell Migration



شکل ۶. مقدار RCM باقی مانده بر حسب k_θ با توجه به داده‌های جدول ۱، $r_0 = 100\text{m}$ و $r_n = 150\text{m}$

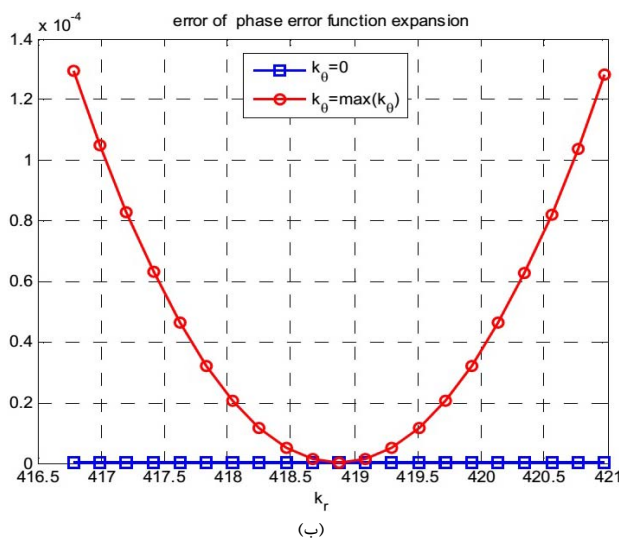
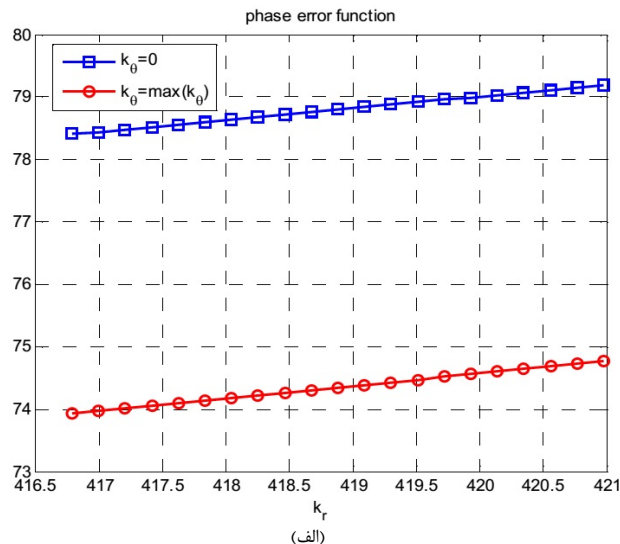
مرجع اثر قابل ملاحظه‌ای نداشته و قابل چشم‌پوشی است؛ بنابراین می‌توان عملیات تشکیل تصویر را بدون RCMC و اصلاح خطای فاز به انجام رساند. شکل ۸ الگوریتم ساده شده تشکیل تصویر برای این اهداف را نشان می‌دهد که آن را الگوریتم سریع نامیده‌ایم. این الگوریتم علاوه بر اینکه نسبت به الگوریتم اولیه (شکل ۷) به تعداد $6N_a N_r$ عملیات کمتری نیاز دارد، ذخیره تابع اصلاح خطای فاز لازم نیست، بنابراین مقدار حافظه و نیز ضرب‌کننده‌های لازم نصف می‌شود. در این بخش هدف این است که با در نظر گرفتن یک برد مرجع مشخص و با تحلیل خطای فاز، محدوده برد اهدافی که تصویرسازی آنها با استفاده از الگوریتم سریع قابل انجام است، استخراج شود. خطای فاز سمت (که در حوزه برد- داپلر باید اصلاح شود) برای هدف با برد r_n که با برد مرجع r_0 مورد پردازش قرار گرفته است به صورت رابطه زیر محاسبه شد:

$$\phi_{az_n}(k_\theta) = a_{en}(k_\theta) + k_{rc} b_{en}(k_\theta) = \sqrt{k_{rc}^2 r_{an}^2 - k_\theta^2} - \sqrt{k_{rc}^2 r_{a0}^2 - k_\theta^2} \quad (35)$$

سری تیلور این تابع حول داپلر مرکزی () به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi_{az_n}(k_\theta) = \phi_{az_n}(0) + \frac{\partial \phi_{az_n}}{\partial k_\theta} \Big|_{k_\theta=0} (k_\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{az_n}}{\partial k_\theta^2} \Big|_{k_\theta=0} (k_\theta)^2 + \dots \quad (36)$$

نمونه‌های سمت در ماتریس داده خام، N_a و تعداد نمونه‌های برد، N_r فرض شود، تعداد عملیات لازم (با چشم‌پوشی از مرحله RCMC) برابر با $10N_a N_r \log_2(N_a N_r) + 12N_a N_r$ خواهد بود.



شکل ۵. الف) تابع خطای فاز در بیشینه و کمینه k_θ بر حسب k_r و به ازای داده‌های جدول ۱، $r_0 = 100\text{m}$ و $r_n = 150\text{m}$ و ب) خطای تقریب طی آن

اگر $N_a = N_r = N$ فرض $O(N^2 \log_2 N)$ شود، تعداد کل عملیات ممیز شناور لازم در این الگوریتم از مرتبه خواهد بود. عملیات لازم برای الگوریتم پس تابش (BP) در [۲۱] از مرتبه $O(N^3)$ ذکر شده است، بنابراین در این الگوریتم کاهش بسیار قابل ملاحظه‌ای در تعداد عملیات نسبت به الگوریتم BP وجود دارد.

