

## طراحی دنباله کد فرستنده به منظور آشکارسازی اهداف گسترده در حضور تداخل وابسته به سیگنال

سید محمد کرباسی<sup>۱</sup>، محمدمهدی نقش<sup>۲\*</sup>، مریم مسجدی<sup>۳</sup>، محمدحسن باستانی<sup>۴</sup>

۱- استادیار، دانشگاه صنعتی شریف، ۲- استادیار، ۳- محقق پسادکتری، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۴- دانشیار، دانشگاه صنعتی شریف  
(دریافت: ۹۷/۰۷/۰۸؛ پذیرش: ۹۷/۰۲/۱۵)

### چکیده

در این مقاله، مسئله طراحی دنباله کد فرستنده به منظور بهبود کارایی آشکارسازی یک هدف گسترده در حضور تداخل را در نظر می‌گیریم. پاسخ ضربه هدف (TIR) به دو صورت مدل می‌شود: ضرب پاسخ ضربه قطعی در یک ضریب انعکاس نامعلوم و یا به صورت بردار تصادفی گوسی با کوواریانس معلوم. برای هر یک از دو مدل مذکور، قید نسبت پیک به توان متوسط و قید شباهت را به صورت مجزا، به مسئله طراحی کد اعمال می‌کنیم. در مدل اول، کارایی آشکارساز آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته (GLRT)، به طور یکنوا به نسبت سیگنال به اختلال باضافه نویز (SINR) وابسته است. بنابراین، با بیشینه کردن SINR، کد را طراحی می‌کنیم. مسئله بهینه‌سازی حاصل، غیرمحدب بوده که برای حل آن یک روش جدید پیشنهاد می‌کنیم. در مدل دوم، وابستگی کارایی آشکارساز بهینه به پارامترهای مسئله، بسیار پیچیده است. بنابراین، از اطلاعات متقابل بین TIR و اکوی دریافتی، به عنوان معیار طراحی استفاده می‌کنیم. برای حل مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب حاصل، یک روش تکرار بر اساس روش MM (Majorization-Minimization) ارائه می‌کنیم. هم‌چنین، روش پیشنهادی را در مقابل عدم قطعیت در دانش اولیه در مورد تداخل، مقاوم‌سازی می‌کنیم. نتایج و تحلیل‌های عددی، مؤثر بودن روش‌های پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود را نشان می‌دهند.

### واژگان کلیدی

اطلاعات متقابل، کارایی آشکارسازی، طراحی کد، طراحی مقاوم، هدف گسترده

### ۱- مقدمه

با استفاده از دانش پیشین در مورد هدف و تداخلگرهای نزدیک به آن، می‌توان دنباله کد ارسالی در فرستنده رادار را طراحی و کارایی آن را به میزان قابل توجهی افزایش داد [۱]. به همین دلیل، مسئله طراحی کد در مقالات متعددی مد نظر قرار گرفته است [۲-۳]. در واقع، با طراحی بهینه دنباله کد ارسالی، قابلیت آشکارسازی، دسته‌بندی و ردیابی یک سامانه رادار افزایش می‌یابد. در عمل، طراحی شکل موج ارسالی با چالش‌های گوناگونی از جمله محدودیت‌های فنی در پیاده‌سازی فرستنده و هم‌چنین، حضور تداخل وابسته به سیگنال (مانند کلاتر) به همراه تداخل مستقل از سیگنال در گیرنده مواجه است. مسئله آشکارسازی اهداف گسترده، در بسیاری از مقالات منتشرشده در دهه اخیر

مطالعه شده است [۴-۶]. در بسیاری از کارهای انجام‌شده، کد ارسالی با هدف بهبود احتمال آشکارسازی، طراحی شده است [۲]، [۷-۱۰]. در [۲]، که یکی از تحقیقات اصیل در این زمینه است، دو چارچوب برای بهبود کارایی آشکارسازی یک هدف گسترده در محیط (فقط) نویزی ارائه شده است. در چارچوب نخست با فرض معلوم بودن پاسخ ضربه هدف (TIR)<sup>۲</sup>، با استفاده از معیار نسبت سیگنال به نویز (SNR)<sup>۳</sup>، بهینه‌سازی انجام گرفته است. در چارچوب دوم، هم TIR و هم نویز جمع‌شونده، به صورت فرآیندهای تصادفی گوسی مدل شده و اطلاعات متقابل (MI)<sup>۴</sup> بین TIR و مشاهدات پیشینه شده است.

مسئله طراحی کد، با لحاظ کردن تداخل وابسته به سیگنال بسیار پیچیده می‌شود. در [۷]، با فرض TIR قطعی و با استفاده از

<sup>۲</sup> Target Impulse Response

<sup>۳</sup> Signal to Noise Ratio

<sup>۴</sup> Mutual Information

\* نویسنده مسئول: mm\_naghsh@cc.iut.ac.ir

هشدار کاذب با پارامترهای شکل موج، بسیار پیچیده بوده و قابل استفاده در طراحی کد نیست. بنابراین، از رویکرد تئوری اطلاعات بهره برده و از MI بین سیگنال دریافتی و TIR تصادفی به عنوان معیار طراحی کد استفاده می‌کنیم. مسائل به دست آمده در هر دو چارچوب، غیرمحدب هستند. بنابراین، از یک روش چرخشی برای حل مسائل بهینه‌سازی در هر دو چارچوب، استفاده می‌کنیم. هم‌چنین، یک الگوریتم تکرار بر اساس روش (MM)<sup>۲</sup>، برای حل مسئله به دست آمده در چارچوب دوم پیشنهاد می‌کنیم. علاوه بر آن، روش‌های پیشنهادی را در مقابل عدم قطعیت تداخل، مقاوم‌سازی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که روش پیشنهادی دست‌یابی به نقاط ایستای مسئله را میسر می‌سازند.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش دوم، مدل سیگنال بررسی شده و ساختار TIR و مشخصات آماری تداخل‌های وابسته و مستقل از سیگنال شرح داده می‌شوند. در بخش سوم، مسئله آشکارسازی فرمول‌بندی شده و کارایی آشکارسازهای به دست آمده، تحلیل می‌شود. بخش چهارم به طراحی شکل موج اختصاص یافته و نتایج و تحلیل‌های عددی به منظور نمایش مؤثر بودن روش‌های پیشنهادی، در بخش پنجم ارائه خواهند شد. در نهایت، نتایج مقاله در فصل ششم گردآوری می‌شوند.

**نمادها:**  $a(i)$  درایه  $i$ ام بردار  $\mathbf{a}$  بوده و  $\mathbf{A}(i, j)$  درایه واقع بر سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $\mathbf{A}$  است.  $(\cdot)^*$  نشان‌دهنده مزدوج مختلط،  $(\cdot)^T$  ترانپوز و  $(\cdot)^H$  نماد هرمتین است.  $\|\mathbf{a}\|$  نرم اقلیدسی بردار  $\mathbf{a}$  بوده و  $\|\mathbf{A}\|_2$  نرم طیفی ماتریس  $\mathbf{A}$  است.  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی و  $\mathbf{0}$  نماد بردار یا ماتریس تمام صفر است.  $\text{tr}(\mathbf{A})$ ،  $\text{rank}(\mathbf{A})$  و  $\|\mathbf{A}\|$  به ترتیب، رد، رتبه و دترمینان ماتریس  $\mathbf{A}$  می‌باشند. همچنین  $\mu_{\max}(\mathbf{A})$  بیشینه مقادیر ویژه ماتریس هرمتیتی و مربعی  $\mathbf{A}$  بوده و  $\odot$  اپراتور ضرب هادامرد است.  $\mathbf{A}(r_1 : r_2, c_1 : c_2)$  نشان‌دهنده زیرماتریس  $\mathbf{A}$  شامل سطوره  $r_1, \dots, r_2$  و ستون‌های  $c_1, \dots, c_2$  است.  $C^N$  نماد مجموعه بردارهای مختلط  $N$  بعدی است.  $\mathbf{A} \succ 0$  ( $\mathbf{A} \succeq 0$ ) یعنی ماتریس  $\mathbf{A}$  مثبت (نیمه) معین می‌باشد.  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_C(\mathbf{m}, \Sigma)$  نمایش بردار تصادفی  $\mathbf{x}$  با توزیع گوسی مختلط چرخشی ایستاد با میانگین  $\mathbf{m}$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  است. نماد  $*$ ، اپراتور کانولوشن بوده و تابع  $\mathcal{L}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{z})$ ، MI بین  $x$  و  $y$  با فرض دانستن  $z$  است. همچنین، تابع  $h(x|y)$ ، آنتروپینسی  $x$  نسبت به  $y$  است. در نهایت،  $\Re(x)$  قسمت حقیقی عدد مختلط  $x$  است.

معیار SNR، یک روش تکرار برای بهبود کارایی آشکارساز در حضور تداخل وابسته به سیگنال (کلاتر) پیشنهاد شده است. اما تضمینی برای همگرایی روش ارائه شده، وجود ندارد [۱۱]. در [۸]، از معیار SNR و MI به صورت موازی برای طراحی شکل موج‌های منطبق بر اهداف گسترده تصادفی در حضور تداخل وابسته به سیگنال، استفاده شده است. در این مقاله پس از به دست آوردن شکل موج ارسال و فیلتر گیرنده بهینه در حوزه فرکانس، با استفاده از روش‌های سنتز سیگنال زمانی بر حسب پاسخ حوزه فرکانس، سیگنال بهینه به دست می‌آید. مشکل اصلی این روش مواجهه با افت عملکرد ناشی از سنتز از فرکانس به زمان است. علاوه بر این، نویسندگان [۹] یک روش پارامتری برای طراحی شکل موج بر اساس دنباله‌های گسسته، پیشنهاد کرده‌اند که در آن، تداخل به صورت فرآیند گوسی با آمارگان قطعی در نظر گرفته شده است. هم‌چنین، با فرض اهداف نقطه‌ای، رویکردهایی بر اساس تئوری اطلاعات برای طراحی شکل موج در رادار چندآنتنی ارائه شده است [۱۲]. در این مطالعات، فقط اثر تداخل مستقل از سیگنال در طراحی لحاظ شده و از اثر تداخل وابسته به سیگنال صرف‌نظر شده است. مرجع [۱۳]، مسئله طراحی در مقالات مذکور را با در نظر گرفتن تداخل وابسته به سیگنال انجام داده است. در [۱۳]، قید پیک به توان متوسط (PAR)<sup>۱</sup> از طریق یک مرحله سنتز در مسئله لحاظ شده که به افت کارایی منجر می‌شود.

