

## طراحی ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی در رادار MIMO همبسته با احتمال بالا در آشکارسازی هدف

روح‌الله وحدانی<sup>۱</sup>، حسین خالقی بیزکی<sup>۲\*</sup>، محسن فلاح جوشقانی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲- دانشیار و ۳- استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

(دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۷، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۰)

### چکیده

این مقاله به طراحی ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی در رادار MIMO همبسته می‌پردازد. ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی مستقیماً بر روی عملکرد رادار از جمله الگوی پرتو دریافتی و نسبت سیگنال به تداخل به‌علاوه نویز و متعاقباً احتمال آشکارسازی اثرگذار است. با طراحی ساختار ماتریس کواریانس می‌توان شکل موج مناسب را نیز در فرستنده به‌دست آورد. از جمله چالش‌های موجود در طراحی ماتریس کواریانس، سطح بالای گلبرگ فرعی در الگوی پرتو دریافتی و همچنین لزوم استفاده از چندین تولیدکننده شکل موج در رادارهای چند آنتنی است. ساختار پیشنهادی برای ماتریس کواریانس، دارای گلبرگ فرعی بسیار پایین‌تر نسبت به سایر طرح‌های متداول است. همچنین این طرح دارای احتمال آشکارسازی بهتری نسبت به سایر روش‌ها بوده و دارای فرستنده ساده‌تری نیز هست. طرح پیشنهادی، نشان می‌دهد که با یک شکل موج بسیار ساده BPSK قابل پیاده‌سازی بوده و بنابراین برخلاف روش‌های دیگر، نیازی به استفاده از چندین تولیدکننده شکل موج در فرستنده نیست. این موضوع موجب کاهش قابل ملاحظه هزینه در طراحی فرستنده خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که الگوی پرتو دریافتی طرح پیشنهادی دارای گلبرگ‌های فرعی پایین‌تری نسبت به روش‌های دیگر بوده و همچنین در یک احتمال هشدار غلط ثابت دارای احتمال آشکارسازی بالاتری نسبت به رادار MIMO همبسته می‌باشد.

**کلیدواژه‌ها:** طراحی ماتریس کواریانس، الگوی پرتو دریافتی، نسبت سیگنال به نویز به‌علاوه تداخل، احتمال آشکارسازی.

### ۱- مقدمه

را برای رسیدن به هدف تجربه می‌کنند.

- نوع دوم، از آرایه‌ای از آنتن‌ها با فواصل نزدیک (نسبت به طول موج) در ارسال (یا دریافت) به‌صورت هم‌جوار ۴ استفاده می‌کند تا موج در یک جهت خاص در فضا هدایت شود [۶]. در این حالت معمولاً فرض بر این است که هدف در فاصله دوری (نسبت به طول موج) قرار دارد.

در این مقاله تمرکز ما بر روی ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی و تأثیر آن بر عملکرد سامانه رادار MIMO همبسته با فواصل آنتن نزدیک به هم است. منظور از رادار MIMO همبسته راداری است که سیگنال‌های آنتن‌های مختلف به‌صورت جزئی همبسته هستند. ساختار ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی به‌طور مستقیم بر روی سطح گلبرگ فرعی، نسبت سیگنال به تداخل<sup>۵</sup> به‌علاوه نویز و همچنین احتمال آشکارسازی هدف اثرگذار است. بنابراین با طراحی مناسب آن، می‌توان به الگوی پرتو مناسب با سطح گلبرگ فرعی پایین‌تر و همچنین احتمال

در دهه اخیر، تحقیقات در زمینه رادار به‌صورت گسترده‌ای روی رادار با چند آنتن ورودی و چند آنتن خروجی<sup>۱</sup> (رادار MIMO) تمرکز یافته است. ایده رادار MIMO بر مبنای به‌کارگیری چندین آنتن برای ارسال امواج متعامد و سپس دریافت اکوهای بازتاب شده از هدف با استفاده از چندین آنتن می‌باشد [۴-۱]. رادار MIMO از لحاظ چیدمان آرایه<sup>۲</sup> استفاده شده به دو دسته تقسیم می‌شود:

- نوع اول از آنتن‌هایی با فواصل زیاد از هم (هم در ارسال و هم در دریافت) برای ایجاد چندگانگی فضایی سطح مقطع راداری<sup>۳</sup> استفاده می‌کند [۵]. در این حالت، چندگانگی شکل موج مشابه چندگانگی چندمسیره در کانال‌های محوشدگی است. این موضوع به این دلیل است که آنتن‌هایی با فواصل زیاد، کانال‌های مستقلی

\* رایانامه نویسنده مسئول: khaleghi@mut.ac.ir

<sup>۱</sup> Multi input multi output (MIMO)

<sup>۲</sup> Array configuration

<sup>۳</sup> Radar cross section (RCS)

<sup>۴</sup> collocated

<sup>۵</sup> Signal to Interference plus Noise Ratio (SINR)

سیگنال‌هایی با اندازه ثابت<sup>۲</sup> با ویژگی آماری مشخص (با ماتریس کواریانس دلخواه) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این موضوع منجر به به‌کارگیری تنها یک نوع تقویت‌کننده سیگنال در فرستنده خواهد شد که هزینه پیاده‌سازی آن را تا چندین برابر کاهش خواهد داد. طرح اندازه ثابت در رادارهای چند آنتنی از یک تابع نگاشت از متغیر گاوسی به سیگنال دودویی (BPSK) یا چهارتایی (QPSK) برای تحقق ماتریس کواریانس مطلوب استفاده می‌کند [۱۰]. هدف مقاله حاضر، ارائه ساختاری جدید برای ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی با احتمال آشکارسازی بالا و گلبزرگ فرعی پایین‌تر نسبت به سایر طرح‌های متداول است. طرح پیشنهادی با یک سیگنال ساده BPSK قابل پیاده‌سازی است. استفاده از شکل موج‌های BPSK به جای شکل موج‌های پیچیده‌تر با مراتب به غیر از دودویی قطعا میزان هزینه پیاده‌سازی سخت‌افزاری و نرم‌افزاری را کاهش می‌دهد. مهمترین عامل درمورد هزینه‌های این سامانه راداری تولید سیگنال در فرستنده آن است. برای ارسال شکل موج BPSK. طرح پیشنهادی فقط به یک تولیدکننده سیگنال برای ارسال نمادهای  $S_1$  و  $-S_1$  احتیاج دارد. بنابراین هزینه پیاده‌سازی کمتری (در مقایسه با رادار MIMO که به تعداد تولیدکننده سیگنال برابر با تعداد آنتن‌های ارسال ( $M_t$ ) نیاز دارد) خواهد داشت. این هزینه فقط در فرستنده رادار و در بخش تولید سیگنال به اندازه  $1/M_t$  هزینه تولید سیگنال در رادار MIMO است.

نوآوری‌های این مقاله را می‌توان به‌صورت زیر برشمرد:

- ۱- در این مقاله ساختار جدیدی برای ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی پیشنهاد شده است که دارای گلبزرگ‌های فرعی بسیار پایین‌تر از سایر روش‌های متداول می‌باشد. بنابراین این طرح توانایی بالاتری در حذف تداخلات مجاور خواهد داشت.
- ۲- طرح پیشنهادی برخلاف بسیاری از روش‌های اخیر قابلیت پیاده‌سازی با شکل موج‌های ساده BPSK را داشته که باعث کاهش هزینه پیاده‌سازی خواهد شد.
- ۳- طرح پیشنهادی دارای مرتبه کامل بوده و بنابراین برخلاف دیگر طرح‌های رادار MIMO همبسته، عملاً بیشترین چندگانگی را در فرستنده ایجاد خواهد کرد. بنابراین قابلیت تشخیص شاخص‌های بیشتری از هدف را داراست.
- ۴- طرح پیشنهادی با توجه به داشتن قابلیت‌های فوق، همچنان دارای احتمال آشکارسازی بهتری نسبت به طرح‌های مراجع [۱۱، ۱۲ و ۲۰] می‌باشد.

