

## تصویرسازی بر مبنای مدل در رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی زمین پایه

سید روح‌الله ثمره هاشمی<sup>۱</sup>، سید علیرضا سیدین<sup>۲\*</sup>

۱-دانشجوی دکتری ۲-دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت: ۱۳۸۰/۱۰/۹۳، پذیرش: ۱۳۸۱/۰۳/۹۴)

## چکیده

یکی از چالش‌های رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی زمین پایه، وابستگی حد تفکیک سمت به شعاع چرخش آنتن و محدودیت عملی در افزایش آن است. برای بهبود کیفیت تصویر در حوزه سمت، تصویرسازی بر مبنای مدل به سه روش فیلتر منطبق، فیلتر معکوس و فیلتر بهینه پیشنهاد و تحلیل شده است. جهت مقایسه، سه شاخص کیفیت براساس میزان نویز، اعوجاج و کل خطا در تصویر نهایی استخراج و نشان داده شده سه روش تصویرسازی معرفی شده است که هر کدام برحسب یکی از این شاخص‌ها بهینه می‌باشند. به منظور افزایش سرعت الگوریتم، ماتریس ضرایب در مدل ارائه شده با استفاده از ماتریس تبدیل فوری به سطرهای جابه‌جاشده تجزیه قطری شده است و با بهره‌گیری از این خاصیت نشان داده شده الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم مشهور پس‌تابش علاوه بر دقت از سرعت بالاتری برخوردار است.

## واژگان کلیدی

رادار دهانه ترکیبی، رادار دهانه ترکیبی گردشی، تصویرسازی بر مبنای مدل، تجزیه مقادیر تکین.

## ۱. مقدمه

یک ناحیه حلقوی روی زمین را جاروب<sup>۶</sup> می‌کنند [۲۰]. تاکنون نمونه‌هایی از این سامانه با کاربردهای گوناگون طراحی و ساخته شده است [۲۰-۲۷]. یکی از کاربردهای این سامانه، نصب آن بالای یک ارتفاع (دکل، ساختمان، کوه، بالن و ...) و تصویربرداری مناطق زمینی اطراف آن می‌باشد شکل (۱-الف). از مهم‌ترین ویژگی‌های این سامانه قابلیت پایش مداوم یک منطقه خاص است که می‌تواند در موارد امنیتی یا تشخیص تغییرات به کار رود. دریافت سیگنال از جاروب‌های متوالی می‌تواند در تشخیص اهداف متحرک، افزایش حد تفکیک یا کاهش نویز لکه‌ای<sup>۷</sup> با تغییر زاویه لوچی<sup>۸</sup> در هر جاروب [۲۸]، سه‌بعدی‌سازی تصویر با جاروب در ارتفاع‌های مختلف، تشخیص تغییرات با استفاده از روش‌های تداخل‌سنجی<sup>۹</sup> و ... به کار رود، ضمن این‌که این سامانه گزینه مناسب و مقرون به صرفه‌ای برای یک SAR آزمایشگاهی است. تاکنون پژوهش‌هایی در موضوع پردازش سیگنال و الگوریتم‌های تصویرسازی در این سامانه انجام

از حدود ۶ دهه قبل، رادار دهانه ترکیبی (SAR)<sup>۱</sup> به دلیل مزایای فراوان از جمله عدم وابستگی به وجود نور، تأثیرپذیری کم از شرایط جوی، حد تفکیک<sup>۲</sup> مستقل از فاصله و ... به‌عنوان مکمل سامانه‌های تصویربرداری نوری کاربردهای گوناگونی در حوزه‌های مختلف نظامی و غیرنظامی داشته است [۱]. ویژگی اصلی این سامانه قدرت تفکیک بالا در حوزه سمت<sup>۳</sup> است که از حرکت رادار حین ارسال سیگنال و شبیه‌سازی یک دهانه ترکیبی بسیار طولانی حاصل می‌شود [۲]. سکوی حامل رادار می‌تواند ماهواره، هواپیما یا پهپاد باشد، اما سامانه‌های SAR با سکوی متحرک زمینی (مانند خودرو یا سکوی متحرک ریلی) نیز ساخته شده است [۱۹-۳]. یکی از انواع SAR زمین پایه<sup>۴</sup>، سامانه SAR با حرکت دورانی است که در آن پرتو<sup>۵</sup> رادار

\*رایانامه نویسنده پاسخگو: seyedin@um.ac.ir

- 1- Synthetic Aperture Radar
- 2- Resolution
- 3- Azimuth
- 4- Ground-Based
- 5- Beam

- 6- Scan
- 7- Speckle Noise
- 8- Squint Angle
- 9- Interferometry

با روش‌های بر مبنای مدل می‌توان کیفیت تصویر در بعد سمت را بهبود بخشید. دلیل دوم این است که با این شیوه مدل سازی به خاطر گردشی بودن سامانه، می‌توان ماتریس سنجش را با استفاده از ماتریس تبدیل فوریه گسسته (DFT)<sup>۱۱</sup> با سطرهای جابه‌جاشده، قطری نمود. برای این منظور جابه‌جایی سطرهای ماتریس DFT به گونه‌ای است که فرکانس‌های هر ستون آن به صورت صعودی مرتب می‌شوند و در این نوشتار این ماتریس را «ماتریس تبدیل فوریه ویژه» و حاصل ضرب آن در یک بردار را «تبدیل فوریه ویژه» آن بردار می‌نامیم. قطری شدن ماتریس سنجش به وسیله ماتریس تبدیل فوریه ویژه، با بهره‌گیری از الگوریتم تبدیل فوریه سریع (FFT)<sup>۱۱</sup> باعث می‌شود عملیات پرحجمی مانند معکوس سازی یا ضرب ماتریسی با سرعت بالاتر قابل پیاده‌سازی شود [۳۹] و لذا سرعت کلی الگوریتم در حد الگوریتم‌های بر پایه تبدیل فوریه (مانند RDA یا CSA) باشد. نکته دیگر این‌که در روش‌های مرسوم تصویرسازی تنها پهنای پرتو اصلی آنتن را در تصویرسازی لحاظ می‌کنند و از تغییرات دامنه سیگنال ناشی از تغییرات الگوی آنتن چشم‌پوشی می‌کنند [۲ و ۴۰]، اما در روش پیشنهادی مدل داده با در نظر گرفتن الگوی کامل آنتن محاسبه شده است، لذا اثر الگوی کامل پرتو آنتن از جمله گلبه‌های فرعی<sup>۱۲</sup> در تصویرسازی گنجانده شده که این مسئله نیز به دقت بیشتر الگوریتم منجر می‌شود. با توجه به مدل استخراج شده سه روش برای تشکیل تصویر حوزه سمت با تعداد سلول دلخواه ارائه شده است. سه روش تصویرسازی ارائه شده دارای این ویژگی هستند که تصویر نهایی با یک مرحله فیلتر کردن (ضرب ضرایب فیلتر در تبدیل فوریه داده و عکس تبدیل فوریه) به دست می‌آید و بدین لحاظ از نظر محاسبات بسیار سریع هستند. این سه روش، روش‌های فیلتر منطبق (MF)<sup>۱۳</sup>، شبه معکوس (PI)<sup>۱۴</sup> و فیلتر بهینه (OF)<sup>۱۵</sup> نام‌گذاری شده‌اند. در هر کدام از سه روش فوق شاخص‌هایی برای کیفیت تصویر خروجی با استفاده از مقادیر تکین<sup>۱۶</sup> ماتریس سنجش به صورت نسبت توان نویز به سیگنال (NSR)<sup>۱۷</sup>، توان اعوجاج به سیگنال (DSR)<sup>۱۸</sup> و توان خطا (مجموع توان نویز و اعوجاج) به سیگنال (ESR)<sup>۱۹</sup> تعریف و برحسب تعداد سلول‌های تصویر محاسبه شده است. در ادامه، نمودار بلوکی الگوریتم تصویرسازی به روش فوق ارائه و تعداد عملیات ممیز شناور (FLOPS)<sup>۲۰</sup> محاسبه شده و با الگوریتم مشهور

شده که عمده آن‌ها در زمینه ویژگی‌های سیگنال سمت و تغییر الگوریتم‌های تصویرسازی SAR با حرکت مستقیم برای تصویرسازی در سامانه با حرکت دورانی است که در برخی از آن‌ها [۲۶، ۲۷ و ۲۹] الگوریتم‌های حوزه زمان و در برخی [۲۰، ۳۰ و ۳۱] الگوریتم‌های حوزه فرکانس ارائه شده است. همان‌طور که می‌دانیم یکی از دقیق‌ترین روش‌های تصویرسازی، تصویرسازی بر مبنای مدل<sup>۱</sup> است. در این روش، رابطه (مدل) داده دریافتی برحسب بازتاب‌پذیری<sup>۲</sup> اهداف استخراج شده و سپس با استفاده از رابطه معکوس، بردار تصویر تخمین زده می‌شود [۳۸-۳۲]. مدل کلی داده دریافتی به صورت زیر است:

$$y = Ax + w \quad (1)$$

که بردار تشکیل شده از ماتریس داده خام<sup>۳</sup>،  $x$  بردار بازتاب‌پذیری اهداف واقع در صحنه،  $w$  بردار نویز و  $A$  ماتریس سنجش<sup>۴</sup> و وابسته به هندسه مسأله و الگوی آنتن<sup>۵</sup> می‌باشد. در روش‌های بر مبنای مدل، بردار  $x$  با استفاده از داده  $y$  و با معلوم بودن  $A$ ، با معیارها و روش‌های مختلف تخمین زده می‌شود، در حالی که در روش‌های تشکیل تصویر مبتنی بر فشرده‌سازی، آنچه به عنوان تصویر خروجی استخراج می‌شود همان  $A^H y$  است و مسلماً با کاربرد روش‌های دیگر تخمین می‌توان دقت تصویر را بالاتر برد [۳۳]. تاکنون این روش تصویرسازی در SAR نواری<sup>۶</sup> [۳۴-۳۳] و به ویژه در SAR تابش نقطه‌ای<sup>۷</sup> [۳۸-۳۵] مورد استفاده قرار گرفته است، که علاوه بر نتایج بهتر در تصویرسازی نسبت به الگوریتم‌های حوزه زمان یا فرکانس، قابلیت‌های دیگری از جمله تشکیل تصویر با برجسته کردن یک ویژگی<sup>۸</sup> خاص یا بخش‌بندی<sup>۹</sup> بهتر تصاویر را فراهم نموده است؛ اما علی‌رغم این مزایا، به دلیل حجم محاسبات بالا تنها داده‌های با ابعاد محدود با این روش مورد پردازش قرار گرفته‌اند. در این مقاله یک روش تصویرسازی ترکیبی از روش‌های مرسوم تصویرسازی و روش‌های بر مبنای مدل پیشنهاد و تحلیل شده است، بدین صورت که پردازش‌های حوزه برد به صورت معمول (فشرده‌سازی) و پردازش‌های حوزه سمت بر مبنای مدل انجام شده است. این شیوه تصویرسازی به دو دلیل ارائه شده است: اول این‌که در سامانه گردشی زمین‌پایه حد تفکیک سمت وابسته به شعاع چرخش آنتن است و در این زمینه محدودیت فیزیکی وجود دارد، لذا

<sup>11</sup> Fast Fourier Transform

<sup>12</sup> Side-lobes

<sup>13</sup> Matched Filter

<sup>14</sup> Pseudo Inverse

<sup>15</sup> Optimum Filter

<sup>16</sup> Singular Values

<sup>17</sup> Noise to Signal Ratio

<sup>18</sup> Distortion to Signal Ratio

<sup>19</sup> Error to Signal Ratio

<sup>20</sup> Floating Point Operations

<sup>1</sup> Model-Based

<sup>2</sup> Reflectivity

<sup>3</sup> Raw Data

<sup>4</sup> Measurement

<sup>5</sup> Antenna Pattern

<sup>6</sup> Strip-map

<sup>7</sup> Spotlight

<sup>8</sup> Feature

<sup>9</sup> Segmentation

<sup>10</sup> Discrete Fourier Transform

نمونه برداری در سطرها یک ماتریس قرار داده شوند،  $y$  یک ستون از آن ماتریس پس از عملیات فشرده سازی در برد<sup>۳</sup> و تصحیح مهاجرت برد (RCMC)<sup>۴</sup> خواهد بود [۲]. با در نظر گرفتن شکل (۱-ب) و مختصات استوانه‌ای، در صورتی که زاویه مکان مرکز فاز آنتن (APC)<sup>۵</sup> هنگام ارسال پالس  $m$  ام را  $\theta_m$  و زاویه مکان هدف  $n$  ام را  $\phi_n$  فرض کنیم به طوری که:

$$\theta_m = \frac{2\pi}{N_p}(m-1), m=1, \dots, N_p; \quad \phi_n = \frac{2\pi}{N_x}(n-1), n=1, \dots, N_x \quad (۲)$$

آنگاه داده دریافتی هنگامی که APC در زاویه  $\theta_m$  قرار دارد به صورت زیر خواهد بود:

$$y(\theta_m) = \sum_{n=1}^{N_x} x_n \xi_{m,n} \exp\left(j \frac{4\pi}{\lambda} R_{m,n}\right), \quad m=1, \dots, N_p \quad (۳)$$

که  $x_n$  بازتاب پذیری هدف  $n$ ام،  $\xi_{m,n}$  ضریب الگوی دوطرفه آنتن (ارسال و دریافت) در محل هدف  $n$ ام،  $\lambda$  طول موج و  $R_{m,n}$  فاصله APC از هدف  $n$ ام است. به دلیل دورانی بودن نوار، محاسبه  $\xi_{m,n}$  با توجه به الگوی آنتن اهمیت اساسی دارد و در پیوست (آ) آمده است. مطابق شکل (۱-ب) مقدار  $R_{m,n}$  به صورت زیر است:

$$R_{m,n} = \sqrt{h^2 + r_0^2 + r_a^2 - 2r_0r_a \cos(\phi_n - \theta_m)}; \quad (۴)$$

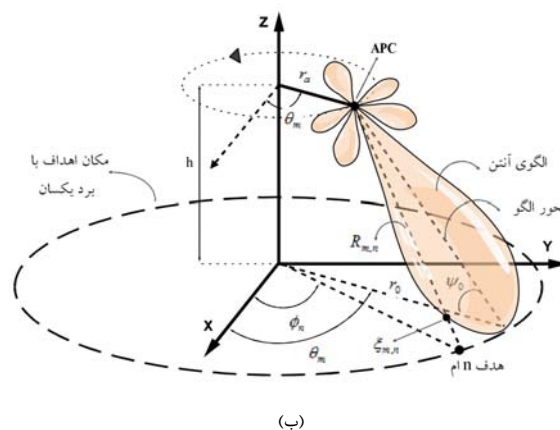
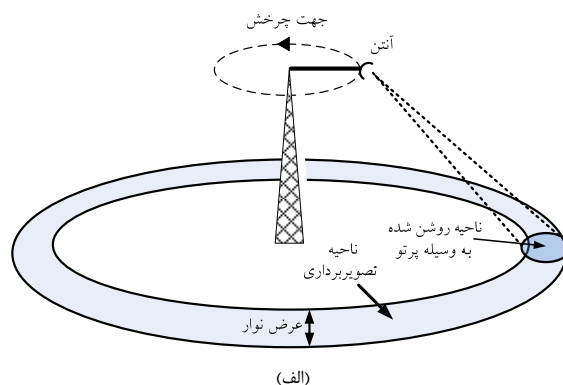
$$m=1, \dots, N_p, \quad n=1, \dots, N_x$$

که  $r_0$  برد زمینی اهداف مورد نظر، شعاع چرخش آنتن و  $h$  ارتفاع آن می باشد. بنابراین درایه های ماتریس  $A$  به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$A_{m,n} = \xi_{m,n} \exp\left(j \frac{4\pi}{\lambda} R_{m,n}\right); \quad m=1, \dots, N_p, \quad n=1, \dots, N_x \quad (۵)$$

با توجه به اتصال<sup>۶</sup> برد و سمت، مقدار  $\lambda$  در پهنای باند سیگنال متغیر است، اما در مورد سیگنال های باند باریک می توان از تغییر فاز رابطه فوق و نیز تغییر دامنه آن (ناشی از تغییرات الگوی آنتن در اثر تغییر فرکانس) چشم پوشی نمود [۴۰]. بدین ترتیب ستون  $n$ ام ماتریس  $A$ ، سیگنال دریافتی از هدف نقطه ای نرمال (با بازتاب پذیری واحد) واقع در زاویه  $\phi_n$  در یک جاروب ۳۶۰ درجه است و بنابراین ستون های این ماتریس نسخه های نمونه برداری شده از یک سیگنال پیوسته منتقل شده با انتقال<sup>۷</sup> گردشی می باشند. در پیوست (ب) نشان داده شده، ماتریس  $A$  را می توان با استفاده از ماتریس DFT نرمال

پس تابش (BP)<sup>۱</sup> مقایسه گردیده است و در نهایت تشکیل تصویر با در نظر گرفتن یک صحنه فرضی به روش های مذکور انجام و تحلیل شده است. لازم به ذکر است در روابط این نوشتار حروف لاتین کوچک برجسته<sup>۲</sup> نشان دهنده بردار، حروف لاتین بزرگ برجسته نشان دهنده ماتریس و حروف لاتین معمولی نشان دهنده اعداد می باشند.