در این مقاله، یک روش سریع و جدید برای طراحی شکل موج با هدف بهبود کارایی آشکارسازی یک هدف گسترده در حضور تداخل وابسته به سیگنال (شامل کلاتر و/یا هدف تداخلی)، پیشنهاد شده است. دو چارچوب برای طراحی TIR در نظر می‌گیریم که اولی بر اساس ضرب یک TIR قطعی در یک ضریب انعکاس مجهول و دومی بر اساس یک بردار تصادفی گوسی با آمارگان معلوم است. باید توجه داشت که مدل اول به دلیل اینکه اطلاعات در مورد  $t(n)$  قابل حصول از فایل‌های ردیابی و دیگر منابع حسگری است (به عنوان نمونه، [۲] و [۹] را ببینید)، مدلی معقول است و مدل دوم نیز، به صورت گسترده در مراجع مورد استفاده قرار گرفته است [۲].

برای دست‌یابی به دنباله کدهای عملی در هر دو چارچوب، دو دسته قیود به مسئله اعمال می‌کنیم. الف) قید PAR و ب) قید شباهت به کد مرجع. در دسته اول، آشکارساز GLRT استخراج شده و کارایی آن بر حسب SINR بازنویسی شده است. بنابراین، در این حالت با مسئله بهینه‌کردن SINR برای طراحی کد مواجه هستیم. در دسته دوم، یافتن ارتباط احتمال آشکارسازی و

<sup>۲</sup> Majorization-Minimization<sup>۱</sup> Peak to Average Ratio

## ۲- مدل سیگنال

$P = M + N - 1$  تعریف و به صورت  $\mathbf{c} \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \mathbf{R}_c)$  مدل می‌شود.

**تذکره ۱:** در این مقاله، ابتدا با فرض معلوم بودن ماتریس‌های کوواریانس  $\mathbf{R}_v$  و  $\mathbf{R}_c$ ، طراحی را انجام داده و سپس روش پیشنهادی را در مقابل عدم قطعیت در تخمین این ماتریس‌ها مقاوم خواهیم نمود [۱۴].

علاوه بر این، فرض می‌کنیم که بردارهای  $\mathbf{c}$  و  $\mathbf{v}$  از لحاظ آماری مستقل‌اند.

## ۳- مسئله آشکارسازی

با در نظر گرفتن مدل سیگنال مطابق رابطه (۲)، با مسئله تصمیم‌گیری در مورد وجود یا عدم وجود یک هدف گسترده مواجه هستیم که به صورت یک مسئله آزمون فرضیه باینری به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{cases} H_0: & \mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{v} \\ H_1: & \mathbf{r} = \alpha \cdot \mathbf{T}\mathbf{s} + \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (4)$$

در ادامه، دو فرض متفاوت برای TIR در نظر می‌گیریم:

(۱) TIR قطعی با ضریب انعکاس مختلط و نامعلوم که آن را در زیرفصل ۳-۱، بررسی و آماره آزمون GLRT را برای آن ارائه خواهیم نمود.

(۲) TIR به صورت یک فرآیند تصادفی گوسی با ماتریس کوواریانس معلوم که در زیرفصل ۳-۲، به آن خواهیم پرداخت (به عنوان نمونه به [۲]، [۷] و [۹] نگاه کنید).

### ۳-۱- TIR قطعی

در این قسمت، فرض می‌کنیم که ساختار TIR، قطعی بوده و فقط ضریب انعکاس، نامعلوم است. ساختار TIR را می‌توان با استفاده از فایل‌های ردیابی، اسکن‌های پیشین و غیره محاسبه کرد [۲] و [۹]. با توجه به توزیع گوسی ترم‌های تداخل، توزیع  $\mathbf{r}$  (با داشتن دنباله کد فرستنده  $\mathbf{s}$  و ضریب انعکاس  $\alpha$ ) تحت دو فرضیه به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\mathbf{r} \sim \begin{cases} H_0: & N_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}_s) \\ H_1: & N_C(\alpha \cdot \mathbf{T}\mathbf{s}, \mathbf{R}_s) \end{cases} \quad (5)$$

که در آن،  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{C}\mathbf{s}\mathbf{s}^H \mathbf{C}^H] + \mathbf{R}_v$ ، هم‌چنین،

$$E[\mathbf{C}\mathbf{s}\mathbf{s}^H \mathbf{C}^H] = \mathbf{S}E[\mathbf{c}\mathbf{c}^H]\mathbf{S}^H = \mathbf{S}\mathbf{R}_c\mathbf{S}^H \quad (6)$$

یک سامانه رادار تک‌پایه که بردار کد زمان-سریع  $N$  بعدی  $\mathbf{s} = [s(0), \dots, s(N-1)]^T \in C^N$  را ارسال می‌کند را در نظر بگیرید<sup>۱</sup>. مشاهدات مربوط به هدف گسترده (در حضور تداخل وابسته به سیگنال) به باند پایه منتقل شده و پس از عبور از فیلتر منطبق، نمونه‌برداری می‌شود.  $n^{\text{آمین}}$  نمونه از سیگنال مشاهدات به صورت زیر قابل نمایش است:

$$r(n) = [\alpha \cdot t(n) + c(n)] * s(n) + v(n), \quad (1)$$

که در آن،  $\alpha \cdot t(n)$  پاسخ ضربه هدف است که به صورت یک سامانه خطی با پاسخ ضربه محدود مدل می‌شود.  $t(n)$  ساختار TIR و  $\alpha \in C$  ضریب انعکاس (نامعلوم) مربوط به دامنه مختلط هدف است. فرض می‌کنیم که بازه پشتیبانی  $t(n)$  برابر با  $Q$  است، یا به طور معادل  $t(n)$  فقط در بازه  $n \in \{0, \dots, Q-1\}$  غیر صفر است. هم‌چنین،  $c(n)$  نمایش‌دهنده CIR<sup>۲</sup> بوده و  $v(n)$  نمونه‌های فیلتر شده تداخل مستقل از سیگنال مانند نویز، جرمها و تداخل هم‌کانال می‌باشد. پارامتر  $M = Q + N - 1$  را به عنوان تعداد نمونه‌های مشاهدات تعریف می‌کنیم. با نمایش برداری  $\{r(n)\}_{n=0}^{M-1}$ ، مدل مشاهدات در (۱) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\mathbf{r} = \alpha \cdot \mathbf{T}\mathbf{s} + \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{v}, \quad (2)$$

که در آن،  $\mathbf{C} = \sum_{n=-N+1}^{M-1} c(n)\mathbf{J}_n$  و  $\mathbf{T} = \sum_{n=0}^{Q-1} t(n)\mathbf{J}_n$  به ترتیب، ماتریس‌های TIR و CIR است. هم‌چنین،  $\mathbf{J}_n$  ماتریس  $M \times N$  بعدی شیفت بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J}_n(\ell_1, \ell_2) = \begin{cases} 1 & \ell_1 - \ell_2 = n \\ 0 & \ell_1 - \ell_2 \neq n \end{cases}, \quad (3)$$

$$\ell_1 \in \{1, \dots, M\}, \ell_2 \in \{1, \dots, N\}.$$

بردار  $\mathbf{v} = [v(0), \dots, v(M-1)]^T$  بردار تداخل بوده و به صورت  $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \mathbf{R}_v)$  مدل می‌شود. بعلاوه، بردار تداخل وابسته به سیگنال به صورت  $\mathbf{c} = [c(-N+1), \dots, c(M-1)]^T \in C^P$  با

<sup>۱</sup> با توجه به در نظر گرفتن مدل زمان سریع، در مدل‌سازی مسئله از اثر داپلر صرف‌نظر شده است. در واقع برای بسیاری از سناریوها، می‌توان اثر داپلر روی تک پالس را به صورت یک شیفت فاز ساده مدل‌سازی نمود. همچنین باید توجه داشت که در مدل ارائه شده، پردازش به صورت زمان سریع و بدون در نظر گرفتن اثر داپلر بوده است، که این مدل‌سازی می‌تواند در حضور تداخل وابسته به سیگنال و همچنین در حضور اهداف تداخلی کاربرد داشته باشد.

<sup>۲</sup> برای سادگی، در مدل مسئله ارائه شده از خطای هم‌زمانی چشم‌پوشی شده است. برای دستیابی به مدل مسئله واقعی‌تر می‌توان خطای هم‌زمانی را نیز در نظر گرفت. راه‌حل دیگر این مسئله به کارگیری ساز و کاری برای جبران تاخیر نامعلوم در سیگنال دریافتی به کمک روش‌های هم‌زمانی و فیلتر منطبق است.

<sup>۳</sup> Clutter Impulse Response

$$\tilde{\mathbf{r}} \sim \begin{cases} H_0 : N_C(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \\ H_1 : N_C(\mathbf{0}, \mathbf{M}) \end{cases}, \quad (12)$$

که در آن،  $\mathbf{M} = \mathbf{R}_s^{-1/2} \mathbf{R}'_s \mathbf{R}_s^{-1/2}$ . آشکارساز NP بهینه برای مسئله آشکارسازی فوق به صورت زیر بیان می شود [۱۵]:

$$t_d(\tilde{\mathbf{r}}) = \tilde{\mathbf{r}}^H \mathbf{P} \tilde{\mathbf{r}}_{H_0}^{H_1} > \bar{\eta}, \quad (13)$$

که در آن،  $P = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}$  و  $\bar{\eta}$  آستانه آشکارسازی است. روابط آشکارساز برای طراحی کد بسیار پیچیده هستند [۱۸] و بنابراین از رویکرد تئوری اطلاعات برای طراحی کد استفاده می کنیم.