۵. ناحیه تصویرسازی سریع

در صورتی که تفاضل r_{a0} از حد خاصی کمتر باشد، خطای فاز و RCM باقی مانده پس از ضرب سیگنال دریافتی در سیگنال

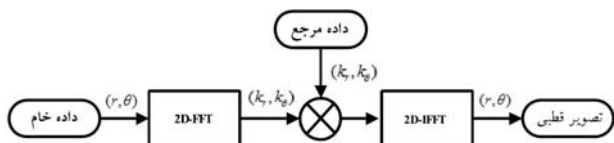
¹ Back-Projection

متغیر ε را به صورت $\varepsilon = \frac{2QPE}{k_{rc} r_a \left[\sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right) \right]^2} + \frac{R_{0c}}{r_0}$ تعریف می‌کنیم. با توجه به تعریف R_{nc} در رابطه (۷) و رابطه اخیر داریم:

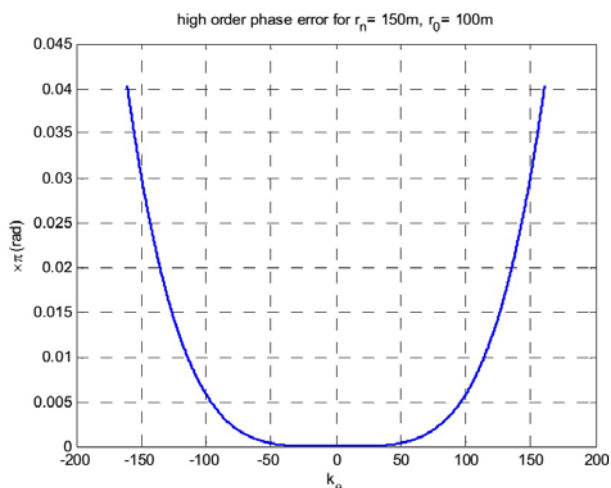
$$\left(\frac{R_{nc}}{r_n}\right)^2 = \frac{H^2 + (r_n - r_a)^2}{r_n^2} = \varepsilon^2 \quad (40)$$

بدین ترتیب می‌توان مقدار r_n را محاسبه نمود:

$$r_n = \frac{-r_a + \sqrt{r_a^2 + (\varepsilon^2 - 1)(H^2 + r_a^2)}}{\varepsilon^2 - 1} \quad (41)$$



شکل ۸. الگوریتم تصویرسازی سریع (بدون اصلاح خطای فاز)

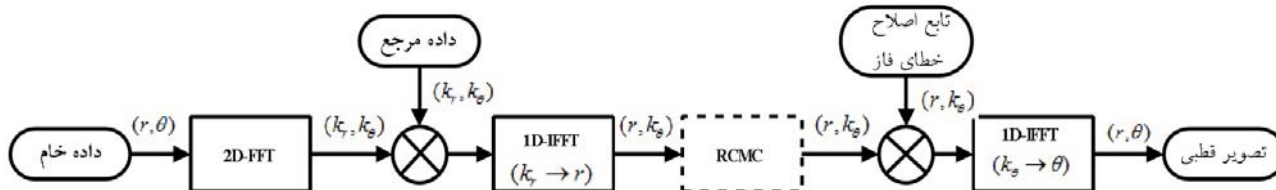


شکل ۹. خطای فاز مرتبه ۴ و بالاتر به ازای داده‌های جدول ۱.

$$r_n = 150\text{m} \text{ و } r_0 = 100\text{m}$$

لازم به ذکر است در صورتی که مقدار QPE منفی قرار داده شود، $r_n > r_0$ و اگر مثبت باشد $r_n < r_0$ خواهد بود، بنابراین می‌توان یک «ناحیه تصویرسازی سریع» دو طرف r_0 به‌دست آورد.

به عنوان مثال برای $r_0 = 200\text{m}$ و داده‌های جدول ۱، این ناحیه برای QPE کمتر از $\frac{\pi}{2}$ به صورت $153\text{m} \leq r_n \leq 346\text{m}$ است، یعنی تصویر یک ناحیه با عرض نوار نزدیک به ۲۰۰ متر را می‌توان با الگوریتم سریع (بدون نیاز به اصلاح خطای فاز سمت) تشکیل داد.



شکل ۷. نمودار بلوکی الگوریتم پیشنهادی

مشتق‌گیری از تابع $\phi_{az-n}(k_\theta)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{az-n}}{\partial k_\theta} \Big|_{k_\theta=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_{az-n}}{\partial k_\theta^2} \Big|_{k_\theta=0} &= \frac{1}{k_{rc} r_{an}} - \frac{1}{k_{rc} r_{a0}} \\ \frac{\partial^3 \phi_{az-n}}{\partial k_\theta^3} \Big|_{k_\theta=0} &= 0 \\ \frac{\partial^4 \phi_{az-n}}{\partial k_\theta^4} \Big|_{k_\theta=0} &= \frac{1}{(k_{rc} r_{an})^3} - \frac{1}{(k_{rc} r_{a0})^3} \end{aligned} \quad (37)$$

اگر از خطای فاز مرتبه ۴ به بالا چشم‌پوشی شود، خطای فاز سمت از جنس خطای فاز مربعی (QPE) خواهد بود.

در شکل ۹ خطای فاز مرتبه ۴ و بالاتر به ازای داده‌های جدول ۱، $r_n = 150\text{m}$ و $r_0 = 100\text{m}$ همان‌طور که مشخص است بیشینه این خطا بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی است، بنابراین می‌توان گفت خطای فاز سمت عمدتاً QPE است. مقدار QPE مجاز $\frac{\pi}{2}$ است [۱۷]، لذا می‌توان با در نظر گرفتن یک برد مرجع، محدوده برد همه‌اهدافی که خطای فاز در سیگنال حوزه برد-دایر آن‌ها کمتر از $\frac{\pi}{2}$ است، به‌دست آورد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \phi_{az-n}(k_\theta) &\approx \phi_{az-n}(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{az-n}}{\partial k_\theta^2} \Big|_{k_\theta=0} (k_\theta)^2 = \\ &k_{rc} (r_{an} - r_{a0}) + \frac{1}{2k_{rc}} \left(\frac{1}{r_{an}} - \frac{1}{r_{a0}} \right) k_\theta^2 \end{aligned} \quad (38)$$

مقدار QPE را می‌توان با محاسبه تغییرات فاز بین $k_\theta = 0$ و مقدار بیشینه آن یعنی $k_\theta = k_{rc} r_a \sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right)$ محاسبه نمود:

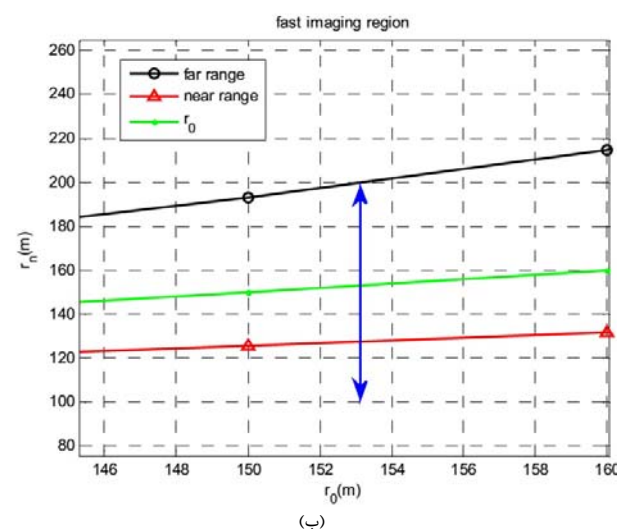
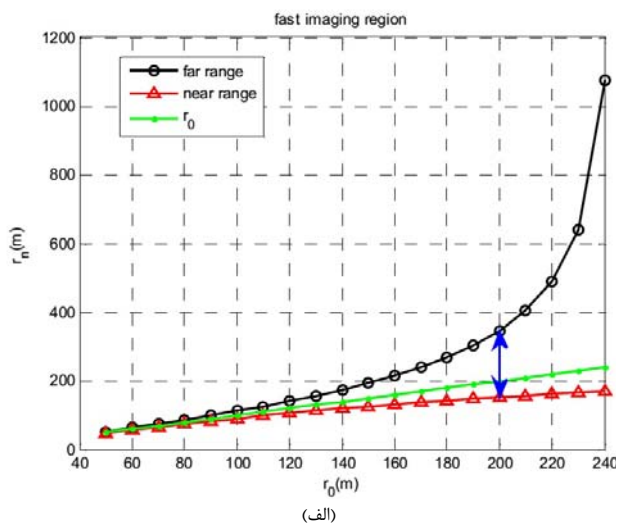
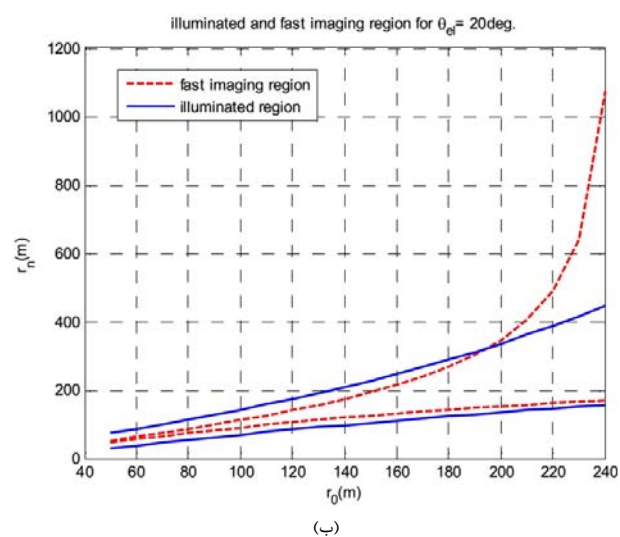
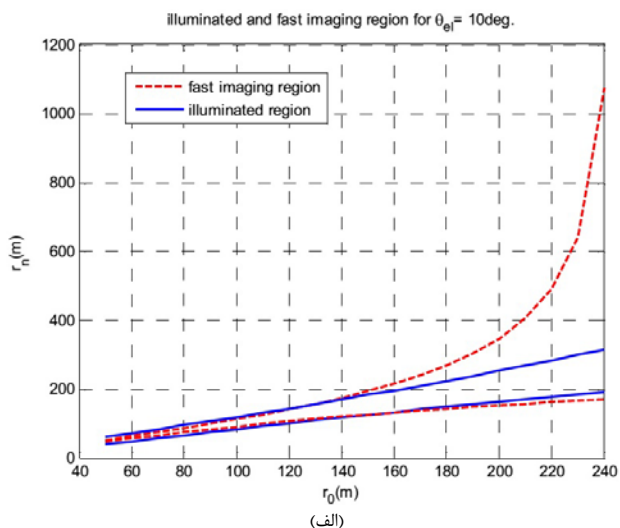
$$\begin{aligned} QPE &= \phi_{az-n}(k_\theta) \Big|_{k_\theta=k_{rc} r_a \sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right)} - \phi_{az-n}(k_\theta) \Big|_{k_\theta=0} = \\ &\frac{1}{2} k_{rc} r_a \left[\sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right) \right]^2 \left(\frac{R_{nc}}{r_n} - \frac{R_{0c}}{r_0} \right) \\ \Rightarrow \frac{R_{nc}}{r_n} &= \frac{2QPE}{k_{rc} r_a \left[\sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right) \right]^2} + \frac{R_{0c}}{r_0} \end{aligned} \quad (39)$$

اما برای $r_0 = 100m$ این ناحیه به صورت $91m \leq r_n \leq 112m$ و عرض آن حدود ۲۰ متر است. شکل ۱۰ عرض ناحیه تصویرسازی سریع را به ازای داده‌های جدول ۱ و در r_0 های مختلف نشان می‌دهد. حدود این ناحیه برای $r_0 = 200m$ در شکل (۱۰-الف) با پیکان مشخص شده است. همان‌طور که معلوم است با کوچک شدن r_0 این ناحیه به شدت محدود می‌شود. نکته دیگر این که برد مرجع r_0 در وسط ناحیه قرار نگرفته است. با استفاده از این شکل می‌توان برای یک عرض نوار مشخص، امکان استفاده از روش تصویرسازی سریع را بررسی نمود. مثلاً در شکل (۱۰-ب) نشان داده شده است که برای تشکیل تصویر نواری با $100m \leq r_n \leq 200m$ امکان استفاده از روش تصویرسازی سریع وجود ندارد. می‌توان با در نظر گرفتن یک پهنای پرتوی مشخص در ارتفاع^۱، محدوده روشن شده به وسیله پرتو را با ناحیه تصویرسازی سریع تطبیق داد. در شکل (۱۱-الف) این ناحیه

با فرض پهنای پرتو ۱۰ درجه در ارتفاع و قرار گرفتن محور پرتو روی برد r_0 به ازای داده‌های جدول ۱ نشان داده شده است. ناحیه بین دو خط پر، ناحیه روشن شده به وسیله پرتو و ناحیه بین دو خط چین، ناحیه تصویرسازی سریع است. همان‌طور که مشخص است، از حدود $r_0 = 150m$ به بعد، کل ناحیه روشن شده به وسیله پرتو جزء ناحیه تصویرسازی سریع قرار دارد. شکل (۱۱-ب) همان ناحیه را با فرض پهنای پرتو ۲۰ درجه در ارتفاع نشان می‌دهد. مشخص است که تا برد ۲۰۰ متر ناحیه تصویرسازی سریع جزئی از ناحیه روشن شده به وسیله پرتو می‌باشد.