شکل ۱. الف) رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی و ناحیه تصویربرداری آن، ب) هندسه سامانه SAR گردشی

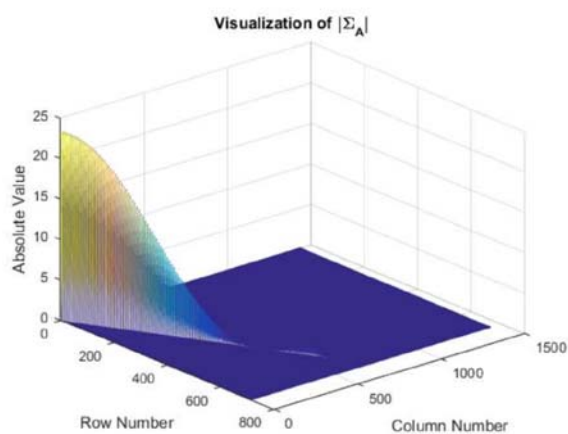
## ۲. مدل سازی سیگنال سمت در SAR گردشی زمین پایه

مدل داده حوزه سمت در SAR گردشی در یک دور گردش ۳۶۰ درجه را می توان به صورت رابطه (۱) بیان نمود که  $y$  بردار داده دریافتی از اهداف واقع در یک برد خاص و  $x$  بردار بازتاب پذیری اهداف واقع در آن برد است. اگر تعداد پالس های دریافتی در یک جاروب ۳۶۰ درجه  $N_p$  فرض شود، بردار  $y$ ، بردار  $N_p \times 1$  خواهد بود. تعداد درایه های  $x$  برابر با تعداد اهداف زمینی نقطه ای واقع در یک برد خاص و عملاً عددی بسیار بزرگ است که با نماد  $N_x$  نمایش داده می شود. مسأله اصلی در اینجا استخراج (تخمین) بردار  $x$  با استفاده از داده  $y$  و  $A$  معلوم می باشد. اگر پالس های دریافتی صحنه پس از

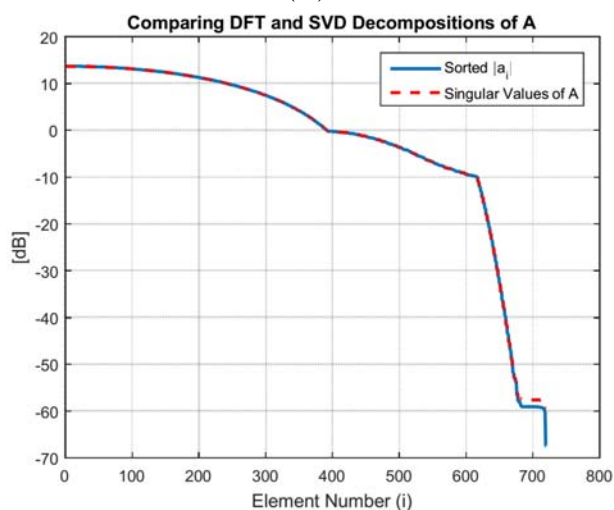
<sup>3</sup> Range Compression  
<sup>4</sup> Range-Cell Migration Correction  
<sup>5</sup> Antenna Phase Center  
<sup>6</sup> Coupling  
<sup>7</sup> Shift

<sup>1</sup> Back-Projection  
<sup>2</sup> Bold

از رابطه (۱۰) مشخص است ضرایب  $a_i$  مانند یک فیلتر روی درایه‌های  $x_i$  عمل کرده و پس از جمع شدن با نویز، بردار  $y$  ساخته می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۲. الف) نمایش اندازه ماتریس با توجه به داده‌های جدول ۱ و ب) مقایسه اندازه قطر اصلی و مقادیر تکین با ترتیب نزولی

با سطریهای جایجا شده- که آن را تبدیل فوریه ویژه نامیده و با  $F$  نشان می‌دهیم- تجزیه قطری نمود. بنابراین می‌توان ماتریس  $A$  را به صورت زیر نمایش داد:

$$A = F_{N_p}^H \Sigma_A F_{N_x} \quad (۶)$$

که  $F_{N_p}$  و  $F_{N_x}$  ماتریس‌های تبدیل فوریه ویژه با ابعاد  $N_p \times N_p$  و  $N_x \times N_x$  می‌باشند.  $\Sigma_A$  یک ماتریس قطری است که اندازه قطر اصلی آن حاوی مقادیر تکین  $A$  است. طبق رابطه فوق داریم:

$$\Sigma_A = F_{N_p} A F_{N_x}^H \quad (۷)$$

درایه‌های قطر اصلی  $\Sigma_A$  را  $a_i$  ( $i = 1, \dots, N_p$ ) می‌نامیم که در حالت کلی مختلط هستند و  $|a_i|$  روند نزولی دارد؛ به عبارت دیگر  $|a_i|$  ها برابر با مقادیر تکین  $A$  می‌باشد. در شکل (۲-الف) اندازه  $\Sigma_A$  با توجه به روابط (۵) و (۷) و مشخصات سامانه نمونه جدول ۱ رسم شده است. در شکل (۲-ب)  $|a_i|$  ها مرتب شده به صورت نزولی و نیز مقادیر تکین  $A$  حاصل تجزیه مقادیر تکین (SVD) رسم شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود این دو نمودار تقریباً به طور کامل بر هم منطبق هستند. با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$y = F_{N_p}^H \Sigma_A F_{N_x} x + w \quad (۸)$$

با ضرب ماتریس تبدیل فوریه ویژه در  $y$  داریم:

$$F_{N_p} y = \Sigma_A F_{N_x} x + F_{N_p} w \Rightarrow \tilde{y} = \Sigma_A \tilde{x} + \tilde{w} \quad (۹)$$

که  $\tilde{y}$ ،  $\tilde{x}$  و  $\tilde{w}$  به ترتیب تبدیل فوریه‌های ویژه  $y$ ،  $x$  و  $w$  هستند که از ضرب ماتریس‌های  $F_{N_p}$ ،  $F_{N_x}$  و  $F_{N_p}$  در آن‌ها حاصل شده‌اند. با توجه به قطری بودن  $\Sigma_A$ ، می‌توان رابطه زیر را استخراج نمود:

$$\tilde{y}_i = a_i \tilde{x}_i + \tilde{w}_i, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (۱۰)$$

جدول ۱. ویژگی‌های سیگنال و سامانه نمونه

مقدار	نماد	ویژگی‌های سیگنال	مقدار	نماد	ویژگی‌های سامانه
۳ cm	$\lambda$	طول موج	۱ m	$r_a$	شعاع چرخش آنتن
۸۰/۵ MHz	$BW$	پهنای باند	۱۰۰ m	$h$	ارتفاع آنتن
۰/۵ $\mu$ s	$T_p$	پهنای پالس	۳۰ deg.	$\Phi_b$	پهنای پرتو سمت آنتن*
۱۸۰ Hz	$PRF$	فرکانس تکرار پالس	۴۰ deg.	$\Theta_b$	پهنای پرتو ارتفاع آنتن*
۱۵ rpm	$\omega_a$	سرعت چرخش آنتن	۴۵ deg.	$\psi$	زاویه خراش محور پرتو
۷۲۰	$N_p$	تعداد پالس در یک جاروب ۳۶۰ درجه	۱۴۴۰	$N_x$	تعداد اهداف نقطه‌ای در برد معین

\* الگوی یک‌طرفه سمت و ارتفاع آنتن تابع sinc با پهنای ۳ dB برابر مقادیر ذکر شده در جدول در نظر گرفته شده است.

<sup>۱</sup> Singular Value Decomposition

که  $\Sigma_B$  یک ماتریس قطری با درایه‌های قطر اصلی  $b_i$  ( $i=1, \dots, N_t$ ) است و  $|b_i|$  ها با مقادیر تکین  $B$  برابر است. با توجه به ساختار ماتریس  $B$  در پیوست (ج) نشان داده شده، مقدار  $b_i$  ها با  $N_t$  نمونه اول  $a_i$  ها برابر است:

$$a_i = b_i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (16)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱۴) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= F_{N_t}^H \Sigma_B^H F_{N_p} F_{N_p}^H \Sigma_A F_{N_x} x + F_{N_t}^H \Sigma_B^H F_{N_p} w \\ &= F_{N_t}^H \Sigma_B^H \Sigma_A \hat{x} + F_{N_t}^H \Sigma_B^H w = F_{N_t}^H \Sigma_B^H (\Sigma_A \hat{x} + w) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \Sigma_B^H (\Sigma_A \hat{x} + w)$$

که  $\hat{x}$  تبدیل فوریه ویژه  $\hat{x}$  است.

با توجه به روابط (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$\hat{x}_i = |a_i|^2 \hat{x}_i + a_i^* w_i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (18)$$

بنابراین می‌توان گفت ضرب کردن  $B^H$  در  $y$  معادل ضرب کردن ضرایب فیلتر منطبق ( $a_i^*$ ) در  $N_t$  نمونه اول تبدیل فوریه ویژه آن ( $\hat{x}_i$ ) است که با توجه به روند نزولی  $|a_i|$  ها، این نمونه‌ها دارای بیشترین SNR هستند. حد تفکیک بهتر معادل استخراج تعداد بیشتری از  $\hat{x}_i$  هاست، اما با توجه به روند نزولی  $|a_i|$  ها و غلبه نویز در  $\hat{x}_i$  ها با  $i$  بزرگ، با افزایش  $N_t$  نمی‌توان حد تفکیک را بهبود بخشید. برای استخراج تعداد بیشتری از  $\hat{x}_i$  ها با توجه به رابطه (۱۳) لازم است علاوه بر افزایش  $N_t$ ، تعداد اهداف قابل تفکیک ( $N_a$ ) با افزایش شعاع چرخش و پهنای پرتو، افزوده شود که این مسئله باعث افزایش پهنای باند ضرایب  $a_i$  خواهد شد. در شکل ۳ مدل سیگنال دریافتی و نیز تصویرسازی نشان داده شده است. در این شکل بلوک‌های  $DFT^*$  و  $IDFT^*$  به معنی تبدیل فوریه ویژه و معکوس آن هستند. در بخش (ب) این شکل، برای تصویرسازی به روش MF باید مقدار ضریب فیلتر  $f_i$  برابر با ۱ قرار داده شود. در شکل ۴ تصویر حاصل از یک هدف نقطه‌ای در بعد سمت برای سامانه نمونه جدول ۱ و به ازای  $N_t = 288$  و  $N_t = 480$  رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش  $N_t$  تأثیری در افزایش حد تفکیک نداشته است.

### ۳-۲. روش شبه معکوس (PI)

در صورتی که از نویز چشم‌پوشی شود، می‌توان مدل تصویرسازی را به صورت شکل (۳-ب) در نظر گرفت که در آن  $f_i = \frac{1}{|a_i|^2}$  است. در این مدل، اثر ضرب شدن  $a_i$  های کوچک در طیف خنثی شده و بنابراین طیف گسترده‌تر و حد تفکیک بهتر خواهد شد. ضرب این  $f_i$

### ۳. تصویرسازی بر مبنای مدل

در این بخش بر اساس مدل استخراج‌شده، سه روش تصویرسازی معرفی و در هر روش شاخص‌هایی برای کیفیت تصویر بر حسب مقادیر تکین ماتریس ضرایب محاسبه می‌شود. سپس الگوریتم کلی تصویرسازی ارائه و حجم محاسبات این الگوریتم استخراج می‌گردد.

#### ۳-۱. روش فیلتر منطبق (MF)

در روش‌های معمول تشکیل تصویر، برای تشکیل تصویر حوزه سمت از روش فیلتر منطبق (فشرده‌سازی در سمت) استفاده می‌شود [۴۰]. بر اساس این روش، برای تخمین بردار  $x$  باید ماتریس  $A^H$  در بردار ضرب شود. از آنجا که حد تفکیک سامانه در سمت محدود است، بازتاب‌پذیری همه اهداف (درایه‌های  $x$ ) را نمی‌توان بازسازی نمود، به عبارت دیگر تعداد اهداف قابل تفکیک در سمت به صورت زیر است:

$$N_a = \frac{2\pi}{\Delta\theta} \quad (11)$$

که  $\Delta\theta$  حد تفکیک زاویه‌ای در سمت است و با رابطه تقریبی زیر محاسبه می‌شود [۲۱]:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{4r_a \sin\left(\frac{\Phi_B}{2}\right)} \quad (12)$$

و  $\Phi_B$  پهنای پرتو آنتن در سمت است. بر این اساس  $N_a$  تعداد اهداف قابل تفکیک در سمت به صورت زیر قابل محاسبه است:

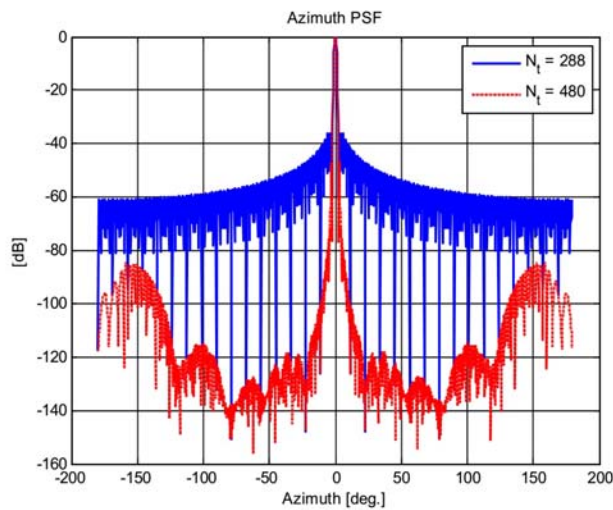
$$N_a = \frac{8\pi r_a \sin\left(\frac{\Phi_B}{2}\right)}{\lambda} \quad (13)$$

که در حالت کلی  $N_a \ll N_x$ . اگر تعداد سلول‌های سمت تصویر  $N_t$  نامیده شود، باید  $N_t \geq N_a$  انتخاب شود. حال می‌توان برای تخمین بردار  $x$  ماتریس  $B$  با ابعاد  $N_p \times N_t$  را مطابق روند تشکیل ماتریس  $A$  تشکیل داد (پیوست ج). تصویر (تخمین) بردار  $x$  با  $N_t$  درایه به نام  $\hat{x}$  به صورت زیر قابل دستیابی است:

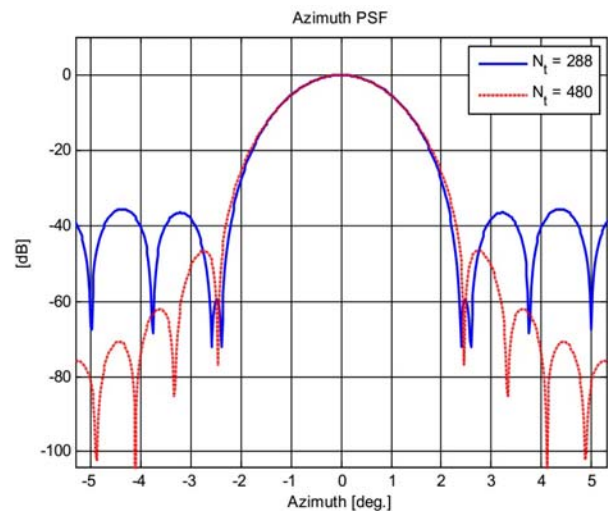
$$\hat{x} = B^H y = B^H A x + B^H w \quad (14)$$

مشابه آنچه درباره  $A$  گفته شد، ستون  $B$  نام  $B$  داده دریافتی در یک جاروب  $360^\circ$  درجه با  $N_p$  پالس از یک هدف نقطه‌ای نرمال واقع در زاویه  $\phi_n$  است که این‌بار:  $\phi_n = \frac{2\pi}{N_t}(n-1)$  و  $n = 1, \dots, N_t$ . با ضرب  $B^H$  در  $y$  مقدار بازتاب‌پذیری  $N_t$  هدف واقع در زوایای  $\phi_n$  حاصل خواهد شد. طبق رابطه (۶) در صورتی که  $N_p \geq N_t \geq N_a$  خواهیم داشت:

$$B = F_{N_p}^H \Sigma_B F_{N_t} \quad (15)$$



(الف)



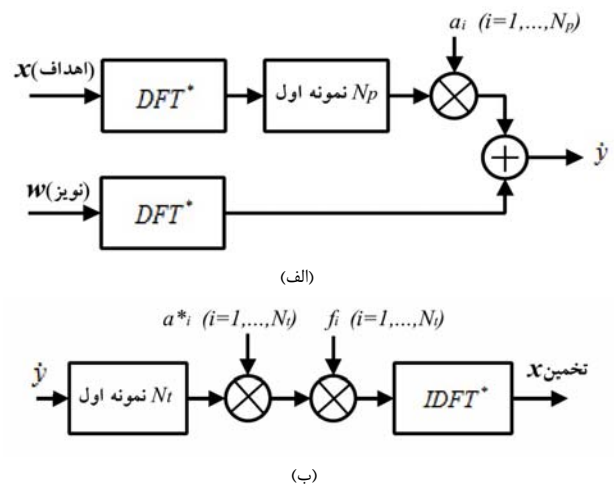
(ب)

شکل ۴. الف) تابع PSF در تصویرسازی MF برای دو انتخاب  $N_t = 288$  و  $N_t = 480$  ب) بزرگنمایی گلبرگ اصلی تابع PSF ( $N_t = 480$ )

عملیات پردازش سیگنال برای رسیدن به تصویر تخمینی  $\tilde{x}$  در روش PI با توجه به روابط (۱۵) و (۱۷) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (B^H B)^{-1} \hat{x} = (B^H B)^{-1} B^H (Ax + w) \\ &= F_{N_t}^H (\Sigma_B^H \Sigma_B)^{-1} F_{N_t} F_{N_t}^H \Sigma_B^H (\Sigma_A \hat{x} + \hat{w}) \quad (19) \\ &= F_{N_t}^H \Sigma_B^\dagger (\Sigma_A \hat{x} + \hat{w}) \end{aligned}$$

معادل ضرب شبه معکوس ماتریس  $B$  در  $y$  است، لذا این روش، روش شبه معکوس (PI) نامیده شده است. در شکل ۵، PSF سامانه در دو روش تصویرسازی MF و PI به ازای  $N_t = 288$  و  $N_t = 480$  و داده های جدول ۱ رسم شده است. در جدول ۲ مشخصات اصلی تابع PSF شامل پهنای ۳ dB گلبرگ اصلی (حد تفکیک)، نسبت قله به گلبرگ فرعی (PSLR) و نسبت گلبرگ فرعی تجمعی (ISLR) (با تعریف ارائه شده در [۴۱]) برای دو روش تصویرسازی MF و PI و به ازای دو مقدار  $N_t$  ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود در روش PI با افزایش  $N_t$  از ۲۸۸ به ۴۸۰ حد تفکیک از ۱/۱ درجه به ۰/۷ درجه تغییر یافته است در صورتی که با افزایش  $N_t$  در روش MF حد تفکیک تغییر چندانی نکرده و تنها مقدار PSLR و ISLR کاهش یافته است. نکته دیگر این که مقدار PSLR و ISLR در روش PI در مقایسه با روش MF بزرگ تر بوده و افزایش  $N_t$  تاثیری در بهبود آن ها نداشته است.