بالاتری در آشکارسازی هدف دست‌یافت. منابع [۹-۷] به طراحی شکل موج برای تحقق الگوی پرتو مطلوب پرداخته‌اند. همچنین در [۱۰-۱۲]، ماتریس کواریانس‌های مختلف و عملکرد آن‌ها در الگوی پرتو دریافتی مورد بررسی قرار گرفت. مراجع [۱۵-۱۳] نیز به طراحی شکل موج ارسالی با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی روی سامانه راداری می‌پردازند. به‌عنوان مثال، مرجع [۱۳] طراحی شکل موج ارسالی را با در نظر گرفتن نسبت مشخصی از توان پیشینه به میانگین توان در فرستنده و همچنین میزان معینی از تشابه شکل موج‌های ارسالی انجام داده است. یکی از معایبی که تمامی این مراجع دارند این است که از نظر احتمال آشکارسازی هدف با طرح آرایه فازی فاصله‌دارند، بدین معنا که برای به‌دست آوردن احتمال آشکارسازی یکسان، به توان سیگنال به‌نویز بیشتری نسبت به رادار آرایه فازی احتیاج دارند. به‌عنوان مثال، در بخش‌های بعدی نشان داده می‌شود که طرح مرجع [۱۶] از نظر احتمال آشکارسازی هدف حدود ۰/۴ dB با طرح رادار آرایه فازی فاصله داد. همچنین مرجع [۱۶] ساختاری را برای ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی پیشنهاد می‌دهد که دارای نسبت سیگنال به نویز به‌علاوه تداخل بالاتری نسبت به سایر مراجع مورد مقایسه در آن مقاله می‌باشد. مراجع [۱۷، ۱۸] به‌ترتیب به بررسی گیرنده GLRT<sup>۱</sup> با وجود نویز و سیگنال تداخلی و همچنین تأثیر استفاده از کد فضا زمان در احتمال آشکارسازی هدف پرداخته‌اند. در مرجع [۱۹] نیز مشخصات آماری گیرنده GLRT با وجود نویز و تداخل با کواریانس نامعلوم مورد بحث قرار گرفته است.

مقاله حاضر ساختار جدیدی را برای ماتریس کواریانس پیشنهاد می‌کند که عملکرد سامانه راداری را در آشکارسازی هدف بهبود می‌بخشد. طرح پیشنهادی در این مقاله از نظر احتمال آشکارسازی هدف نسبت به طرح MIMO ناهمبسته، آرایه فازی MIMO، طرح مراجع [۱۱، ۱۲] به نتایج بهتری دست می‌یابد، ضمن اینکه با سخت‌افزار بسیار ساده‌تری قابل پیاده‌سازی است. از سوی دیگر طرح پیشنهادی دارای الگوی پرتو دریافتی با گلبزرگ‌های فرعی بسیار پایین‌تر و همچنین نقاط پوچ بیشتری است، بنابراین قابلیت بالاتری نسبت به سایر طرح‌های متداول در حذف تداخلات مجاور خواهد داشت. ماتریس کواریانس پیشنهادی دارای مرتبه کامل برابر تعداد آنتن‌های ارسال می‌باشد، بنابراین از نظر حذف تداخلات مجاور (در زوایای غیر از زوایای هدف) بهتر از سایر روش‌ها (شامل آرایه فازی، آرایه فازی MIMO، طرح‌های مراجع [۱۱، ۱۲، ۱۶]) نیز عمل می‌کند.

در سامانه‌های مخابراتی و به‌خصوص رادار، استفاده از

<sup>۲</sup> Constant envelope

<sup>۱</sup> Generalized likelihood ratio test

$$\mathbf{a}_T(\theta) = \left[ 1, e^{-j\frac{2\pi d_m \sin\theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi(M_r-1)d_m \sin\theta}{\lambda}} \right] \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_R(\theta) = \left[ 1, e^{-j\frac{2\pi d_n \sin\theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi(M_t-1)d_n \sin\theta}{\lambda}} \right]$$

که  $d_m$  فاصله آنتن‌های ارسال و  $d_n$  فاصله آنتن‌های دریافت بوده و  $\lambda$  طول موج سیگنال ارسالی است. برای سادگی  $d_m$  و  $d_n$  را برابر  $\lambda/2$  انتخاب می‌کنیم. در هر آنتن دریافت، سیگنال دریافتی از یک فیلتر منطبق عبور می‌کند و با  $M_t$  سیگنال ارسالی در هر شکاف زمانی تطابق داده می‌شود. بنابراین، در هر کدام از  $M_r$  آنتن موجود در سمت گیرنده،  $M_t$  نمونه وجود خواهد داشت که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود [۱۲]:

$$\mathbf{y}_c = \beta_0 \mathbf{a}_R(\theta_0) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta_0) + \sum_{i=1}^L \beta_i \mathbf{a}_R(\theta_i) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta_i) + \mathbf{v}_c \quad (3)$$

$$= \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_{int} + \mathbf{v}_c$$

که  $\mathbf{v}_c$  بردار نویز گاوسی متقارن با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_n^2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})$  بوده و  $\otimes$  نمایانگر ضرب کروکر است. سیگنال مطلوب و سیگنال تداخلی به ترتیب با  $\mathbf{y}_0$  و  $\mathbf{y}_{int}$  و همچنین ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی با  $\mathbf{R}$  نشان داده می‌شود. رابطه (۳) متشکل از سه بخش است که عبارت اول و دوم به ترتیب مربوط به سیگنال مطلوب و تداخلی هستند که وابسته به ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی  $\mathbf{R}$  می‌باشند. بنابراین این پارامتر نقشی کلیدی در عملکرد خروجی رادار MIMO ایفا می‌کند، به طوری که می‌تواند بر الگوی پرتو دریافتی (توان سیگنال دریافتی در زوایای مختلف) و همچنین نسبت سیگنال به تداخل بعلاوه نویز اثرگذار باشد.

در گیرنده می‌توان از فیلترهای مختلفی برای شکل‌دهی الگوی پرتو دریافتی در زوایای مختلف استفاده نمود. همچنین این فیلترها می‌توانند برای بهبود نسبت سیگنال به بعلاوه تداخل مربوط به یک هدف مشخص مورد استفاده قرار گیرند. فرض کنید سیگنال دریافتی در گیرنده از فیلتر  $\mathbf{w}$  عبور کند. بنابراین توان دریافتی در گیرنده از زاویه  $\theta$  به صورت زیر قابل بیان است [۱۲]:

$$P_r(\theta) = \left| \mathbf{w}^H \mathbf{a}_R(\theta) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta) \right|^2 \quad (4)$$

بنابراین فیلترها و ماتریس کواریانس های مختلف منجر به تغییر الگوی توان دریافتی در زوایای مختلف خواهد شد. ساده‌ترین فیلتر فیلتری است که توان دریافتی را در زاویه هدف بیشینه سازد. بنابراین فیلتر مرسوم با پیچیدگی کم به صورت زیر به دست می‌آید [۱۰]:

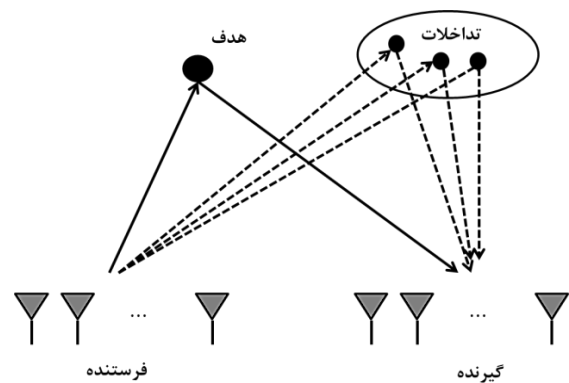
طرح پیشنهادی می‌تواند در سامانه راداری پدافندی چندآنتنی در حضور سامانه‌های تداخلی مورد استفاده قرار گیرد. این طرح بیشترین قابلیت را در تعیین پارامترهای هدف در سامانه پدافندی رادار دارد و دلیل این امر استفاده کامل از چندگانگی شکل موج در این طرح می‌باشد. همانطور که در بخش‌های بعدی به تفصیل توضیح داده خواهد شد، این طرح بیشترین قابلیت را در تشخیص پارامترهای مختلف هدف و حذف تداخلات مجاور دارد.

## ۲- طرح سامانه

یک رادار MIMO با آرایه خطی با  $M_t$  آنتن ارسال و  $M_r$  آنتن دریافت را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. فرض کنید علاوه بر سیگنال مطلوب، تعداد  $L$  سیگنال تداخلی نیز بر سیگنال هدف تأثیر می‌گذارند. بنابراین سیگنال باند پایه در گیرنده به صورت زیر قابل نمایش است [۱۲]:

$$\mathbf{Y} = \beta_0 \mathbf{a}_R(\theta_0) \mathbf{a}_T^T(\theta_0) \mathbf{x} + \sum_{i=1}^L \beta_i \mathbf{a}_R(\theta_i) \mathbf{a}_T^T(\theta_i) \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (1)$$

که  $\mathbf{x}$  با ابعاد  $1 \times M_t$  بردار سیگنال ارسالی و  $\theta_0$  زاویه سمت<sup>۱</sup> است که بیانگر موقعیت هدف می‌باشد. همچنین  $\theta_i$  ها زوایای قرارگیری منابع تداخلی موجود هستند.  $\beta_0$  و  $\beta_i$  به ترتیب سطح مقطع راداری هدف و  $i$ -امین منبع تداخلی می‌باشد.  $\mathbf{v}$  بردار نویز گاوسی دریافتی است که مؤلفه‌های آن دارای میانگین صفر و واریانس  $\sigma_v^2$  هستند.



