

## تخمین زاویه ورود با استفاده از حسگری فشرده مبتنی بر ماتریس اندازه گیری DFT

یعثوب اقبالی<sup>۱</sup>، احمد عطایی<sup>۲</sup>، محمود نائینی فردوسی زاده<sup>۳\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲- کارشناسی ارشد، ۳- استادیار، دانشگاه شاهد

(دریافت: ۹۷/۱۱/۱۱؛ پذیرش: ۹۷/۰۲/۲۷)

## چکیده

در این مقاله، یک روش جدید برای تخمین زاویه ورود با استفاده از ساختار آرایه خطی غیریکنواخت و مدل سازی ماتریس اندازه گیری به صورت ماتریس DFT ارائه شده است. به منظور تخمین دقیق زاویه ورود با روش حسگری فشرده، فضای زاویه ای پیوسته باید با گام های کوچک تقسیم بندی شود. تقسیم بندی فضای زاویه ای پیوسته با گام های کوچک، منجر به افزایش هم دوسی بین ستون های ماتریس اندازه گیری شده و تخمین زاویه ورود امکان پذیر نخواهد بود. برای حل مشکل بیان شده، در این مقاله یک روش جدید برای مدل سازی ماتریس اندازه گیری به صورت ماتریس DFT پیشنهاد می شود. برای افزایش دقت تخمین، لازم است که ابعاد ماتریس DFT یا به عبارتی دیگر تعداد آنتن های آرایه زیاد باشد. بالا بودن تعداد آنتن های آرایه موجب پیچیده شدن سیستم می شود. یک راه کار برای کاهش تعداد آنتن های آرایه، استفاده از آرایه خطی غیریکنواخت و تشکیل یک آرایه خطی یکنواخت به صورت مجازی است. آرایه مجازی خطی یکنواخت، با برداری کردن ماتریس همستگي سیگنال های دریافتی یک آرایه خطی غیریکنواخت به دست می آید. بالا بودن تعداد آنتن های آرایه مجازی منجر به افزایش ابعاد ماتریس DFT خواهد شد، بنابراین، تخمین زاویه های ورود منابع با دقت بالاتری صورت خواهد گرفت. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که تخمین زاویه ورود با استفاده از مدل سازی ماتریس اندازه گیری با ماتریس DFT عملکرد مناسبی دارد.

## واژگان کلیدی

تخمین زاویه ورود، حسگری فشرده، ماتریس DFT، آرایه خطی یکنواخت مجازی

## ۱- مقدمه

شکل دهی پرتو بر پایه محاسبه توان در زاویه های مختلف بنا نهاده شده اند و از یک بردار وزن برای تخمین زاویه ورود استفاده می کنند. این روش ها برای رسیدن به دقت بالا به یک آرایه با تعداد آنتن بسیار زیاد نیاز دارند [۱۷]. روش بیشینه شبیه نمایی، روش بهینه ای است که حتی در سیگنال به نویز پایین نیز دقت بالایی دارد. مشکل اصلی این روش حجم محاسباتی بسیار بالای آن به دلیل جستجوی چند بعدی برای یافتن زاویه های ورود است. به همین دلیل، در عمل روش بیشینه شبیه نمایی مورد استفاده قرار نمی گیرد.

در سال های اخیر، تخمین زاویه ورود با استفاده از حسگری فشرده، به دلیل کارایی مناسب، بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۲۱-۱۸]. در مقایسه با روش های سنتی، تخمین زاویه ورود با استفاده از بازایی تنک سیگنال، مزایایی از قبیل نیاز به تعداد مشاهده های کمتر، حساسیت پایین تر به مقدار نسبت توان سیگنال به توان نویز (SNR) و قابلیت تخمین زاویه ورود منابع هم دوس را دارد [۲۲].

تخمین زاویه ورود سیگنال، یک مسئله بسیار مهم در پردازش سیگنال آرایه ای به حساب می آید که در دهه های گذشته به دلیل کاربردهای گسترده آن در حوزه های مختلف از قبیل مخابرات بی سیم، مکان یابی منابع، سونار، جنگ الکترونیک راداری و مخابراتی توجه بسیار زیادی را از سوی محققین به خود جلب کرده است [۳-۱]. روش های سنتی برای تخمین زاویه ورود سیگنال به یک آرایه، عبارتند از روش های مبتنی بر زیر فضا [۴-۸]، روش های مبتنی بر جهت دهی پرتو [۹-۱۱] و تخمین گر بیشینه شبیه نمایی [۱-۵-۱۲].

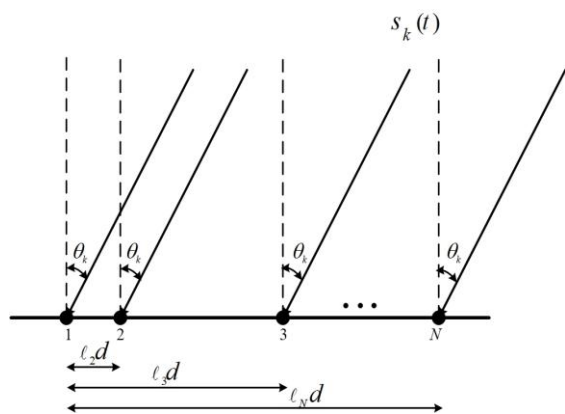
در روش های مبتنی بر زیرفضا، برای تخمین زاویه ورود از اصل تعامد زیر فضای سیگنال بر زیر فضای نویز استفاده می شود. این دسته از روش ها برای رسیدن به دقت تخمین مناسب، به تعداد مشاهده های زیاد از سیگنال دریافتی نیاز دارند. همچنین این روش ها قابلیت تخمین زاویه ورود در حالتی که منابع با یکدیگر هم دوس باشند، را ندارند [۱۶]. روش های مبتنی بر

شیفت یافته ارائه می‌دهیم. بخش ۶ به ارائه نتایج شبیه‌سازی می‌پردازد. در نهایت در بخش ۷، نتیجه‌گیری از کار انجام شده ارائه می‌شود.

نشانه‌ها: در سراسر مقاله، اسکالرها، بردارها و ماتریس‌ها به ترتیب با حروف نرمال، حروف برجسته کوچک و حروف برجسته بزرگ نمایش داده می‌شوند.  $C$  بیانگر مجموعه اعداد مختلط است.  $\text{diag}(\mathbf{b})$  یک ماتریس قطری را نشان می‌دهد که درایه‌های روی قطر اصلی آن اعضای بردار  $\mathbf{b}$  هستند. علامت‌های  $\|\mathbf{b}\|_0$ ،  $\|\mathbf{b}\|_1$  و  $\|\mathbf{b}\|_2$  به ترتیب نرم صفر، نرم یک و نرم دو بردار  $\mathbf{b}$  را مشخص می‌کنند.  $\mathbf{I}_N$  برای نمایش ماتریس یکه با ابعاد  $N \times N$  استفاده می‌شود و علامت  $\otimes$  ضرب کرونکر (Kronecker) دو بردار یا دو ماتریس را نشان می‌دهد. همچنین علامت‌های  $(\cdot)^T$ ،  $(\cdot)^*$  و  $(\cdot)^H$  به ترتیب ترانپوز، مزدوج و ترانپوز مزدوج یک بردار یا ماتریس را نمایش می‌دهند.