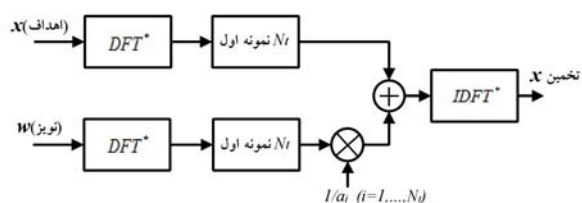


شکل ۳. مدل سازی سامانه: الف) سیگنال دریافتی و ب) تصویرسازی

جدول ۲. مشخصات تابع PSF در دو روش تصویرسازی MF و PI

ISLR	PSLR	پهنای گلبرگ اصلی (۳ dB)	روش تصویرسازی	
-۳۰ dB	-۳۷ dB	۱/۵°	$N_t = 288$	MF
-۴۶ dB	-۴۷ dB	۱/۵°	$N_t = 480$	
-۱۱ dB	-۱۳ dB	۱/۱°	$N_t = 288$	PI
-۱۱ dB	-۱۳ dB	۰/۷°	$N_t = 480$	

که  $I_{N_t \times N_x}$  یک ماتریس قطری با ابعاد  $N_t \times N_x$  و درایه‌های قطر اصلی ۱ می‌باشد. با توجه به رابطه (۲۰) تبدیل فوریه ویژه تصویر  $\tilde{x}$  دو بخش سیگنالی و نویزی دارد. بخش سیگنالی آن  $N_t$  نمونه اول تبدیل فوریه ویژه  $x$  است. بخش نویزی آن،  $N_t$  نمونه اول تبدیل فوریه ویژه  $w$  است که با وزن‌های  $\frac{1}{a_i}$  فیلتر شده‌اند. در شکل ۶ مدل ساده‌شده این روش تصویرسازی نشان داده شده است. مشخص است که با افزایش  $N_t$  می‌توان به تقریب دقیق‌تری از  $x$  دست یافت، اما به دلیل وجود نویز و روند نزولی  $a_i$  ها، همان‌طور که از رابطه (۲۰) و شکل ۶ مشخص است، در  $i$  های بزرگ نمونه‌های نویز به شدت تقویت شده و این مسئله باعث افت SNR خواهد شد؛ لذا این روش در مورد داده‌های با SNR پایین قابل اعمال نیست.

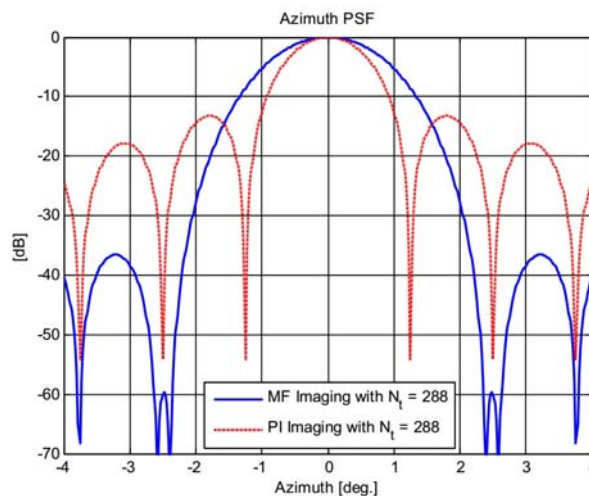


شکل ۶. مدل ساده شده تصویرسازی در روش PI

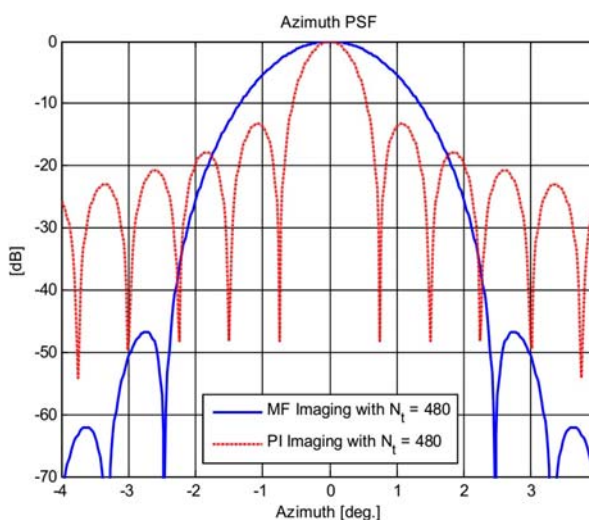
۳-۳. بررسی نویز و اغتشاش در تصویرسازی MF و PI

در ابتدا لازم است مقدار SNR در داده اولیه محاسبه شود. مطابق رابطه (۱)، برای محاسبه SNR باید توان بخش سیگنال  $(Ax)$  به توان نویز  $(w)$  تقسیم شود. درایه  $i$  ام بردار  $x$  ( $x_i$ ) مختلط تصادفی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_{x,i}^2$  و ناوابسته به دیگر درایه‌ها فرض می‌شود. ناوابسته بودن  $x_i$  ها با توجه به فاز تصادفی و مستقل هر کدام از آن‌ها اثبات می‌شود [۴۲]. درایه‌های  $w$  نیز با میانگین صفر، ناوابسته و با واریانس یکسان  $\sigma_w^2$  در نظر گرفته می‌شوند. با این فرضیات خواهیم داشت:

$$SNR_{in} = \frac{E \{x^H A^H A x\}}{E \{w^H w\}} = \frac{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_x} x_i^* (A^H A)_{ik} x_k \right\}}{N_p \sigma_w^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sigma_{x,i}^2 (A^H A)_{ii}}{N_p \sigma_w^2} \quad (21)$$



(الف)



(ب)

شکل ۵. تابع PSF در تصویرسازی MF و PI (الف)  $N_t = 288$  و (ب)  $N_t = 480$

ماتریس  $(B^H B)^{-1} B^H$  برابر با شبه‌معکوس  $B$  است که در  $y$  ضرب می‌شود.  $\Sigma_B^\dagger$  نیز شبه‌معکوس  $\Sigma_B$  و برابر با  $(\Sigma_B^H \Sigma_B)^{-1} \Sigma_B^H$  است. این ماتریس یک ماتریس قطری  $N_p \times N_t$  است که درایه‌های قطر اصلی آن برابر با معکوس درایه‌های قطر اصلی  $\Sigma_B$  هستند. با توجه به مساوی بودن  $N_t$  نمونه اول قطر اصلی  $\Sigma_A$  با نمونه‌های قطر اصلی  $\Sigma_B$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= F_{N_t}^H \Sigma_B^\dagger \Sigma_A \dot{x} + F_{N_t}^H \Sigma_B^\dagger \dot{w} \\ &= F_{N_t}^H \left( I_{N_t \times N_x} \dot{x} + \Sigma_B^\dagger \dot{w} \right) \\ \Rightarrow \dot{\tilde{x}} &= I_{N_t \times N_x} \dot{x} + \Sigma_B^\dagger \dot{w} \end{aligned} \quad (20)$$

که  $\overline{\lambda_B}$  میانگین مقادیر ویژه  $B^H B$  یا همان  $\lambda_{B,i}$  ها ( $i = 1, \dots, N_t$ ) است. طبق رابطه (۱۶) مقدار  $a_i$  و  $b_i$  به ازای  $i = 1, \dots, N_t$  برابر است و بنابراین  $\lambda_{A,k}$  و  $\lambda_{B,k}$  در  $N_t$  نمونه اول برابر هستند. در محاسبه رابطه بالا از این قضیه استفاده شده که با فرض ناوابسته بودن درایه‌های  $w$ ، درایه‌های  $w$  نیز ناوابسته و واریانس آنها برابر با  $\sigma_w^2$  خواهد بود. در ضمن واریانس هر کدام از  $\dot{x}_i$  ها برابر با  $\overline{\sigma_x^2}$  است که این دو مسأله در پیوست (د) اثبات شده‌اند. نسبت توان اعوجاج به توان سیگنال مطلوب (DSR) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$DSR(MF) = \frac{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} \left| (\varepsilon - |a_i|^2) \dot{x}_i \right|^2 \right\}}{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} \varepsilon^2 |\dot{x}_i|^2 \right\}} \quad (27)$$

$$= \frac{\overline{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{N_t} (\varepsilon - \lambda_{B,i})^2}{N_t \varepsilon^2 \overline{\sigma_x^2}} = \left( 1 - \frac{\overline{\lambda_B}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{V_{\lambda_B}}{\varepsilon^2}$$

که  $V_{\lambda_B} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (\overline{\lambda_B} - \lambda_{B,i})^2}{N_t}$  واریانس  $\lambda_{B,i}$  ها است. می‌توان با جمع NSR و DSR به نسبت توان خطا به توان سیگنال (ESR) دست یافت:

$$ESR(MF) = NSR(MF) + DSR(MF) \quad (28)$$

$$= \frac{\overline{\lambda_B}}{\varepsilon^2 \mu} + \left( 1 - \frac{\overline{\lambda_B}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{V_{\lambda_B}}{\varepsilon^2}$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۲۸) نسبت به  $\varepsilon$  مشخص می‌شود کمینه  $ESR(MF)$  در  $\varepsilon$  زیر رخ می‌دهد:

$$\varepsilon = \frac{V_{\lambda_B}}{\overline{\lambda_B}} + \overline{\lambda_B} + \frac{1}{\mu} \quad (29)$$

در این صورت مقدار NSR، DSR و ESR (کمینه) به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$NSR(MF) = \frac{\overline{\lambda_B}}{\left( \frac{V_{\lambda_B}}{\overline{\lambda_B}} + \overline{\lambda_B} + \frac{1}{\mu} \right)^2 \mu} \quad (30)$$

$$DSR(MF) = \frac{\left( \frac{V_{\lambda_B}}{\overline{\lambda_B}} + \frac{1}{\mu} \right)^2 + V_{\lambda_B}}{\left( \frac{V_{\lambda_B}}{\overline{\lambda_B}} + \overline{\lambda_B} + \frac{1}{\mu} \right)^2}$$

$$ESR(MF) = \frac{\frac{V_{\lambda_B}}{\overline{\lambda_B}} + \frac{1}{\mu}}{\frac{V_{\lambda_B}}{\overline{\lambda_B}} + \frac{1}{\mu} + \overline{\lambda_B}}$$

که  $E\{\cdot\}$  عملگر امید ریاضی است. ستون  $i$  ام  $A$  سیگنال دریافتی از هدف نرمال واقع در زاویه  $\frac{2\pi}{N_x}(i-1)$  در یک چرخش  $360^\circ$  درجه است، بنابراین  $(A^H A)_{ii}$  برابر با توان این سیگنال بوده و می‌توان نتیجه گرفت درایه‌های قطر اصلی  $A^H A$  همگی مساوی هستند:

$$(A^H A)_{ii} = \frac{tr\{A^H A\}}{N_x} = \frac{\sum_{k=1}^{N_p} \lambda_{A,k}}{N_x} \quad (22)$$

که  $tr\{A^H A\}$  حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی  $A^H A$  و  $\lambda_{A,k}$  مقدار ویژه  $k$  ام  $A^H A$  است. در ضمن می‌دانیم که حداکثر  $N_p$  تا از این مقادیر ویژه غیر صفر هستند. با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۲۱) خواهیم داشت:

$$SNR_{in} = \frac{\sum_{k=1}^{N_p} \lambda_{A,k}}{N_p} \frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sigma_{x,i}^2}{N_x \sigma_w^2} = \overline{\lambda_A} \frac{\overline{\sigma_x^2}}{\sigma_w^2} = \mu \overline{\lambda_A} \quad (23)$$

که  $\overline{\lambda_A}$  میانگین  $\lambda_{A,k}$  ها ( $k = 1, \dots, N_p$ ) و  $\overline{\sigma_x^2}$  میانگین  $\sigma_{x,i}^2$  است. متغیر  $\mu$  نیز به صورت نسبت  $\frac{\overline{\sigma_x^2}}{\sigma_w^2}$  تعریف می‌شود. از طرف دیگر قبلاً گفته شد که  $|a_i|$  ها برابر با مقادیر تکین  $A$  و جذر مقادیر ویژه  $A^H A$  هستند، بنابراین داریم:

$$\lambda_{A,k} = |a_k|^2, \quad k = 1, \dots, N_p \quad (24)$$

با توجه به رابطه (۱۸)، در تصویرسازی MF درایه‌های تبدیل فوریه ویژه تصویر بدون در نظر گرفتن نویز به صورت  $\dot{x}_i = |a_i|^2 \dot{x}_i$  می‌باشند در صورتی که در حالت آرمانی باید به صورت  $\dot{x}_i = \varepsilon \dot{x}_i$  باشند که  $\varepsilon$  یک ضریب ثابت غیر صفر است. می‌توان رابطه (۱۸) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{x}_i = \varepsilon \dot{x}_i + \left( |a_i|^2 - \varepsilon \right) \dot{x}_i + a_i^* w_i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (25)$$

سمت راست عبارت فوق سه بخش مجزا دارد که بخش اول آن  $(\varepsilon \dot{x}_i)$  سیگنال مطلوب، بخش دوم آن  $(|a_i|^2 - \varepsilon) \dot{x}_i$  اعوجاج و بخش سوم آن  $(a_i^* w_i)$  نویز است. با استفاده از رابطه فوق می‌توان نسبت توان نویز به توان سیگنال مطلوب (NSR) را محاسبه نمود:

$$NSR(MF) = \frac{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} |a_i^* w_i|^2 \right\}}{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} \varepsilon^2 |\dot{x}_i|^2 \right\}} \quad (26)$$

$$= \frac{\sigma_w^2 \sum_{i=1}^{N_t} |a_i|^2}{N_t \varepsilon^2 \overline{\sigma_x^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} \lambda_{B,i}}{N_t \varepsilon^2 \mu} = \frac{\overline{\lambda_B}}{\varepsilon^2 \mu}$$



که  $(\frac{1}{\lambda_B})$  میانگین  $\frac{1}{\lambda_{B,i}}$  ها  $(i = 1, \dots, N_t)$  است. در اینجا با افزایش  $N_t$  با توجه به روند نزولی  $\lambda_{B,i}$  ها، مقدار  $(\frac{1}{\lambda_B})$  به شدت افزایش یافته و همین مسأله باعث غلبه نویز در تصویر خواهد شد. با توجه به رابطه (۳۱)، مشخص است که مقدار اعوجاج صفر است؛ چون با چشم‌پوشی از نویز، سیگنال حاصل شده همان سیگنال مطلوب (ند) است. نسبت توان خطا به توان سیگنال در روش PI به صورت زیر خواهد بود:

$$ESR(PI) = NSR(PI) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{\lambda_B} \right) \quad (33)$$

در شکل (۷-ب) مقدار شاخص مذکور بر حسب  $N_t$  و با توجه به داده‌های جدول ۱ و  $SNR_{in} = 5 \text{ dB}$  رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد سلول‌های سمت در تصویر، مقدار نویز به شدت افزایش پیدا می‌کند. در صورتی که بزرگ‌ترین مقدار  $N_t$  برای رسیدن به یک ESR مشخص مد نظر باشد، می‌توان با استفاده از این شکل مقدار  $N_t$  را محاسبه نمود؛ مثلاً معلوم است برای داشتن ESR کمتر از  $-5 \text{ dB}$  باید مقدار  $N_t$  کمتر از ۳۱۰ انتخاب شود.