۶. نتایج شبیه‌سازی

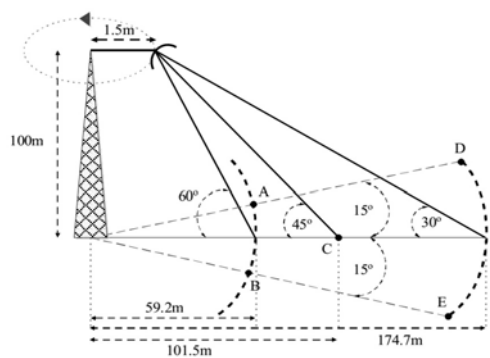
در شکل (۱۲-الف) PSF هدفی با $r_n = 150m$ و $\theta_n = 0$ و $r_0 = 100m$ به ازای داده‌های جدول ۱ در خروجی الگوریتم شکل ۷ نشان داده شده است. هدف در برد $R_{nc} - R_{oc} = 3\lambda/\gamma m$ ظاهر شده



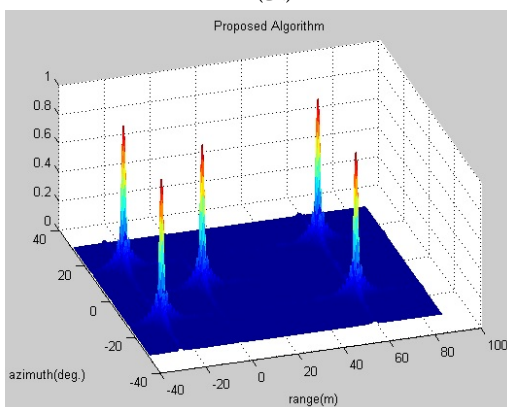
شکل ۱۰. ناحیه تصویرسازی سریع: (الف) ناحیه به ازای داده‌های جدول ۱، (ب) عدم تطبیق عرض نوار $100m \leq r_n \leq 200m$ با این ناحیه

شکل ۱۱. ناحیه تصویرسازی سریع و ناحیه روشن شده به وسیله آنتن به ازای داده‌های جدول ۱: (الف) با پهنای پرتو ۱۰ درجه در ارتفاع و (ب) با پهنای پرتو ۲۰ درجه در ارتفاع

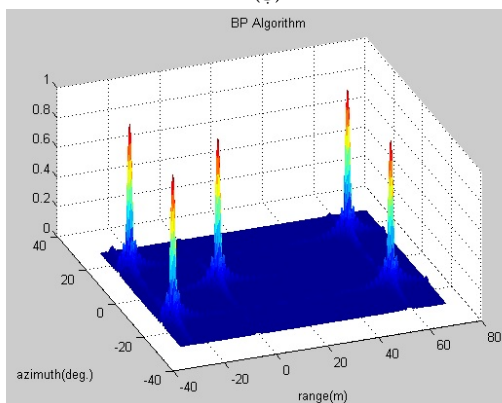
¹ Elevation



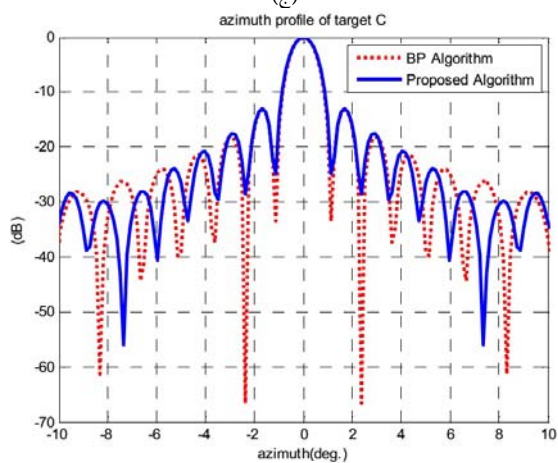
(الف)



(ب)

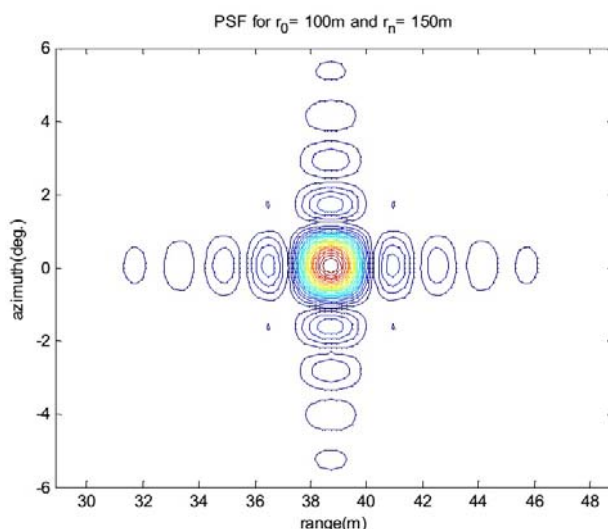


(ج)