#### ۴- طراحی کد فرستنده

در این فصل، مسئله طراحی کد مقید را در حالت TIR قطعی و تصادفی فرمول بندی می کنیم.

##### ۴-۱- TIR قطعی

در این حالت، نشان دادیم که احتمال آشکارسازی آشکارساز GLRT که در رابطه (۷) نشان داده شده است، تابعی یکنوا صعودی از SINR است. بنابراین، مسئله طراحی شکل موج به صورت مسئله بهینه سازی مقید زیر قابل توصیف است:

$$\max_{\mathbf{s} \in \tilde{C}} \mathbf{s}^H \mathbf{T}^H (\mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{T} \mathbf{s} \quad (14)$$

که در آن،  $\tilde{C}$  مجموعه کدهای مشمول قید PAR و یا قید شباهت است. مسئله (۱۴) غیرمحدب بوده که روشی جدید برای حل آن ارائه می کنیم. در ابتدا توجه داشته باشید که مسئله بالا به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\min_{\mathbf{s} \in \tilde{C}} f(\mathbf{s}) \quad (15)$$

که در آن،  $f(\mathbf{s}) = \theta - \mathbf{s}^H \mathbf{T}^H (\mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{T} \mathbf{s}$  و  $\theta$  به اندازه ای بزرگ انتخاب می شود که  $f(\mathbf{s}) > 0$  برای حل (۱۵)، ابتدا بردار کمکی  $\mathbf{y} \in C^{M+1}$  را تعریف کرده و مسئله کمینه سازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{s} \in \tilde{C}} \mathbf{y}^H \mathbf{R} \mathbf{y} \quad (16)$$

$$s.t. \mathbf{y}^H \mathbf{u} = 1$$

که در آن،  $\mathbf{u} = [\mathbf{1} \ \mathbf{0}_{M \times 1}]^T$  و

که در آن،  $\bar{\mathbf{J}}_n = \sum_{n=0}^{N-1} s(N-n-1) \bar{\mathbf{J}}_n^T$  و  $\mathbf{S}$  ماتریس  $P \times M$  بعدی شیفت بوده و مطابق رابطه (۳) تعریف می شود. به دلیل عدم آگاهی از پارامتر  $\alpha$ ، امکان ارائه آشکارساز بهینه با معیار NP وجود ندارد. لذا با جایگذاری تخمین MLE متناظر برای  $\alpha$  در نسبت درست نمایی آزمون فرضیه، آشکارساز GLRT برای (۴) به صورت زیر خواهد بود [۱۵]:

$$\left| \mathbf{s}^H \mathbf{T}^H \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{r} \right|_{H_0}^{H_1} > \eta, \quad (7)$$

که در آن،  $\eta$  آستانه آشکارسازی بوده و با توجه به احتمال هشدار کاذب  $P_{fa}$  به دست می آید. همچنین، SINR در آشکارساز مذکور به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$SINR(\mathbf{s}) = \rho^2 = \mathbf{s}^H \mathbf{T}^H \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{T} \mathbf{s} \quad (8)$$

احتمال آشکارسازی  $P_d$  برای یک هدف غیر متموج به صورت زیر به دست می آید [۱۶]:

$$P_d = Q_M \left( \sqrt{2} \rho E\{|\alpha|\}, \sqrt{-2 \ln P_{fa}} \right) \quad (9)$$

که در آن،  $Q_M(\cdot, \cdot)$  تابع Q مارکوم مرتبه اول است. توجه کنید که برای مقدار از پیش تعیین شده  $P_d$ ،  $P_{fa}$  تابعی یکنوا صعودی از SINR است. در نتیجه در ادامه، دنباله کدی را طراحی خواهیم کرد که SINR یعنی (۸) را بیشینه کند.

##### ۳-۲- TIR تصادفی و گوسی

در این زیرفصل، با لحاظ کردن  $\alpha$  در TIR، فرض می کنیم TIR دارای توزیع گوسی متقارن چرخشی است. بردار TIR به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{t} = [0_{1 \times (N-1)}, t(0), \dots, t(Q-1), 0_{1 \times (N-1)}]^T \in C^P$$

فرض می کنیم که  $\mathbf{t} \sim \mathcal{N}_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t)$  که در آن ماتریس کوواریانس (معلوم) TIR است [۱۷]. بنابراین، بردار مشاهدات  $\mathbf{r}$  که در (۲) تعریف شده، دارای توزیع زیر است:

$$\mathbf{r} \sim \begin{cases} H_0 : N_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}_s) \\ H_1 : N_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}'_s) \end{cases}, \quad (10)$$

که در آن،

$$\mathbf{R}'_s = E[\mathbf{T} \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{T}^H] + \mathbf{R}_s = \mathbf{S} \mathbf{R}_t \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_s. \quad (11)$$

بنابراین، برای بردار سفید شده  $\tilde{\mathbf{r}} \sim \mathbf{R}_s^{-1/2} \mathbf{r}$  خواهیم داشت:

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{s}). \quad (24)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} f(s^{(k+1)}) &= g(\mathbf{y}^{(k+2)}, \mathbf{s}^{(k+1)}) \\ &\leq g(\mathbf{y}^{(k+1)}, \mathbf{s}^{(k+1)}) \\ &\leq g(\mathbf{y}^{(k+2)}, \mathbf{s}^{(k)}) = f(\mathbf{s}^{(k)}). \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن،  $k$  شماره تکرار الگوریتم است. نامساوی‌های موجود در (۲۵)، به دلیل کمینه‌سازی  $g(\mathbf{y}, \mathbf{s})$  نسبت به  $\mathbf{y}$  و  $\mathbf{s}$  برقرار است. به‌طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که در هر گام الگوریتم کمینه‌سازی چرخشی (۱۶)،  $f(\mathbf{s})$  کاهش می‌یابد و به‌طور معادل، SINR افزایش می‌یابد. همچنین، می‌توان اثبات کرد که SINR بالا کراندار است. با توجه به افزایش SINR در هر گام و کراندار بودن آن، می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر تابع هدف  $\{f(s^{(k)})\}_k$  همگرا می‌شود.

در ادامه، در مورد پاسخ‌های مسئله (۲۳) تحت قیود مختلف بحث خواهیم کرد.

(۱) طراحی کد تحت قید PAR:

در این حالت، مجموعه  $C$  مربوط به قید PAR است:

$$PAR(\mathbf{s}) = N \max_{0, \dots, N-1} |s(n)|^2 / \|\mathbf{s}\|^2 \quad (26)$$

بنابراین، مسئله (۲۳) به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}, \|\mathbf{s}\|^2 = E_s} \mathbf{s}^H \mathbf{Q} \mathbf{s} + 2\Re(\mathbf{b}^H \mathbf{s}) \\ \text{s.t.} \quad \max_{n=0, \dots, N-1} |s(n)|^2 \leq \zeta \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن،  $\zeta_0$  سطح PAR مطلوب بوده و  $\zeta = \zeta_0 E_s / N$ . این مسئله NP-hard است و می‌توان با حل تکراری مسئله زیر با آن مواجهه کرد [۲۰]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}^{(k+1)}} \|\mathbf{s}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{s}}^{(k)}\| \\ \text{s.t.} \quad \max_{n=0, \dots, N-1} |s^{(k+1)}(n)|^2 \leq \zeta \\ \|\mathbf{s}^{(k+1)}\|^2 = E_s, \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن، بردار  $\hat{\mathbf{s}}^{(k)}$  شامل  $N$  درایه اول  $\mathbf{H}\mathbf{s}^{(k)}$  بوده،

$$\mu > \lambda_{\max}(\mathbf{K}) \quad \text{و} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^H & 0 \end{bmatrix}$$

(۲) طراحی کد تحت قید شباهت: در این حالت، برای  $\mathbf{y}$  ثابت با مسئله زیر مواجه هستیم:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \theta & \mathbf{s}^H \mathbf{T}^H \\ \mathbf{T} \mathbf{s} & \mathbf{R}_v + \mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H \end{bmatrix}. \quad (17)$$

دقت کنید که  $\mathbf{u}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u} = (f(s))^{-1}$  و با توجه به اینکه  $\mathbf{R} > 0$ ،  $f(\mathbf{s}) > 0$ ، مسئله (۱۷) نیز غیرمحدب است و پیشنهاد ما برای حل آن، استفاده از روش چرخشی برحسب  $\mathbf{y}$  و  $\mathbf{s}$  است. برای  $\mathbf{s}$  ثابت، پاسخ بهینه مسئله (۱۶) برای  $\mathbf{y}$  به‌صورت زیر است [۱۹]:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}} \quad (18)$$

برای  $\mathbf{y}$  ثابت، مسئله (۱۶) معادل با مسئله زیر است:

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{s} \in C} \mathbf{y}^H \mathbf{R} \mathbf{y} \quad (19)$$

اکنون، تابع هدف مسئله (۱۹) را برحسب  $\mathbf{y}$  بازنویسی می‌کنیم. اگر  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2^T]^T$ ، ترم‌های وابسته به  $\mathbf{y}$  در تابع هدف (۱۹)، به‌صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\text{tr}\{\mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_2^H\} + 2\Re(\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2^H \mathbf{T} \mathbf{s}) \quad (20)$$

دقت کنید که ترم رد در (۲۰)، تابعی ضمنی از  $\mathbf{y}$  است. برای نمایش صریح آن برحسب  $\mathbf{y}$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{S}^H \mathbf{y}_2 = \mathbf{Y}_2 \mathbf{s} \quad \text{که در آن،}$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & y_2(1) & \dots & y_2(M) \\ y_2(1) & \dots & y_2(M) & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

بنابراین، می‌توان اثبات نمود که،

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_2^H\} &= \mathbf{y}_2^H \mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H \mathbf{y}_2 \\ &= \mathbf{s}^H \mathbf{Y}_2^T \mathbf{R}_c \mathbf{Y}_2 \mathbf{s} = \mathbf{s}^T \mathbf{Y}_2^H \mathbf{R}_c \mathbf{Y}_2 \mathbf{s} \end{aligned} \quad (22)$$

تساوی آخر در رابطه بالا، با توجه به  $\mathbf{Y}_2^H \mathbf{R}_c \mathbf{Y}_2 \geq 0$ ، برقرار است. بنابراین، برای  $\mathbf{y}$  ثابت، مسئله (۱۶) به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{s} \in C} \mathbf{s}^H \mathbf{Q} \mathbf{s} + 2\Re(\mathbf{b}^H \mathbf{s}) \quad (23)$$

که در آن،  $\mathbf{b}^H = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2^H \mathbf{T}$  و  $\mathbf{Q} = \mathbf{Y}_2^T \mathbf{R}_c \mathbf{Y}_2$ . کمینه‌سازی چرخشی (۱۶) معادل با بیشینه‌سازی SINR تعریف شده در (۱۴) است [۱۹] را ببینید.