شکل (۱): طرح سامانه.

$\mathbf{a}_T(\theta)$  بردار هدایت از سمت فرستنده به سوی هر نقطه از فضا با ابعاد  $1 \times M_t$  و  $\mathbf{a}_R(\theta)$  بردار هدایت از سمت گیرنده به سوی هر نقطه از فضا با ابعاد  $1 \times M_r$  است که به صورت زیر قابل بیان هستند [۲]:

<sup>۱</sup> Azimuth

$$\mathbf{y}_c^H (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{y}_c \geq_{\mathcal{H}_0}^{\mathcal{H}_0} T \quad (11)$$

تحت فرض  $\mathcal{H}_0$ ، با فرض اینکه نویز دریافتی در گیرنده سفید گاوسی است خواهیم داشت [۲]:

$$\mathbf{y}_c^H (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{y}_c = \mathbf{n}_c^H (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{n}_c = \mathbf{z}^H \mathbf{z} \geq_{\mathcal{H}_0}^{\mathcal{H}_0} T \quad (12)$$

که  $\mathbf{z} = (\mathbf{M})^{-1/2} \mathbf{n}_c$  بردار نویز گاوسی سفید با میانگین صفر و ماتریس کواریانس واحد است. زیرا [۲]:

$$E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H] = E\left[(\mathbf{M})^{-1/2} \mathbf{n}_c \mathbf{n}_c^H (\mathbf{M})^{-1/2}\right] \quad (13)$$

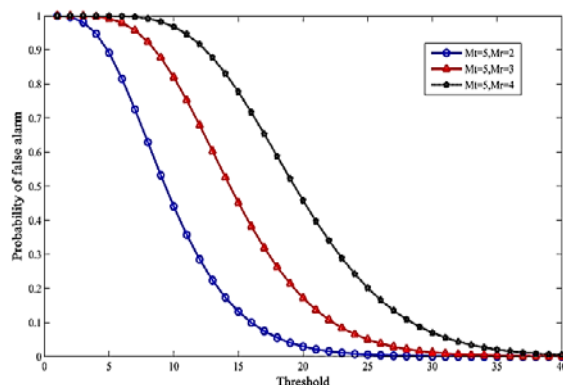
$$= \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{M} = \mathbf{I}_{M_r M_t}$$

بنابراین،  $\mathbf{z}^H \mathbf{z}$  یک متغیر تصادفی  $\chi^2$  با  $M_r M_t$  درجه آزادی خواهد بود [۲]. احتمال هشدار غلط به صورت زیر به دست می آید [۲]:

$$P_{fa} = P(\mathbf{z}^H \mathbf{z} > T) \quad (14)$$

$$= 1 - P(\mathbf{z}^H \mathbf{z} < T) = 1 - F_x(T, M_r M_t)$$

که  $F_x(T, M_r M_t)$  تابع توزیع تجمعی  $\chi^2$  با  $M_r M_t$  درجه آزادی در مقدار آستانه  $T$  می باشد [۲]. احتمال هشدار غلط به ازای ۵ آنتن ارسال و تعداد مختلف آنتن دریافت در مقادیر مختلف آستانه تصمیم گیری در شکل (۲) رسم شده است. با افزایش تعداد آنتن های دریافت، احتمال هشدار غلط افزایش می یابد و دلیل این امر نیز افزایش توان نویز دریافتی است. بدین ترتیب احتمال اینکه  $\mathbf{z}^H \mathbf{z} < T$  باشد کاهش پیدا کرده و  $P_{fa}$  افزایش می یابد.



شکل (۲): احتمال هشدار غلط به ازای تعداد مختلف آنتن های دریافت.

فرض کنید در گیرنده سیگنال دریافتی از فیلتر  $\mathbf{w}_c$  مطابق رابطه (۵) عبور کند (همان طور که پیش تر نیز بیان شد، این فیلتر می تواند باهدف شکل دهی پرتو در گیرنده و یا بهبود نسبت سیگنال به نویز بعلاوه تداخل مورد استفاده قرار گیرد). تحت فرض  $\mathcal{H}_1$  و با وجود استفاده از فیلتر  $\mathbf{w}_c$ ، رابطه (۱۱) به صورت زیر خلاصه می شود [۲، ۱۹]:

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{a}_R(\theta_0) \otimes \mathbf{R}\mathbf{a}_T(\theta_0) \quad (5)$$

بنابراین در این حالت الگوی پرتو دریافتی به صورت زیر خلاصه می شود [۱۰]:

$$P_r(\theta) = \left| \mathbf{w}_c^H \mathbf{a}_R(\theta) \otimes \mathbf{R}\mathbf{a}_T(\theta) \right|^2 \quad (6)$$

$$= \left| \left( \mathbf{a}_R^H(\theta_0) \otimes \mathbf{a}_T^H(\theta_0) \mathbf{R} \right) \left( \mathbf{a}_R(\theta) \otimes \mathbf{R}\mathbf{a}_T(\theta) \right) \right|^2$$

که در زاویه هدف ( $\theta_0$ ) بیشینه خواهد بود.

## ۲-۱- آشکارسازی هدف

با توجه طرح سامانه در رابطه (۳)، مسئله آشکارسازی هدف می تواند به صورت آزمون فرضیه دودویی<sup>۱</sup> زیر بیان شود [۱۷]:

$$\mathcal{H}_0: \text{Target doesn't exist: } \mathbf{y}_c = \mathbf{v}_c \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_1: \text{Target exist: } \mathbf{y}_c = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_{int} + \mathbf{v}_c$$

که فرضیه اول مربوط به عدم وجود هدف و فرضیه دوم مربوط به وجود هدف می باشد. برای سادگی فرض کنید که سیگنال دریافتی در فرضیه اول فقط شامل نویز می باشد. گیرنده بهینه از نظر آزمون فرضیه دودویی، گیرنده  $LRT^2$  است که با رابطه زیر بیان می شود [۹ و ۲]:

$$\frac{\max_{\beta_i} f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_1)}{f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_0)} \geq_{\mathcal{H}_0}^{\mathcal{H}_0} T \quad (8)$$

که  $T$  بیانگر حد آستانه گیرنده در معیار تصمیم گیری برای وجود و یا عدم وجود هدف می باشد. همچنین  $f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_0)$  و  $f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_1)$  به ترتیب تابع چگالی احتمال بردار مشاهدات با فرض وجود و عدم وجود هدف است. توابع چگالی احتمال در رابطه (۸) با توجه به گاوسی بودن نویز به صورت زیر قابل بیان است [۲]:

$$f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_0) = \frac{\exp(r_0)}{\pi^{M_r M_t} \det^{M_r M_t}(\mathbf{M})} \quad (9)$$

$$f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_1) = \frac{\exp(r_1)}{\pi^{M_r M_t} \det^{M_r M_t}(\mathbf{M})}$$

که  $r_1 = -(\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{int})^H (\mathbf{M})^{-1} (\mathbf{y}_c - \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{int})$  و  $r_0 = -\mathbf{y}_c^H (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{y}_c$  می باشد. همچنین  $\mathbf{M} = E[\mathbf{v}_c \mathbf{v}_c^H]$  ماتریس کواریانس نویز گاوسی است. با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۸) خواهیم داشت [۲]:

$$\frac{\max_{\beta_i} f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_1)}{f(\mathbf{y}_c | \mathcal{H}_0)} r_0 - \min_{\beta_i} (r_1) \geq_{\mathcal{H}_0}^{\mathcal{H}_0} T \quad (10)$$

واضح است که کمینه  $r_1$  صفر می باشد. بنابراین معیار تصمیم گیری در گیرنده به صورت زیر خلاصه می شود [۲]:

<sup>1</sup> binary hypotheses test

<sup>2</sup> Likelihood ratio test

که امید ریاضی  $E[\cdot]$  روی متغیرهای  $\beta_0$  و  $\beta_i$  ها گرفته می‌شود. مطابق رابطه (۱۷)، ماتریس کواریانس های مختلف منجر به تغییر در احتمال آشکارسازی هدف می‌شود. در ادامه به معرفی طرح‌های مختلف در ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی می‌پردازیم و سپس ماتریس کواریانسی پیشنهاد می‌دهیم که احتمال آشکارسازی بهتری نسبت به طرح‌های متداول داشته و از سویی دیگر الگوی پرتو دریافتی بهتری با گلبرگ فرعی کمتر خواهد داشت.