## ۲- مدل سیستم

مطابق شکل (۱)، یک آرایه خطی شامل  $N$  آنتن همه جهتی یکسان در نظر گرفته می‌شود. مکان قرارگیری آنتن‌ها در آرایه با مجموعه  $\mathbf{d} = \{l_1, l_2, \dots, l_N\}$  نشان داده می‌شود که  $l_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) مجموعه‌ای از اعداد صحیح بوده و  $\mathbf{d}$  واحد فاصله بین آنتن‌ها را نشان می‌دهد. مکان قرارگیری آنتن اول به عنوان مرجع تاخیر زمانی در نظر گرفته می‌شود ( $l_1 = 0$ ). فرض بر این است که  $K$  سیگنال باند باریک میدان دور از زاویه‌های  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T$  و بردار توان  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_K]^T$  به این آرایه تابیده می‌شوند. بردار سیگنال دریافتی توسط آنتن‌های آرایه در لحظه زمانی  $t$ ، طبق رابطه (۱) مدل می‌شود [۱]:



شکل (۱): آرایه خطی با  $N$  آنتن.

کل فضای زاویه‌ای پیوسته به یک مجموعه با زاویه‌های گسسته تقسیم‌بندی می‌شوند [۲۳]. سپس اندازه سیگنال در هر یک از زاویه‌ها، توسط روش‌های حسگری فشرده تخمین زده می‌شود. مکان درایه‌های غیر صفر در بردار اندازه سیگنال تخمین زده شده، زاویه‌های ورود منابع را مشخص می‌سازد. مهم‌ترین مسئله در تخمین زاویه ورود با حسگری فشرده، نحوه تقسیم فضای زاویه‌ای پیوسته به یک مجموعه گسسته است. برای رسیدن به تخمین دقیق، نیاز است که فضای زاویه‌ای پیوسته با گام‌های بسیار کوچک تقسیم‌بندی شود. تقسیم فضای زاویه‌ای پیوسته به یک مجموعه گسسته با گام‌های کوچک، امکان بازیابی دقیق بردار تنک را کاهش می‌دهد. زیرا در این شرایط، وابستگی ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری افزایش می‌یابد [۲۴]. این موضوع بر روی کارایی روش‌های بازیابی سیگنال‌های تنک به شدت تاثیر گذار است [۲۵].

در این مقاله، یک روش جدید برای تخمین زاویه ورود با استفاده از نمایش تنک سیگنال ارائه می‌شود. ابتدا با در نظر گرفتن آرایه با ساختار خطی یکنواخت، ماتریس اندازه‌گیری به صورت یک ماتریس DFT مدل می‌شود. در این حالت برای رسیدن به تخمین دقیق، باید تعداد آنتن‌های آرایه، بسیار زیاد انتخاب شود. انتخاب آرایه با تعداد آنتن زیاد، منجر به افزایش پیچیدگی سخت‌افزاری، پردازشی و همچنین افزایش هزینه پیاده‌سازی خواهد شد. برای رفع این مشکل، استفاده از آرایه خطی غیر یکنواخت و تشکیل آرایه خطی یکنواخت مجازی را پیشنهاد می‌دهیم. با برداری کردن ماتریس همبستگی مشاهده‌های یک آرایه خطی غیر یکنواخت، می‌توان به صورت مجازی به یک آرایه خطی یکنواخت با تعداد آنتن بسیار زیاد دست یافت. پس از تشکیل آرایه خطی یکنواخت به صورت مجازی، ماتریس اندازه‌گیری را با یک ماتریس DFT شیفت یافته مدل خواهیم کرد. میزان همدوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس DFT صفر است. بنابراین، با روش پیشنهاد شده، بازیابی دقیق بردار تنک امکان پذیر خواهد شد.

ساختار مقاله پیش‌رو به این صورت سازماندهی شده است. در بخش ۲، مدل سیستم برای تخمین زاویه ورود ارائه خواهد شد. در بخش ۳، تخمین زاویه ورود با حسگری فشرده بررسی می‌شود. در بخش ۴، طرحی برای مدل‌سازی ماتریس اندازه‌گیری به صورت یک ماتریس DFT به منظور تخمین زاویه ورود ارائه می‌شود. در بخش ۵، به تخمین زاویه ورود با استفاده از ساختار آرایه خطی یکنواخت به صورت مجازی پرداخته و راه‌کاری برای مدل‌کردن ماتریس اندازه‌گیری آرایه مجازی با ماتریس DFT

زاویه،  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  دارای طول  $L$  بوده که فقط مقدار  $K$  درایه آن غیر صفر است. درایه  $m$  ام از بردار  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{s}_m(t) = \begin{cases} s_k(t) & \text{if } \vartheta_m = \theta_k \\ 0 & \text{if } \vartheta_m \neq \theta_k \end{cases} \quad (4)$$

با توجه به مطالب بیان شده می‌توان مدل سیگنال دریافتی در رابطه (۱) را به صورت یک مسئله با ساختار حسگری فشرده به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (5)$$

برای تخمین بردار تنک  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$ ، مسئله کمینه‌سازی نرم صفر زیر پیشنهاد شده است [۲۴]:

$$(P_0) \min \|\tilde{\mathbf{s}}(t)\|_0 \quad \text{s.t.} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}}(t)\|_2 \leq \beta \quad (6)$$

در رابطه (۶)،  $\beta \geq \|\mathbf{n}(t)\|_2$  یک کران بالا از واریانس نویز است [۲۴]. کمینه‌سازی نرم صفر یک مسئله NP-hard است. به این معنی که تاکنون هیچ الگوریتمی با پیچیدگی چند جمله‌ای برای حل آن پیشنهاد نشده است. تنها روش حل این مسئله، جستجو در بین تمام حالت‌های ممکن برای یافتن جواب است که به دلیل بزرگ بودن بُعد  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  امکان‌پذیر نیست. بنابراین، از کمینه‌سازی نرم یک که نزدیک‌ترین تقریب محدب به نرم صفر است، برای محاسبه بردار تنک  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  استفاده می‌شود [۲۴].

$$(P_1) \min \|\tilde{\mathbf{s}}(t)\|_1 \quad \text{s.t.} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}}(t)\|_2 \leq \beta \quad (7)$$

مشکل اصلی در به دست آوردن جواب دقیق مسئله  $(P_1)$ ، تشکیل ماتریس اندازه‌گیری  $\tilde{\mathbf{A}}$  به نحوی است که حل مسئله امکان‌پذیر باشد. جواب مسئله  $(P_1)$  زمانی دقیق خواهد بود که ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  شرایط خاصی را ارضا کند. ساده‌ترین شرط برای بازیابی بردار تنک  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  برقراری خاصیت همدوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری  $\tilde{\mathbf{A}}$  است. پارامتر همدوسی متقابل برای ماتریس اندازه‌گیری  $\tilde{\mathbf{A}}$  به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود [۲۷]:

$$\mu = \max_{i \neq j} \frac{|\langle \mathbf{a}(\vartheta_i), \mathbf{a}(\vartheta_j) \rangle|}{\|\mathbf{a}(\vartheta_i)\|_2 \|\mathbf{a}(\vartheta_j)\|_2} \quad (8)$$

در واقع،  $\mu$  میزان بیشترین شباهت بین دو ستون ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  را نشان می‌دهد و هر چه به یک نزدیکتر باشد، به آن معناست که حداقل دو ستون از ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  با شباهت زیاد وجود دارند. در [۲۷]، شرط تحقق‌پذیر برای پارامتر  $\mu$  که بازیابی بردار تنک  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  از مرتبه  $K$  را امکان‌پذیر می‌سازد، به صورت زیر بیان

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \in \mathbb{C}^{N \times K}$  ماتریس هادی آرایه،  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)] \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  بردار سیگنال منابع و  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)] \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  بردار نویز اندازه‌گیری در آنتن‌های آرایه را نشان می‌دهد. ستون  $k$  ام از ماتریس هادی که بردار هادی منبع  $k$  ام نامیده می‌شود، طبق رابطه (۲) تعریف می‌شود [۲۶].