به‌منظور روشن شدن این مطلب، با تعریف  $g(\mathbf{y}, \mathbf{s}) = \mathbf{y}^H \mathbf{R} \mathbf{y}$ ، می‌توان مشاهده کرد که به ازای  $\mathbf{y}$ ی که (۱۷) را کمینه می‌کند، خواهیم داشت:

(۲۹) (تحت قید PAR) و یا (۳۰) (تحت قید شباهت) به دست می‌آید.

**تذکر ۲:** (مقاوم‌سازی الگوریتم در حالت TIR قطعی با ضریب انعکاس نامعلوم): با در نظر گرفتن عدم تطابق در دانش اولیه در مورد ماتریس‌های کوواریانس تداخل وابسته به سیگنال و تداخل مستقل از سیگنال، یعنی به ترتیب  $\mathbf{R}_c$  و  $\mathbf{R}_v$ ، حل مسئله بهینه‌سازی در بدترین حالت، می‌توان روش طراحی را در مقابل این عدم قطعیت‌ها مقاوم‌سازی نمود. به عنوان مثال، مجموعه عدم قطعیت برای  $\mathbf{R}_c$  می‌تواند به صورت  $\|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho$  در آن،  $\hat{\mathbf{R}}_c$  مقدار نامی  $\mathbf{R}_c$  بوده و  $\rho$  سایز مجموعه عدم قطعیت را تعیین می‌کند [۲۲]. بنابراین، با مسئله زیر روبرو خواهیم بود:

$$\min_{\mathbf{R}_c} \text{SINR}(s, \mathbf{R}_c) \quad (33)$$

$$\text{s.t.} \quad \|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho, \mathbf{R}_c \succeq 0.$$

پاسخ مقاوم که با حل بدترین حالت SINR روی مجموعه  $\|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho$  به دست می‌آید، به صورت  $\mathbf{R}_c = \hat{\mathbf{R}}_c + \rho \mathbf{I}$  خواهد بود (پیوست الف را ببینید). بنابراین، می‌توان روش بهینه‌سازی SINR که در الگوریتم ۱ آمده است را با جایگذاری  $\mathbf{R}_c$  با  $\hat{\mathbf{R}}_c + \rho \mathbf{I}$  در مقابل عدم قطعیت  $\mathbf{R}_c$ ، مقاوم‌سازی نمود.

**الگوریتم (۱):** طراحی کد مقید در حالت TIR قطعی با ضریب انعکاس نامعلوم

**Require:**  $\mathbf{T}, \mathbf{R}_v, \mathbf{R}_c, s_0, E_s, \zeta$ , and  $\delta$  or  $\zeta$ .

**Ensure:** A solution  $\mathbf{s}$  to the problem (15).

- 1: Set  $k = 0, \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}_0$ ;
- 2: **repeat**
- 3:  $k := k + 1$ ;
- 4: construct the matrix  $\mathbf{R}$  according to (17);
- 5: Construct  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2^T]^T$  using (18), and  $\mathbf{Y}_2$  using (21);
- 6: Let  $\mathbf{Q} = \mathbf{Y}_2^T \mathbf{R}_c \mathbf{Y}_2$  and  $\mathbf{b}^H = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2^H \mathbf{T}$ ; construct  $\mathbf{K}$
- 7: **if** PAR Constraint **then**
  - 8: Solve The problem (28) to obtain a solution  $\mathbf{s}^{(k)}$ ;
- 9: **else if** Similarity Constraint **then**
- 10: Construct the matrices  $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^4$ , according to (31);
- 11: Solve (34) to obtain an optimal solution  $\mathbf{X}$ ;
- 12: Find the rank-one solution  $\mathbf{x}\mathbf{x}^H$  for the optimal solution  $\mathbf{X}$  according to [21, Theorem 2.3];
- 13: For  $\mathbf{x} = [(\mathbf{s}^*)^T a^*]^T$ , let  $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^*/a^*$ ;
- 14: **end if**
- 15 **until**  $|(s^{(k)}) - (s^{(k-1)})| \leq \xi$
- 16: **Output**  $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(k)}$ .

$$\min_{\mathbf{s} \|\mathbf{s}\|^2 = E_s} \mathbf{s}^H \mathbf{Q} \mathbf{s} + 2\Re(\mathbf{b}^H \mathbf{s}) \quad (29)$$

$$\text{s.t.} \quad \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \delta$$

که در آن،  $\mathbf{s}_0$ ، کد داده شده با ویژگی‌های مطلوب بوده و پارامتر  $\delta \geq 0$ ، میزان شباهت را کنترل می‌کند. مسئله QCQP بالا، دارای تحدب پنهان بوده و بنابراین، آزادسازی نیمه‌معین آن چسبیده است. در نتیجه، پاسخ بهینه سراسری آن از طریق حل یک مسئله نیمه معین SDP<sup>۱</sup>، قابل محاسبه است (برای جزئیات بیشتر [۳] را ببینید). به این منظور، با استفاده از متغیر کمکی  $a$  و تعریف

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}\mathbf{s}^H & \mathbf{s}a^* \\ \mathbf{s}^H a & |a|^2 \end{bmatrix}$$

می‌توان مسئله بهینه‌سازی (۲۸) را به طور معادل بر حسب  $\mathbf{Z}$  و با اعمال قید رتبه‌یک بودن  $\mathbf{Z}$  بیان کرد. با آزادسازی قید رتبه یک، مسئله SDP مربوط به مسئله (۲۹)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\min_{\mathbf{Z} \succeq 0} \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{Z})$$

$$\text{s.t.} \text{tr}(\mathbf{A}_2 \mathbf{Z}) = E_s, \text{tr}(\mathbf{A}_3 \mathbf{Z}) \leq 0, \text{tr}(\mathbf{A}_4 \mathbf{Z}) = 1 \quad (30)$$

که در آن،  $\mathbf{A}_i$  ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}_0^H & \|\mathbf{s}_0\|^2 - \delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

اگر  $\mathbf{X}$  پاسخ مسئله SDP بیان شده در (۳۰) باشد، یک جواب رتبه یک  $\mathbf{x}\mathbf{x}^H$  به مسئله (۲۹)، از طریق قضیه شناخته شده تجزیه رتبه یک قابل حصول است [۲۱]. با استفاده از این قضیه، پاسخ بهینه مسئله (۲۹) از طریق حل مسئله SDP بیان شده در (۳۰) به دست می‌آید. اگر  $[(\mathbf{s}^*)^T a^*]^T$  پاسخ بهینه (۲۹) باشد، پاسخ مسئله (۲۹)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^*/a^*. \quad (32)$$

الگوریتم ۱ رویکرد طراحی کد برای TIR قطعی (با ضریب انعکاس نامعلوم) را خلاصه می‌کند. در تکرار  $k$ ام الگوریتم چرخشی پیشنهادی، پاسخ  $\mathbf{y}$  (بردار کمکی)، با استفاده از رابطه بسته (۱۸) محاسبه می‌شود. از سوی دیگر، پاسخ  $\mathbf{s}^{(k)}$  با حل مسئله

<sup>1</sup> Semidefinite Program

#### ۲-۴- TIR تصادفی و گوسی

در این زیرفصل، TIR را به صورت فرآیند تصادفی گوسی مدل می‌کنیم. در این حالت، یافتن ارتباط بین احتمال هشدار کاذب و آشکارسازی با پارامترهای طراحی کد، بسیار پیچیده بوده و نمی‌توان از این معیارها در طراحی بهره برد. بنابراین، از رویکردی مبتنی بر تئوری اطلاعات استفاده کرده و MI بین TIR یعنی  $\mathbf{t}$  و سیگنال دریافتی  $\mathbf{r}$  (با فرض داشتن  $\mathbf{s}$ ) را به عنوان معیار طراحی برمی‌گزینیم [۲]. با استفاده از بردار سفیده شده  $\tilde{\mathbf{r}}$ ، خواهیم داشت:

$$MI(\mathbf{s}) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{r}}; \mathbf{t} | \mathbf{s}) = h(\tilde{\mathbf{r}} | \mathbf{s}) - h(\tilde{\mathbf{r}} | \mathbf{t}, \mathbf{s})$$

$$= \log |\mathbf{M}| - \log |\mathbf{I}| = \log \left| \mathbf{R}_s^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} \mathbf{R}_t \mathbf{S}^H \mathbf{R}_s^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{I} \right| \quad (۴)$$

برای محاسبه روابط بالا، از خواص دترمینان استفاده شده است [۳۲]. پس، مسئله طراحی بر مبنای MI به صورت مسئله بیشینه‌سازی زیر قابل نوشتن است:

$$\max_{\mathbf{s} \in \tilde{C}_s} \log \left| \mathbf{R}_s^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} \mathbf{R}_t \mathbf{S}^H \mathbf{R}_s^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{I} \right| \quad (۳۵)$$

که در آن،  $C$  مجموعه کد مطلوب بوده و  $\mathbf{R}_s = \mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v$  (که به بردار کد  $\mathbf{s}$  وابسته است). مسئله بهینه‌سازی ارائه شده در (۳۵) غیرمحدب است که برای حل آن، یک روش تکرار بر اساس روش MM پیشنهاد خواهیم کرد [۲۴]. روش MM یک روش تکرار است که برای به دست آوردن پاسخ مسئله بهینه‌سازی عمومی زیر به کار می‌رود:

$$\min_{\mathbf{x}} \tilde{c}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad f(\mathbf{x}) \quad (۳۶)$$

تکرار  $k$ ام روش MM شامل دو گام زیر است [۲۴]:

**گام ماژوریزه<sup>۱</sup> کردن:** تابع  $p^{(k)}(\mathbf{x})$  را به نحوی می‌یابیم که کمینه کردن آن ساده‌تر از کمینه کردن  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  بوده و تابع  $p^{(k)}(\mathbf{x})$ ،  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  را ماژوریزه کند:

$$p^{(k)}(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \quad (۳۷)$$

$$p^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \tilde{f}(\mathbf{x}^{(k-1)}),$$

که در آن، مقدار  $\mathbf{x}^{(k-1)}$  در تکرار  $k-1$ ام است.