### ۳- مروری بر طرح‌های پیشین

در جدول (۱)، خلاصه‌ای از ماتریس‌های کواریانس متداول آورده شده است. در رادار MIMO، همه سیگنال‌های ارسالی کاملاً نا همبسته و یا اصطلاحاً متعامد بوده و بنابراین ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی برابر ماتریس واحد می‌باشد، یعنی  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ . این بدان معناست که سامانه رادار MIMO ملزم به استفاده از تعداد زیادی تولیدکننده سیگنال مختلف با مشخصات متفاوت می‌باشد. در مرجع [۲ و ۱۲] در مورد عملکرد این نوع رادار به صورت مفصل بحث شده است. SINR بهینه در این طرح با  $M_r M_t$  متناسب است [۱۲]. آشکارسازی هدف نیز با جایگذاری  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  در رابطه (۱۷) به دست می‌آید. مرتبه ماتریس کواریانس در این نوع رادار برابر  $M_t$  بوده و بنابراین بیشترین چندگانگی شکل موج را در بین رادارهای چندآنتنی دارد [۲].

$$(\mathbf{w}_c^H \mathbf{y}_c)^H (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{w}_c^H \mathbf{y}_c \quad (15)$$

$$= \mathbf{y}_c^H \mathbf{w}_c (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{w}_c^H \mathbf{y}_c > T$$

ماتریس  $\mathbf{M}$  این بار بیانگر ماتریس کواریانس مؤلفه نویز به علاوه تداخل است که به صورت  $\mathbf{R}_{in} = \mathbf{M} = \sum_{i=1}^L |\beta_i|^2 \mathbf{s}_m(\theta_i) \mathbf{s}_m^H(\theta_i) + \sigma_n^2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})$  و همچنین  $\mathbf{s}_m(\theta) \triangleq \mathbf{a}_R(\theta) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta)$  می‌باشد.  $L$  نیز بیانگر تعداد منابع تداخلی است. بنابراین با عبور سیگنال دریافتی از فیلتر  $\mathbf{w}_c$  و جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۱۵)، معیار تصمیم‌گیری برای آشکارسازی هدف به صورت زیر خلاصه می‌شود [۲، ۱۹]:

$$\beta_0^2 h(\mathbf{R}) > T \quad (16)$$

که  $h(\mathbf{R}) = \frac{[(\mathbf{a}_R(\theta_0) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta_0))^H (\mathbf{a}_R(\theta_0) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta_0))]}{(\mathbf{a}_R(\theta_0) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta_0))^H \mathbf{R}_{in} (\mathbf{a}_R(\theta_0) \otimes \mathbf{R} \mathbf{a}_T(\theta_0))}$  تعریف می‌شود. همان‌طور که از رابطه (۱۶) پیداست، انتخاب ماتریس کواریانس های مختلف، معیار تصمیم‌گیری برای تعیین وجود و یا عدم وجود هدف را تحت تأثیر قرار می‌دهد. سمت چپ رابطه (۱۶) همان SINR خروجی در گیرنده رادار است.

احتمال آشکارسازی، طبق تعریف، احتمال عبور SINR خروجی از حد آستانه  $T$  است. بنابراین خواهیم داشت [۱۸، ۲]:

$$P_d = E [P(\text{SINR} > T)] \\ = E_{\beta_0, \beta_i} [P(\beta_0^2 h(\mathbf{R}) > T)] \quad (17)$$

جدول (۱): مقایسه ماتریس کواریانس در طرح‌های مختلف رادارهای چندآنتنی.

تعداد تولیدکننده شکل موج موردنیاز	$SINR_{opt}$	ماتریس کواریانس	طرح
$M_t$	$\frac{M_r M_t}{\sigma_n^2}$	ماتریس واحد	رادار MIMO نا همبسته
1	$\frac{M_r M_t^2}{\sigma_n^2}$	ماتریس تمام یک	رادار آرایه فازی [۲۱]
$1 \leq K_s \leq M_t$	$\frac{M_r M_t (M_t - K_s + 1)}{\sigma_n^2}$	با همبستگی‌های قابل تنظیم	رادار آرایه فازی MIMO (کاملاً همپوشان) [۲۰]
$M_t$	$\frac{M_r M_t}{\sigma_n^2} + \frac{2M_r \gamma}{\sigma_n^2 (1 - \gamma)} \left( M_t - \frac{1 - \gamma^{M_t}}{1 - \gamma} \right)$	$\mathbf{R}_{\gamma x}(m, n) = \gamma^{m-n}$	$\mathbf{R}_{\gamma x}$ [۱۱]
$M_t$	$\frac{2M_r}{\sigma_n^2} \times \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{M_t}\right)} \sim \frac{4}{\pi^2} SINR_{opt, R_{opt, ph}}$	$\mathbf{R}_{\gamma x} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_T(\theta_1) \mathbf{a}_T^H(\theta_1) + \mathbf{a}_T(\theta_2) \mathbf{a}_T^H(\theta_2))$	$\mathbf{R}_{\gamma x}$ [۱۲]
$M_t$	$\frac{M_r M_t^2}{2\sigma_n^2}$	$\mathbf{R}_{\gamma x}(m, n) = \cos^2 \frac{\pi(m-n)}{M_t}$	$\mathbf{R}_{\gamma x}$ [۱۶]

از طرف دیگر در رادار آرایه فازی، همه سیگنال‌های ارسالی کاملاً همبسته بوده و بنابراین ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی برابر ماتریس تمام یک می‌باشد، یعنی  $\mathbf{R} = [\mathbf{1}]$ . این بدان معناست که سامانه رادار آرایه فازی تنها نیازمند استفاده از یک نوع تولیدکننده سیگنال می‌باشد، بنابراین هزینه پیاده‌سازی آن نسبت به سایر رادارهای چند آنتنی ارزان‌تر است. با توجه به همبستگی کامل سیگنال‌ها در رادار آرایه فازی، این رادار برای تمرکز الگوی پرتو برای تنها یک هدف بکار می‌رود. از این‌رو، رادار آرایه فازی بیشترین SINR را در میان رادارهای موجود دارد [۲۱، ۲۰].

SINR بهینه در این نوع رادار با  $M_r M_t^2$  متناسب است. مرتبه ماتریس کواریانس در این نوع رادار برابر یک بوده و بنابراین عملاً هیچ بهره‌ای از چندگانگی شکل موج نمی‌برد. این موضوع موجب ضعف این نوع رادار در حذف تداخلات مجاور می‌شود [۲].

ایده رادار آرایه فازی MIMO اولین بار در سال ۲۰۱۰ مطرح شد. در این نوع رادار، آرایه ارسال به چند زیر آرایه تقسیم می‌شود هر زیر آرایه خود یک رادار آرایه فازی را تشکیل داده و دو زیر آرایه مجزا، همانند یک رادار MIMO کاملاً نا همبسته هستند. در بحث MIMO، تمامی شکل موج‌های ارسال شده توسط آنتن‌های ارسال باید تعامد داشته باشند. اما در آرایه فازی MIMO، این موضوع کمی ساده‌تر است، به طوری که این بار تعامد شکل موج ارسال شده توسط هر زیر آرایه کفایت می‌کند. همچنین در هر زیر آرایه، سیگنال‌های ارسالی نیازی به متعامد بودن ندارند و فقط باید همانند یک سامانه آرایه فازی، همدوس باشند [۲۰]. در این نوع رادار  $K_s$  بیانگر تعداد زیر آرایه‌ها می‌باشد. مرتبه ماتریس کواریانس در این نوع رادار برابر تعداد زیر آرایه‌ها بوده و بنابراین می‌توان میزان بهره چندگانگی را در این نوع رادار تعیین نمود [۲۰].

همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌کنید، رادار آرایه فازی MIMO حالت کلی رادار MIMO و رادار آرایه فازی می‌باشد، به طوری که با قرار دادن  $K_s = M_t$  این رادار دقیقاً مثل یک رادار MIMO عمل می‌کند، همچنین با انتخاب  $K_s = 1$  این رادار همانند یک رادار آرایه فازی عمل خواهد کرد. در واقع رادار آرایه فازی MIMO مصالحه‌ای بین رادار آرایه فازی و رادار MIMO می‌باشد. با تمام مزیت‌هایی که رادار آرایه فازی MIMO دارد، یک عیبی که این نوع رادار دارد این است که برای تحقق آن، ملزم به ارسال سیگنال با توان‌های مختلف از آنتن‌های فرستنده هستیم [۲۰]. بنابراین همانند رادار MIMO هزینه پیاده‌سازی بالایی دارد.

همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌کنید، رادار آرایه فازی MIMO حالت کلی رادار MIMO و رادار آرایه فازی می‌باشد، به طوری که با قرار دادن  $K_s = M_t$  این رادار دقیقاً مثل یک رادار MIMO عمل می‌کند، همچنین با انتخاب  $K_s = 1$  این رادار همانند یک رادار آرایه فازی عمل خواهد کرد. در واقع رادار آرایه فازی MIMO مصالحه‌ای بین رادار آرایه فازی و رادار MIMO می‌باشد. با تمام مزیت‌هایی که رادار آرایه فازی MIMO دارد، یک عیبی که این نوع رادار دارد این است که برای تحقق آن، ملزم به ارسال سیگنال با توان‌های مختلف از آنتن‌های فرستنده هستیم [۲۰]. بنابراین همانند رادار MIMO هزینه پیاده‌سازی بالایی دارد.

همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌کنید، رادار آرایه فازی MIMO حالت کلی رادار MIMO و رادار آرایه فازی می‌باشد، به طوری که با قرار دادن  $K_s = M_t$  این رادار دقیقاً مثل یک رادار MIMO عمل می‌کند، همچنین با انتخاب  $K_s = 1$  این رادار همانند یک رادار آرایه فازی عمل خواهد کرد. در واقع رادار آرایه فازی MIMO مصالحه‌ای بین رادار آرایه فازی و رادار MIMO می‌باشد. با تمام مزیت‌هایی که رادار آرایه فازی MIMO دارد، یک عیبی که این نوع رادار دارد این است که برای تحقق آن، ملزم به ارسال سیگنال با توان‌های مختلف از آنتن‌های فرستنده هستیم [۲۰]. بنابراین همانند رادار MIMO هزینه پیاده‌سازی بالایی دارد.

همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌کنید، رادار آرایه فازی MIMO حالت کلی رادار MIMO و رادار آرایه فازی می‌باشد، به طوری که با قرار دادن  $K_s = M_t$  این رادار دقیقاً مثل یک رادار MIMO عمل می‌کند، همچنین با انتخاب  $K_s = 1$  این رادار همانند یک رادار آرایه فازی عمل خواهد کرد. در واقع رادار آرایه فازی MIMO مصالحه‌ای بین رادار آرایه فازی و رادار MIMO می‌باشد. با تمام مزیت‌هایی که رادار آرایه فازی MIMO دارد، یک عیبی که این نوع رادار دارد این است که برای تحقق آن، ملزم به ارسال سیگنال با توان‌های مختلف از آنتن‌های فرستنده هستیم [۲۰]. بنابراین همانند رادار MIMO هزینه پیاده‌سازی بالایی دارد.

در ادامه به بررسی سه طرح جدید در مورد ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی می‌پردازیم که در سال‌های اخیر توسط

همچنین طرح  $R_{px}$  که توسط مرجع [۱۶] پیشنهاد داده شده دارای ساختار کسینوسی در همبستگی آنتن‌های مختلف است، به طوری که همبستگی بین سیگنال ارسالی از آنتن  $i$ -ام و  $j$ -ام به صورت  $\cos^2 \frac{\pi(i-j)}{M_t}$  قابل بیان است. در این مرجع نسبت سیگنال به نویز به علاوه تداخل تنها با مراجع [۱۲] و طرح رادار آرایه فازی در [۲۰] مقایسه شده است. ضمناً  $\sin(\frac{\pi}{\gamma} R_{px})$  الزاماً معین مثبت نبوده بنابراین نمی‌توان از شکل موج‌های دودویی برای تحقق آن استفاده نمود که موجب بالا رفتن هزینه پیاده‌سازی خواهد شد. مرتبه ماتریس کواریانس در این نوع رادار همواره ثابت و برابر ۳ می‌باشد، بنابراین افزایش آنتن‌های ارسال تاثیری در عملکرد رادار در حذف تداخلات مجاور و افزایش چندگانگی رادار ندارد [۱۶].

نکته کلیدی در طراحی ساختار ماتریس کواریانس پیشنهادی است، زیرا این طرح قابلیت پیاده‌سازی با استفاده از شکل موج‌های BPSK را دارد [۱۲]. این امر باعث می‌شود پیاده‌سازی نرم‌افزاری و سخت‌افزاری طرح پیشنهادی بسیار ساده‌تر از سایر روش‌ها باشد.

ماتریس کواریانس پیشنهادی همانند  $R_{1x}$  و  $R_{2x}$  به صورت جزئی همبسته بوده، اما دارای ویژگی‌های بهتری نسبت به طرح‌های پیشین است. عبارت  $\frac{1}{2}AA^H$  می‌تواند با جایگذاری  $\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_t}\right)$  به صورت زیر خلاصه شود:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}AA^H \\ &= [a_T(\theta_1), a_T(-\theta_1)][a_T(\theta_1), a_T(-\theta_1)]^H \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & \cos\left(\frac{\pi(M_t-1)}{M_t}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\left(\frac{\pi(M_t-1)}{M_t}\right) & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

بنابراین،  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{M_t}\right)$  به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_t}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \dots & \frac{\pi}{2} - \frac{\pi|M_t-1|}{M_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi|M_t-1|}{M_t} & \dots & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad (21) \end{aligned}$$

در نتیجه، ماتریس کواریانس پیشنهادی در (۱۸) می‌تواند به صورت معادل زیر بیان شود:

$$R_p = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 - \frac{2|M_t-1|}{M_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \frac{2|M_t-1|}{M_t} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

حال در این قسمت، به برخی ویژگی‌های دیگر ماتریس کواریانس پیشنهادی می‌پردازیم.

ویژگی ۱: ماتریس کواریانس پیشنهادی ماتریسی معین مثبت است.

اثبات: با استفاده از بسط تیلور، ماتریس کواریانس پیشنهادی در رابطه (۱۸) می‌تواند به صورت زیر بسط داده شود:

ساختار پیشنهادی ما برای ماتریس کواریانس در این مقاله این نقطه ضعف را پوشش می‌دهد.

در قسمت بعد، طرحی را برای ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی پیشنهاد می‌دهیم که اولاً با شکل موج‌های ساده BPSK قابل پیاده‌سازی است، بنابراین پیچیدگی سخت‌افزاری و نرم‌افزاری بسیار پایین‌تری دارد. از سوی دیگر طرح پیشنهادی دارای احتمال بالایی در آشکارسازی هدف نیز هست. همچنین این طرح توانایی بالاتری در حذف تداخلات مجاور نسبت به سایر طرح‌های متداول دارد.

#### ۴- ماتریس کواریانس پیشنهادی

در این بخش، ساختار جدیدی را برای ماتریس کواریانس رادار MIMO همبسته جزئی<sup>۱</sup> پیشنهاد می‌دهیم (منظور از همبستگی جزئی این است که سیگنال‌های ارسالی کاملاً همبسته و کاملاً ناهمبسته نیستند، بلکه همبستگی جزئی بین آن‌ها وجود دارد. این همبستگی می‌تواند عددی بین صفر و یک باشد، به طوری که هرچه همبستگی به یک نزدیک‌تر باشد، شباهت بیشتری بین آن دو شکل موج برقرار است). در اینجا هدف از پیشنهاد ساختار جدید برای ماتریس کواریانس رسیدن به احتمال آشکارسازی بالاتر نسبت به سایر طرح‌های متداول است. ضمن اینکه باید توجه داشت ماتریس کواریانس پیشنهادی با چه هزینه‌ای قابل پیاده‌سازی است. در ادامه مشاهده خواهیم کرد که ماتریس کواریانس پیشنهادی با شکل موج‌های ساده BPSK قابل پیاده‌سازی بوده که این ویژگی در ماتریس کواریانس  $R_{2x}$  وجود ندارد. این طرح پیشنهادی دارای الگوی پرتو دریافت بسیار نزدیک به طرح  $R_{2x}$  بوده با این تفاوت که دارای مزایای کاربردی زیادی از جمله سادگی پیاده‌سازی هست. همچنین این طرح دارای عملکرد بهتری نسبت به  $R_{1x}$ ،  $R_{2x}$  و رادار MIMO و رادار آرایه فازی MIMO از نظر احتمال آشکارسازی هدف می‌باشد.