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \left[ 1, e^{j \frac{2\pi \ell d}{\lambda} \sin(\theta_k)}, \dots, e^{j \frac{2\pi \ell N d}{\lambda} \sin(\theta_k)} \right]^T \quad (2)$$

در رابطه (۲)،  $\lambda$  طول موج سیگنال‌های ارسالی را نشان می‌دهد. بردار هادی تابعی از زاویه ورود منابع و مکان قرارگیری آنتن‌ها است. بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض می‌شود که واحد فاصله بین آنتن‌ها برابر نصف طول موج  $d = \frac{\lambda}{2}$  باشد.

نویز آنتن‌های مختلف دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس یکسان  $\sigma^2$  در نظر گرفته می‌شوند. فرض بر این است که نویز آنتن‌های مختلف آرایه از یکدیگر مستقل هستند. همچنین نویز هر آنتن، یک فرآیند تصادفی گوسی سفید است (لحظه‌های مختلف نویز از همدیگر استقلال دارند).

### ۳- تخمین زاویه ورود با حسگری فشرده

به دلیل محدود بودن تعداد منابع، سیگنال‌های دریافت‌شده توسط آنتن‌های مختلف آرایه در حوزه زاویه، تنک هستند. بنابراین، می‌توان تخمین زاویه ورود را به صورت مسئله حسگری فشرده مدل‌سازی نمود. برای رسیدن به این هدف، ابتدا فضای زاویه‌ای پیوسته در محدوده  $[-90, 90]$  درجه به یک مجموعه گسسته با  $L (L \gg K)$  قسمت، تقسیم‌بندی می‌شود. زاویه‌های گسسته که به تقاطع شبکه (grid points) معروفند را در بردار  $\boldsymbol{\Theta} = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_L\}$  نشان می‌دهیم [۲۳]. سپس یک ماتریس اندازه‌گیری  $(\tilde{\mathbf{A}})$  با ابعاد  $N \times L$  به نحوی تشکیل می‌شود که ستون‌های آن شامل  $L$  بردار هادی نظیر هر یک از زاویه‌های متعلق به مجموعه  $\boldsymbol{\Theta}$  باشد.

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}(\vartheta_1), \mathbf{a}(\vartheta_2), \dots, \mathbf{a}(\vartheta_L)] \quad (3)$$

اگر از هر یک از زاویه‌های متعلق به  $\boldsymbol{\Theta}$ ، سیگنالی توسط آنتن‌های آرایه دریافت شود، در آن زاویه، دامنه سیگنال دارای مقدار بوده و چنانچه سیگنالی دریافت نشود، دامنه سیگنال در آن زاویه صفر خواهد بود. بنابراین، بردار سیگنال منابع در حوزه

ماتریس اندازه‌گیری به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{m,n} = e^{\frac{j2\pi(m-1)(n-1)}{L}}, m, n=1, 2, \dots, L \quad (12)$$

بنابراین، می‌توان ماتریس اندازه‌گیری  $\tilde{\mathbf{A}}$  را به صورت رابطه (۱۳) نمایش داد:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{j2\pi}{L}} & \dots & e^{\frac{j2\pi(L-1)}{L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{j2\pi(L-1)}{L}} & \dots & e^{\frac{j2\pi(L-1)(L-1)}{L}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

با تعریف فوق، ماتریس اندازه‌گیری  $\tilde{\mathbf{A}}$  را با یک ماتریس DFT مدل کردیم. همانطور که بیان شد، ماتریس DFT ماتریسی است که به دلیل عمود بودن ستون‌های آن بر یکدیگر، میزان هم‌دوسی بین ستون‌های متقابل آن صفر است. بنابراین، در این حالت بازبازی مطمئن بردار تنک امکان‌پذیر خواهد بود. نقاط گسسته زاویه در این حالت عبارتند از  $\theta_n = \sin^{-1}\left(\frac{2(n-1)}{N}\right)$ . به سادگی دیده می‌شود که این عبارت بدان معناست که به جای گسسته‌کردن زاویه‌های بین  $90^\circ$  و  $-90^\circ$  درجه به صورت یکنواخت، در اینجا به صورت غیر یکنواخت فضای زاویه‌ای گسسته می‌شود.

برای مدل کردن ماتریس اندازه‌گیری به صورت یک ماتریس DFT، تعداد آنتن‌های آرایه با تعداد اعضای فضای زاویه‌ای گسسته شده  $N=L$  یکسان در نظر گرفته شد. برای داشتن تخمین دقیق، باید فاصله بین هر دو عضو کناری در فضای زاویه‌ای گسسته بسیار کوچک باشد، بنابراین، لازم است که  $L$  عدد بسیار بزرگی انتخاب شود. به عبارت دیگر برای تخمین دقیق زاویه ورود، نیاز به یک آرایه با تعداد آنتن بسیار زیاد است. افزایش تعداد آنتن‌های آرایه، منجر به افزایش پیچیدگی سخت‌افزاری، پردازشی و بالا رفتن هزینه در پیاده‌سازی می‌گردد که در کاربردهای عملی مناسب نیست. در بخش بعد، به ارائه راه‌کاری خواهیم پرداخت که مشکل نیاز به تعداد آنتن زیاد را برطرف می‌سازد.

#### ۵- تخمین زاویه ورود با آرایه مجازی

با توجه به استقلال سیگنال و نویز، ماتریس همبستگی بردار سیگنال دریافتی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2\mathbf{I}_N \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)،  $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\}$  ماتریس همبستگی

شده است:

$$\mu < \frac{1}{2K-1} \quad (9)$$

زاویه ورود منابع، هر عدد حقیقی در محدوده  $[-90^\circ, 90^\circ]$  درجه است. بنابراین، برای اطمینان از دقیق بودن تخمین، لازم است که تقسیم فضای زاویه‌ای پیوسته به مجموعه گسسته با گام‌های بسیار کوچک صورت گیرد. از طرفی با انتخاب گام کوچک، همبستگی بین ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  افزایش یافته و بازیابی بردار تنک با استفاده از کمینه‌سازی نرم یک امکان‌پذیر نخواهد بود.

#### ۴- تبدیل ماتریس نمونه‌برداری به ماتریس DFT

در این بخش، برای حل مشکل بالا بودن میزان هم‌دوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری، راهکار جدیدی ارائه می‌دهیم. همانطور که اشاره شد، تقسیم فضای زاویه‌ای پیوسته به یک مجموعه گسسته به نحوی که خاصیت هم‌دوسی متقابل در بین ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری برقرار باشد، بسیار پر اهمیت است. در این بخش با استفاده از ماتریس DFT راه‌کاری برای حل این مشکل ارائه خواهیم داد [۲۸]. درایه  $(m, n)$  ام از ماتریس DFT با اندازه  $L \times L$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F}_{m,n} = e^{\frac{j2\pi}{L}(m-1)(n-1)}, m, n=1, 2, \dots, L \quad (10)$$

ماتریس DFT ماتریسی است که ستون‌های آن بر هم عموده بوده، بنابراین، میزان هم‌دوسی متقابل بین ستون‌های آن برابر صفر است. اگر بتوان به نحوی ماتریس اندازه‌گیری در تخمین زاویه را به صورت ماتریس DFT مدل‌سازی نمود، آنگاه بازیابی بردار تنک  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  و تخمین زاویه ورود با دقت بسیار مناسبی امکان‌پذیر خواهد شد.