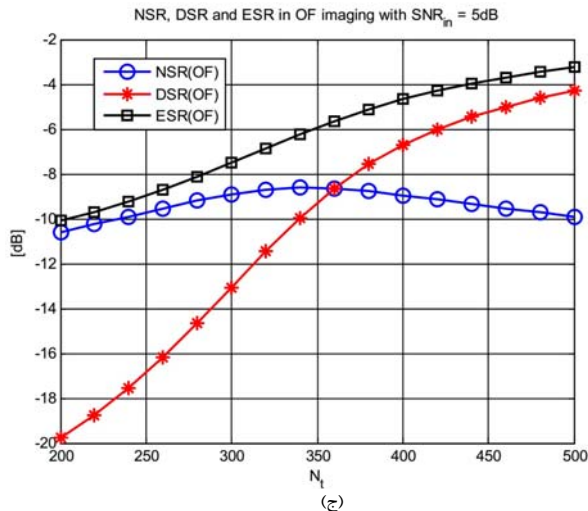
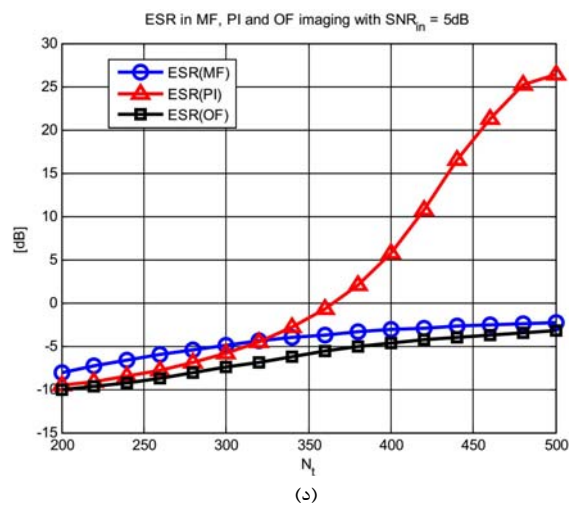
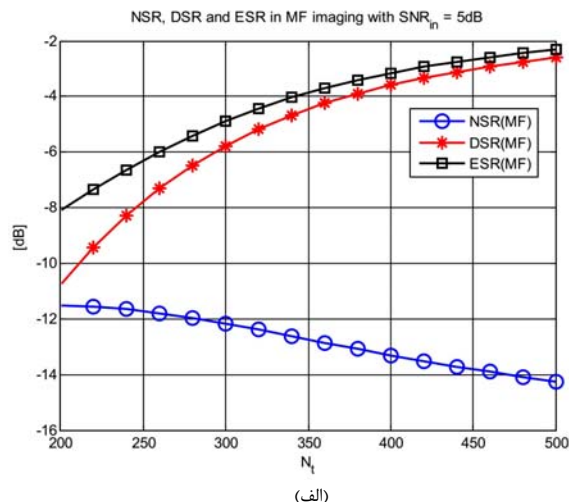
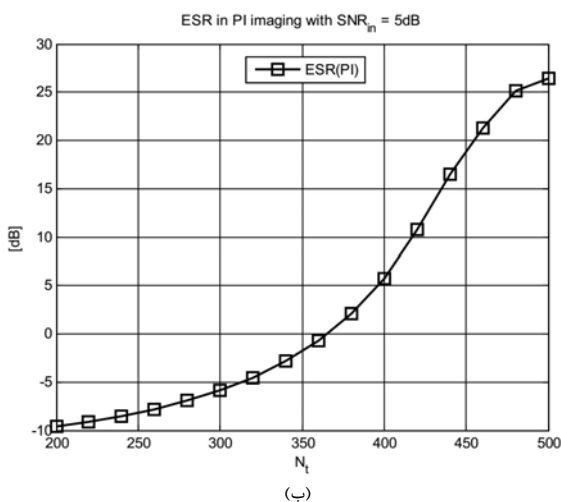
در اینجا مشخص است هرچه  $\lambda_B$  در برابر  $\frac{V\lambda_B}{\lambda_B} + 1$  بزرگ‌تر باشد، خطای نسبی در تصویر کوچکتر خواهد بود. شکل (۷-الف) مقدار شاخص‌های NSR، DSR و ESR را بر حسب  $N_t$  و به‌ازای داده‌های جدول ۱ و  $SNR_{in} = 5 \text{ dB}$  (رابطه (۲۳)) نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود عامل محدودکننده در افزایش تعداد سلول‌های تصویر ( $N_t$ )، اعوجاج است.

در مورد تصویرسازی PI با توجه به رابطه (۲۰) داریم:

$$\hat{x}_i = x_i + \frac{1}{a_i} w_i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (31)$$

که  $\hat{x}_i$  درایه  $i$  ام تبدیل فوریه ویژه تصویر تشکیل شده به روش PI است. همانند روش MF می‌توان مقدار NSR را محاسبه نمود:

$$NSR(PI) = \frac{E\left\{\sum_{i=1}^{N_t} \left| \frac{1}{a_i} w_i \right|^2\right\}}{E\left\{\sum_{i=1}^{N_t} |x_i|^2\right\}} = \frac{\sigma_w^2 \sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{\lambda_{B,i}}}{N_t \sigma_x^2} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{\lambda_B} \right) \quad (32)$$



شکل ۷. شاخص‌های NSR، DSR و ESR در روش‌های مختلف تصویرسازی: الف) MF، ب) PI، ج) OF و د) مقایسه ESR در سه روش مذکور

### ۳-۴. تصویرسازی به روش فیلتر بهینه

فیلتر منطبق برای بیشینه کردن مقدار SNR به کار می‌رود [۴۳]. به عبارت دیگر در روش MF مقدار NSR کمینه است، اما این مسأله باعث می‌شود سیگنال بازیابی شده با سیگنال اصلی (به دلیل ضربه‌ای نبودن تابع PSF) تفاوت داشته و اعوجاج ایجاد شود. روش PI توان اعوجاج را صفر کرده و بنابراین مقدار DSR کمینه است، اما استفاده از فیلتر معکوس باعث تقویت نویز خواهد شد. در این‌جا، هدف، یافتن فیلتری برای تصویرسازی است که در آن توان نسبی خطای تصویر (ESR) کمینه گردد. با توجه به رابطه (۱۸) و شکل (۳-ب) تصویرسازی به روش فیلتر بهینه (OF) به صورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f_i \dot{\mathbf{x}} = f_i |a_i|^2 \dot{\mathbf{x}}_i + f_i a_i^* \dot{\mathbf{w}}_i, i = 1, \dots, N_t \quad (34)$$

که  $\dot{\mathbf{x}}_i$  ها ( $i = 1, \dots, N_t$ ) درایه‌های تصویر در روش فیلتر بهینه (OF)،  $\dot{\mathbf{x}}_i$  ها درایه‌های تبدیل فوریه ویژه آن و  $f_i$  ها ضرایب فیلتر می‌باشند. در روش MF مقدار  $f_i$  برابر با یک و در روش PI برابر با  $\frac{1}{\lambda_{B,i}}$  قرار داده شد. مقدار ESR با توجه به رابطه (۳۴) به صورت زیر است:

$$ESR(OF) = \frac{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} |f_i a_i^* \dot{\mathbf{w}}_i|^2 \right\} + E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} \left| (1 - f_i |a_i|^2) \dot{\mathbf{x}}_i \right|^2 \right\}}{E \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 \right\}} \quad (35)$$

$$= \frac{\sigma_w^2 \sum_{i=1}^{N_t} |f_i a_i^*|^2 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{N_t} |1 - f_i |a_i|^2|^2}{N_t \sigma_x^2}$$

مقدار  $f_i$  که به ازای آن  $ESR(OF)$  کمینه می‌گردد با مشتق‌گیری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_i(opt.) = \frac{1}{|a_i|^2 + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\lambda_{B,i} + \frac{1}{\mu}}, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (36)$$

که  $f_i(opt.)$  مقدار  $f_i$  در فیلتر بهینه است. با جایگذاری  $f_i(opt.)$  در رابطه (۳۵) خواهیم داشت:

$$NSR(OF) = \frac{1}{\mu N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \frac{\lambda_{B,i}}{(\lambda_{B,i} + \frac{1}{\mu})^2},$$

$$DSR(OF) = \frac{1}{\mu N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \frac{\frac{1}{\mu}}{(\lambda_{B,i} + \frac{1}{\mu})^2}, \quad (37)$$

$$ESR(OF) = \frac{1}{\mu N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{\lambda_{B,i} + \frac{1}{\mu}}$$

همان‌طور که مشخص است در رابطه فوق مقادیر کوچک  $\lambda_{B,i}$  وقتی با عدد  $\frac{1}{\mu}$  جمع می‌شوند، بر خلاف روش PI باعث افزایش بیش از حد خطا نخواهند شد. در شکل (۷-ج) مقدار  $NSR(OF)$ ،  $DSR$  و  $ESR(OF)$  بر حسب مقادیر مختلف  $N_t$  و به ازای داده‌های جدول ۱ و  $SNR_{in} = 5dB$  رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روند افزایش نویز در اینجا نسبت به روش PI کنترل شده و در نهایت مقدار ESR کمینه شده است. در شکل (۷-د) مقدار ESR در سه روش MF، PI و OF بر حسب تعداد سلول‌های تصویر ( $N_t$ ) رسم شده است. مشخص است مقدار خطا در روش OF از دو روش دیگر کمتر است و در  $N_t$  های کوچک به خطای PI و در  $N_t$  بزرگ به خطای MF نزدیک است. از آن‌جا که اعمال ضرایب  $f_i$  در سیگنال حوزه فرکانس معادل ضرب کردن سیگنال حوزه زمان در یک ماتریس چرخشی<sup>۱</sup> با مقادیر ویژه  $f_i$  است [۳۹ و ۴۴]، با توجه به رابطه (۳۶) می‌توان رابطه زیر را استخراج نمود:

$$\bar{\mathbf{x}} = \left( \mathbf{B}^H \mathbf{B} + \frac{1}{\mu} \mathbf{I} \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}} = \left( \mathbf{B}^H \mathbf{B} + \frac{1}{\mu} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{y} \quad (38)$$

که  $\mathbf{I}$  ماتریس واحد<sup>۲</sup> است. با مقایسه این رابطه با روابط (۱۴ و ۱۹) معلوم می‌گردد با فرض  $\mu$  بزرگ این تخمین به تخمین PI و با فرض  $\mu$  کوچک به تخمین MF تبدیل می‌شود. مشکل اصلی روش OF لزوم معلوم بودن  $\mu$  است. این متغیر را می‌توان با دانستن مشخصات محیط (هدف) و نویز محاسبه نمود. در ضمن می‌توان با استفاده از اطلاعات دریافتی آن را تخمین زد. با توجه به رابطه (۹) داریم:

$$diag(\mathbf{y} \mathbf{y}^H) = \begin{bmatrix} \lambda_{A,1} |\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 \\ \lambda_{A,2} |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + |\dot{\mathbf{w}}_2|^2 \\ \vdots \\ \lambda_{A,N_p} |\dot{\mathbf{x}}_{N_p}|^2 + |\dot{\mathbf{w}}_{N_p}|^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

که بردار  $diag(\mathbf{y} \mathbf{y}^H)$  قطر اصلی  $\mathbf{y} \mathbf{y}^H$  است. از آنجا که رشته  $\lambda_{A,i}$  روند نزولی دارد، در صورتی که تعداد پالس‌ها به اندازه کافی بزرگ باشد ( $N_p \gg N_t$ ) در  $N_p - N_t$  درایه آخر این بردار، مؤلفه‌های نویز غالب بوده و می‌توان با میانگین گرفتن از این درایه‌ها توان نویز ( $\sigma_w^2$ ) را تخمین زد. ضمناً جمع کل درایه‌های بردار فوق (توان بردار  $\mathbf{y}$ ) تقریباً<sup>۳</sup> برابر  $N_p \bar{\lambda}_A \sigma_x^2 + N_p \sigma_w^2$  است، بنابراین با تخمین  $\sigma_w^2$  و کم کردن  $N_p \sigma_w^2$  از توان  $\mathbf{y}$ ، مقدار  $\bar{\lambda}_A \sigma_x^2$  حاصل شده و با دانستن  $\bar{\lambda}_A$  می‌توان مقدار  $\sigma_x^2$  و در نتیجه  $\mu$  را محاسبه نمود.

1- Circulant Matrix

2- Identity Matrix

۳- تقریب به دلیل جایگزینی متوسط‌گیری به جای امید ریاضی است و هرچه تعداد پالس‌ها بیشتر باشد این تقریب دقیق‌تر است

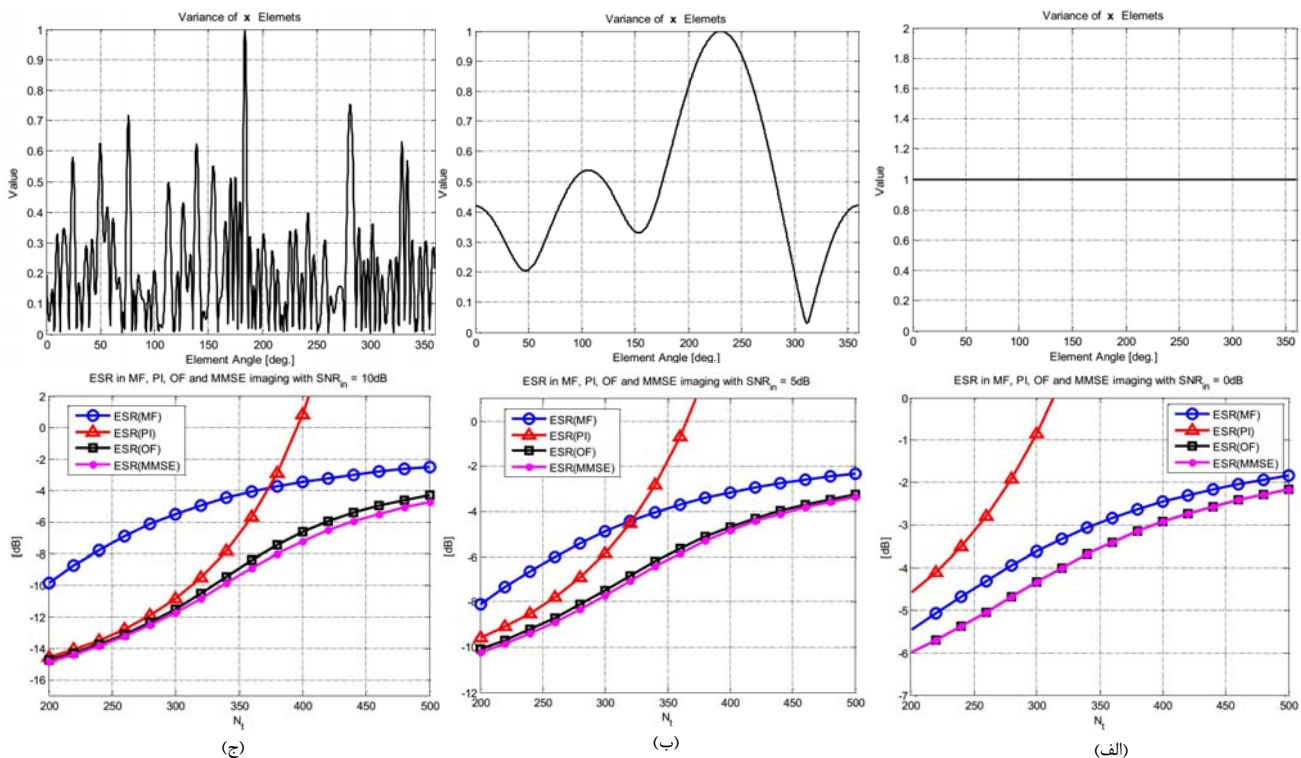
### ۳-۵. مقایسه با تخمین کمینه خطای میانگین مربعی (MMSE)