ماتریس کواریانس پیشنهادی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R_p = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}AA^H\right) \quad (18)$$

که  $A$  یک ماتریس با ابعاد  $M_t \times 2$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = [a_T(\theta_1), a_T(-\theta_1)] \quad (19)$$

که  $\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_t}\right)$  می‌باشد. با ساختار فوق برای ماتریس کواریانس پیشنهادی،  $\sin\left(\frac{\pi}{2}R_p\right)$  قطعاً نیمه معین مثبت خواهد بود، زیرا  $AA^H$  همواره نیمه معین مثبت است. این ویژگی یک

<sup>۱</sup> Partially correlated

می‌شود که طرح پیشنهادی دارای عملکرد بهتری از این نظر نسبت به رادار MIMO، طرح  $R_{1x}$  و همچنین طرح  $R_{2x}$  است.

#### ۴-۲- الگوی پرتو دریافتی

با استفاده از شکل‌دهی پرتو سنتی در گیرنده سامانه راداری، مطابق رابطه (۱۰) الگوی پرتو دریافتی طرح پیشنهادی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_r(\theta) = |w_p^H a_R(\theta) \otimes R_p a_T(\theta)|^2 \quad (25)$$

علاوه بر ویژگی‌های کاربردی خوبی که ساختار پیشنهادی دارد (از جمله قابلیت پیاده‌سازی با شکل موج‌های ساده BPSK)، الگوی پرتو دریافت طرح پیشنهادی رفتاری مشابه الگوی پرتو دریافت ماتریس  $R_{2x}$  دارد، بنابراین از نظر الگوی پرتو دریافتی بهترین عملکرد را در میان طرح‌های متداول خواهد داشت. همچنین شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که طرح پیشنهادی دارای تعداد نقاط پوچ<sup>۱</sup> یکسانی مشابه طرح  $R_{2x}$  است، بنابراین توانایی بالایی در حذف تداخلات نیز دارد.

#### ۴-۳- نسبت سیگنال به نویز به علاوه تداخل در طرح پیشنهادی

با استفاده از فیلتر شکل‌دهی پرتو سنتی در رادار MIMO و با استفاده از نتایج جبر خطی در رابطه (۸)، نسبت سیگنال به تداخل به علاوه نویز در طرح پیشنهادی می‌تواند به صورت زیر خلاصه شود [۱۲]:

$$\text{SINR}_{opt,p} = \frac{M_r a_T^H(\theta_0) R_p^H a_T(\theta_0)}{\sigma_n^2} \quad (26)$$

محتویات ماتریس کواریانس پیشنهادی به تعداد آنتن‌های ارسال یعنی  $M_t$  وابسته است. بنابراین SINR بهینه در طرح پیشنهادی می‌تواند به صورت تابعی از آنتن‌های ارسال بیان شود. برای نشان دادن این وابستگی، با در نظر گرفتن زاویه هدف  $\theta_0 = \theta$ ، برابر خواهد بود با:

$$R_p^H a_T(\theta) = R_p^H \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 - \frac{2|M_t-1}{M_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \frac{|M_t-1|}{2M_t} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \left(1 - \frac{2}{M_t}\right) + \left(1 - \frac{4}{M_t}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2(M_t-1)}{M_t}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{M_t}\right) + 1 + \left(1 - \frac{2}{M_t}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2(M_t-2)}{M_t}\right) \\ \vdots \\ \left(1 - \frac{2(M_t-1)}{M_t}\right) + \left(1 - \frac{2(M_t-2)}{M_t}\right) + \dots + 1 \end{bmatrix}$$

$$R_p = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \right) = \frac{2}{\pi} \times \left( \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \right)^3 + \frac{3}{40} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \right)^5 + \frac{5}{112} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \right)^7 + \dots \right) \quad (23)$$

که  $(\cdot)^n$  ضرب هادامارد یا المان به المان مرتبه  $n$ -ام یک ماتریس بوده و مؤلفه  $\left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right)$  در رابطه (۲۰) به دست آمده است. بنابراین با تعریف ضرب هادامارد مرتبه  $n$ -ام، مقدار  $\left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right)^n$  می‌تواند به صورت زیر به دست آید:

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right)^n = \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right) \square \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right) \dots \square \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \cos^n \left( \frac{\pi(M_t-1)}{M_t} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos^n \left( \frac{\pi(M_t-1)}{M_t} \right) & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

که به ازای  $n \leq M_t - 1$  دارای مرتبه  $n + 1$  است و همچنین برای  $n \geq M_t$  دارای مرتبه کامل  $M_t$  می‌باشد. بنابراین مؤلفه  $\left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^H\right)^n$  به ازای  $n \leq M_t - 1$  نیمه معین مثبت و به ازای  $n \geq M_t$  معین مثبت خواهد بود. از آنجایی که مجموع ماتریس‌های نیمه معین مثبت با ماتریس‌های معین مثبت قطعاً معین مثبت است، بنابراین ماتریس کواریانس پیشنهادی معین مثبت می‌باشد.

ویژگی ۲: ماتریس کواریانس پیشنهادی مرتبه کامل با مرتبه  $M_t$  می‌باشد.

اثبات: مطابق ویژگی ۱، ماتریس کواریانس پیشنهادی معین مثبت بوده و هر ماتریس معین مثبتی مرتبه کامل می‌باشد. بنابراین ماتریس کواریانس پیشنهادی با ابعاد  $M_t \times M_t$  دارای مرتبه  $M_t$  می‌باشد.

حال در این بخش، به بررسی عملکرد ماتریس کواریانس پیشنهادی از نظر احتمال آشکارسازی هدف، الگوی پرتو دریافتی و همچنین نسبت سیگنال به نویز به علاوه تداخل خواهیم پرداخت.

#### ۴-۱- احتمال آشکارسازی هدف

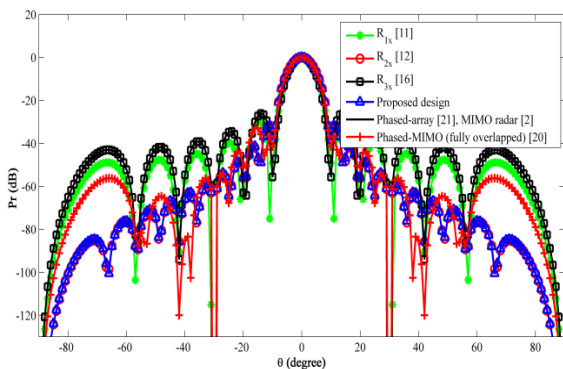
احتمال آشکارسازی هدف پیش‌تر به صورت رابطه (۱۷) به دست آمد که وابسته به ماتریس کواریانس سیگنال ارسالی می‌باشد. در بخش شبیه‌سازی عملکرد ماتریس کواریانس پیشنهادی از نظر احتمال آشکارسازی هدف مورد بررسی قرار می‌گیرد و نشان داده

<sup>۱</sup> Null points



سپس، با ضرب  $\mathbf{a}_T^H(\theta_0)$  در رابطه فوق خواهیم داشت:

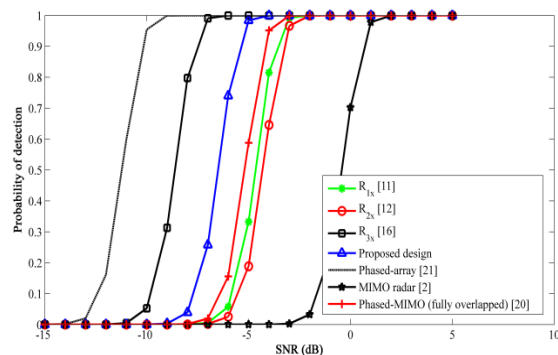
(۴) مشاهده می‌شود، طرح پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به  $\mathbf{R}_{1x}, \mathbf{R}_{2x}$ ، رادار MIMO و رادار آرایه فازی MIMO دارد. اما نسبت به طرح  $\mathbf{R}_{3x}$  به اندازه ۴ dB نسبت سیگنال به تداخل به‌علاوه نویز را از دست می‌دهد. از سوی دیگر، با توجه به اینکه ماتریس کواریانس طرح پیشنهادی همانند رادار MIMO مرتبه کامل است، بیشترین قابلیت را در تعیین پارامترهای هدف دارد و دلیل این امر استفاده کامل از چندگانگی شکل موج در این طرح می‌باشد. (برخلاف طرح  $\mathbf{R}_{1x}$  و  $\mathbf{R}_{2x}$  که دارای مرتبه دو و سه هستند). بعد از دریافت سیگنال در فرستنده، می‌توان از الگوریتم‌های تخمین پارامترهای هدف (به‌عنوان مثال الگوریتم ارائه شده در مرجع [۲۲]) استفاده نمود. با افزایش تعداد زیر آرایه‌ها در رادار آرایه فازی MIMO نیز عملکرد این سامانه راداری از نظر احتمال آشکارسازی هدف افت کرده و به رادار MIMO نزدیک می‌شود. دلیل این امر نیز ارسال یکنواخت موج در همه زوایا است که باعث افت SINR روی هدف خواهد شد.