با فرض اینکه آرایه دارای ساختار خطی یکنواخت با  $2\ell_N + 1$  آنتن باشد که آنتن‌ها در مکان‌های  $-\ell_N d, \dots, 0, \dots, \ell_N d$  قرار گرفته‌اند، با تقسیم فضای زاویه‌ای به  $L = 2\ell_N + 1$  قسمت، درایه  $(m, n)$  ام از ماتریس اندازه‌گیری عبارت است از:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{m,n} = e^{j\pi(m-1-\ell_N)\sin(\theta_n)}, m, n=1, 2, \dots, L \quad (11)$$

با توجه به اینکه  $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$  است، به جای گسسته‌کردن فضای زاویه‌ای پیوسته، می‌توان  $\sin(\theta)$  را که عددی بین  $-1$  و  $1$  است، گسسته نمود. با تقسیم‌بندی  $\sin(\theta)$  به صورت  $\sin(\theta_n) = 2\frac{n-\ell_N}{L}, n=0, 2, \dots, L-1$  ام از

(۱۹)

یک ماتریس با اندازه  $N^2 \times K$  و  $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_N^T]^T$  برداری شده ماتریس یکه با ابعاد  $N \times N$  است. تمام درایه‌های بردار  $\mathbf{e}_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) صفر هستند، به جز درایه  $n$  ام که مقدار آن یک است [۲۹].

بردار  $\mathbf{r}$ ، معادل بردار مشاهده یک آرایه خطی با  $N^2$  آنتن مجازی است. مکان قرارگیری آنتن‌های مجازی با مجموعه  $\mathbb{P} = \{(\ell_n - \ell_m)d, m, n = 1, 2, \dots, N\}$  مشخص می‌گردند. مجموعه مکان‌های  $\mathbb{P}$  شامل  $N^2$  عضو است که برخی از اعضای آن تکراری هستند (زوج‌های مختلف از  $(\ell_n, \ell_m)$  ممکن است منجر به  $\ell_n - \ell_m$  یکسان شود). با در نظر گرفتن مکان‌های مجزا از  $\mathbb{P}$ ، به صورت مجازی یک آرایه خطی یکنواخت با بردار مشاهده زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{J}\mathbf{r} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{p} + \sigma^2 \tilde{\mathbf{e}} \quad (20)$$

در رابطه (۲۰)،  $\mathbf{J}$  ماتریسی با ابعاد  $(2\ell_N + 1) \times N^2$  است که مقدار هر یک از درایه‌های آن صفر یا یک است [۳۰]. ماتریس  $\mathbf{J}$  درایه‌های نظیر مکان‌های تکراری را از بردار  $\mathbf{r}$  حذف می‌کند. همچنین  $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = [\boldsymbol{\varphi}(\theta_1), \boldsymbol{\varphi}(\theta_2), \dots, \boldsymbol{\varphi}(\theta_K)]$  معادل ماتریس هادی یک آرایه خطی یکنواخت با  $(2\ell_N + 1)$  آنتن است که آنتن‌های آن به صورت متوالی با فاصله  $d = \frac{\lambda}{2}$  در مکان‌های  $-\ell_N d$  تا  $\ell_N d$  قرار گرفته‌اند و برداری با طول  $(2\ell_N + 1)$  است. تمام درایه‌های بردار  $\tilde{\mathbf{e}}$  صفر هستند به جز درایه شماره  $(\ell_N + 1)$  ام که مقدار آن یک است. به عنوان مثال برای آرایه‌ای شامل ۳ آنتن با مجموعه مکان  $D = [0, 1, 3]d$ ، مجموعه مکان آنتن‌ها در آرایه مجازی که از تفاسل دو به دو اعضای مجموعه  $D$  به دست می‌آید،  $\{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 3)\}$  شامل  $3^2 = 9$  عضو  $\mathbb{P} = \{0, -1, -3, 1, 0, -2, 3, 2, 0\}$  است. مشاهده می‌شود که در مجموعه  $\mathbb{P}$ ، عضو  $\{0\}$  سه بار تکرار شده است.

ستون  $k$  ام از ماتریس هادی آرایه مجازی  $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\theta})$  به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\varphi}(\theta_k) = \left[ e^{-j\pi\ell_N \sin(\theta_k)}, e^{-j\pi(\ell_N - 1)\sin(\theta_k)}, \dots, 1, \dots, e^{j\pi(\ell_N - 1)\sin(\theta_k)}, e^{j\pi\ell_N \sin(\theta_k)} \right]^T \quad (21)$$

از آنجا که توان سیگنال‌های ورودی به آرایه در حوزه زاویه تنک است، می‌توان زاویه ورود را به صورت یک مسئله حسگری

بردار منابع و  $\sigma^2$  توان نویز را نشان می‌دهد. سیگنال ارسالی منابع مختلف با یکدیگر ناهمبسته در نظر گرفته می‌شوند، بنابراین، می‌توان ماتریس همبستگی بردار منابع را به صورت رابطه (۱۵) نمایش داد:

$$\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\} = \text{diag}(\mathbf{p}) = \text{diag}\left([p_1, p_2, \dots, p_K]^T\right) \quad (15)$$

با توجه به قطری بودن ماتریس همبستگی منابع، ماتریس همبستگی بردار سیگنال دریافتی به صورت رابطه (۱۶) قابل بازنویسی است:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (16)$$

در عمل، امکان محاسبه دقیق ماتریس همبستگی بردار سیگنال دریافتی وجود ندارد. با فرض ارگادیک بودن سیگنال‌های ارسالی منابع، ماتریس همبستگی را می‌توان با استفاده از  $\mathbf{M}$  مشاهده زمانی مختلف از بردار سیگنال دریافتی آرایه، طبق رابطه (۱۷) تقریب زد [۲۶]:

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)،  $M$  تعداد مشاهده‌های زمانی از بردار سیگنال دریافتی را نشان می‌دهد. ماتریس  $\hat{\mathbf{R}}_x$  تخمین بیشینه شبیه‌نمایی از ماتریس  $\mathbf{R}_x$  است [۲۶]. چنانچه تعداد مشاهده‌های زمانی به بی‌نهایت میل کند، آنگاه  $\hat{\mathbf{R}}_x$  به مقدار  $\mathbf{R}_x$  میل خواهد کرد.

معمولاً روش‌های تخمین زاویه ورود با استفاده از یک آرایه شامل  $N$  آنتن، قادر به تخمین زاویه ورود حداکثر  $N-1$  منبع هستند. یک راه‌کار برای تخمین تعداد منابع بیشتر از تعداد آنتن‌های آرایه، استفاده از آرایه‌های خطی غیر یکنواخت و تشکیل آرایه خطی یکنواخت به صورت مجازی است. آرایه‌های خطی یکنواخت مجازی با برداری کردن ماتریس همبستگی مشاهده‌های دریافتی توسط یک آرایه خطی غیر یکنواخت به دست می‌آیند [۲۹]:

$$\mathbf{r} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_x) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{p} + \sigma^2 \mathbf{e} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)،  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$  مطابق رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \mathbf{a}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}^*(\theta_2) \otimes \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}(\theta_K) \right]$$

می‌توان با استفاده از کمینه‌سازی نرم یک، بردار تنک  $\tilde{\mathbf{p}}$  را بازیابی کرد.

$$(P_1) \min \|\tilde{\mathbf{p}}\|_1 \quad \text{s.t.} \|\mathbf{r}_1 - \tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{p}}\|_2 \leq \gamma \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)،  $\gamma$  آستانه خطای ناشی از تخمین ماتریس همبستگی را نشان می‌دهد.