در پیوست (ه) نشان داده شده تخمین MMSE تصویر به صورت زیر است:

$$\tilde{x} = C_x' D^H (D C_x' D^H + \sigma_w^2 I)^{-1} y' \quad (40)$$

که  $\tilde{x}$  تخمین MMSE بردار  $x$  (با  $N_t$  نمونه)، بردارهای  $x'$  و  $y'$  عکس تبدیل فوریه ویژه  $N_t$  نمونه اول  $\tilde{x}$  و  $y'$ ،  $C_x'$  ماتریس کوواریانس  $x'$  و ماتریس مربعی  $D$  یک ماتریس چرخشی است که مقادیر تکین آن همان مقادیر تکین  $B$  هستند. با مقایسه روابط (۳۸) و (۴۰) مشخص است در صورتی که  $C_x'$  به صورت  $\overline{\sigma_x^2} I$  در نظر گرفته شود، تخمین OF معادل تخمین MMSE خواهد بود. در پیوست (ه) نشان داده شده، در صورتی که  $C_x'$  قطری باشد،  $C_x'$  نیز قطری و قطر اصلی آن نسخه نمونه‌گاهی شده<sup>۲</sup> قطر اصلی  $C_x$  است، بنابراین اگر درایه‌های  $x$  ناوابسته و با واریانس مساوی باشند، تخمین OF و MMSE یکسان خواهند بود. از آنجا که MMSE از نظر نرم خطا بهینه است [۴۵]، در حالت کلی نرم خطای OF بزرگتر یا مساوی خطای MMSE است. نکته مهم این است که OF مانند PI و MF با یک مرحله ضرب حوزه فرکانس به دست می‌آید اما برای

تخمین MMSE نیاز به عملیات ضرب و معکوس ماتریس داریم که حجم محاسبات بسیار بیشتری دارد. در شکل ۸ خطای تصویرسازی به روش‌های MF، PI، OF و MMSE برای داده‌های جدول ۱ و بر حسب  $N_t$  به ازای چند حالت فرضی  $C_x$  رسم شده است. در ردیف بالای این شکل، قطر اصلی  $C_x$  (قطری) رسم شده است. این نمودار واریانس بازتاب‌پذیری اهداف مفروض در برد معین و زوایای مختلف را نشان می‌دهد. در شکل (الف)، این نمودار یکنواخت و  $SNR_{in} = 0\text{dB}$  فرض شده است. همان‌طور که گفته شد در این حالت خطای MMSE و OF برابر و کمینه است. مشخص است به دلیل نویز زیاد، خطای MF به کمینه نزدیک و خطای PI بالاتر از خطای سایر روش‌هاست. در شکل (ب)، قطر اصلی  $C_x$  غیر یکنواخت و  $SNR_{in} = 5\text{dB}$  در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که خطای OF به میزان بسیار اندکی از خطای کمینه (MMSE) بیشتر شده و روش PI در  $N_t$  های پایین بر روش MF برتری یافته است. در شکل (ج)، واریانس بازتاب‌پذیری اهداف با تغییرات زیاد و  $SNR_{in} = 10\text{dB}$  فرض شده است. در اینجا خطای OF با افزایش  $N_t$  به تدریج از خطای کمینه فاصله اندکی گرفته است و در ضمن در  $N_t$  های کوچک روش PI به OF نزدیک شده است.



شکل ۸. شاخص ESR در روش‌های مختلف تصویرسازی (ردیف پایین) و به ازای واریانس‌های مختلف درایه‌های  $x$  (ردیف بالا): (الف) واریانس درایه‌های  $x$  یکنواخت و  $SNR_{in} = 0\text{ dB}$ ، (ب) واریانس درایه‌های  $x$  متغیر و  $SNR_{in} = 5\text{ dB}$  و (ج) واریانس درایه‌های  $x$  با تغییرات زیاد و  $SNR_{in} = 10\text{ dB}$

1- Minimum Mean Square Error  
2- Down-Sampled

### ۳-۶. الگوریتم کلی تصویرسازی

شکل ۹ نمودار بلوکی<sup>۱</sup> الگوریتم تصویرسازی پیشنهادی در این سامانه را نشان می‌دهد. بلوک شماره ۱ ماتریس داده خام حوزه زمان ناشی از چرخش ۳۶۰ درجه آنتن با  $N_p$  پالس است. فرض می‌شود هر پالس دریافتی پس از نمونه‌برداری در یک سطر این ماتریس قرار می‌گیرد. اگر تعداد نمونه‌های هر پالس (تعداد سیدهای برد) را  $N_r$  در نظر بگیریم، بُعد این ماتریس  $N_p \times N_r$  خواهد بود. این ماتریس پس از FFT دوبعدی در ماتریس داده مرجع ضرب می‌شود. داده مرجع (بلوک ۳)، داده حوزه فرکانس دوبعدی یک هدف نقطه‌ای واقع در مرکز ناحیه تصویربرداری (بدون در نظر گرفتن مدولاسیون سمت) است که جهت فشرده‌سازی در برد و RCMC در داده دریافتی ضرب می‌شود [۲۱، ۳۰، ۴۰]. مقدار RCM باقی‌مانده با این روش در سامانه گردشی زمین‌پایه به حدی است که به راحتی می‌توان از آن در برابر حدتفکیک در برد چشم‌پوشی نمود [۲۰ و ۲۱]. پس از IFFT در برد، خروجی بلوک ۵ ماتریسی است که هر ستون آن تبدیل فوریه بردار  $y$  مربوط به یک برد خاص از صحنه می‌باشد. با تخمین  $\mu$  و استفاده از روابط (۳۰، ۳۳ و ۳۷) و نمودارهایی مشابه نمودارهای شکل ۷ می‌توان تعداد سلول سمت لازم ( $N_t$ ) را با توجه به میزان ESR مطلوب انتخاب نمود و سپس تعداد سطرها را به  $N_r$  کاهش داد. بدین منظور پس از IFFT در برد، به روش گفته شده در پیوست (ب) سطرهای ماتریس حاصل به ترتیب SNR مرتب شده و سپس  $N_p - N_t$  سطر آخر (که از کمترین SNR برخوردارند) حذف می‌شوند (بلوک ۶). ضرایب فیلتر تصویرسازی در ستون‌های متناظر ماتریس بلوک ۷ قرار گرفته‌اند. اگر ماتریس بلوک ۷ را  $Z$  بنامیم درایه‌های این ماتریس در هر کدام از روش‌های MF، PI و OF به صورت زیر خواهند بود:

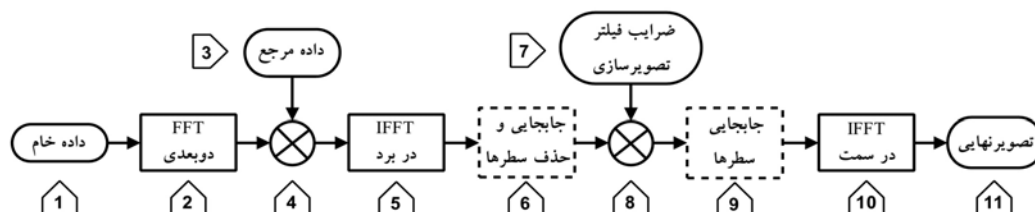
$$Z_{i,k}(MF) = a_{i,k}^* ; Z_{i,k}(PI) = \frac{1}{a_{i,k}} ;$$

$$Z_{i,k}(OF) = \frac{a_{i,k}^*}{|a_{i,k}|^2 + \frac{1}{\mu_k}} ;$$

$$(i = 1, \dots, N_t, k = 1, \dots, N_r)$$

که در آن،  $a_{i,k}$  مقدار تکین نام ماتریس  $A$  متناظر با برد  $k$ ام (حاصل از تجزیه با ماتریس تبدیل فوریه ویژه) و  $\mu_k$  متغیر  $\mu$  متناظر با آن برد می‌باشد. پس از اعمال فیلتر تصویرسازی، مجدداً  $N_r$  سطر داده به صورت عکس حالت قبل جابه‌جا می‌شوند (بلوک ۹) و سپس برای تشکیل تصویر نهایی یک مرحله IFFT در سمت (ستون‌ها) انجام می‌گیرد.

تعداد عملیات ممیز شناور (FLOPS) لازم برای انجام یک FFT مختلط با طول  $N$  برابر با  $5N \log_2 N$  عملیات و برای یک ضرب مختلط ۶ عملیات است [۳۰]. با توجه به این موضوع تعداد FLOPS لازم در اجرای هر کدام از بلوک‌های نمودار شکل ۹ در جدول ۳ محاسبه شده است. عملیات لازم برای اجرای بلوک‌های ۶ و ۹ شامل جابجایی داده بوده و نسبت به ضرب و جمع عملیات بسیار کمتری لازم دارد. با توجه به جدول ۳ تعداد کل عملیات لازم در این سامانه حداکثر برابر با  $10N_p N_r \log_2(N_p N_r) + 12N_p N_r$  است. اگر  $N_p = N_r = N$  فرض شود، تعداد کل عملیات از مرتبه  $O(N^2 \log_2 N)$  خواهد بود. عملیات لازم برای الگوریتم پس‌تابش (BP) از مرتبه  $O(N^3)$  است [۴۶]. بنابراین در این سامانه کاهش قابل ملاحظه‌ای در تعداد عملیات نسبت به الگوریتم BP وجود دارد. در صورت استفاده از الگوریتم MMSE برای تصویرسازی سمت، به‌ازای هر سید برد یک عملیات محاسبه معکوس و ضرب ماتریسی لازم است. با توجه به اینکه تعداد عملیات لازم برای محاسبه معکوس ماتریس از مرتبه  $O(N^3)$  است [۳۳]، تعداد کل عملیات از مرتبه  $O(N^4)$  خواهد بود. از طرف دیگر در صورتی که حافظه لازم برای ذخیره یک عدد مختلط را ۲ کلمه<sup>۱</sup> فرض کنیم، برای ذخیره داده بلوک‌های ۳ و ۷ در شکل ۹ به ترتیب به  $2N_p N_r$  کلمه و  $2N_t N_r$  کلمه نیاز است. اگر از روش MMSE برای تصویرسازی استفاده شود، در بلوک ۷،  $2N_t^2 N_r$  کلمه مورد نیاز خواهد بود که از این نظر نیز افزایش چشم‌گیری نسبت به روش‌های MF، PI و OF دارد.



شکل ۹. نمودار بلوکی تشکیل تصویر در سامانه

<sup>۱</sup> Word

جدول ۳. تعداد عملیات ممیز شناور لازم در اجرای هر بلوک سامانه شکل ۹

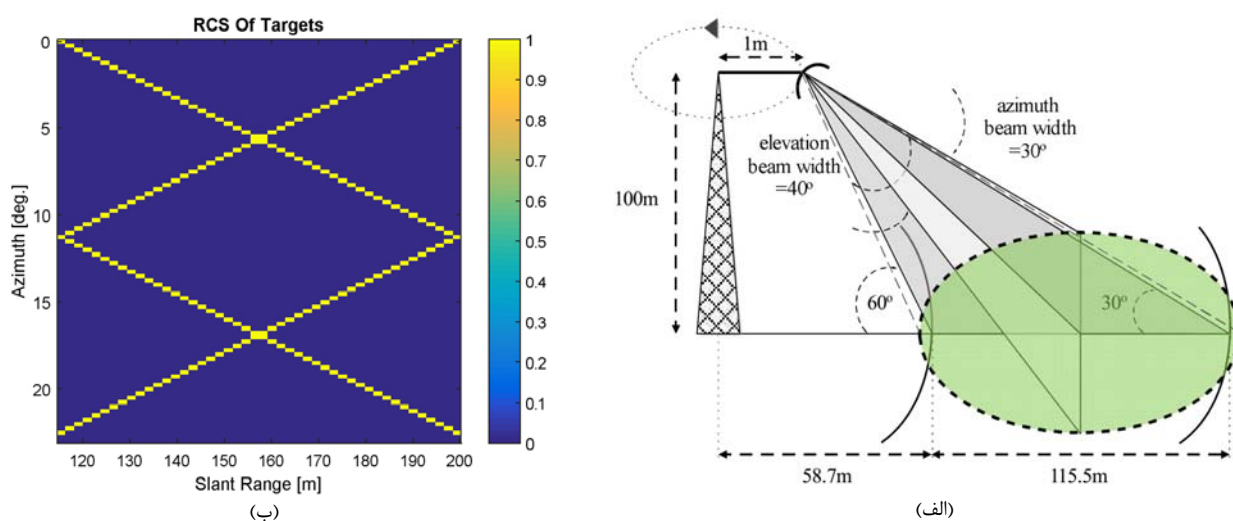
شماره بلوک	۲	۴	۵	۸	۱۰
تعداد عملیات	$5N_p N_r \log_2(N_p N_r)$	$6N_p N_r$	$5N_p N_r \log_2(N_r)$	$6N_r N_r$	$5N_r N_r \log_2(N_r)$

شکل ۱۱ نتیجه تصویرسازی نشان داده شده است. تعداد سلول‌های تصویر در سمت ۴ برابر کمتر از تعداد اهداف در سمت است، اما تصویر اهداف آشکار شده است. مقایسه بخش (الف) و (ب) این شکل نشان می‌دهد تصویر MF نسبت به تصویر PI دارای نویز کمتر اما تداخل بین سلولی بیشتر (گلبرگ‌های فرعی بیشتر) در سمت است و نسبت به تصویر BP (بخش -د) دارای کیفیت بالاتری است. تصویر OF (بخش ج) نسبت به تصویر PI دارای گلبرگ‌های فرعی بزرگ‌تر اما نویز کمتر است و در مجموع بهینه است. افزایش نویز در بردهای دورتر به دلیل کاهش SNR، در همه این تصاویر قابل مشاهده است. در بخش (ه)، ستون سوم (نیمرخ سمت) تصاویر بخش‌های (الف) تا (د) رسم شده است. دو هدف نقطه‌ای نزدیک به هم در این برد، در زوایای  $10/75$  و  $11/75$  درجه قرار گرفته و یک درجه از هم فاصله دارند. این دو هدف در تمام تصاویر بخش‌های (الف) تا (د) در یک سلول ادغام شده‌اند. در شکل (۱۱-و)، مقدار  $\mu$  واقعی و نیز مقدار تخمینی آن از روش ذکر شده در بند ۳-۴ مقاله به ازای بردهای مختلف رسم شده است. این نمودار دقت مقدار تخمینی این متغیر (استفاده شده در تصویرسازی OF) را نشان می‌دهد. در شکل ۱۲ همان تصاویر و نمودارهای شکل ۱۱ اما با  $SNR_{in} = 10\text{dB}$  رسم شده است. مقایسه بخش‌های این دو شکل نشان می‌دهد افزایش SNR داده به کاهش نویز تصاویر (به ویژه در تصویر PI) منجر شده است و در شکل (۱۲-ه) دو هدف نقطه‌ای واقع در سبب برد سوم در دو سلول مجاور آشکار شده‌اند. در شکل (۱۲-و) مقدار  $\mu$  نسبت به شکل (۱۱-و) به میزان  $10\text{dB}$  افزایش یافته است. شکل ۱۳ نتایج تصویرسازی به ازای  $SNR_{in} = 10\text{dB}$  و  $N_r = 480$  را نشان می‌دهد. با این  $N_r$ ، فاصله بین سلول‌های سمت تصویر به  $0/75$  درجه خواهد رسید. مقایسه بخش‌های مختلف در شکل ۱۳ و شکل ۱۲ نشان می‌دهد اضافه کردن تعداد سلول‌های تصویر کمک چندانی به بهبود کیفیت تصاویر MF و BP نکرده، جز آن‌که تعداد سلول‌های سمت بیشتر شده است. تصویر PI به دلیل افزایش تعداد سلول‌های سمت و وارد شدن مقادیر ویژه کوچک در فرایند تشکیل تصویر و در نتیجه تقویت نویز، به شدت نویزی شده است و برای داشتن یک تصویر قابل قبول به  $SNR_{in}$  بالاتری نیاز دارد. در تصویر OF مشخص است با وارد شدن  $\mu$  در تصویرسازی، افزایش نویز به خوبی مهار شده و در ضمن تفکیک در سمت بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته است. در شکل (۱۳-ه) دو هدف نقطه‌ای واقع در سبب برد سوم (به ویژه در تصویر OF) از هم تفکیک شده‌اند.