**گام کمینه‌سازی:** مسئله کمینه‌سازی زیر را برای به دست آوردن  $\mathbf{x}^{(k)}$  حل می‌کنیم:

$$\min_{\mathbf{x}} \tilde{c}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad p^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (۳۸)$$

توجه داشته باشید که اعمال روش MM بر مسئله‌ی بهینه‌سازی (۳۸) مقدار تابع هدف را در هر تکرار، کاهش می‌دهد [۲۴]. با توجه به این نکته و اینکه  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  از پایین کراندار است، می‌توان نتیجه گرفت که دنباله‌ی مقادیر تابع هدف  $\{\tilde{f}(\mathbf{x}^{(k)})\}_k$  همگراست. در ادامه، روشی بر اساس روش MM برای حل مسئله غیرمحدب (۳۵) پیشنهاد می‌کنیم. به این منظور، می‌توان مشاهده نمود که:

$$\log \left| \mathbf{R}_s^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} \mathbf{R}_t \mathbf{S}^H \mathbf{R}_s^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{I} \right| \quad (۳۹)$$

$$= \log \left| \mathbf{R}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^H \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}_t^{\frac{1}{2}} + \mathbf{I} \right|.$$

با تعریف  $\mathbf{W} = \mathbf{R}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^H (\mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}_t^{\frac{1}{2}} + \mathbf{I}$  و استفاده از لم معکوس‌سازی ماتریس در [۲۳]، می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^H (\mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}_t^{\frac{1}{2}}, \quad (۴۰)$$

که در آن،  $\mathbf{R}_{ct} = (\mathbf{R}_c + \mathbf{R}_t) \in C^{P \times P}$ . اکنون با تعریف

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^H \\ \mathbf{S} \mathbf{R}_t^{\frac{1}{2}} & \mathbf{S} \mathbf{R}_{ct} \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v \end{bmatrix}_{(M+P) \times (M+P)}, \quad (۴۱)$$

و  $\mathbf{U} = [\mathbf{I}_{P \times P} \mathbf{0}_{P \times M}]^T$ ، می‌توان نشان داد  $\mathbf{U}^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{W}$ . در نتیجه، می‌توان با استفاده از (۳۹)، مسئله (۳۵) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\max_{\mathbf{s}, \mathbf{s} \in \tilde{C}} \log \left| \mathbf{U}^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U} \right| \quad (۴۲)$$

از لم زیر برای ماژوریزه کردن تابع هدف استفاده خواهیم کرد.

لم ۱ [۲۵]: اگر ماتریس  $\mathbf{U}$  دارای رتبه کامل ستونی باشد، تابع  $f(\mathbf{Z}) = \log \left| \mathbf{U}^H \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{U} \right|$  نسبت به  $\mathbf{Z} \succ 0$  محدب است. با استفاده از مکمل شور<sup>۲</sup>، می‌توان نشان داد که ماتریس  $\mathbf{B}$  مثبت معین است:

$$\mathbf{S} \mathbf{R}_{ct} \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v - \mathbf{S} \mathbf{R}_t \mathbf{S}^H = \mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v \succ 0.$$

بنابراین، تابع هدف مسئله (۴۲)، نسبت به  $\mathbf{B}$  محدب بوده و توسط فوق صفحه پشتیبان آن ماژوریزه می‌شود:

<sup>2</sup> Schur Complement

<sup>1</sup> Majorize

روش، تحت برخی شرایط خفیف، نقاط ایستای مسئله (۳۵) هستند [۲۴].

الگوریتم (۲): طراحی کد مقید در حالت TIR تصادفی و گوسی

**Require:**  $\mathbf{R}_t, \mathbf{R}_p, \mathbf{R}_c, \mathbf{s}_0, E_s, \xi, \delta$  or  $\zeta$ .

**Ensure:** A solution  $\mathbf{s}$  to the problem (39).

- 1: Set  $k = 0, \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}_0$ ;
- 2: **repeat**
- 3:  $k := k + 1$ ;
- 4: Construct  $\mathbf{B}^{(k)}$  and  $\mathbf{F}^{(k)}$ , according to (45) and (49).
- 5: Find a solution  $\mathbf{s}^{(k)}$  to the problem (53), following the techniques developed in subsection 1.4;
- 6: **until**  $|\text{MI}(\mathbf{s}^{(k)}) - \text{MI}(\mathbf{s}^{(k-1)})| \leq \xi$
- 7: Output  $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(k)}$ .

تذکر ۳: برای مقاومسازی روش ارائه شده در مقابل عدم قطعیت ماتریس‌های کوواریانس تداخل، مشابه با آنچه در تذکر ۲ گفته شد، می‌توان مسئله بهینه‌سازی را در بدترین حالت روی  $\mathbf{R}_c$  (یا  $\mathbf{R}_p$ ) با توجه به مجموعه  $\rho$   $\|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho$  حل نمود. در این صورت، با مسئله زیر مواجه خواهیم بود:

$$\min_{\mathbf{R}_c} \text{MI}(\mathbf{s}, \mathbf{R}_c) \quad (48)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{R} - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho, \mathbf{R}_c \succeq 0.$$

بدترین حالت MI روی مجموعه  $\rho$   $\|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho$ ، به-ازای  $\mathbf{R}_c = \hat{\mathbf{R}}_c + \rho \mathbf{I}$  حاصل خواهد شد (پیوست ب را ببینید). بنابراین، روش ارائه شده در الگوریتم ۲ را می‌توان با جایگزینی  $\mathbf{R}_c$  با  $\hat{\mathbf{R}}_c + \rho \mathbf{I}$ ، در مقابل عدم قطعیت  $\mathbf{R}_c$  مقاوم نمود.

### ۵- تحلیل عددی

در این بخش، تحلیل‌های عددی متعددی برای ارزیابی کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی انجام می‌دهیم. تمرکز اصلی ما بر کارایی آشکارسازی سامانه است که برای این منظور، شاخصه عملکرد گیرنده<sup>۱</sup> (ROC) مربوط به آشکارساز NP را به‌ازای سیگنال‌های بهینه‌شده به‌کار می‌گیریم. همچنین، رفتار SINR را

$$\log|\mathbf{U}^H \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}| \geq \log|\mathbf{U}^H \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{U}| + \text{tr}(\mathbf{F}^{(k)} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)),$$

که در آن،

$$\mathbf{F}^{(k)} = -\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{B}_0^{-1} \in C^{(M+P) \times (M+P)} \quad (43)$$

و  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}^{(k)}$ ، پاسخ به‌دست‌آمده برای  $\mathbf{B}$  در تکرار  $k$  ام است. پس، در تکرار  $k+1$  ام، لازم است که مسئله زیر حل شود:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{s}} \text{tr}(\mathbf{F}^{(k)} \mathbf{B}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{s} \in C. \end{aligned} \quad (44)$$

با توجه به اینکه ماتریس  $\mathbf{B}$  تعریف‌شده در (۴۱) تابعی از  $\mathbf{S}$  است، می‌توان نمایش صریح تابع هدف بالا را بر حسب  $\mathbf{s}$  به‌دست آورد. با نمایش

$$\mathbf{F}^{(k)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_{11}^{(k)})_{P \times P} & (\mathbf{F}_{12}^{(k)})_{P \times M} \\ (\mathbf{F}_{12}^{(k)})_{M \times P}^H & (\mathbf{F}_{22}^{(k)})_{M \times M} \end{bmatrix} \quad (45)$$

و صرف‌نظر کردن از جملات ثابت، تابع هدف (۴۴) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\text{tr}(\mathbf{F}_{22}^{(k)} \mathbf{S} \mathbf{R}_c \mathbf{S}^H) + 2\Re\{\text{tr}(\mathbf{R}_t^{1/2} \mathbf{F}_{12}^{(k)} \mathbf{S})\} \quad (46)$$

در نهایت، مسئله بهینه‌سازی در تکرار  $(k+1)$  ام روش پیشنهادی، به‌صورت زیر بر حسب  $\mathbf{s}$  قابل بیان است (برای جزئیات بیشتر، پیوست ج را ببینید):

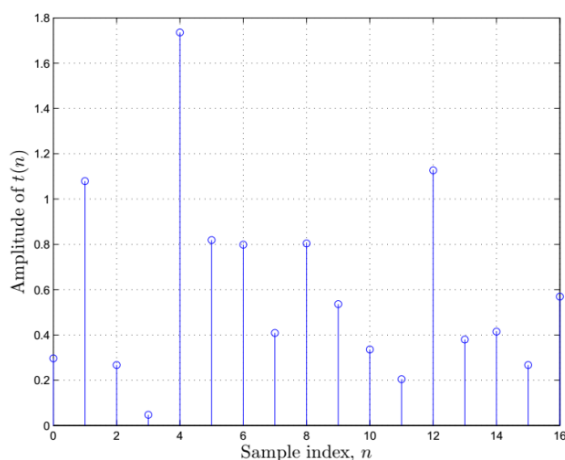
$$\max_{\mathbf{s}, \mathbf{s} \in C} \mathbf{s}^H \tilde{\mathbf{Q}}^{(k)} \mathbf{s} + 2\Re\{(\tilde{\mathbf{b}}^{(k)})^H \mathbf{s}\} \quad (47)$$