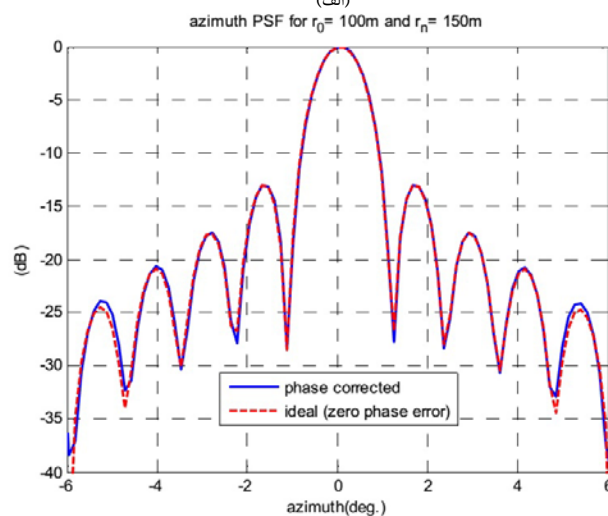


(د)

است. در شکل (۱۲-ب) تغییرات حوزه سمت این PSF بر حسب dB رسم شده است (خط پر). در ضمن PSF سمت حالت آرمانی^۱ ($r_n = r_0$) نیز جهت مقایسه رسم شده است (خط چین). در حالت آرمانی خطای فاز صفر است. با توجه به منطبق بودن PSF خروجی الگوریتم با PSF حالت آرمانی، مشاهده می‌شود که این الگوریتم توانسته خطای فاز را به طور کامل حذف نماید. در شکل (۱۳-الف) پنج هدف نقطه‌ای در مختصات نشان داده شده با بازتاب‌پذیری واحد در نظر گرفته شده‌اند. شکل (۱۳-ب) تصویر این صحنه را با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و به ازای داده‌های جدول ۱ نشان می‌دهد. هدف C (مرجع) در برد (مایل) ۰، اهداف A و B در برد ۲۶/۲- متر و اهداف D و E در برد ۵۶/۸ متر ظاهر شده‌اند. در شکل (۱۳-ج) تصویر همین اهداف با استفاده از الگوریتم BP [۱۹] رسم شده است. شکل (۱۳-د) سطح مقطع سمت^۳ تصویر هدف C را در دو الگوریتم مذکور نشان می‌دهد. در جدول ۲ برخی مشخصات



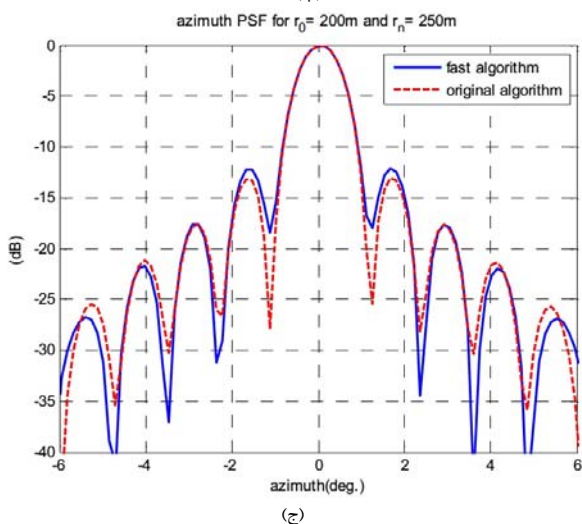
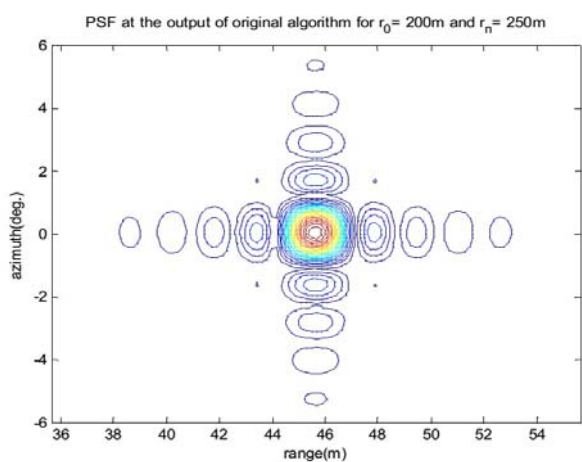
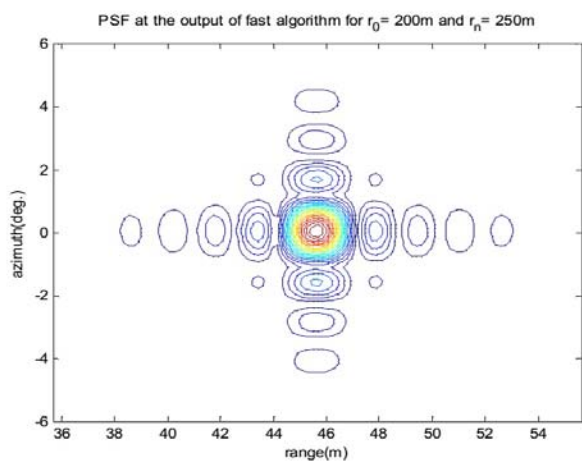
(الف)



(ب)

شکل ۱۳. (الف) هندسه ۵ هدف نقطه‌ای در صحنه، (ب) تصویر صحنه با الگوریتم پیشنهادی، (ج) تصویر صحنه با الگوریتم BP و (د) سطح مقطع سمت تصویر هدف C در دو الگوریتم

شکل ۱۴. PSF الگوریتم پیشنهادی به ازای $r_0 = 100m$ و $r_n = 150m$: (الف) PSF دوبعدی و (ب) PSF حوزه سمت در مقایسه با حالت آرمانی



شکل ۱۴. PSF به ازای داده‌های جدول ۱، $r_0 = 200\text{m}$ و $r_n = 250\text{m}$:
 (الف) PSF دو بعدی خروجی الگوریتم سریع، (ب) PSF دو بعدی خروجی الگوریتم اولیه (با حذف خطای فاز) و (ج) PSF حوزه سمت خروجی دو الگوریتم

جدول ۳. مشخصات الگوریتم تصویرسازی سریع (شکل ۸) در مقایسه با الگوریتم اولیه (شکل ۷)

حافظه لازم	تعداد بلوک ضرب‌کننده	زمان اجرا	پهنای ۳dB (سمت)	PSLR (سمت)	ISLR (سمت)
$4N_a N_r$ (words)	۲	۱/۱s	1°	-۱۳ dB	-۱۱ dB
$2N_a N_r$ (words)	۱	۱s	1°	-۱۲ dB	-۱۰/۸ dB