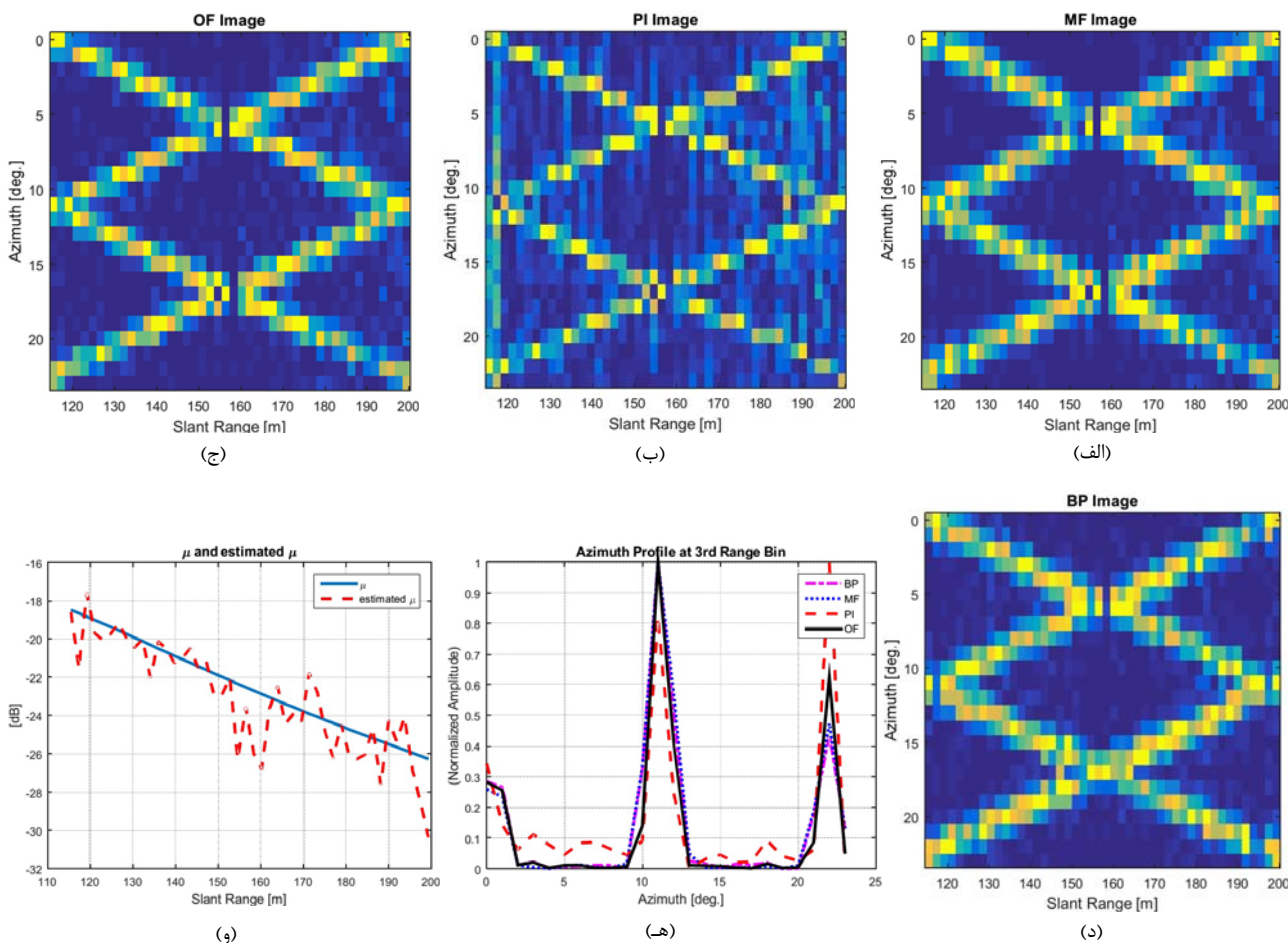
#### ۴. نتایج شبیه‌سازی

جهت بررسی و مقایسه الگوریتم‌های تصویرسازی فوق، تشکیل تصویر برای یک صحنه فرضی و به ازای داده‌های جدول ۱ انجام شده است.

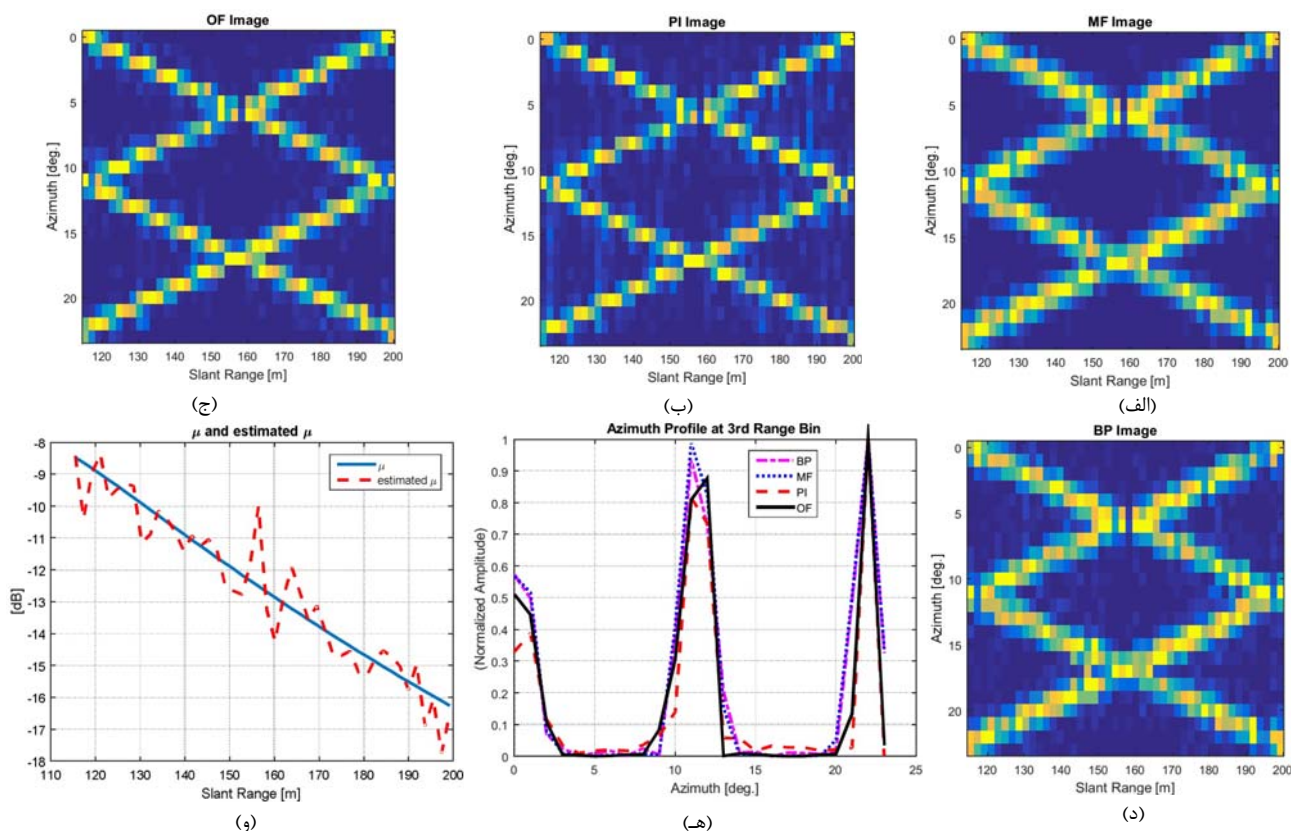
ناحیه مورد نظر شامل یک نوار حلقوی با عرض حدود  $115$  متر، از برد زمینی  $58$  تا  $174$  متر (زاویه خراش  $30$  تا  $60$  درجه) می‌باشد شکل (۱۰-الف). با توجه به حدتفکیک  $1/86$  متر در برد مایل و هندسه مسأله، فاصله بین دورترین و نزدیک‌ترین هدف در برد مایل برابر با  $46$  سلول برد خواهد بود. در هر برد،  $1440$  هدف نقطه‌ای با فاصله زاویه‌ای  $0/25$  درجه در نظر گرفته شده است. حدتفکیک سمت در این سامانه با توجه به رابطه (۱۲) برابر با  $1/66$  درجه و بنابراین تعداد اهداف قابل تفکیک در  $360$  درجه برابر  $217$  است، یعنی قابلیت تشکیل تصویر همه اهداف صحنه وجود ندارد. در شکل (۱۰-ب) سطح مقطع راداری (RCS) اهداف فرضی واقع در ناحیه مورد نظر رسم شده است که در اینجا تنها اهداف بین زاویه صفر تا  $23$  درجه رسم شده‌اند. بازتاب‌پذیری هر هدف به صورت یک عدد مختلط با اندازه جذر RCS آن هدف و فاز تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه  $[0, 2\pi]$  در نظر گرفته شده است. هر سطر ماتریس داده خام با فرض ارسال یک پالس با مدولاسیون LFM با پهنای باند و عرض مندرج در جدول ۱ و محاسبه سیگنال باند پایه دریافتی از همه اهداف با توجه به تأخیر، اندازه و فاز بازتاب‌پذیری و ضریب الگوی آنتن در محل هدف ساخته شده است. این ماتریس دارای  $720$  سطر (متناظر با ارسال  $720$  پالس در یک جاروب  $360$  درجه) و  $46$  ستون متناظر با  $46$  سلول برد می‌باشد. تصویرسازی مطابق الگوریتم شکل ۹ انجام شده است. پس از ضرب ماتریس داده خام در داده مرجع در حوزه فرکانس دوبعدی و انجام فشرده‌سازی در برد و RCMC و انتقال به حوزه برد-داپلر و کاهش تعداد سطرها به مقدار مورد نظر با حذف سطرهای با SNR پایین، برای تشکیل تصویر اهداف در هر برد، باید ماتریس متناظر با برد مورد نظر مطابق رابطه (۵) تشکیل شده و با استفاده از آن تصویرسازی انجام گیرد. تصویرسازی برای دو  $SNR_{in}$  (SNR سیگنال ورودی، رابطه (۲۳)) و دو  $N_r$  مختلف به سه روش MF، PI و OF انجام شده و با روش BP [۴۷] مقایسه شده است. لازم به ذکر است مقدار  $SNR_{in}$  متناظر با برد در زاویه خراش  $45$  درجه (محور پرتو) در نظر گرفته شده است. در ابتدا تصویرسازی با فرض  $SNR_{in} = 0\text{dB}$  و  $N_r = 360$  انجام شده، یعنی فاصله بین سلول‌های سمت تصویر برابر با  $1$  درجه در نظر گرفته شده است. در



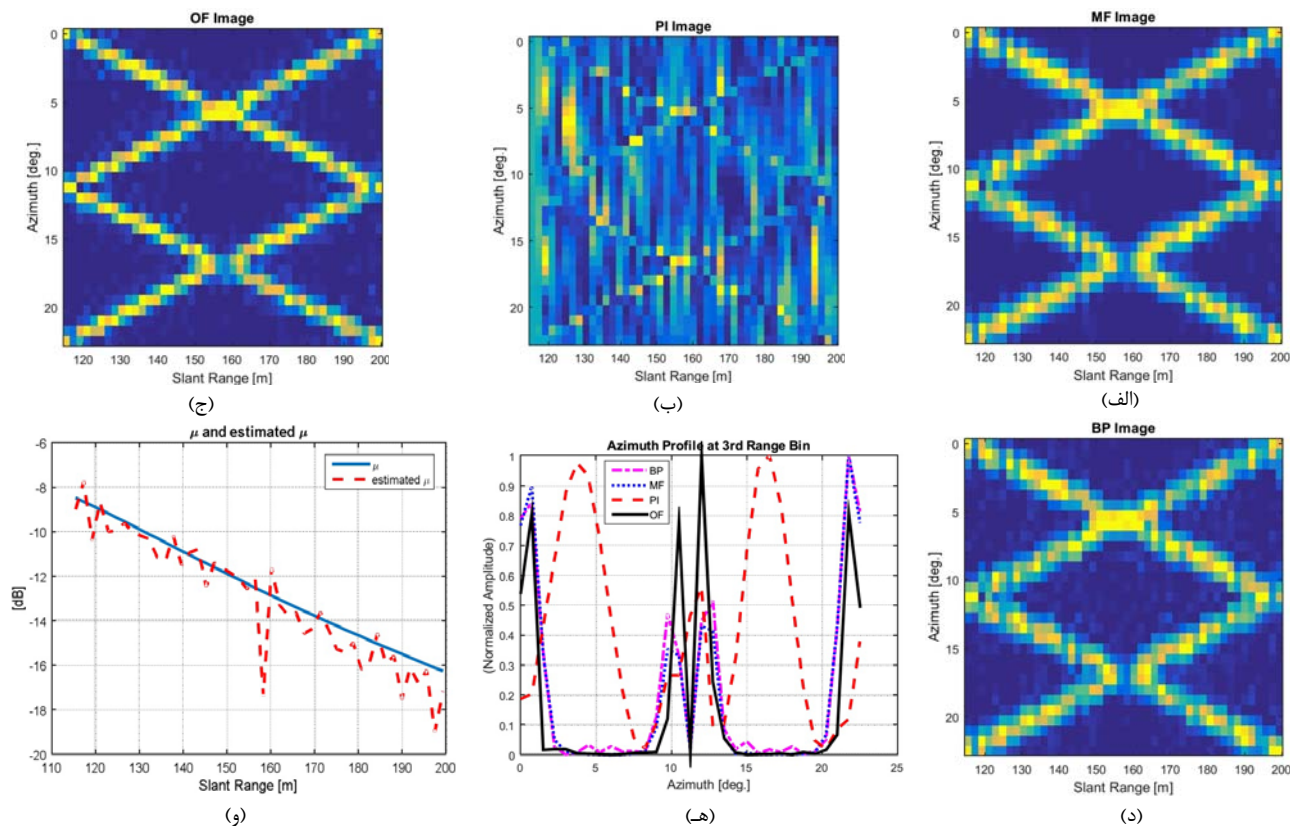
شکل ۱۰. شبیه‌سازی یک صحنه فرضی: (الف) هندسه صحنه، (ب) RCS اهداف واقع در ناحیه تصویربرداری



شکل ۱۱. نتایج تصویرسازی با  $SNR_{in} = 0\text{dB}$  و  $N_r = 360$ : (الف) MF، (ب) PI، (ج) OF، (د) BP، (ه) سبده برد سوم تصاویر، (و)  $\mu$  واقعی و تخمینی



شکل ۱۲. نتایج تصویرسازی با  $SNR_{in}=10\text{dB}$  و  $N_t=360$ : (الف) MF، (ب) PI، (ج) OF، (د) BP، (ه) سید برد سوم تصاویر، (و)  $\mu$  واقعی و تخمینی



شکل ۱۳. نتایج تصویرسازی با  $SNR_{in}=10\text{dB}$  و  $N_t=480$ : (الف) MF، (ب) PI، (ج) OF، (د) BP، (ه) سید برد سوم تصاویر، (و)  $\mu$  واقعی و تخمینی

## ۵. نتیجه گیری

فوق محاسبه گردید و نشان داده شده در روش‌های MF، PI و OF تعداد عملیات لازم از مرتبه  $O(N^2 \log_2 N)$  است که در مقایسه با الگوریتم BP از تعداد عملیات به مراتب کمتری بهره می برد و ضمناً حجم عملیات و حافظه مورد استفاده در پیاده‌سازی آن‌ها در مقایسه با روش MMSE بسیار پایین تر است. به وسیله شبیه‌سازی‌های انجام شده جهت تصویرسازی از یک صحنه مفروض، نشان داده شد تصویرسازی به روش OF همواره بهترین نتیجه را در بر داشته و نتیجه روش PI در SNR بالا به OF نزدیک می‌شود. در ضمن نتیجه تصویرسازی به روش MF همواره بهتر از روش پس‌تابش (BP) است که این بهبود به دلیل لحاظ کردن الگوی کامل سمت و ارتفاع آنتن در مدل سیگنال حاصل می‌شود.

## ۶. مراجع

- [1] A. Moreira, P. Prats-Iraola, M. Younis, G. Krieger, I. Hajnsek, and K. P. Papathanassiou, "A tutorial on synthetic aperture radar," *Geoscience and Remote Sensing Magazine, IEEE*, vol. 1, no. 1, pp. 6-43, March 2013.
- [2] I. G. Cumming and F. H. Wong, *Digital processing of synthetic aperture radar data*, Artech house, 2005.
- [3] M. Crosetto, O. Monserrat, G. Luzi, M. Cuevas-Gonzalez, and N. Devanthery, "A Noninterferometric Procedure for Deformation Measurement Using GB-SAR Imagery," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 11, no. 1, pp. 34-38, Jan. 2014.
- [4] M. A. Sletten, "Demonstration of SAR Distortion Correction Using a Ground-Based Multichannel SAR Test Bed," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 5, pp. 3181-3190, May 2013.
- [5] K. Takahashi, M. Matsumoto, and M. Sato, "Continuous Observation of Natural-Disaster-Affected Areas Using Ground-Based SAR Interferometry," *Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, IEEE Journal of*, vol. 6, no. 3, pp. 1286-1294, June 2013.
- [6] L. Pipia, X. Fabregas, A. Agasca, and C. Lopez-Martinez, "Polarimetric Temporal Analysis of Urban Environments With a Ground-Based SAR," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 4, pp. 2343-2360, April 2013.
- [7] D. Tarchi, F. Oliveri, and P. F. Sammartino, "MIMO Radar and Ground-Based SAR Imaging Systems: Equivalent Approaches for Remote Sensing," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 1, pp. 425-435, Jan. 2013.
- [8] N. J. Marechal, S. S. Osofsky, and R. M. Bloom, "Demonstration of W-band SAR Imagery with a Ground Based System Having 7.5 GHz of Bandwidth Obtained with a Stepped Chirp Waveform," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 4, pp. 2522-2532, October 2013.