با راه‌کار ارائه‌شده، علاوه بر عدم نیاز به تعداد آنتن‌های بالا، شرط همدوسی را نیز برقرار کردیم. بنابراین، بازیابی دقیق بردار تنک امکان‌پذیر خواهد بود.

### ۶- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، سه دسته شبیه‌سازی متفاوت به‌منظور ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی برای تخمین زاویه ورود، ارائه می‌شود. ریشه متوسط مربع خطا (RMSE) معمولاً به‌عنوان معیار ارزیابی عملکرد دقت، در روش‌های جهت‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به‌صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌شود:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{MC}} \times K} \sum_{k=1}^K \sum_{e=1}^{N_{\text{MC}}} (\theta_k - \hat{\theta}_{k,e})^2} \quad (29)$$

در رابطه (۲۹)،  $\hat{\theta}_{k,e}$  تخمین  $\theta_k$  در  $e$  امین تکرار از شبیه‌سازی مونت کارلو است. در تمام شبیه‌سازی‌ها، تعداد تکرارهای آزمایش مونت کارلو برابر  $N_{\text{MC}} = 2000$  در نظر گرفته شده است.

به منظور مقایسه عملکرد روش‌ها با یکدیگر، از یک آرایه خطی غیریکنواخت استفاده کرده و با برداری کردن ماتریس همبستگی آن، یک آرایه خطی یکنواخت به‌صورت مجازی تشکیل می‌شود. ساختار آرایه، به‌صورت حداقل افزونگی شامل ۱۲ آنتن در نظر گرفته می‌شود که در [۳۱] معرفی شده است. آرایه با ساختار حداقل افزونگی، یک آرایه خطی غیر یکنواخت است. مکان قرارگیری آنتن‌ها در آرایه با ساختار حداقل افزونگی به نحوی است که با برداری کردن ماتریس همبستگی آن، به‌صورت مجازی یک آرایه خطی یکنواخت با حداقل افزونگی به‌دست می‌آید. مجموعه مکان‌های قرارگیری آنتن‌ها در آرایه،

به‌صورت  $D = \{0, 1, 4, 6, 13, 14, 17, 19, 39, 40, 43, 45\} \frac{\lambda}{2}$

نظر گرفته شده است [۳۱]. با برداری کردن ماتریس همبستگی آرایه، بردار جدیدی که معادل مشاهده‌های یک آرایه خطی مجازی یکنواخت با ۹۱ آنتن است، تشکیل می‌شود. مکان قرارگیری آنتن‌ها در آرایه مجازی به ترتیب از  $-45 \frac{\lambda}{2}$  الی

$$45 \frac{\lambda}{2} \text{ با فاصله } \frac{\lambda}{2} \text{ هستند.}$$

فشرده مدل‌سازی نمود. همچنان در این حالت نیز برای تخمین دقیق زاویه ورود، مشکل همدوسی متقابل برقرار است. در ادامه راه‌کاری برای حل مشکل همدوسی متقابل پیشنهاد می‌دهیم.

درایه  $(m, n)$  ام از ماتریس DFT شیفت‌یافته با اندازه‌ی  $L = 2\ell_N + 1$  به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F}_{m,n} = e^{\frac{2j\pi}{L}(m-1-\ell_N)(n-1-\ell_N)} \quad m, n = 1, 2, \dots, L \quad (22)$$

با تقسیم فضای زاویه‌ای پیوسته به  $L = 2\ell_N + 1$  قسمت، درایه  $(m, n)$  ام از ماتریس اندازه‌گیری آرایه مجازی را می‌توان طبق رابطه زیر نمایش داد:

$$\tilde{\Phi}_{m,n} = e^{j\pi(m-1-\ell_N)\sin(\theta_n)}, \quad m, n = 1, 2, \dots, L \quad (23)$$

با قرار دادن  $\sin(\theta_n) = 2 \frac{n-1-\ell_N}{L}$ ,  $n = 1, 2, \dots, L$  در

رابطه (۲۳)، درایه  $(m, n)$  ام از ماتریس اندازه‌گیری به‌صورت رابطه (۲۴) قابل بازنویسی است:

$$\tilde{\Phi}_{m,n} = e^{2j\pi \frac{(m-1-\ell_N)(n-1-\ell_N)}{L}}, \quad m, n = 1, 2, \dots, L \quad (24)$$

با محاسبه درایه‌های مختلف ماتریس  $\tilde{\Phi}$ ، رابطه (۲۵) به‌دست خواهد آمد:

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{j2\pi \frac{-\ell_N(-\ell_N)}{L}} & e^{j2\pi \frac{-\ell_N(1-\ell_N)}{L}} & \dots & e^{j2\pi \frac{-\ell_N(\ell_N)}{L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi \frac{\ell_N(-\ell_N)}{L}} & e^{j2\pi \frac{\ell_N(1-\ell_N)}{L}} & \dots & e^{j2\pi \frac{\ell_N(\ell_N)}{L}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

با تعریف صورت گرفته، ماتریس اندازه‌گیری  $\tilde{\Phi}$  را با یک ماتریس DFT شیفت یافته مدل کردیم. همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، ماتریس DFT، ماتریسی است که در آن به‌دلیل عمود بودن ستون‌های مختلف بر یکدیگر، میزان همدوسی متقابل صفر است.

می‌توان تخمین زاویه ورود با استفاده از آرایه مجازی را در حوزه حسگری فشرده به‌صورت زیر مدل نمود:

$$\mathbf{r}_1 = \tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{p}} + \sigma^2 \mathbf{e}_1 \quad (26)$$

در رابطه (۲۶)،  $\tilde{\mathbf{p}}$  بردار توان سیگنال‌های دریافتی در زاویه‌های مختلف را نشان می‌دهد. درایه  $\ell$  ام از بردار توان  $\tilde{\mathbf{p}}$  به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

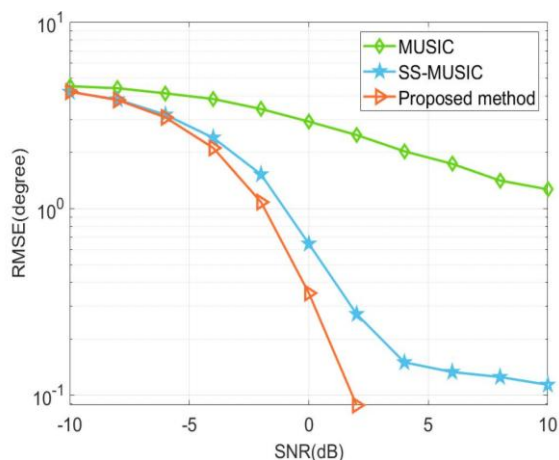
$$\tilde{p}_\ell = \begin{cases} p_k & \text{if } \vartheta_\ell = \theta_k \\ 0 & \text{if } \vartheta_\ell \neq \theta_k \end{cases} \quad (27)$$

زاویه در هر دو روش میوزیک برابر ۰/۰۱ درجه انتخاب شده است.

در این مقایسه، فرض بر این است که زاویه‌های ورود به مجموعه گسسته‌شده  $\sin(\theta)$  تعلق دارند. همچنین تعداد منابع ۱۰ در نظر گرفته شده و در هر تکرار زاویه‌ها به صورت تصادفی تولید می‌شوند.