تصویر دو الگوریتم مقایسه شده است. زمان لازم برای تشکیل تصویر در الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم BP با استفاده از یک سخت‌افزار نرم‌افزار مشابه محاسبه شده است، بنابراین الگوریتم پیشنهادی با وجود سرعت بسیار بالاتر تصویری قابل مقایسه با تصویر الگوریتم BP تولید کرده است. جهت مقایسه عملکرد الگوریتم سریع (شکل ۸)، هدفی با $r_n = 250\text{m}$ و $\theta_n = 0$ در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱۴-الف) PSF خروجی الگوریتم سریع را برای برد مرجع $r_0 = 200\text{m}$ و به ازای داده‌های جدول ۱ نشان می‌دهد. جهت مقایسه، PSF خروجی الگوریتم اولیه (شکل ۷) نیز در شکل (۱۴-ب) رسم شده است. در شکل (۱۴-ج) PSF سمت خروجی دو الگوریتم بر حسب dB رسم شده است.

جدول ۳ برخی مشخصات دو الگوریتم را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطای اندک ایجاد شده در تصویر در برابر کاهش زمان اجرا و به ویژه کاهش حافظه مورد نیاز قابل پذیرش است.

۷. جمع‌بندی

در این مقاله با توجه به قابلیت‌های رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی، رابطه طیف فرکانس دوبعدی سیگنال با استفاده از یک تقریب برد ساده و در عین حال دقیق، استخراج شد. با استفاده از رابطه طیف به دست آمده، حد تفکیک سامانه در برد و سمت استخراج و با SAR نواری با حرکت خطی مقایسه شد. نشان داده شد حد تفکیک برد این سامانه مشابه SAR نواری خطی است. در بعد سمت، حد تفکیک زاویه‌ای وابسته به طول آنتن و شعاع چرخش آن و حد تفکیک فاصله‌ای وابسته به برد و ضعیف‌تر از حد تفکیک سمت یک SAR خطی مشابه است. در حقیقت نسبت حد تفکیک سمت یک سامانه خطی به حد تفکیک سامانه گردشی مشابه، برابر با نسبت شعاع چرخش آنتن به برد هدف است. با توجه به ثبات سرعت و مسیر حرکت آنتن در این سامانه، یک الگوریتم حوزه فرکانس برای تصویرسازی پیشنهاد شد که در آن تصحیح مهاجرت برد و نیز اصلاح

جدول ۲. مشخصات الگوریتم پیشنهادی (شکل ۷) در مقایسه با الگوریتم BP

ISLR (سمت)	PSLR (سمت)	پهنای 3dB (سمت)	زمان اجرا	الگوریتم پیشنهادی
-۱۱/۹ dB	-۱۳ dB	1°	۱/۴s	الگوریتم پیشنهادی
-۱۱/۸ dB	-۱۳/۲ dB	1°	۱۴۲/۵s	BP

- [7] Lee, H.; Lee, J.-H.; Kim, K.-E.; Sung, N.-H.; Cho, S.-J., "Development of a Truck-Mounted Arc-Scanning Synthetic Aperture Radar," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, No.99, pp.1,7, 2013.
- [8] Ke Yang; Guisheng Liao; Wei Wang; Qing Xu; Dong Li, "3-D imaging method for ROSAR," *Radar Conference 2013, IET International*, pp.1,4, 14-16 April 2013.
- [9] Raja Abdullah, R.S.A.; Mohammadpoor, M.; Ismail, A.; Abas, A.F., "A Multistatic Circular Synthetic Aperture Radar for small Object Detection," *Radar Conference (RADAR), 2011 IEEE*, pp.262,266, 23-27 May 2011.
- [10] Spencer, M.; Chan, S.; Veilleux, L.; Wheeler, K., "The Soil Moisture Active/Passive (SMAP) mission radar: A novel conically scanning SAR," *Radar Conference, 2009 IEEE*, pp.1,4, 4-8 May 2009.
- [11] Ali, F.; Bauer, G.; Vossiek, M., "A Rotating Synthetic Aperture Radar Imaging Concept for Robot Navigation," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, Vol.62, No.7, pp.1545,1553, July 2014.
- [12] Klausung, Helmut, "Feasibility of a Synthetic Aperture Radar with Rotating Antennas (ROSAR)," *Microwave Conference, 1989. 19th European*, pp.287,299, 4-7 Sept. 1989.
- [13] Min Jeon; Young Soo Kim, "Migration technique for rotor synthetic aperture radar," *Electronics Letters*, vol.33, no.7, pp.630,631, 27 Mar 1997.
- [14] Broquetas, A.; De Porrata, R.; Sagues, L.; Fabregas, X.; Jofre, L., "Circular synthetic aperture radar (C-SAR) system for ground-based applications," *Electronics Letters*, Vol.33, No.11, pp.988,989, 22 May 1997.
- [15] Bara, M.; Sagues, L.; Paniagua, F.; Broquetas, A.; Fabregas, X., "High-speed focusing algorithm for circular synthetic aperture radar (C-SAR)," *Electronics Letters*, Vol.36, No.9, pp.828,830, 27 Apr 2000.
- [16] Liao, Yi, Xing, Mengdao, Lei Zhang and Bao, Zheng. "A novel modified Omega-K algorithm for circular trajectory scanning SAR imaging using series reversion" *EURASIP Journal of Advances in Signal Processing*, 2013.
- [17] Carrara, W. G.; Goodman, R. S.; Majewski, R. M., "Spotlight Synthetic Aperture Radar Signal Processing Algorithms", Artech House, 1995.
- [18] Skolnik, M. I., *Radar Handbook*, 3rd ed., McGraw-Hill, 2008.
- [19] Soumekh, M., *Synthetic aperture radar signal processing with MATLAB algorithms*, John Wiley & Sons, 1999.
- [20] Cumming, I. G.; Wong, F. H., *Digital processing of synthetic aperture radar data*, Artech House, 2005.
- [21] Yun Lin; Wen Hong; Weixian Tan; Yirong Wu, "Extension of Range Migration Algorithm to Squint Circular SAR Imaging," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, Vol.8, No.4, pp.651,655, July 2011.