که در آن،  $\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}$  و  $\tilde{\mathbf{b}}^{(k)}$  پیوست ج داده شده‌اند. دقت کنید که مسئله (۴۷)، تحت هر دو قید PAR و یا شباهت، یک مسئله QCQP است (زیرفصل ۴-۱ را ببینید). این مسئله، با روش‌های مشابه با آنچه در زیرفصل ۴-۱ ارائه شد، قابل حل است. الگوریتم ۲، روش طراحی کد در حالت TIR تصادفی و گوسی را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که پاسخ‌های به‌دست‌آمده از این

<sup>1</sup> Receiver Operating Characteristic



نمودارهای SINR روند یکنوا صعودی داشته و همگرا می‌شوند. نمودارهای ROC متناظر با کدهای بهینه‌شده مربوط به شکل (۲-الف) در شکل (۲-ب) ترسیم شده‌اند (با استفاده از (۹)). مقادیر SINR مربوط به کد سنتز شده (در حوزه زمانی) که در [۸] ارائه شده است، نیز در این شکل ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که کارایی سامانه مبتنی بر کد پیشنهاد شده، به‌طور قابل توجه بهتر از سامانه مبتنی بر کد سنتز شده تحت روش مطرح شده در [۸] و یا شکل موج LFM است. این امر ناشی از آن است که روش طراحی پیشنهادی دچار تلفات سنتز نمی‌شود. به‌علاوه، در قیاس با طراحی نامقید، افت ناچیزی در مقادیر SINR و  $P_d$  در شکل‌ها مشاهده می‌شود که این موضوع به دلیل اعمال قید مدول-ثابت و در نتیجه، داشتن یک فضای جواب کوچک‌تر است. رفتار مشابهی تحت نواحی تشابه مختلف مشاهده می‌شود. این مشاهدات بهره‌گیری از کدهای مدول-ثابت، که مصالحه‌ای بین مزایای عملی و کاهش جزئی در کارایی آشکارسازی دارند را تایید می‌کند. باید توجه داشت که درجات آزادی فراهم شده از طریق پارامترهای  $\xi$  و  $\delta$ ، به کاربر اجازه می‌دهد که در خصوص افت کارایی آشکارسازی در ازای مزایای عملی در طراحی کد، تصمیم‌گیری کند. همچنین شایان توجه است که، با وجود بهره محدود ۲ dB ناشی از پردازش به‌دست‌آمده برای این سیگنال‌ها (به‌ازای نقطه شروع سیگنال LFM)، ملاحظه می‌شود که همین بهره محدود توانسته است احتمال آشکارسازی را از ۰/۷ به ۰/۹۶ ارتقاء دهد (به‌ازای  $P_{fa}=10^{-5}$ )، که کارایی الگوریتم پیشنهادی را بیان می‌نماید<sup>۱</sup>.



شکل (۱): دامنه دنباله TIR قطعی.

برای حالت TIR قطعی، و رفتار MI را برای حالت TIR تصادفی، در خروجی فیلتر گیرنده تحلیل می‌کنیم. به‌علاوه، مثال‌هایی از طراحی کد ارسالی با قید PAR و قید شباهت ارائه خواهیم داد.

فرض می‌کنیم که تداخل، سفید با واریانس  $\sigma_v^2 = 1$  است (یعنی،  $\mathbf{R}_v = \mathbf{I}$ ) و داریم  $SNR = E_s / \sigma_v^2 = E_s$ . به‌علاوه، یک محیط کلاتر همگن که با تابع خودهم‌بستگی نمایی توصیف می‌شود، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۰]:

$$r_c(n, n') = \sigma_c^2 \rho_c^{|n-n'|}, \quad (49)$$

$$(n, n') \in \{-N+1, \dots, M-1\}^2,$$

که در آن  $\rho_c = 0.9$  [۲۶] و  $\sigma_c^2 = E[c(n)^2] = 1$  (یعنی نسبت تداخل وابسته به سیگنال به نویز برابر است با  $CNR = E_s \sigma_c^2 / \sigma_v^2 = E_s$  و داریم  $SCR = E_s / E_s = 0dB$ ). همچنین، به‌منظور مقایسه، SINR و MI مربوط به شکل موج فرکانس مدوله‌شده خطی (LFM) که با رابطه زیر تعیین می‌شود را گزارش می‌کنیم:

$$s_0(n) = \sqrt{\frac{E_s}{N}} e^{j\pi \frac{n^2}{2N}}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (50)$$

از شکل موج LFM بالا، همچنین به‌عنوان کد مرجع مربوط به قید شباهت استفاده شده است. در خصوص قید شباهت، برای کنترل اندازه ناحیه تشابه، فرض می‌کنیم  $\delta_0 = \delta / E_s$ . علاوه بر آن، آستانه توقف روش‌های پیشنهادی را  $\xi = 10^{-4}$  قرار می‌دهیم. در نهایت، برای حل مسائل بهینه‌سازی از جعبه‌ابزار CVX استفاده می‌کنیم [۲۷].

### ۵-۱- TIR قطعی

در این زیربخش، حالت TIR قطعی را در نظر می‌گیریم؛ بدین معنی که ساختار پاسخ ضربه هدف معلوم در نظر گرفته می‌شود. طول بازه پشتیبانی برابر است با  $Q = 17$ . شکل (۱)، دامنه‌های دنباله TIR را نمایش می‌دهد. در شبیه‌سازی‌ها، فرض می‌کنیم  $N = 20$  و  $E_s = 20$  و نیز ضریب انعکاس، متغیری تصادفی با  $E\{|\alpha|\} = \sqrt{2}$  در نظر گرفته شده است.

در شکل (۲-الف)، رفتار SINR به‌صورت تابعی از تعداد تکرار برای طراحی نامقید ( $\xi_0 = N$ )، یعنی تنها با قید انرژی، طراحی مدول-ثابت ( $\xi_0 = 1$ ) و طراحی با قید شباهت ( $\{0.1, 0.5\}$ ) مدول-ثابت ( $\xi_0 = 1$ ) نمایش داده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رفت،  $\delta_0 \in$

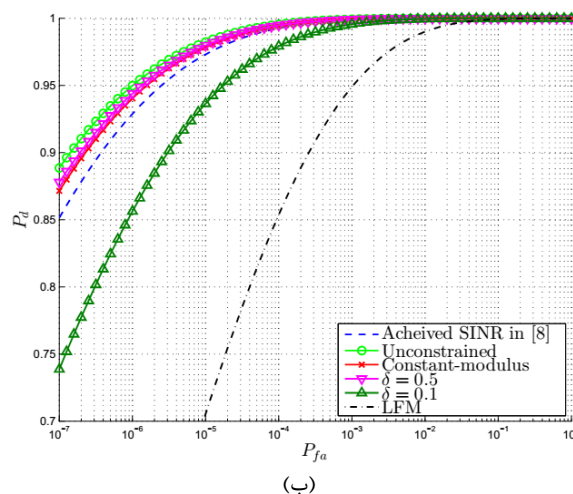
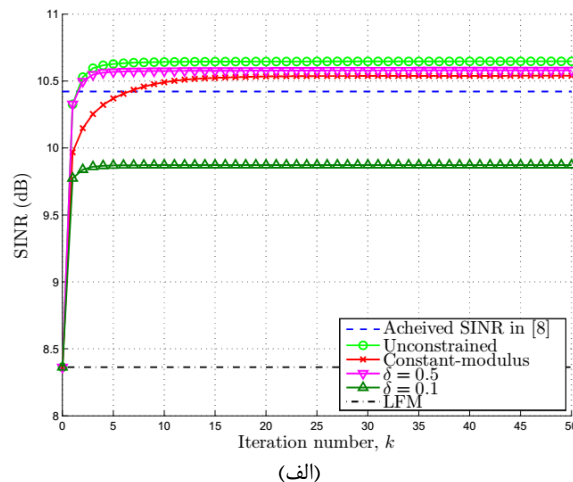
<sup>۱</sup> بهبود کارایی آشکارسازی مذکور می‌تواند ناظر به فاز تایید آشکارسازی اولیه هدف (Confirmation) باشد. در سناریوهای ناظر به ردگیری هدف، عمدتاً بهبود SINR تعیین‌کننده است.

در شکل (۳-الف) مطالعه شده‌اند. به‌علاوه، MI به‌دست‌آمده در [۸] نیز به‌منظور مقایسه در این شکل آورده شده است. ملاحظه می‌شود که نمودارهای MI برای طراحی‌های مقید مختلف، توابعی یکنوا صعودی برحسب تعداد تکرار هستند که این موضوع همساز با ماهیت روش MM است. به‌علاوه، هرچه فضای جواب بزرگتر باشد (یعنی  $\xi_0$  یا  $\delta_0$  بزرگتر)، مقدار MI نیز بزرگتر است. اضافه بر آن، این نمودارها به خوبی نشان می‌دهند که روش طراحی پیشنهادی، حتی در حالت‌های مدول-ثابت و نیز تحت قید شباهت، می‌تواند با تقریب خوبی به همان MI به‌دست‌آمده در [۸] برسد، هرچند که روش ارائه‌شده در [۸]، یک طراحی نامقید است.

در ادامه، به‌منظور نمایش ارتباط بین بهینه‌سازی MI و بهبود کارایی آشکارساز، ROC آشکارساز بهینه بیان شده در (۱۳) را در نظر می‌گیریم. شکل (۳-ب) نمودار ROC متناظر با کد بهینه ارائه‌شده در شکل (۳-الف) را نشان می‌دهد (که با استفاده از روابط (۱۶-۱۵) از [۱۸] به‌دست آمده است). همچنین، در این شکل، ROC مربوط به شکل موج LFM نشان داده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود، بهینه‌سازی MI منجر به بهبود کارایی آشکارساز می‌شود. به ویژه، کدهای با MI بیشتر، منجر به کارایی آشکارسازی بهتری می‌شوند که این موضوع، انتخاب معیار MI را به‌عنوان روندی غیرمستقیم برای طراحی کد به‌منظور بهینه‌سازی کارایی آشکارسازی، ثابت می‌کند [۲]. به‌علاوه، کارایی آشکارسازی مربوط به سامانه با دنباله کد بهینه‌شده، به‌طور قابل ملاحظه‌ای برتر از سامانه با شکل موج LFM است.