در شکل (۲)، منحنی RMSE روش پیشنهادشده با الگوریتم میوزیک به ازای SNR های مختلف در تعداد مشاهده یکسان  $M = 150$  مقایسه شده است. برای حل مسئله کمینه‌سازی نرم یک، در روش پیشنهادی از جعبه ابزار CVX استفاده شده است. به دلیل پایین بودن تعداد آنتن‌های آرایه واقعی، الگوریتم میوزیک دقت مناسبی ندارد. با توجه به منحنی RMSE، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی در SNR های مختلف، خطای کمتری نسبت به تخمین زاویه ورود با الگوریتم میوزیک پس از هموارسازی فضایی دارد.

در شکل (۳)، به مقایسه منحنی RMSE روش پیشنهادشده با حالتی که الگوریتم میوزیک به صورت مستقیم به خروجی آرایه خطی اعمال شود و حالتی که به خروجی آرایه مجازی اعمال شود، در  $SNR = -5dB$  و تعداد مشاهده‌های مختلف پرداخته شده است. به دلیل پایین بودن تعداد آنتن‌های آرایه واقعی، دقت تخمین با اعمال الگوریتم میوزیک به خروجی آرایه واقعی پایین است. نتایج منحنی RMSE نشان می‌دهد که به ازای تعداد مشاهده‌های مختلف، روش پیشنهادشده خطای به مراتب کمتری نسبت به الگوریتم میوزیک پس از هموارسازی فضایی دارد.



شکل (۲): RMSE بر حسب SNR به ازای یک آرایه خطی غیر یکنواخت با  $N = 12$  آنتن واقعی،  $2\ell_N + 1 = 91$  آنتن مجازی،  $M = 150$  مشاهده زمانی و  $K = 10$  منبع ارسال کننده سیگنال.

در دسته اول از شبیه‌سازی‌ها، به مقایسه عملکرد تخمین زاویه ورود با استفاده از آرایه خطی یکنواخت مجازی با ماتریس اندازه‌گیری DFT و الگوریتم میوزیک پرداخته می‌شود. برای مقایسه با الگوریتم میوزیک، دو روش مختلف در نظر گرفته می‌شود. در روش اول، الگوریتم میوزیک به صورت مستقیم به خروجی آرایه خطی اعمال می‌شود نتایج به دست آمده از این روش در منحنی‌ها با برچسب MUSIC نشان داده شده است. در حالی که در روش دوم، الگوریتم میوزیک را به خروجی آرایه مجازی اعمال می‌کنیم که نتایج آن با برچسب SS-MUSIC نمایش داده شده است.

الگوریتم میوزیک از تجزیه ویژه ماتریس همبستگی برای تخمین زاویه ورود استفاده می‌کند. برای اعمال الگوریتم میوزیک به خروجی هر آرایه‌ای، لازم است که ماتریس همبستگی آن آرایه محاسبه شود. بردار خروجی آرایه مجازی یک بردار تک‌نمونه‌ای است که رتبه ماتریس کواریانس آن یک است. بنابراین، با استفاده از ماتریس کواریانس خروجی آرایه مجازی نمی‌توان زاویه‌ها را تخمین زد. به منظور افزایش رتبه، می‌توان از هموارسازی فضایی استفاده کرد [۳۲]. هموارسازی فضایی فقط قابل اعمال به آرایه خطی یکنواخت است. این روش با جداسازی آرایه مجازی یکنواخت با  $2\ell_N + 1$  آنتن به  $\ell_N + 1$  زیر آرایه خطی یکنواخت هر یک با  $\ell_N + 1$  آنتن صورت می‌گیرد. زیر آرایه شماره  $i$  ام با استفاده از درایه‌های  $\{i, i+1, \dots, i+\ell_N\}$  بردار  $\mathbf{r}_i$  به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_{ii} = \tilde{\Phi}_i \tilde{\mathbf{p}} + \sigma^2 \tilde{\mathbf{e}}_{ii} \quad (30)$$

در رابطه فوق،  $\tilde{\Phi}_i(\theta) \in \mathcal{C}^{(\ell_N+1) \times K}$  ماتریس هادی متناظر با سطرهای  $i$  تا  $(i+\ell_N)$  از ماتریس  $\Phi(\theta)$  است. همچنین  $\tilde{\mathbf{e}}_{ii}$  برداری با طول  $(\ell_N + 1)$  است که تمام درایه‌های آن صفر بوده و فقط درایه  $-i + \ell_N + 2$  ام از آن یک است. ماتریس همبستگی زیر آرایه  $i$  ام را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

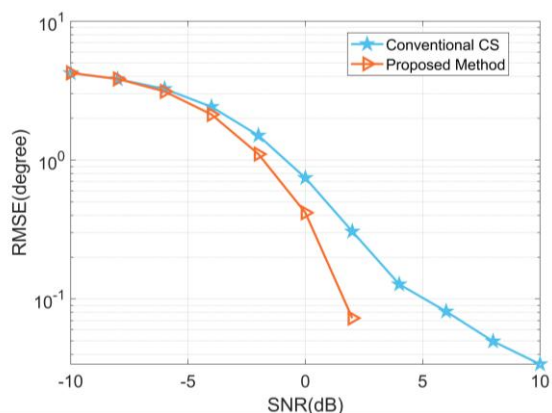
$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_{ii} \mathbf{r}_{ii}^H \quad (31)$$

ماتریس همبستگی هموارشده فضایی با محاسبه میانگین ماتریس همبستگی تمام زیر آرایه‌ها به دست می‌آید [۲۶]:

$$\mathbf{R}_{ss} = \frac{1}{\ell_N + 1} \sum_{i=1}^{\ell_N + 1} \mathbf{R}_i \quad (32)$$

ماتریس فوق یک ماتریس تمام رتبه است [۲۶]. بنابراین، با اعمال الگوریتم میوزیک به ماتریس همبستگی فضایی به دست آمده، زاویه‌های ورود تخمین زده می‌شوند. گام جستجو برای تخمین

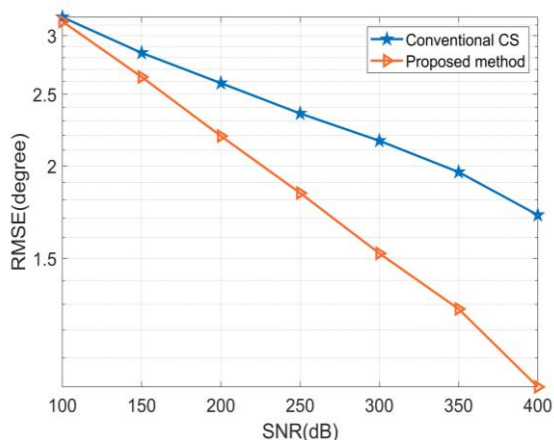
به مراتب کمتری نسبت به تخمین زاویه‌ی ورود با روش حسگری



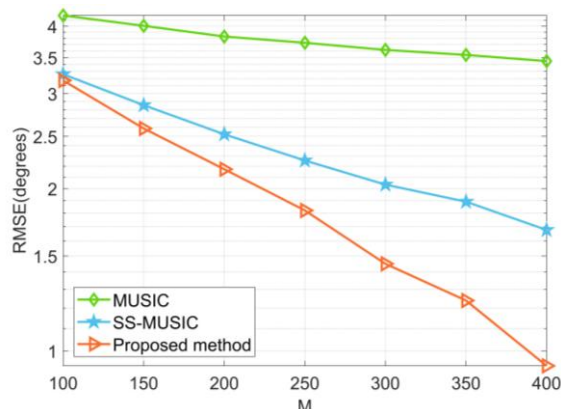
شکل (۴): RMSE بر حسب SNR به‌ازای یک آرایه خطی غیر یکنواخت با  $N = 12$  آنتن واقعی،  $2\ell_N + 1 = 91$  آنتن مجازی،  $M = 150$  مشاهده زمانی و  $K = 10$  منبع ارسال‌کننده سیگنال.