در این مقاله تصویرسازی بر مبنای مدل در رادار دهانه ترکیبی نواری گردشی به چند روش مختلف پیشنهاد و تحلیل گردید و نشان داده شد کاربرد این روش در عین برخورداری از دقت بالا از سرعت بالایی نیز برخوردار است. در ابتدا، به دلیل اهمیت تفکیک‌پذیری حوزه سمت، مدل داده دریافتی در حوزه سمت به صورت یک رابطه خطی استخراج و ماتریس ضرایب (سنجش) تشریح شد. سپس نشان داده شد به دلیل گردشی بودن هندسه مسأله می‌توان این ماتریس را با استفاده از ماتریس‌های DFT نرمال با سطرهای جابه‌جا شده قطری نمود. بر این اساس مدل ساده و کارآمدی جهت تخمین تصویر با تعداد سلول سمت دلخواه استخراج گردید. از ویژگی‌های این مدل قابلیت انتخاب تعداد سلول سمت تصویر است که با حذف داده‌های کم‌ترین SNR انجام می‌گیرد. با استفاده از این مدل داده، سه روش مختلف تصویرسازی بر اساس فیلتر منطبق (MF)، فیلتر معکوس (PI) و فیلتر بهینه (OF)، استخراج شده و شاخص‌های سه‌گانه بررسی کیفیت تصویر شامل نسبت توان نویز به سیگنال (NSR)، نسبت توان اعوجاج به سیگنال (DSR) و نسبت توان خطا به سیگنال (ESR) معرفی و در هر کدام از روش‌های تصویرسازی به صورت تحلیلی محاسبه گردید. بر اساس این شاخص‌ها نشان داده شد روش تصویرسازی MF به دلیل کمینه بودن توان نویز، در SNRهای متوسط و پایین از کارایی خوبی برخوردار است. روش PI از نظر توان اعوجاج بهینه است اما برای افزایش تعداد سلول سمت (افزایش حد تفکیک) به دلیل تقویت نویز نیاز به داده با SNR بالا دارد. در صورت در اختیار داشتن متوسط بازتاب‌پذیری صحنه و توان نویز، می‌توان روش OF را به کار برد که از نظر توان خطا (نویز و اعوجاج) بهینه است. همچنین نشان داده شد در تصویرسازی به روش MF زیاد کردن تعداد سلول‌های تصویر، کمکی به بهبود حد تفکیک نکرده و تنها در کاهش مقدار ISLR و PSLR مؤثر است؛ برعکس در روش PI با لبردن تعداد سلول‌های تصویر باعث بهبود حد تفکیک می‌شود اما بر ISLR و PSLR اثری ندارد و البته نویز را به شدت افزایش می‌دهد. در ضمن نشان داده شد در حالتی که بازتاب‌پذیری اهداف مورد نظر ناوابسته و با واریانس یکسان در نظر گرفته شود، روش تصویرسازی OF معادل تخمین MMSE بوده و از نظر نرم خطا بهینه خواهد بود. سپس الگوریتم کامل تصویرسازی ارائه شده و تعداد عملیات ممیز شناور لازم جهت پیاده‌سازی روش‌های تصویرسازی



- [20] S. R. Samareh Hashemi, S. A. Seyedin, "Fast Imaging in Ground-Based Circular Strip-Map Synthetic Aperture Radar," *Journal of Radar*, vol. 3, no. 1, pp. 57,72, 2015.
- [21] Y. Luo, H. Song, R. Wang, Y. Deng, F. Zhao, and Z. Xu, "Arc FMCW SAR and Applications in Ground Monitoring," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 9, pp. 5989-5998, Sept. 2014.
- [22] L. Hoonyol, L. Jae-Hee, K. Kwang-Eun, S. Nak-Hoon, and C. Seong-Jun, "Development of a Truck-Mounted Arc-Scanning Synthetic Aperture Radar," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 5, pp. 2773-2779, May 2014.
- [23] M. Mohammadpoor, R. S. A. Raja Abdullah, A. Ismail, and A. F. Abas, "A circular synthetic aperture radar for on-the-ground object detection," *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 122, p. 269, 2012.
- [24] R. S. A. Raja Abdullah, M. Mohammadpoor, A. Ismail, A. F. Abas, "A Multistatic Circular Synthetic Aperture Radar for small Object Detection," *Radar Conference (RADAR)*, 2011 IEEE, pp. 262-266, 23-27 May 2011.
- [25] D. S. Garmatyuk and R. M. Narayanan, "Ultra-wideband continuous-wave random noise arc-SAR," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 40, no. 12, pp. 2543-2552, Dec. 2002.
- [26] A. Broquetas, R. De Porrata, L. Sagues, X. Fabregas, and L. Jofre, "Circular synthetic aperture radar (C-SAR) system for ground-based applications," *Electronics Letters*, vol. 33, no. 11, pp. 988-989, 22 May 1997.
- [27] H. Klausung, N. Bartsch, and C. Boesswetter, "A MM-Wave SAR-Design for Helicopter Application (ROSAR)," *Microwave Conference*, 1986. 16th European, pp. 317-328, 8-12 Sept. 1986.
- [28] W. Wang, "Multi-Antenna Synthetic Aperture Radar," CRC Press, 2013.
- [29] M. Bara, L. Sagues, F. Paniagua, A. Broquetas, and X. Fabregas, "High-speed focusing algorithm for circular synthetic aperture radar (C-SAR)," *Electronics Letters*, vol. 36, no. 9, pp. 828-830, 27 Apr. 2000.
- [30] Y. Liao, M. Xing, Z. Lei, and Z. Bao, "A novel modified Omega-K algorithm for circular trajectory scanning SAR imaging using series reversion," *EURASIP Journal of Advances in Signal Processing*, 2013.
- [31] J. Min and K. Young Soo, "Migration technique for rotor synthetic aperture radar," *Electronics Letters*, vol. 33, no. 7, pp. 630-631, 27 Mar. 1997.
- [32] M. Bertero and P. Boccacci, "Introduction to Inverse Problems in Imaging," CRC Press, 1998.
- [33] R. D. West, "Model-Based Stripmap Synthetic Aperture Radar Processing," PhD diss. Utah State University, 2011.
- [34] J. Gunther, et al "Maximum likelihood synthetic aperture radar image formation for highly nonlinear flight tracks," *Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop (DSP/SPE)*, IEEE, 2011.
- [9] P. J. Ferrer, C. Lopez-Martinez, A. Agasca, L. Pipia, J. M. Gonzalez-Arbesu, X. Fabregas, and J. Romeu, "Transpolarizing Trihedral Corner Reflector Characterization Using a GB-SAR System," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 8, no. 4, pp. 774-778, July 2011.
- [10] L. Pipia, X. Fabregas, A. Agasca, C. Lopez-Martinez, S. Duque, J. J. Mallorqui, and J. Marturia, "Polarimetric Differential SAR Interferometry: First Results With Ground-Based Measurements," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 6, no. 1, pp. 167-171, Jan. 2009.
- [11] G. Luzi, L. Noferini, D. Mecatti, G. Macaluso, M. Pieraccini, C. Atzeni, A. Schaffhauser, R. Fromm, and T. Nagler, "Using a Ground-Based SAR Interferometer and a Terrestrial Laser Scanner to Monitor a Snow-Covered Slope: Results From an Experimental Data Collection in Tyrol (Austria)," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 2, pp. 382-393, Feb. 2009.
- [12] L. Noferini, M. Pieraccini, D. Mecatti, G. Macaluso, G. Luzi, and C. Atzeni, "DEM by Ground-Based SAR Interferometry," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 4, no. 4, pp. 659-663, Oct. 2007.
- [13] C. Byung-Lae, K. Young-Kyun, P. Hyung-Geun, K. Young-Soo, "Automobile-based SAR/InSAR system for ground experiments," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 3, no. 3, pp. 401-405, July 2006.
- [14] Z. Zheng-Shu, W.-M. Boerner, and M. Sato, "Development of a ground-based polarimetric broadband SAR system for noninvasive ground-truth validation in vegetation monitoring," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 9, pp. 1803-1810, Sept. 2004.
- [15] G. Nico, D. Leva, G. Antonello, and D. Tarchi, "Ground-based SAR interferometry for terrain mapping: theory and sensitivity analysis," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 6, pp. 1344-1350, June 2004.
- [16] D. Leva, G. Nico, D. Tarchi, J. Fortuny-Guasch, and A. J. Sieber, "Temporal analysis of a landslide by means of a ground-based SAR Interferometer," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 41, no. 4, pp. 745-752, April 2003.
- [17] M. Pieraccini, G. Luzi, and C. Atzeni, "Terrain mapping by ground-based interferometric radar," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 10, pp. 2176-2181, Oct. 2001.
- [18] L. Cazzani, C. Colesanti, D. Leva, G. Nesti, C. Prati, F. Rocca, and D. Tarchi, "A ground-based parasitic SAR experiment," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 5, pp. 2132-2141, Sep. 2000.
- [19] D. R. Sheen, N. P. Malinas, D. W. Jr. Kletzli, T. B. Lewis, and J. F. Roman, "Foliage transmission measurements using a ground-based ultrawide band (300-1300 MHz) SAR system," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 32, no. 1, pp. 118-130, Jan. 1994.

باید زاویه سمت و ارتفاع هدف در این دستگاه محاسبه شود. در این شکل دستگاه X'Y'Z' دستگاه مختصات اولیه‌ای است که مختصات هدف در این دستگاه به صورت  $(r_0 \cos(\phi_n), r_0 \sin(\phi_n), 0)$  است. برای تبدیل دستگاه X'Y'Z' به دستگاه XYZ در ابتدا مبدأ به اندازه  $h$  در جهت محور Z انتقال پیدا می‌کند. در این صورت مختصات هدف در دستگاه جدید  $(r_0 \cos(\phi_n), r_0 \sin(\phi_n), -h)$  خواهد بود. سپس مبدأ به اندازه  $r_a$  در جهت محور X انتقال پیدا می‌کند که مختصات هدف در این دستگاه  $(r_0 \cos(\phi_n) - r_a, r_0 \sin(\phi_n), -h)$  است. در نهایت دستگاه مختصات حول محور Y به اندازه زاویه خراش  $\psi_0 = \arctan\left(\frac{h}{r_0 - r_a}\right)$  (XYZ) چرخش پیدا می‌کند. اگر مختصات هدف در دستگاه جدید  $(x_t, y_t, z_t)$  فرض شود، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_0) & 0 & -\sin(\psi_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi_0) & 0 & \cos(\psi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \cos(\phi_n) - r_a \\ r_0 \sin(\phi_n) \\ -h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos(\phi_n) \cos(\psi_0) - r_a \cos(\psi_0) + h \sin(\psi_0) \\ r_0 \sin(\phi_n) \\ r_0 \cos(\phi_n) \sin(\psi_0) - r_a \sin(\psi_0) - h \cos(\psi_0) \end{bmatrix} \quad (۱-پ)$$

که در آن ماتریس چرخش حول محور Y به اندازه زاویه  $\psi_0$  می‌باشد. اگر زاویه سمت و ارتفاع هدف در دستگاه XYZ را به ترتیب  $\Phi_n$  و  $\Theta_n$  بنامیم خواهیم داشت:

$$\Phi_n = \arctan\left(\frac{y_t}{x_t}\right) = \arctan\left(\frac{r_0 \sin(\phi_n)}{r_0 \cos(\phi_n) \cos(\psi_0) - r_a \cos(\psi_0) + h \sin(\psi_0)}\right)$$

$$\Theta_n = \arcsin\left(\frac{z_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{r_0 \cos(\phi_n) \sin(\psi_0) - r_a \sin(\psi_0) - h \cos(\psi_0)}{\sqrt{h^2 + r_0^2 + r_a^2 - 2r_0 r_a \cos(\phi_n)}}\right) \quad (۲-پ)$$

در صورتی که محور پرتو (محور X) نسبت به دستگاه اولیه X'Y'Z' در زاویه  $\theta_m$  قرار داشته باشد (شکل (۱-ب))، آنگاه در رابطه بالا به جای  $\phi_n$  باید  $\theta_m - \phi_n$  قرار گیرد. با محاسبه زوایای  $\Phi_n$  و  $\Theta_n$  می‌توان ضریب  $\xi_{m,n}$  را محاسبه نمود. به‌عنوان مثال در صورتی که الگوی دوطرفه سمت و ارتفاع آنتن به صورت  $\text{sinc}^2$  و پهنای پرتو ۳ dB سمت و ارتفاع به ترتیب  $\Phi_B$  و  $\Theta_B$  در نظر گرفته شود، مقدار  $\xi_{m,n}$  وقتی APC در زاویه  $\theta_m$  و هدف نقطه‌ای در زاویه  $\phi_n$  قرار دارد (شکل (۱-ب))، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\xi_{m,n} = \left[ \text{sinc}\left(\frac{0.886\Phi_{mn}}{\Phi_B}\right) \text{sinc}\left(\frac{0.886\Theta_{mn}}{\Theta_B}\right) \right]^2 \quad (۳-پ)$$

[35] M. Cetin and W. C. Karl, "Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization," *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 4, pp. 623-631, Apr. 2001.

[36] M. Cetin, W. C. Karl, and D. A. Castanon, "Feature enhancement and ATR performance using nonquadratic optimization-based SAR imaging," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 4, pp. 1375-1395, Oct. 2003.

[37] B. Sun and H. Jin "Feature Enhanced Synthetic Aperture Radar Image Formation," *Electronic Measurement and Instruments, 2007. ICEMI '07. 8th International Conference on*, pp. 803-809, Aug. 16 -July 18 2007.

[38] S. Samadi, M. Cetin, and M. A. Masnadi-Shirazi, "Multiple Feature-Enhanced SAR Imaging Using Sparsity in Combined Dictionaries," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 10, no. 4, pp. 821-825, July 2013.

[39] P. J. Davis, "Circulant Matrices," 2nd edition, AMS Chelsea Publishing, 1994.

[40] M. Soumekh, "Synthetic aperture radar signal processing with MATLAB algorithms," John Wiley & Sons, 1999.

[41] S. Holm, P. Valand, and K. Eldhuset, "Performance of Cesar ERS-1 SAR Processor," *IGARSS*, vol. 91, pp. 291-294, 1991.

[42] C. Oliver and Q. Shaun, "Understanding synthetic aperture radar images," Sci. Tech. Publishing, 2004.

[43] A. B. Carlson, P. Crilly, and J. Rutledge, "Communication systems," McGraw-Hill, 2002.

[44] K. Irwin and S. R. Simanca, "On circulant matrices," *Notices of the AMS* 59, no. 3, pp. 368-377, 2012.

[45] S. M. Kay, "Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory," Prentice Hall, 1993.

[46] L. Yun, H. Wen, T. Weixian, and W. Yirong, "Extension of Range Migration Algorithm to Squint Circular SAR Imaging," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 8, no. 4, pp. 651-655, July 2011.

[47] H. Cantalloube, E. Colin-Koeniguer, and H. Oriot, "High resolution SAR imaging along circular trajectories," *Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS 2007. IEEE International. IEEE*, pp. 850-853, 2007.

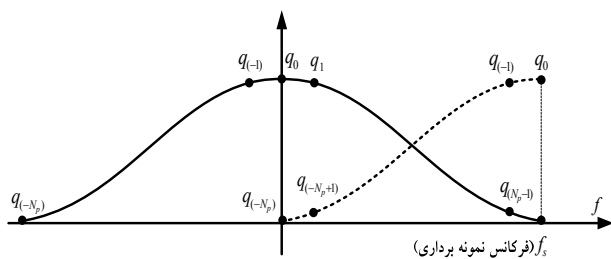
[48] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, "Signals and systems," 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.

### پیوست (الف). محاسبه ضریب الگوی آنتن در محل هدف

برای محاسبه ضریب  $\xi_{m,n}$  در محل هدف باید زاویه سمت و ارتفاع هدف نسبت به آنتن محاسبه شود. در شکل (پ-۱) مبدأ مختصات در دستگاه XYZ، مرکز فاز آنتن و محور X، محور پرتو آنتن است؛ لذا

نمونه برداری شده یک سیگنال واحد با انتقال متفاوت هستند، بنابراین پس از تبدیل فوریه گرفتن از آنها، تفاوت ستون های ماتریس حاصل تنها یک اختلاف فاز خواهد بود. هنگام تبدیل فوریه گرفتن از نسخه نمونه برداری شده یک سیگنال پیوسته، نمونه های دو نیم طیف در کنار یکدیگر ظاهر می شوند شکل (پ-۲). هر چه فرکانس نمونه برداری (در اینجا  $N_p$ ) بزرگ تر باشد، در هم رفتگی<sup>۱</sup> طیفی کمتر خواهد بود [۴۸]. بنابراین ماتریس  $D_{N_p}A$  را می توان به صورت رابطه (پ-۶) نمایش داد.