### ۵-۳- اثر طول کد تحت توان ارسالی ثابت

در این قسمت، به بررسی اثر طول کد ارسالی  $N$  بر کارایی سامانه در حالت TIR تصادفی، با در نظر گرفتن توان ارسالی ثابت و با فرض  $E_s = N$  می‌پردازیم. شکل (۴) مقادیر MI را برحسب طول کدهای مختلف، برای حالت‌های طراحی نامقید، طراحی مدول-ثابت و طراحی‌های با قید شباهت (به ازای  $\{0.1, 0.5\}$ )،  $\delta_0 \in$ ، نمایش می‌دهد. این شکل، همچنین رفتار شکل موج LFM و نیز کد به‌دست‌آمده در [۸] را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده شده است، مشاهده می‌شود که همه نمودارهای MI به‌صورت یکنوا صعودی هستند. این امر با توجه به این واقعیت که افزایش طول کد در یک توان ثابت، درجات آزادی بیشتری برای بهینه‌سازی فراهم می‌کند، توجیه می‌شود. همچنین، ملاحظه می‌شود که نمودار مربوط به طراحی مدول-ثابت، رفتاری بسیار مشابه به رفتار طراحی نامقید دارد. این نتیجه، استفاده از شکل موج مدول-ثابت به جای شکل موج نامقید در کاربردهای رادار را، با توجه به مزایای عملی



شکل (۲): الف) مقادیر SINR بر حسب شماره تکرار در حالت TIR قطعی و برای قیود مختلف و ب) ROC مربوط به آنها به ازای SINR به‌دست‌آمده برای هر یک.

### ۵-۲- TIR تصادفی و گوسی

در این قسمت، فرض می‌کنیم که میزان آگاهی ما از هدف، محدود به آمارگان آن است؛ به این معنی که TIR به‌صورت یک بردار تصادفی گوسی مختلط با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس معلوم مدل می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که ماتریس کوواریانس TIR، نمایی شکل به قرار زیر است:

$$E[t(n)t(n')] = \sigma_t^2 \rho_t^{|n-n'|}, \quad (n, n') \in \{-N+1, \dots, M-1\}^2, \quad (51)$$

که در آن،  $\sigma_t^2 = E[|t(n)|^2] = 1$  و  $\rho_t = 0.1$  (مشابه مدل ارائه‌شده در [۱۷]) است. ابتدا، مقادیر معیار طراحی (یعنی MI) را برحسب تعداد تکرار در نظر می‌گیریم. حالت‌های طراحی نامقید، مدول-ثابت (با  $\xi_0 = 1$ ) و قید تشابه (با  $\xi_0 \in \{0.1, 0.2\}$ )

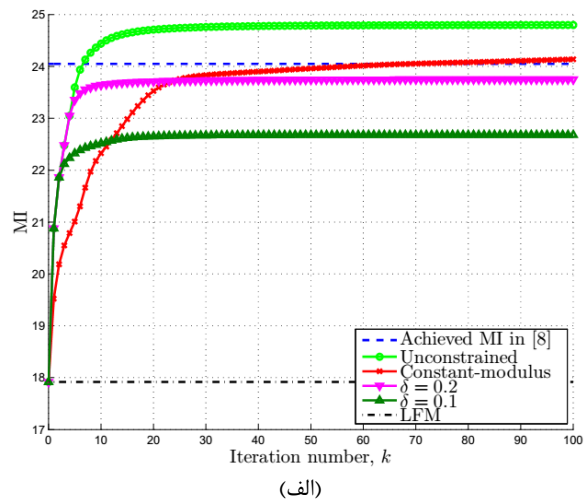
### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، طراحی کد ارسالی برای افزایش کارایی آشکارسازی اهداف گسترده در حضور تداخل وابسته به سیگنال در نظر گرفته شده است. قیود شباهت و PAR به طور جداگانه در مرحله طراحی اعمال شدند. به علاوه، دو سناریوی مختلف برای TIR مورد بحث قرار گرفت: (۱) TIR قطعی با ضریب انعکاس نامعلوم، و (۲) TIR تصادفی گوسی با آمارگان معلوم. در مورد نخست، رابطه کارایی آشکارساز بهینه با SINR تعیین شد و مسأله طراحی با استفاده از SINR به عنوان معیار طراحی طرح شد. برای مورد دوم، MI بین TIR و سیگنال گیرنده، به عنوان معیار طراحی به کار گرفته شد. روش‌هایی ابداعی بر اساس بهینه‌سازی چرخشی و روش MM به منظور فائق آمدن بر مسائل شدیداً نامحدب تدبیر شد. به علاوه، روش‌های دیگری برای مقاوم‌سازی طراحی در مقابل عدم قطعیت در آمارگان تداخل ارائه شد. پاسخ‌های به دست آمده، نقاطی ایستا از مسأله (تحت شرایط خفیف) بودند. مثال‌های متعددی برای برجسته کردن کارایی روش‌های پیشنهادی ارائه شد. به طور ویژه، بهبودهای چشمگیری در خصوص روش طراحی ارائه شده در [۸] و نیز شکل موج مرسوم LFM، در شرایط مختلف مشاهده شد. توجه شود که در این مطالعه اهداف، ثابت در نظر گرفته شدند و فرض کردیم آمارگان کلاتر و تداخل در مرحله طراحی در دسترس هستند. در نظر گرفتن اهداف متحرک و نیز ارایه روش‌های مقاوم در برابر نامعینی‌های آمارگان کلاتر و تداخل می‌توانند موضوعاتی برای تحقیقات بعدی باشد.

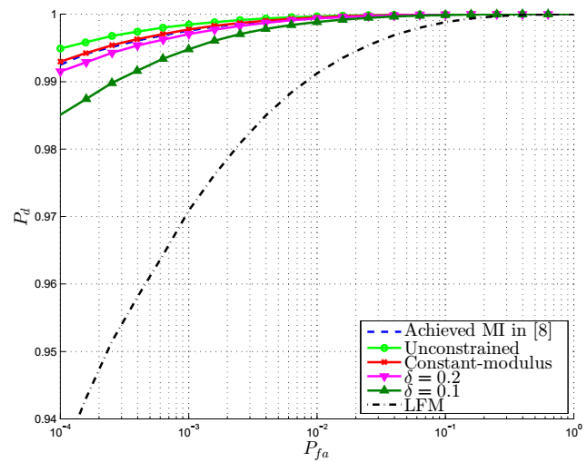
### ۷- منابع

- [1] F. Gini, A. De Maio, and L. Patton, "Waveform Design and Diversity for Advanced Radar Systems," London, UK: Institution of Engineering and Technology, 2012.
- [2] M. R. Bell, "Information Theory and Radar Waveform Design," vol. 39, no. 5, pp. 1578–1597, 1993.
- [3] A. Aubry, A. De Maio, A. Farina, and M. Wicks, "Knowledge-Aided (Potentially Cognitive) Transmit Signal and Receive Filter Design in Signal-Dependent Clutter," vol. 49, no. 1, pp. 93–117, 2013.
- [4] A. De Maio, "Polarimetric Adaptive Detection of Range Distributed Targets," vol. 50, no. 9, pp. 2152–2159, 2002.
- [5] A. Aubry, A. De Maio, L. Pallotta, and A. Farina, "Radar Detection of Distributed Targets in Homogeneous Interference Whose Inverse Covariance Structure is Defined via Unitary Invariant Functions," vol. 61, no. 20, pp. 4949–4961, 2013.
- [6] S. M. Karbasi, A. Aubry, A. De Maio, and M. H. Bastani, "Robust Transmit Code and Receive Filter

سیگنال‌های مدول-ثابت، به خوبی توجیه می‌نماید. نتایج برای حالت TIR قطعی، مشابه خواهد بود.

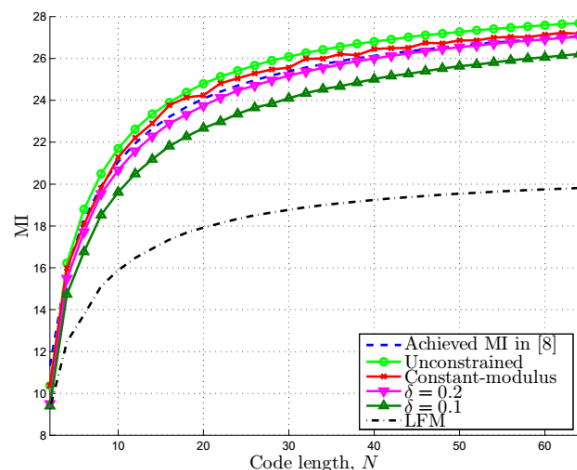


(الف)



(ب)

شکل (۳): (الف) مقادیر MI بر حسب شماره تکرار در حالت TIR تصادفی تحت قیود مختلف و (ب) نمودارهای ROC مربوط به آنها به‌ازای MI به دست آمده برای هر یک.



شکل (۴): مقادیر MI بر حسب طول کد برای روش‌های مختلف و در حالت TIR تصادفی.