فشرده مرسوم دارد. دلیل این امر، بالا بودن هم‌دوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری روش مرسوم است که منجر به خطای افزایش خطا در تخمین زاویه می‌شود.

در شکل (۵)، به مقایسه منحنی RMSE روش پیشنهادی با روش مرسوم تخمین زاویه ورود با حسگری فشرده به‌ازای تعداد مشاهده‌های مختلف در  $SNR = -5dB$  پرداخته شده است. مشابه حالت قبلی در SNR های مختلف، روش پیشنهادشده عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. همانطور که ذکر شد، عمودبودن ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری در روش پیشنهادی بر یکدیگر، موجب برقراری شرط هم‌دوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری شده و تخمین دقیق زاویه را امکان‌پذیر می‌سازد.



شکل (۵): RMSE بر حسب تعداد مشاهده زمانی ( $M$ ) به‌ازای یک آرایه خطی غیر یکنواخت با  $N = 12$  آنتن واقعی،  $2\ell_N + 1 = 91$  آنتن مجازی،  $SNR = -5dB$  و  $K = 2$  منبع ارسال‌کننده سیگنال.



شکل (۳): RMSE بر حسب تعداد مشاهده زمانی ( $M$ ) به‌ازای یک آرایه خطی غیر یکنواخت با  $N = 12$  آنتن واقعی،  $2\ell_N + 1 = 91$  آنتن مجازی،  $SNR = -5dB$  و  $K = 10$  منبع ارسال‌کننده سیگنال.

در دسته دوم از شبیه‌سازی‌ها، به مقایسه عملکرد تخمین زاویه ورود با حسگری فشرده و استفاده از ماتریس اندازه‌گیری DFT با حالتی که در آن، ماتریس اندازه‌گیری از تقسیم یکنواخت فضای زاویه‌ای پیوسته، به‌دست می‌آید، پرداخته شده است. در روش سنتی، ماتریس اندازه‌گیری با تقسیم یکنواخت فضای زاویه‌ای پیوسته در محدوده  $[-90, 90]$  درجه، به یک مجموعه گسسته به‌دست می‌آید. در حالتی که فضای زاویه‌ای به یک مجموعه شامل ۱۸۱ عضو با فاصله یکسان یک درجه تقسیم شود  $\Theta = \{-90, -89, \dots, 89, 90\}$ ، هم‌دوسی متقابل ماتریس اندازه‌گیری بر اساس رابطه (۸)، برابر ۱ است. چنانچه برای کاهش هم‌دوسی متقابل، محدوده  $[-80, 80]$  را با گام یک درجه تقسیم‌بندی کنیم، میزان هم‌دوسی متقابل برابر  $0/96$  خواهد شد که به مراتب از هم‌دوسی متقابل ماتریس DFT که صفر است، بیشتر می‌باشد.

پس از تقسیم کردن فضای زاویه‌ای، یک ماتریس اندازه‌گیری به نحوی تشکیل می‌شود که ستون‌های آن، طبق رابطه (۲۳)، به نحوی تشکیل می‌شود که ستون‌های آن، طبق رابطه (۲۳)، بردارهای هادی آرایه مجازی نظیر زاویه‌های گسسته‌شده هستند. در نهایت با استفاده از مسئله کمینه‌سازی نرم یک، زاویه ورود منابع تخمین زده می‌شود. در این حالت تعداد منابع ارسال‌کننده سیگنال  $K = 10$  در نظر گرفته شده است. در هر تکرار از شبیه‌سازی مونت کارلو، زاویه‌های ورود منابع به‌صورت تصادفی تولید می‌شود.

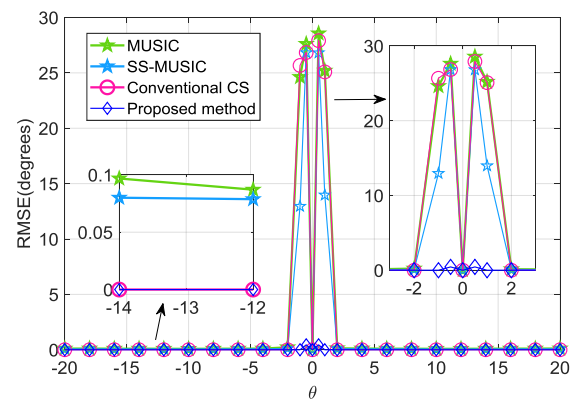
شکل (۴)، منحنی RMSE را بر حسب SNR به‌ازای  $M = 150$  مشاهده زمانی نشان می‌دهد. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، در SNR های مختلف، روش پیشنهاد شده خطای



## ۸- منابع

- [1] H. Krim and M. Viberg, "Two Decades of Array Signal Processing Research: The Parametric Approach," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 13, no. 4, pp. 67-94, 1996.
- [2] H. L. Van Trees, Optimum Array Processing, Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory. New York, NY, USA: Wiley, 2002.
- [3] T. E. Tuncer and B. Friedlander, Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation. New York, NY, USA: Academic, 2009.
- [4] J. Li, D. Li, D. Jiang and X. Zhang, "Extended-Aperture Unitary Root MUSIC-Based DOA Estimation for Coprime Array," IEEE Communications Letters, vol. 22, no. 4, pp. 752-755, 2018.
- [5] J. Kim and C. S. Sin, "Impact of Mutual Coupling on Performance of DoA Estimation using MUSIC," 2018 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC), 2018, pp. 460-462.
- [6] R. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, 1986.
- [7] D. Zhang, Y. Zhang, G. Zheng, C. Feng and J. Tang, "Improved DoA Estimation Algorithm for Co-Prime Linear Arrays Using Root-MUSIC Algorithm," Electronics Letters, vol. 53, no. 18, pp. 1277-1279, 2017.
- [8] G. Liu, H. Chen, X. Sun and R. C. Qiu, "Modified MUSIC Algorithm for DoA Estimation with Nyström Approximation," IEEE Sensors Journal, vol. 16, no. 12, pp. 4673-4674, 2016.
- [9] J. Capon, "High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis," Proceedings of the IEEE, vol. 57, no. 8, pp. 1408-1418, 1969.
- [10] X. Zhang, Z. He, B. Liao, X. Zhang and W. Peng, "Robust Quasi-Adaptive Beamforming Against Direction-of-Arrival Mismatch," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 54, no. 3, pp. 1197-1207, June 2018.
- [11] X. Wang, and M. Amin, "Design of Optimum Sparse Array for Robust MVDR Beamforming Against DoA Mismatch," 7th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), pp. 1-5, 2017.
- [12] L. Lu and H. C. Wu, "Novel Robust Direction-of-Arrival-Based Source Localization Algorithm for Wideband Signals," IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 11, no. 11, pp. 3850-3859, 2012.
- [13] L. Lu and H. C. Wu, "Robust Expectation-Maximization Direction-of-Arrival Estimation Algorithm for Wideband Source Signals," IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 60, no. 5, pp. 2395-2400, 2011.
- [14] L. Lu, H. C. Wu and S. C. H. Huang, "Robust Novel EM-Based Direction-of-Arrival Estimation Technique for Wideband Source Signals," International Conference on Communications and Mobile Computing, pp. 72-76, 2010.
- [15] I. Ziskind and M. Wax, "Maximum Likelihood Localization of Multiple Sources by Alternating Projection," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 36, no. 10, pp. 1553-1560, 1988.
- [16] Tie-Jun Shan, M. Wax and T. Kailath, "On Spatial Smoothing for Direction-of-Arrival Estimation of Coherent Signals," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 33, no. 4, pp. 806-811, August 1985.