خطای فاز لحاظ شده است. در این الگوریتم، تشکیل تصویر شامل FFT دوبعدی سیگنال خام، ضرب در سیگنال مرجع، RCMC (که البته در سامانه زمین پایه به ندرت مورد نیاز است) و اصلاح خطای فاز (ایجاد شده در اثر عدم تطابق سیگنال هدف و سیگنال مرجع) در حوزه برد داپلر و IFFT حوزه سمت می باشد. تابع اصلاح خطای فاز با توجه به روابط طیف، به تفکیک برد محاسبه گردید و حذف کامل خطای فاز با استفاده از این تابع با شبیه سازی نشان داده شد. تعداد عملیات ممیز شناور لازم برای اجرای این الگوریتم محاسبه گردید و نشان داده شد که تعداد کل عملیات لازم از مرتبه $O(N^2 \log_2 N)$ است که در برابر تعداد عملیات لازم برای الگوریتم حوزه زمان BP (که از مرتبه $O(N^3)$ است) کاهش قابل ملاحظه ای را در بر دارد. تحلیل خطای فاز ثابت نمود که خطای فاز سمت ایجاد شده عمدتاً از جنس QPE است و ضمناً به ازای اهداف با برد نزدیک به برد مرجع، میزان QPE ایجاد شده در تصویر کمتر از آستانه مجاز و قابل چشم پوشی است. در ادامه محدوده برد اهدافی که چنین ویژگی دارند، تحت عنوان ناحیه تصویرسازی سریع محاسبه گردید. این ناحیه به ازای بردهای مرجع نزدیک، محدود و به ازای بردهای مرجع دور، وسیع خواهد بود. برای تشکیل تصویر اهداف این ناحیه الگوریتم ساده تر و سریع تری پیشنهاد شد که حافظه و سخت افزار مورد نیاز برای پیاده سازی آن نسبت به الگوریتم اولیه به مراتب کمتر است.

۸. مراجع

- [1] Moreira, A.; Prats-Iraola, P.; Younis, M.; Krieger, G.; Hajnsek, I.; Papathanassiou, K.P., "A tutorial on synthetic aperture radar," *Geoscience and Remote Sensing Magazine, IEEE*, Vol.1, No.1, pp.6,43, March 2013.
- [2] Soumekh, M., "Reconnaissance with slant plane circular SAR imaging," *Image Processing, IEEE Transactions on*, Vol.5, No.8, pp.1252,1265, Aug 1996.
- [3] Ponce, O.; Prats-Iraola, P.; Pinheiro, M.; Rodriguez-Cassola, M.; Scheiber, R.; Reigber, A.; Moreira, A., "Fully Polarimetric High-Resolution 3-D Imaging With Circular SAR at L-Band," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol.52, No.6, pp.3074,3090, June 2014.
- [4] Moore, L.; Potter, L.; Ash, J., "Three-dimensional position accuracy in circular synthetic aperture radar," *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, vol.29, no.1, pp.29,40, Jan. 2014.
- [5] Yun Lin; Wen Hong; Weixian Tan; Yanping Wang; Yirong Wu, "Interferometric Circular SAR Method for Three-Dimensional Imaging," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, Vol.8, No.6, pp.1026,1030, Nov. 2011.
- [6] Mohammadpoor, M.; Abdullah, R. S. A. Raja; Ismail, A.; Abas, A. F., "A circular synthetic aperture radar for on-the-ground object detection," *Progress in Electromagnetics Research*, Vol.122, p.269, 2012.

پیوست ۱

محاسبه مقدار r_{an} و R_n

شکل پ ۱ هندسه سامانه گردشی را از نمای کناری نشان می‌دهد. در این شکل، نقطه C محل مرکز فاز آنتن (APC) و نقطه F، محل هدف در حالی که هدف و APC در نزدیکترین فاصله (R_{nc}) قرار دارند، می‌باشد. نقطه A مرکز دوران θ_{gn} و زاویه خراش است. مطابق شکل و با توجه به این که در سامانه زمین‌پایه برد هدف معمولاً خیلی بزرگ‌تر از شعاع چرخش آنتن است ($r_n \gg r_a$) داریم:

$$\cos(\theta_{gn}) = \frac{r_n - r_a}{R_{nc}} \approx \frac{r_n}{R_{nc}} \quad (پ ۱)$$

در مثلث ABC و با توجه به رابطه (پ ۱) داریم:

$$BC = AC \times \cos(\theta_{gn}) = r_a \cos(\theta_{gn}) \approx \frac{r_a r_n}{R_{nc}} = r_{an} \quad (پ ۲)$$

بنابراین مقدار متغیر r_{an} تعریف شده در رابطه (۹) تقریباً برابر با طول پاره‌خط BC یعنی طول تصویر شعاع چرخش آنتن (AC) روی راستای خط دید هدف است. در ضمن با توجه به تعریف $R_n = R_{nc} + r_{an}$ در رابطه (۹)، مشخص است که مقدار R_n برابر با طول پاره خط BF است. با توجه کوچک بودن پاره خط AB در برابر پاره‌خط‌های BF و AF، می‌توان این دو پاره‌خط را موازی فرض کرد، لذا مقدار R_n تقریباً برابر با پاره‌خط AF یعنی فاصله مرکز دوران از هدف است.