- [21] W. Ai, Y. Huang, and S. Zhang, "Further Results on RankOne Matrix Decomposition and its Application," Math. Program, 2008.
- [22] S. M. Karbasi, A. Aubry, V. Carotenuto, M. M. Naghsh, and M. H. Bastani, "Knowledge-based Design of SpaceTime Transmit Code and Receive Filter for a MultipleInput Multiple-Output Radar in Signal-dependent Interference," vol. 9, pp. 1124–1135, September 2015.
- [23] R. Horn and C. Johnson, Matrix Analysis, "Matrix Analysis," Cambridge University Press, 2012.
- [24] P. Stoica and Y. Selen, "Cyclic Minimizers, Majorization Techniques, and the Expectation-Maximization Algorithm: a Refresher," vol. 21, pp. 112 – 114, Jan 2004.
- [25] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, "Convex Optimization," Cambridge University Press, 2004.
- [26] M. Skolnik, "Radar Handbook," New York: McGraw-Hill, Third ed., 2008.
- [27] M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye, "CVX: MATLAB Software for Disciplined Convex Programming," 2008.
- [7] S. Pillai, H. Oh, D. Youla, and J. Guerci, "Optimal Transmit-Receiver Design in the Presence of Signal Dependent Interference and Channel Noise," vol. 46, no. 2, pp. 577–584, 2000.
- [8] R. Romero and N. Goodman, "Waveform Design in Signal-Dependent Interference and Application to Target Recognition with Multiple Transmissions," vol. 3, no. 4, pp. 328–340, 2009.
- [9] F. Yin, C. Debes, and A. M. Zoubir, "Parametric Waveform Design using Discrete Prolate Spheroidal Sequences for Enhanced Detection of Extended Targets," vol. 60, no. 9, pp. 4525–4536, 2012.
- [10] S. M. Karbasi, M. M. Naghsh, and M. H. Bastani, "Transmit Code Design for Extended Target Detection in the Presence of Clutter," ICASSP, (Australia), 2015.
- [11] C. Y. Chen and P. P. Vaidyanathan, "MIMO Radar Waveform Optimization with prior Information of the Extended Target and Clutter," vol. 57, no. 9, pp. 3533–3544, 2009.
- [12] B. Tang, J. Tang, and Y. Peng, "Waveform Optimization for MIMO Radar in Colored Noise: Further Results for Estimation-Oriented Criteria," vol. 60, pp. 1517–1522, March 2012.
- [13] B. Tang, M. M. Naghsh, and J. Tang, "Relative EntropyBased Waveform Design for MIMO Radar Detection in the Presence of Clutter and Interference," vol. 63, pp. 3783–3796, July 2015.
- [14] J. R. Guerci, "Cognitive Radar: a Knowledge-aided Fully Adaptive Approach," in IEEE Radar Conference, pp. 1365–1370, 2010.
- [15] S. M. Kay, "Fundamentals of Statistical Signal Processing," vol. II: Detection Theory, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- [16] A. De Maio, S. De Nicola, Y. Huang, S. Zhang, and A. Farina, "Code Design to Optimize Radar Detection Performance Under Accuracy and Similarity Constraints," vol. 56, no. 11, pp. 5618–5629, 2008.
- [17] Y. Yang and R. S. Blum, "MIMO Radar Waveform Design Based on Mutual Information and Minimum Mean-Square Error Estimation," vol. 43, no. 1, pp. 330–343, 2007.
- [18] M. M. Naghsh and M. Modarres-Hashemi, "Exact Theoretical Performance Analysis of Optimum Detector for Statistical MIMO Radars," vol. 6, pp. 99–111, 2012.
- [19] M. M. Naghsh, M. Soltanalian, P. Stoica, and M. Modarres-Hashemi, "Radar Code Design for Detection of Moving Targets," vol. 50, pp. 2762–2778, October 2014.
- [20] J. A. Tropp, I. S. Dhillon, R. W. Heath, and T. Strohmer, "Designing Structured Tight Frames via an Alternating Projection Method," vol. 51, no. 1, pp. 188–209, 2005.

### پیوست‌ها

الف) پاسخ مسئله (۳۳):

مسئله کمینه‌سازی (۳۳) با مسئله زیر معادل است:

$$\min_{\mathbf{R}_c} \text{tr}((\mathbf{S}\mathbf{R}_c\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1}\mathbf{A}) \quad (52)$$

$$s.t. \quad \|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho, \mathbf{R}_c \succeq 0.$$

که در آن،  $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{T}^H$ . دقت کنید که قید  $\|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho$  معادل

$$\left| \lambda_i(\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c) \right| \leq \rho, (i = 1, \dots, N) \text{ با}$$

بنابراین،  $\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c \preceq \rho\mathbf{I}$  و در نتیجه  $\mathbf{R}_c \preceq \hat{\mathbf{R}}_c + \rho\mathbf{I}$ . لذا، پاسخ بهینه به (۵۸) برابر با  $\mathbf{R}_c^* = \hat{\mathbf{R}}_c + \rho\mathbf{I}$  است. زیرا برای

هر  $\mathbf{R}_1 \preceq \mathbf{R}_2$ ، خواهیم داشت:  $\mathbf{S}\mathbf{R}_1\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v \preceq \mathbf{S}\mathbf{R}_2\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v$

$$\text{و یا بطور معادل، } (\mathbf{S}\mathbf{R}_2\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1} \preceq (\mathbf{S}\mathbf{R}_1\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1},$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{tr}((\mathbf{S}\mathbf{R}_1\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1}\mathbf{A}) \geq \text{tr}((\mathbf{S}\mathbf{R}_2\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1}\mathbf{A})$$

ب) پاسخ مسئله (۴۸):

مسئله کمینه‌سازی (۴۸)، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\min_{\mathbf{R}_c} \left| (\mathbf{S}\mathbf{R}_c\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v)^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{I} \right| \quad (53)$$

$$s.t. \quad \|\mathbf{R}_c - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho, \mathbf{R}_c \succeq 0,$$

که در آن،  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^H$ . ابتدا توجه داشته باشید که  $f(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{I}\|$  تابعی که از  $\mathbf{X} \succeq 0$  است. علاوه بر این، قید  $\|\mathbf{R} - \hat{\mathbf{R}}_c\|_2 \leq \rho$  با  $\hat{\mathbf{R}}_c - \rho\mathbf{I} \preceq \mathbf{R}_c \preceq \hat{\mathbf{R}}_c + \rho\mathbf{I}$  معادل است. در نتیجه، پاسخ بهینه (۵۹) برابر با  $\mathbf{R}_c^* = \hat{\mathbf{R}}_c + \rho\mathbf{I}$  خواهد بود. زیرا به ازای هر  $\mathbf{R}_1 \preceq \mathbf{R}_2$  خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}\mathbf{R}_1\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v \preceq \mathbf{S}\mathbf{R}_2\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v = \mathbf{A}_2, \\ \text{لذا، } \|\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{I}\| \geq \|\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{I}\|$$

(ج) بازنویسی رابطه (۴۷) بر حسب  $\mathbf{s}$

به این منظور، ابتدا ترم  $\text{tr}(\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{S}\mathbf{R}_c\mathbf{S}^H)$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف  $\mathbf{R}_c$ ، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{S}\mathbf{R}_c\mathbf{S}^H) \\ &= \text{tr}(\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{S}E[\mathbf{t}\mathbf{t}^H + \mathbf{c}\mathbf{c}^H]\mathbf{S}^H) \\ &= E[\text{tr}(\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{S}[\mathbf{t}\mathbf{t}^H + \mathbf{c}\mathbf{c}^H]\mathbf{S}^H)] \quad (۵۴) \\ &= E[\text{tr}(\mathbf{F}_{22}^{(k)}[\mathbf{T}\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{T}^H + \mathbf{C}\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{C}^H])] \\ &= E[\mathbf{s}^H\mathbf{T}^H\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{T}\mathbf{s} + \mathbf{s}^H\mathbf{C}^H\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{C}\mathbf{s}] \\ &= \mathbf{s}^H\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}\mathbf{s}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)} = E[\mathbf{T}^H\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{T} + \mathbf{C}^H\mathbf{F}_{22}^{(k)}\mathbf{C}].$$

که در آن، به سادگی می‌توان اثبات نمود که:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}(l_1, l_2) = \mathbf{1}^T [\mathbf{F}_{22}^{(k)} \odot \mathbf{R}_c(l_1 : l_1 + M - 1, l_2 : l_2 + M - 1)] \mathbf{1}. \quad (۵۵)$$

برای ترم دوم یعنی  $2\Re\{\text{tr}(\mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{F}_{12}^{(k)}\mathbf{S})\}$  داریم:

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{F}_{12}^{(k)}\mathbf{S}) = \\ & \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \text{tr}(\mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{F}_{12}^{(k)}\bar{\mathbf{J}}_{N-1-n}^T) = (\tilde{\mathbf{b}}^{(k)})^H \mathbf{s} \quad (۵۶) \end{aligned}$$

که در آن،

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(k)} = [\text{tr}(\mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{F}_{12}^{(k)}\bar{\mathbf{J}}_{N-1}^T), \dots, \text{tr}(\mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{F}_{12}^{(k)}\bar{\mathbf{J}}_0^T)] \quad (۵۷)$$

بنابراین، تابع هدف (۴۶) به صورت صریح بر حسب  $\mathbf{s}$ ، به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{s}^H\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}\mathbf{s} + 2\Re\{(\tilde{\mathbf{b}}^{(k)})^H \mathbf{s}\} \quad (۵۸)$$

---

## Transmit Code Design for Detection of an Extended Target Embedded in Signal-Dependent Interference

S. M. Karbasi, M. M. Naghsh\*, M. Masjedi, M. H. Bastani

\*Isfahan University of Technology

(Received: 30/09/2018, Accepted: 05/05/2019)

### Abstract

We consider the problem of transmit code design to enhance the detection performance of an extended target embedded in clutter. We model the target impulse response (TIR) in two frameworks, either via the product of a deterministic TIR with an unknown reflection factor or as a Gaussian random vector (with known covariance). For both frameworks, we impose either the peak-to-average-power ratio or the similarity constraints on the sought code, separately. In the former framework, the performance of the generalized likelihood-ratio test depends monotonically on the signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR) of the detector. Hence, we cope with the code design, maximizing the SINR. The resulting optimization problem is non-convex, and we propose a novel approach to tackle it. In the latter, dependence of the optimal detector's performance on the metrics is too complex for code design. Consequently, we employ the mutual information between the TIR ensemble and the received echo as the design metric. We devise an iterative method based on majorization-minimization technique to deal with the resulting non-convex constrained problem. We make the proposed method robust to deal with uncertainties about prior knowledge of clutter and interference. Numerical analyses highlight the effectiveness of the proposed methods comparing to their counterparts.

**Keywords:** Code Design, Detection Performance, Extended Target, Mutual Information, Robust Design