در دسته آخر از شبیه‌سازی‌ها، به مقایسه تخمین زاویه ورود در حضور  $K = 2$  منبع، پرداخته شده است. در این شبیه‌سازی، زاویه ورود یکی از منابع ثابت (صفر درجه) و زاویه ورود منبع دوم از  $-20$  درجه تا  $20$  درجه تغییر داده شده است. همچنین مقدار  $SNR = -5dB$  و تعداد مشاهده‌ها  $M = 100$  است. زمانی که دو منبع از هم دور هستند، خطای هر دو روش مبتنی بر حسگری فشرده برابر صفر است، در حالی که همان‌طور که در سمت چپ شکل (۶) مشخص شده است، هر دو روش مبتنی بر میوزیک دارای خطا هستند. زمانی که زاویه ورود منابع بسیار به هم نزدیک می‌شود، دقت همه روش‌ها به‌جز روش پیشنهادی، به میزان قابل توجهی افت می‌کند. در حالی که به‌دلیل عمود بودن ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری به همدیگر، میزان خطای روش پیشنهادی بسیار ناچیز است.



شکل (۶): RMSE بر حسب زاویه به‌زای یک آرایه خطی غیر یکنواخت با  $N = 12$  آنتن واقعی،  $2\ell_N + 1 = 91$  آنتن مجازی،  $K = 2$  منبع ارسال‌کننده سیگنال و  $SNR = -5dB$ .

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش جدید برای تخمین زاویه ورود با استفاده از مدل‌سازی ماتریس اندازه‌گیری حسگری فشرده به‌صورت یک ماتریس DFT ارائه شد. در روش پیشنهادی، از یک آرایه خطی غیر یکنواخت استفاده کرده و با برداری کردن ماتریس همبستگی سیگنال‌های دریافتی آن، یک آرایه مجازی با تعداد آنتن زیاد تشکیل شد. سپس به‌منظور کاهش هم‌دوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس اندازه‌گیری، با تقسیم  $\sin(\theta)$  به یک مجموعه گسسته، ماتریس اندازه‌گیری به‌صورت یک ماتریس DFT مدل‌سازی شد. با توجه به صفر بودن هم‌دوسی متقابل بین ستون‌های ماتریس DFT، بازیابی دقیق زاویه‌ها امکان‌پذیر است. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که روش پیشنهادی، عملکرد بهتری در مقایسه با روش تخمین زاویه ورود با حسگری فشرده مرسوم و همچنین روش میوزیک دارد.

- [25] M. Elad, *Sparse and Redundant Representations, From Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer, 2010.
- [26] Z. Shi, C. Zhou, Y. Gu, N. A. Goodman and F. Qu, "Source Estimation Using Coprime Array: A Sparse Reconstruction Perspective," *IEEE Sensors Journal*, vol. 17, no. 3, pp. 755-765, 2017.
- [27] D. L. Donoho, and M. Elad, "Optimally Sparse Representation in General (nonorthogonal) Dictionaries via  $\ell_1$  Minimization," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 100, no. 5, pp. 2197-2202, 2003.
- [28] G. Xu and Z. Xu, "Compressed Sensing Matrices from Fourier Matrices," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, no. 1, pp. 469-478, 2015.
- [29] S. Qin, Y. D. Zhang and M. G. Amin, "Generalized Coprime Array Configurations for Direction-of-Arrival Estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, no. 6, pp. 1377-1390, 2015.
- [30] Z. He, Z. Shi, L. Huang and H. C. So, "Underdetermined DOA Estimation for Wideband Signals Using Robust Sparse Covariance Fitting," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, no. 4, pp. 435-439, 2015.
- [31] M. Yangg, A. M. Haimovich, B. Chen and X. Yuan, "A New Array Geometry for DOA Estimation with Enhanced Degrees of Freedom," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Shanghai, pp. 3041-3045, 2016.
- [32] P. Pal and P. P. Vaidyanathan, "Coprime Sampling and the MUSIC Algorithm," *Proc. IEEE Digit. Signal Process. Workshop and IEEE Signal Process. Educ. Workshop (DSP/SPE)*, pp. 289-294, 2011.
- [17] R. Muhamed and T.S. Rappaport, "Direction of Arrival Estimation Using Antenna Arrays," *Tech. Rep. MPRG-TR96-03*, Virginia Tech, Blacksburg, VA, 1996.
- [18] D. Malioutov, M. Cetin and A. S. Willsky, "A Sparse Signal Reconstruction Perspective for Source Localization with Sensor Arrays," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 8, pp. 3010-3022, 2005.
- [19] C. Zhou, Y. Gu, Y. D. Zhang, Z. Shi, T. Jin and X. Wu, "Compressive Sensing-Based Coprime Array Direction-of-Arrival Estimation," *IET Communications*, vol. 11, no. 11, pp. 1719-1724, 2017.
- [20] X. Yang, C. C. Ko and Z. Zheng, "Direction-of-Arrival Estimation of Incoherently Distributed Sources Using Bayesian Sompressive Sensing," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 10, no. 6, pp. 1057-1064, 2016.
- [21] M. Hawes, L. Mihaylova, F. Septier and S. Godsill, "Bayesian Compressive Sensing Approaches for Direction of Arrival Estimation with Mutual Coupling Effects," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, no. 3, pp. 1357-1368, 2017.
- [22] Q. Shen, W. Liu, W. Cui and S. Wu, "Underdetermined DOA Estimation Under the Compressive Sensing Framework: A Review," *IEEE Access*, vol. 4, pp. 8865-8878, 2016.
- [23] B. Lin, J. Liu, M. Xie and J. Zhu, "Direction-of-Arrival Tracking via Low-Rank Plus Sparse Matrix Decomposition," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 14, pp. 1302-1305, 2015.
- [24] Z. Yang, J. Li, P. Stoica, and L. Xie, "Sparse Methods for Direction-of-Arrival Estimation," *arXiv:1609.09596*, 2016.

---

## DOA Estimation Using Compressive Sensing Based on DFT Measurement Matrix

Y. Eghbali, A. Ataee, M. Naeini Ferdosizadeh\*

Shahed University

(Received: 31/01/2019, Accepted: 17/05/2019)

### Abstract

In this paper, a new method is proposed to estimate the direction of arrival (DOA) using non-uniform linear array structure and modeling the measurement matrix as a DFT matrix. In order to estimate the DOA using compressive sensing (CS), continuous angle space should be divided into a discrete set using small steps. This division, leads to the increment of mutual coherence between columns of the measurement matrix and performance of the sparse recovery algorithms is degraded. To solve this problem, we propose a new method in which DFT matrix with mutual coherence of zero is used as the measurement matrix. In order to increase the accuracy of estimation, the size of DFT matrix or the number of antennas should be increased. Implementation of an array with large number of antennas is complex and expensive. A solution to decrease the number of antennas is using a non-uniform linear array and constructing a virtual uniform linear array. A virtual uniform linear array can be constructed by vectorizing the correlation matrix of the received signal of a non-uniform linear array. Increasing the number of antennas in the virtual array will increase the size of DFT matrix. Therefore, the accuracy of DOA estimation will be increased. Simulation results show that DOA estimation using compressive sensing, based on DFT measurement matrix, has a good performance in terms of mean square error of estimation.

**Keywords:** Direction of Arrival Estimation, Compressive Sensing, DFT Matrix and Virtual Uniform Linear Array

---

\* Corresponding author E-mail: mah.ferdosi@gmail.com