محاسبه زاویه دید هدف (θ_{Bn}):

شکل پ ۲ (الف) هندسه سه بعدی مسأله را از نمای روبرو نشان می‌دهد. در این شکل هدف در برد r_n و در نقطه G فرض شده است. با فرض چرخش پادساعت‌گرد مرکز فاز آنتن (APC)، نقطه I مکان APC هنگام ورود هدف به پرتو آنتن و نقطه J محل APC هنگام خروج هدف از پرتو را نشان می‌دهد. در این فاصله محور آنتن زاویه θ_{Bn} را می‌پیماید. θ_{az} پهنای پرتو آنتن در سمت است. نقطه A محل APC هنگامی که هدف در نزدیک‌ترین فاصله به APC و روی محور پرتو (نیم‌ساز) قرار گرفته است و نقطه F مبدأ مختصات (تصویر نقطه O روی زمین) را نشان می‌دهند. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت زاویه BFC برابر با θ_{Bn} و زاویه BAC برابر θ_{az} است. شکل پ ۲ (ب) نمای کناری مسأله را جهت محاسبه θ_{Bn} نشان می‌دهد. طبق این شکل در مثلث FDC داریم:

$$DC = FC \cdot \sin\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) = r_n \sin\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) \quad (پ ۳)$$

از طرف دیگر در مثلث FEC داریم:

$$EC^2 = FC^2 + FE^2 - 2 \cdot FC \cdot FE \cdot \cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) = \quad (پ ۴)$$

$$r_n^2 + r_a^2 - 2r_a r_n \cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right)$$

بنابراین با توجه به رابطه اخیر در مثلث AEC داریم:

$$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{H^2 + r_n^2 + r_a^2 - 2r_a r_n \cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right)} \quad (پ ۵)$$

با توجه به رابطه (پ ۵) در مثلث ADC داریم:

$$DC = AC \cdot \sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) = \sqrt{H^2 + r_n^2 + r_a^2 - 2r_a r_n \cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \quad (پ ۶)$$

بنابراین با توجه به روابط (پ ۳) و (پ ۶) رابطه زیر برقرار است:

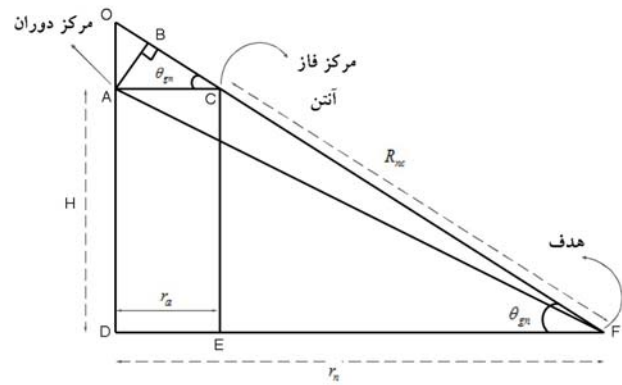
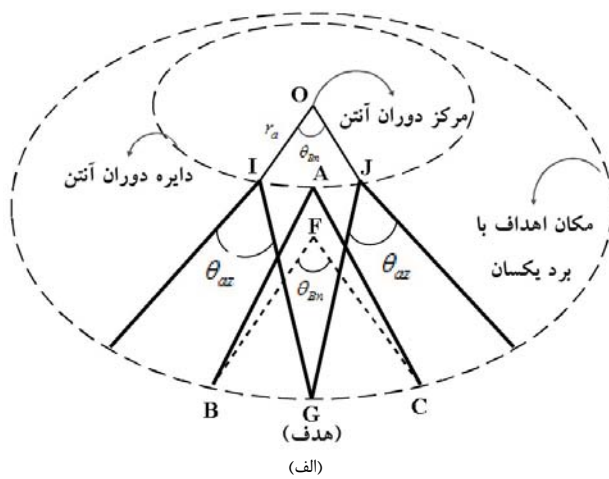
$$r_n \sin\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) = \sqrt{H^2 + r_n^2 + r_a^2 - 2r_a r_n \cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \quad (پ ۷)$$

با مجذور نمودن طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$r_n^2 \left[\cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) \right]^2 - 2r_a r_n \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^2 \cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) + (H^2 + r_n^2 + r_a^2) \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^2 - r_n^2 = 0 \quad (پ ۸)$$

بنابراین با حل این معادله درجه ۲ داریم:

$$\cos\left(\frac{\theta_{Bn}}{2}\right) = \frac{r_a \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^2 + \sqrt{r_a^2 \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^4 - (H^2 + r_n^2 + r_a^2) \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^2} + r_n^2}{r_n} \quad (پ ۹)$$



شکل پ ۱. هندسه سامانه گردشی از نمای کناری

و در نهایت:

$$\theta_{bn} = \left(\frac{r_a \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^2 + \sqrt{r_a^2 \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^4 - (H^2 + r_n^2 + r_a^2) \left[\sin\left(\frac{\theta_{az}}{2}\right) \right]^2 + r_n^2}}{2r_n} \right) \quad (پ ۱۰)$$

برای داشتن یک رابطه تقریبی از θ_{bn} با توجه به شکل پ ۲ (ب) و باریک بودن پرتو آنتن داریم:

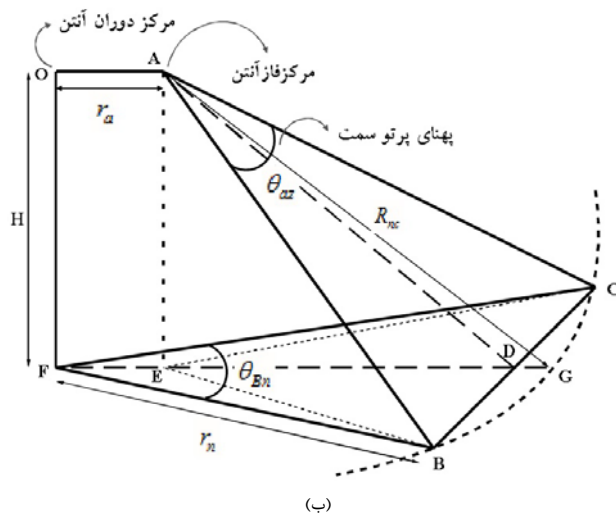
$$\overset{\frown}{BC} \approx R_{nc} \theta_{az} \quad (پ ۱۱)$$

که $\overset{\frown}{BC}$ کمان BC است. از طرف دیگر:

$$\overset{\frown}{BC} = r_n \theta_{bn} \quad (پ ۱۲)$$

بنابراین با مساوی قرار دادن طرف راست دو رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\theta_{bn} \approx \frac{R_{nc}}{r_n} \theta_{az} \quad (پ ۱۳)$$



شکل پ ۲. هندسه زوایای دید هدف و پرتو آنتن در سمت:

(الف) نمای روبرو و (ب) نمای کناری