سمت راست این عبارت بالا شامل دو ماتریس است که ماتریس اول مربوط به نیم طیف اول و ماتریس دوم مربوط به نیم طیف دوم است. ستون اول این ماتریس ها تبدیل فوریه سیگنال دریافتی از هدف نرمال واقع در زاویه 0 در یک چرخش کامل است که با رشته  $q_i$  نشان داده شده است. ستون های بعدی تبدیل فوریه نسخه منتقل شده همان سیگنال قبلی هستند، بنابراین تنها یک فاز خطی (بسته به جهت انتقال) به آن ها اضافه شده است. مقدار  $\varphi_0$  برابر با  $\frac{2\pi}{N_x}$  است، به همین دلیل سطرها حالت گردشی دارند. برای رسیدن به  $\Gamma_A$  باید ماتریس فوق در  $D_{N_x}^H$  ضرب شود، یا به عبارت دیگر از سطرهای آن عکس تبدیل فوریه گرفته شود.



شکل پ ۲. طیف فرکانسی یک سیگنال پیوسته نمونه برداری شده

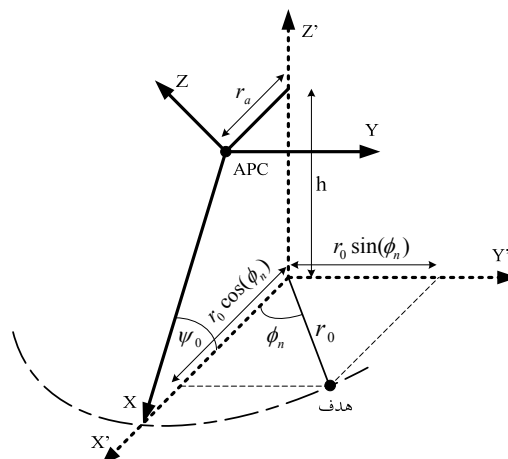
$$D_{N_p}A = \begin{bmatrix} q_0 & q_0 & q_0 & \dots & q_0 \\ q_1 & q_1 e^{-j\varphi_0} & q_1 e^{-j2\varphi_0} & \dots & q_1 e^{-j(N_x-1)\varphi_0} \\ q_2 & q_2 e^{-j2\varphi_0} & q_2 e^{-j4\varphi_0} & \dots & q_2 e^{-j2(N_x-1)\varphi_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{(N_p-1)} & q_{(N_p-1)} e^{-j(N_p-1)\varphi_0} & q_{(N_p-1)} e^{-j2(N_p-1)\varphi_0} & \dots & q_{(N_p-1)} e^{-j(N_x-1)(N_p-1)\varphi_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{(-N_p)} & q_{(-N_p)} e^{jN_p\varphi_0} & q_{(-N_p)} e^{j2N_p\varphi_0} & \dots & q_{(-N_p)} e^{j(N_x-1)N_p\varphi_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{-3} & q_{-3} e^{j3\varphi_0} & q_{-3} e^{j6\varphi_0} & \dots & q_{-3} e^{j3(N_x-1)\varphi_0} \\ q_{-2} & q_{-2} e^{j2\varphi_0} & q_{-2} e^{j4\varphi_0} & \dots & q_{-2} e^{j2(N_x-1)\varphi_0} \\ q_{-1} & q_{-1} e^{j\varphi_0} & q_{-1} e^{j2\varphi_0} & \dots & q_{-1} e^{j(N_x-1)\varphi_0} \end{bmatrix} \quad (پ ۶)$$

<sup>1</sup> Aliasing

که در آن،  $\Phi_{mn}$  و  $\Theta_{mn}$  به صورت زیر می باشد:

$$\Phi_{mn} = \arctan \left( \frac{r_0 \sin(\phi_n - \theta_m)}{r_0 \cos(\phi_n - \theta_m) \cos(\psi_0) - r_a \cos(\psi_0) + h \sin(\psi_0)} \right) \quad (پ ۴)$$

$$\Theta_{mn} = \arcsin \left( \frac{r_0 \cos(\phi_n - \theta_m) \sin(\psi_0) - r_a \sin(\psi_0) - h \cos(\psi_0)}{\sqrt{h^2 + r_0^2 + r_a^2 - 2r_0 r_a \cos(\phi_n - \theta_m)}} \right)$$



شکل پ ۱. انتقال دستگاه مختصات به محل APC

### پیوست (ب). ساختار ماتریس

در صورتی که ماتریس سنجش  $A$  با ابعاد  $N_p \times N_x$  به وسیله ماتریس DFT نرمال تجزیه شود خواهیم داشت:

$$\Gamma_A = D_{N_p} A D_{N_x}^H \quad (پ ۵)$$

که ماتریس های  $D_{N_p}$  و  $D_{N_x}$  ماتریس های DFT نرمال و  $\Gamma_A$  حاصل تجزیه  $A$  به وسیله این ماتریس ها است. براساس این رابطه برای رسیدن به  $\Gamma_A$  باید از ستون های  $A$  تبدیل فوریه (DFT) گرفته و سپس از سطرهای ماتریس حاصل تبدیل فوریه معکوس (IDFT) گرفته شود. همان طور که قبلاً گفته شد ستون های  $A$  نسخه های

صفر مرتب خواهند شد. ماتریس  $\Sigma_A$  حاصل از رابطه زیر با تقریب بسیار خوبی قطری بوده و اندازه درایه‌های قطر اصلی آن روند نزولی خواهد داشت:

$$\Sigma_A = F_{N_p} A F_{N_x}^H \quad (\text{پ-۱۰})$$

### پیوست (ج). ماتریس B و مقادیر تکین آن

ماتریس B که برای تصویرسازی با تعداد سلول سمت دلخواه مورد استفاده قرار می‌گیرد، دقیقاً مانند ماتریس سنجش A شکل می‌گیرد، با این تفاوت که تعداد اهداف برابر با  $N_t$  در نظر گرفته می‌شود؛ به عبارت دیگر ستون  $n$ ام B سیگنال دریافتی از هدف نقطه‌ای نرمال واقع در زاویه  $\frac{2\pi}{N_t}(n-1)$  در یک چرخش کامل با  $N_p$  پالس می‌باشد. با این حساب سطرهای B همان سطرهای A هستند که از  $N_x$  به  $N_t$  نمونه‌کاهی شده‌اند. با توجه به آنچه در پیوست (ب) آمد، پس از ضرب ماتریس تبدیل فوریه ویژه و تشکیل ماتریس قطری به صورت زیر:

$$\Sigma_B = F_{N_p} B F_{N_t}^H \quad (\text{پ-۱۱})$$

قطر اصلی  $\Sigma_B$  (به دلیل نمونه‌کاهی حوزه زمان) مساوی  $N_t$  نمونه اول قطر اصلی  $\Sigma_A$  خواهد بود (رابطه (۱۶)). البته به دلیل تفاوت ابعاد ماتریس‌های A و B، نسبت ضرایب  $a_i$  و  $b_i$  یک ضریب ثابت خواهد بود که این ضریب در محاسبات تأثیری ندارد.

### پیوست (د). محاسبه ماتریس کوواریانس و توان بردارهای $\dot{x}$

و  $\dot{x}$

بردار  $\dot{x}$  تبدیل فوریه ویژه بردار  $x$  است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{x} = F_{N_x} x \quad (\text{پ-۱۲})$$

بنابراین ماتریس کوواریانس آن به صورت زیر خواهد بود:

$$C_{\dot{x}} = E \{ \dot{x} \dot{x}^H \} = E \{ F_{N_x} x x^H F_{N_x}^H \} = F_{N_x} C_x F_{N_x}^H \quad (\text{پ-۱۳})$$

که  $C_x$  و  $C_{\dot{x}}$  به ترتیب ماتریس‌های کوواریانس  $x$  و  $\dot{x}$  هستند. همانطور که مشخص است با فرض  $C_x$  به صورت قطری،  $C_{\dot{x}}$  در حالت کلی غیر قطری خواهد بود و تنها در حالتی که درایه‌های قطر اصلی  $C_x$  یکسان باشند،  $C_{\dot{x}}$  نیز قطری خواهد بود. توان (واریانس) هر کدام از درایه‌های  $\dot{x}$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} E \{ |\dot{x}_i|^2 \} &= E \{ \dot{x}_i \dot{x}_i^* \} = E \{ f_i^T x x^H f_i^* \} = f_i^T C_x f_i^* \\ &= \sum_{k=1}^{N_x} |F_{N_x}(i, k)|^2 C_x(k, k) = \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_x} \sigma_{x,k}^2 = \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (\text{پ-۱۴})$$

با توجه به مساوی بودن اندازه نمونه‌های هر سطر ماتریس‌های فوق و وجود فاز خطی، عکس تبدیل فوریه سطرهای  $D_{N_p} A$  به صورت تابع ضربه منتقل شده خواهد بود:

$$\Gamma_A = D_{N_p} A D_{N_x}^H = \begin{bmatrix} q_0 \delta(n-1) + q_{(-N_p)} \delta(n+N_p-1) \\ q_1 \delta(n-2) + q_{(-N_p+1)} \delta(n+N_p-2) \\ \vdots \\ q_{(N_p-1)} \delta(n-N_p) + q_{-1} \delta(n) \end{bmatrix}, \quad n=1, \dots, N_x \quad (\text{پ-۷})$$

که  $n$  شماره ستون و  $\delta(n)$  تابع ضربه گسسته متناوب است:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = kN_x, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (\text{پ-۸})$$

بنابراین هر کدام از سطرهای  $\Gamma_A$  مجموع دو سیگنال ضربه منتقل شده هستند و به همین دلیل در قطری شدن ماتریس A به وسیله ماتریس DFT اندکی تقریب وجود دارد. با توجه به شکل (پ-۲) هر چه مقدار  $N_p$  بزرگتر انتخاب شود، اختلاف اندازه  $q_0$  و  $q_{-N_p}$  در سطر اول و نیز اختلاف دامنه ضربه‌ها در سایر سطرها بیشتر شده و عملاً در هر سطر یک سیگنال ضربه وجود خواهد داشت، اما برای تجزیه قطری A لازم است میزان انتقال سیگنال ضربه در هر سطر مساوی شماره آن سطر باشد. در سیگنال‌های فیزیکی معمولاً  $q_i$ ‌های حول فرکانس صفر اندازه بزرگتری دارند، بنابراین برای داشتن یک ماتریس قطری با قطر اصلی و روند نزولی باید اولاً  $q_i$ ها به ترتیب فرکانسی صعودی زیر هم قرار گیرد، ثانیاً میزان انتقال آن‌ها با شماره سطر تنظیم شود. بدین منظور می‌توان در ماتریس DFT نرمال، جای سطرها را به صورت زیر عوض نمود:

$$F_{m,n} = \begin{cases} \frac{D_{m+1, n}}{2}, & m \text{ is odd} \\ D_{N-\frac{m}{2}+1, n}, & m \text{ is even} \end{cases}; \quad m, n=1, \dots, N \quad (\text{پ-۹})$$

که D ماتریس DFT نرمال، F ماتریس DFT نرمال با سطرهای جابه‌جاشده و N بعد این ماتریس‌ها است. در حقیقت سطرهای F همان سطرهای D هستند که به طور یک‌درمیان یکی از بالا و یکی از پایین برداشته و زیر هم چیده شده‌اند. بدین صورت پس از ضرب F در یک بردار، در بردار حاصل، فرکانس‌ها براساس میزان نزدیکی به

که همان رابطه (۴۰) است. برای محاسبه  $C_x$  با فرض معلوم بودن  $C_x$  داریم:

$$\mathbf{x}' = F_{N_t, N_x} \mathbf{x} \Rightarrow C_{x'} = F_{N_t, N_x} C_x F_{N_t, N_x}^H \quad (پ ۲۲)$$

که  $F_{N_t, N_x}$ ، ماتریسی شامل  $N_t$  سطر اول  $F_{N_x}$  است. از طرف دیگر:

$$\mathbf{x}' = F_{N_t} \mathbf{x}' \Rightarrow C_{x'} = F_{N_t} C_x F_{N_t}^H \quad (پ ۲۳)$$

با توجه به روابط (پ ۲۲) و (پ ۲۳) خواهیم داشت:

$$F_{N_t} C_x F_{N_t}^H = F_{N_t, N_x} C_x F_{N_t, N_x}^H \Rightarrow C_{x'} = F_{N_t} F_{N_t, N_x} C_x F_{N_t, N_x}^H F_{N_t}^H \quad (پ ۲۴)$$

با دقت در ساختار ماتریس  $F_{N_t} F_{N_t, N_x}$  به راحتی می توان استنتاج نمود در صورتی که  $C_x$  قطری باشد،  $C_{x'}$  نیز قطری بوده و قطر اصلی آن نسخه نمونه گاهی شده قطر اصلی  $C_x$  خواهد بود.

که در آن  $f_i^T$  سطر  $i$  ام ماتریس  $F_{N_x}$ ،  $f_i^*$  ترانهاده<sup>۱</sup> و مزدوج مختلط<sup>۲</sup> آن،  $C_x(k, k)$  درایه  $k$  ام قطر اصلی  $C_x$  (برابر با  $\sigma_{x, k}^2$ )، و  $F_{N_x}(i, k)$  درایه  $i, k$  ماتریس  $F_{N_x}$  است. بدین ترتیب در حالت کلی مؤلفه های  $\mathbf{x}$  وابسته اما با واریانس یکسان خواهند بود. در مورد نویز داریم:

$$C_w = E \{ \mathbf{w} \mathbf{w}^H \} = E \{ F_{N_p} \mathbf{w} \mathbf{w}^H F_{N_p}^H \} \\ = F_{N_p} C_w F_{N_p}^H = F_{N_p} \sigma_w^2 \mathbf{I} F_{N_p}^H = \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad (پ-۱۵)$$

که  $C_w$  و  $C_w$  ماتریس های کوواریانس  $\mathbf{w}$  و  $\mathbf{W}$  می باشند. از آن جا که درایه های  $\mathbf{W}$  به صورت ناوابسته و با واریانس  $\sigma_w^2$  فرض شده اند، بنابراین درایه های  $\mathbf{w}$  نیز ناوابسته و با همان واریانس خواهند بود.

### پیوست (ه). تخمین MMSE تصویر

با توجه به رابطه (۹) داریم:

$$\mathbf{y}' = \Sigma \mathbf{x}' + \mathbf{w}' \quad (پ-۱۶)$$

که  $\mathbf{y}'$ ،  $\mathbf{x}'$  و  $\mathbf{w}'$  به ترتیب  $N_t$  نمونه اول  $\mathbf{y}$ ،  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{w}$  هستند و  $\Sigma$ ،  $N_t$  ستون اول  $\Sigma_B$  است. با توجه به رابطه فوق تخمین MMSE خطی<sup>۳</sup> (LMMSE) از  $\mathbf{x}'$  به صورت زیر خواهد بود [۴۵]:

$$\hat{\mathbf{x}} = C_{x'} \Sigma^H (\Sigma C_{x'} \Sigma^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}' \quad (پ-۱۷)$$

که  $\hat{\mathbf{x}}$  تخمین LMMSE از  $\mathbf{x}'$ ،  $C_{x'}$  ماتریس کوواریانس  $\mathbf{x}'$  و  $\sigma_w^2 \mathbf{I}$  ماتریس کوواریانس  $\mathbf{w}'$  است. این رابطه را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{\mathbf{x}} = C_{x'} \Sigma^H (F_{N_t} F_{N_t}^H) (\Sigma C_{x'} \Sigma^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} (F_{N_t} \mathbf{y}') \quad (پ-۱۸)$$

که  $\mathbf{y}'$  عکس تبدیل فوریه ویژه  $\mathbf{y}$  است. طبق رابطه (پ ۱۳) می توان  $C_{x'}$  را با  $F_{N_t} C_x F_{N_t}^H$  جایگزین نمود، بنابراین:

$$\hat{\mathbf{x}} = F_{N_t} C_x F_{N_t}^H \Sigma^H F_{N_t} F_{N_t}^H (\Sigma F_{N_t} C_x F_{N_t}^H \Sigma^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} F_{N_t} \mathbf{y}' \quad (پ-۱۹)$$

حال خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{x}} = F_{N_t}^H \hat{\mathbf{x}} \\ = F_{N_t}^H F_{N_t} C_x F_{N_t}^H \Sigma^H F_{N_t} F_{N_t}^H (\Sigma F_{N_t} C_x F_{N_t}^H \Sigma^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} F_{N_t} \mathbf{y}' \\ = C_x F_{N_t}^H \Sigma^H F_{N_t} (F_{N_t}^H \Sigma F_{N_t} C_x F_{N_t}^H \Sigma^H + \sigma_w^2 F_{N_t}^H \mathbf{I} F_{N_t})^{-1} \mathbf{y}' \quad (پ-۲۰)$$

لازم به ذکر است در محاسبات بالا از رابطه  $(XYZ)^{-1} = Z^{-1} Y^{-1} X^{-1}$  و نیز  $F_{N_t}^{-1} = F_{N_t}^H$  استفاده شده است. با تعریف ماتریس  $\mathbf{D}$  به صورت  $\mathbf{D} = F_{N_t}^H \Sigma F_{N_t}$  خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{x}} = C_x \mathbf{D}^H (\mathbf{D} C_x \mathbf{D}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}' \quad (پ ۲۱)$$

<sup>1</sup> Transpose

<sup>2</sup> Complex Conjugate

<sup>3</sup> Linear Minimum Mean Square Error