شکل (۳): مقایسه الگوی پرتو نرمالیزه در طرح‌های  $\mathbf{R}_{1x}$  ( $\gamma = 0.5$ )

$\mathbf{R}_{1x}, \mathbf{R}_{2x}, \mathbf{R}_{3x}$ ، رادار آرایه فازی، رادار MIMO، رادار آرایه فازی

MIMO ( $K_s = 10$ )، به ازای  $M_t = M_r = 12$



شکل (۴): مقایسه احتمال آشکارسازی هدف در طرح‌های ( $\gamma = 0.5$ )

$\mathbf{R}_{1x}, \mathbf{R}_{2x}, \mathbf{R}_{3x}$ ، رادار آرایه فازی، رادار MIMO، رادار آرایه فازی

MIMO ( $K_s = 10$ )، به ازای  $M_t = M_r = 12$

(احتمال هشدار غلط ثابت  $P_{fa} = 5 \times 10^{-5}$ )

$$\mathbf{a}_T^H(\theta_0) \mathbf{R}_p^H \mathbf{a}_T(\theta_0) = \frac{M_r^2 + 2}{3} \quad (28)$$

بنابراین مطابق رابطه (۲۶) و (۲۸)، SINR بهینه به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\text{SINR}_{opt,p} = \frac{M_r (M_r^2 + 2)}{3\sigma_n^2} \quad (29)$$

به ازای تعداد آنتن‌های ارسال زیاد، رابطه (۴۵) به صورت زیر قابل تخمین است:

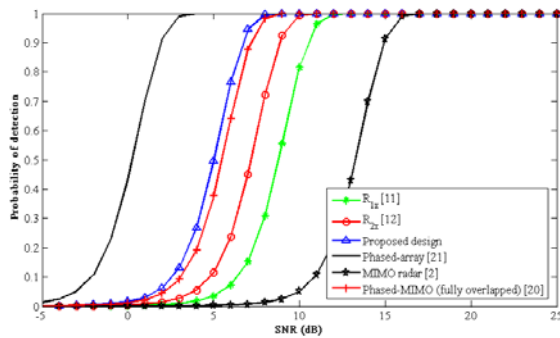
$$\text{SINR}_{opt,p} \sim \frac{M_r M_t^2}{3\sigma_n^2} \quad (30)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد SINR بهینه طرح پیشنهادی بهتر از رادار MIMO و طرح  $\mathbf{R}_{1x}$  است، اما به ازای تعداد آنتن ارسال زیاد، پایین‌تر از طرح  $\mathbf{R}_{2x}$  و  $\mathbf{R}_{3x}$  می‌باشد. افت SINR دریافتی تنها عیب ماتریس کواریانس پیشنهادی نسبت به طرح  $\mathbf{R}_{2x}$  و  $\mathbf{R}_{3x}$  است. البته درازای میزان افت اشاره شده، عملکرد سامانه راداری پیشنهادی به مراتب بهتر از سایر روش‌ها بوده و همچنین پیاده‌سازی آن به مراتب ارزان‌تر می‌باشد.

## ۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد طرح‌های مختلف ماتریس کواریانس شبیه‌سازی شده است. برای  $\mathbf{R}_{1x}$ ، مقدار  $\gamma = 0.5$  انتخاب شده است. همچنین در تمام شبیه‌سازی‌ها مقدار نسبت توان تداخل به نویز برابر ۲۰ dB می‌باشد. در شبیه‌سازی اول، یک رادار چند آنتنی با  $M_t = 12$  آنتن ارسال و  $M_r = 12$  آنتن دریافت را در نظر بگیرید که تمامی آنتن‌ها بافاصله نیمی از طول موج در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. همچنین رادار آرایه فازی MIMO با همین تعداد آنتن ارسال و دریافت را در نظر بگیرید که دارای  $K_s = 10$  زیر آرایه کاملاً همپوشان است. الگوی پرتو دریافتی رادار MIMO، آرایه فازی، آرایه فازی MIMO، رادار MIMO همبسته با ماتریس کواریانس  $\mathbf{R}_{1x}, \mathbf{R}_{2x}, \mathbf{R}_{3x}$  و همچنین طرح پیشنهادی در شکل (۳) رسم شده است. همان‌طور که در این شکل پیداست، ماتریس کواریانس طرح پیشنهادی سطح گلبرگ فرعی به مراتب کمتری نسبت به سایر روش‌ها داشته و عملکرد آن از این نظر بسیار شبیه به طرح  $\mathbf{R}_{3x}$  است. در شکل (۴)، احتمال آشکارسازی هدف در طرح‌های مختلف با وجود دو منبع تداخلی که در زوایای ۱۰ درجه و ۳۰- درجه قرار گرفته‌اند، با فرض احتمال هشدار غلط ثابت<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> Constant false alarm rate (CFAR)



شکل (۶): مقایسه احتمال آشکارسازی هدف در طرح‌های  $(\gamma = 0.5)$

$R_{1x}$ ,  $R_{2x}$  رادار آرایه فازی، رادار MIMO، رادار آرایه فازی

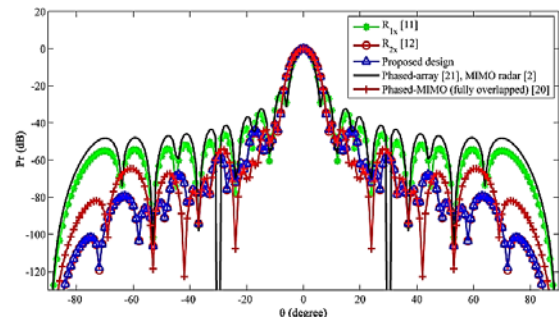
MIMO ( $K_s = 15$ )، به ازای  $M_r = 10, M_t = 20$

(احتمال هشدار غلط ثابت  $P_{fa} = 1/6 \times 10^{-4}$ )

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ماتریس کواریانس جدیدی پیشنهاد شده است که از مزایای رادار MIMO و آرایه فازی استفاده می‌کند. نتایج تحلیلی و عددی نشان می‌دهد که طرح پیشنهادی دارای سطح گلبرگ فرعی پایین‌تری نسبت به سایر روش‌های متداول بوده و همچنین نقاط پوچ بسیار بیشتری را در گلبرگ فرعی الگوی پرتو دریافتی تجربه خواهد کرد. بنابراین توانایی بالایی در حذف منابع تداخلی مجاور دارد. علاوه بر این، برخلاف طرح‌های دیگر، شکل موج BPSK نیز که دارای اندازه ثابت است می‌تواند به فرم بسته برای تحقق ماتریس کواریانس پیشنهادی مورداستفاده قرار گیرد. بنابراین، دیگر نیازی به استفاده از چندین تقویت‌کننده رادیویی در فرستنده نیست که این موضوع باعث کاهش بسیار زیاد هزینه‌های پیاده‌سازی خواهد شد. این موضوع در ماتریس کواریانس رادار آرایه فازی MIMO و همچنین طرح  $R_{3x}$  و  $R_{2x}$  صادق نیست. احتمال آشکارسازی هدف، احتمال هشدار غلط و همچنین SINR خروجی برای طرح سامانه (اشاره‌شده در بخش ۲) به دست آمده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که ماتریس کواریانس پیشنهادی نسبت به طرح  $R_{3x}$  دارای احتمال آشکارسازی پایین‌تری است. این تنها عیب طرح پیشنهادی می‌باشد که در ازای داشتن مزیت‌های فراوان اشاره شده، نسبت سیگنال به نویز را اندکی از دست می‌دهد، اما همچنان از این نظر دارای عملکرد بهتری نسبت به طرح  $R_{1x}$ ،  $R_{2x}$ ، رادار MIMO و رادار آرایه فازی MIMO می‌باشد. در نتیجه، دارای احتمال آشکارسازی بالاتری نیز نسبت به این طرح‌ها می‌باشد. ماتریس کواریانس پیشنهادی مرتبه کامل بوده و بنابراین برخلاف  $R_{3x}$  و  $R_{2x}$ ، بیشترین چندگانگی فضایی را دارد که نشان دهنده قابلیت بالای روش پیشنهادی در حذف تعداد بیشتری از تداخلات مجاور می‌باشد.

در قسمت دوم، شبیه‌سازی‌ها به ازای  $M_r = 10$  و  $M_t = 20$  و رادار آرایه فازی MIMO با  $K_s = 15$  زیر آرایه کاملاً نا همپوشان تکرار شده است. همان‌طور که از شکل (۵) می‌توان برداشت کرد، طرح پیشنهادی دارای الگوی پرتو دریافتی بهتری با سطح گلبرگ فرعی پایین‌تر نسبت به روش‌های دیگر است. بنابراین طرح پیشنهادی بیشترین قابلیت را در تشخیص هدف و حذف تداخلات مجاور دارد. این درحالی‌که است که طرح پیشنهادی برخلاف  $R_{2x}$  و  $R_{3x}$  با شکل موج‌های دودویی BPSK قابل پیاده‌سازی است. این موضوع یکی از مزیت‌های کلیدی این طرح در کم کردن هزینه‌های پیاده‌سازی است. در شکل (۶)، احتمال آشکارسازی هدف در طرح‌های مختلف با احتمال هشدار غلط ثابت ( $P_{fa} = 1/6 \times 10^{-4}$ ) مقایسه شده است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود، طرح پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به  $R_{1x}$ ،  $R_{2x}$ ، رادار MIMO و رادار آرایه فازی MIMO دارد. از شکل (۳) الی (۶) مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد زیر آرایه‌ها، عملکرد رادار آرایه فازی MIMO از نظر احتمال آشکارسازی، هدف افت کرده و دلیل این امر نیز یکنواخت شدن ارسال شکل موج در همه زوایا و افت SINR خروجی است. رادار آرایه فازی بهترین عملکرد را از نظر SINR خروجی و همچنین احتمال آشکارسازی هدف دارد اما دارای الگوی پرتو مناسبی نیست که این منجر به قدرت اندک این رادار در تفکیک اهداف مختلف خواهد شد. به عبارت دیگر، رادار آرایه فازی برای آشکارسازی یک هدف بسیار مناسب بوده اما در تفکیک دو یا چند هدف از یکدیگر مناسب نیست. همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، اگرچه طرح پیشنهادی از نظر SINR خروجی و احتمال آشکارسازی هدف نسبت به رادار آرایه فازی ضعیف‌تر است، اما در حذف تداخلات موجود بسیار توانا بوده به طوری که در گلبرگ فرعی، نقاط پوچ بسیار زیادتری نسبت به سایر طرح‌های متداول دارد. این موضوع در شکل (۵) به خوبی پیداست. علاوه بر اینکه طرح پیشنهادی دارای احتمال آشکارسازی بالاتری نسبت به رادار MIMO، طرح  $R_{1x}$  و طرح  $R_{2x}$  می‌باشد، با شکل موج ساده BPSK و با هزینه کمتری قابل پیاده‌سازی است.



شکل (۵): مقایسه الگوی پرتو نرمالیزه در طرح‌های  $(\gamma = 0.5)$ ،  $R_{1x}$

$R_{2x}$ ، رادار آرایه فازی، رادار MIMO، رادار آرایه فازی

MIMO ( $K_s = 15$ )، به ازای  $M_r = 10, M_t = 20$

## ۷- مراجع

- [13] Cheng, Z.; He, Z.; Liao, B.; Fang, M. "MIMO Radar Waveform Design With PAPR And Similarity Constraints", *IEEE Trans. Signal Processings*, vol. 66, no. 4, pp. 968-981, Feb. 2018.
- [14] Fan, W.; Liang, J.; Li, J. "Constant Modulus Mimo Radar Waveform Design With Minimum Peak Sidelobe Transmit Beampattern", *IEEE Trans. Signal Processings.*, vol. 66, no. 16, pp. 4207-4222, Aug. 2018.
- [15] Imani, S.; Nayebi, M. M.; Ghorashi, S. A. "Colocated MIMO Radar SINR Maximization Under ISL And PSL Constraints", *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 25, no. 3, pp. 422-426, Mar. 2018.
- [16] Bolhasani, M.; Imani, S.; Ghorashi, S. A. "Covariance matrix design to increase SINR in presense of signal-dependent interference"; *Iranian Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*. 2018, vol. 16, no. 2, pp. 129-134 (In Persian), 2018.
- [17] Tadayon, A. A.; Derakhtian, M.; Nayebi, M. M.; Aref, M. R. "GLR Detector for Coded Signals in Noise and Interference," *Scientica Iranica.*, vol. 15, no. 2, pp. 170-174, mar. 2008.
- [18] De Maio, A.; Lops, M. "Design Principles of MIMO Radar," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 43, no. 3, pp. 886-898, Jul. 2007.
- [19] Liu, J.; Li, J. "False Alarm Rate Of The GLRT For Subspace Signals In Subspace Interference Plus Gaussian Noise," *IEEE Trans. Signal Processings*, vol. 67, no. 11, pp. 3058-3069, Jun. 2019.
- [20] Hassanien, A.; Vorobyov, S. A. "Phased-MIMO Radar: A Tradeoff between Phased-Array and Mimo Radars," *IEEE Trans. Signal Processings*, vol. 58, no. 6, pp. 3137-3151, Jun. 2010.
- [21] Milne, K. "Phased Arrays in Radar," *IEE Tutorial Meeting on Phased Array Radar*, London, U.K., 1989, 2/1-2/30.
- [22] Norouzi, Y.; Kashani, E. S. "Radar Performance Estimation Using ELINT Gathered Data"; *Passive Defence Sci. & Tech.*, vol. 3, no. 4, pp. 339-347 (In Persian), 2013.
- [1] Skolnik, M. I.; "Introduction to Radar Systems"; 3<sup>rd</sup> ed. NY: Mc-Graw-Hill, 2001.
- [2] Li, J.; Stoica, P. "MIMO Radar Signal Processing"; Wiley-IEEE Press, 2008.
- [3] Levanon N.; Mozeson E., "Radar Signals"; Wiley-IEEE Press, 2004.
- [4] Fishler, E.; Haimovich, A.; Blum, R.; Chizhik, D; Cimini, L.; Valenzuela, R. "Mimo Radar: An Idea Whose Time Has Come," in *Proc. IEEE Radar Conf.*, Philadelphia, PA, USA,, pp. 71-78, 2004.
- [5] A. Haimovich, R. Blum, and L. Cimini, "MIMO radar with widely separated antennas," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 25, pp. 116-129, 2008.
- [6] J. Li and P. Stoica, "MIMO radar with colocated antennas," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 24, pp. 106-114, Sep. 2007.
- [7] P. Stoica, J. Li, and X. Zhu, "Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern design," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 56, no. 6, pp. 2593-2598, Jun. 2008.
- [8] B. Friedlander, "On transmit beamforming for MIMO radar," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 48, no. 4, pp. 3376-3388, Oct. 2012.
- [9] X. Zhang, Z. He, L. Rayman-Bacchus, and J. Yan, "MIMO radar transmit beampattern matching design," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 63, no. 8, pp. 2049-2056, Apr. 2015.
- [10] S. Ahmed, J. Thompson, B. Mulgrew, "Finite alphabet constant envelope waveform design for MIMO radar beampattern", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 11, pp. 5326-5337, 2011.
- [11] D. R. Fuhrmann and J. S. Antonio, "Transmit beamforming for MIMO radar systems using signal cross-correlation," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 44, no. 1, pp. 171-185, Jan. 2008.
- [12] S. Ahmed, M. Alouini, "MIMO radar waveform covariance matrix for high SINR and low side-lobe levels", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 8, pp. 2056-2065, Apr. 2014.

# Transmit Covariance Matrix Signal Design in Correlated MIMO Radar with High Probability in Target Detection

R. Vahdani, H. Khaleghi Bizak<sup>\*</sup>, M. Fallah Joshaghani

<sup>\*</sup> Maleke Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

(Received:05/06/2020, Accepted:10/09/2020 )

## Abstract

This paper designs the transmit covariance matrix in the correlated MIMO radar. Covariance matrix of the transmit signal directly affects the performance of radar, including the received beam pattern and the signal-to-interference plus noise ratio (SINR), and consequently the probability of detection. By designing the structure of the covariance matrix, the appropriate transmit waveform can also be obtained. Among the challenges in designing a covariance matrix is the high side lobe levels (SLLs) in the received beam pattern, as well as the need to use several high-cost waveform generators in multi-antenna systems. The proposed structure for the covariance matrix in this paper has much lower SLLs than other existing designs. It has not only a better detection probability than other methods, but also has a simpler transmitter. It is shown that the proposed design can be implemented with a very simple BPSK waveform, so unlike other methods, there is no need to use multiple waveform generators in the transmitter. This will significantly reduce the cost of the transmitter. Simulation results demonstrate that the receive beampattern of the proposed scheme has much lower SLLs and for the constant false alarm rate, it has higher detection probability in comparison with correlated MIMO radar.

**Keywords:** Covariance Matrix Design, Receive Beampattern, SINR, Detection Probability

---

<sup>\*</sup> Corresponding author E-mail: khaleghi@mut.ac.ir