

## طراحی مستقیم یک مجرای دوبعدی مبتنی بر معادلات

### ناویر - استوکس تراکم‌پذیر

جواد طهماسبی<sup>۱</sup>، فرهاد قدک<sup>۲</sup> و محسن محمدی<sup>۳</sup>

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: ۹۰/۱۲/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۰/۲۷)

#### چکیده

در مقاله حاضر یک روش کاملاً کوپل که روش طراحی مستقیم نام دارد، برای طراحی شکل اجسام بر اساس توزیع فشار مطلوب روی دیواره‌های جسم ارائه شده است. در این روش، توزیع فشار هدف در راستای دیواره‌های شکل مورد طراحی و همچنین مختصات هندسی نقاط مجهول دیواره‌ها به صورت صریح در روابط ظاهر شده است. در کار گذشته، طراحی شکل اجسام دوبعدی بر اساس معادلات اوپلر تراکم‌پذیر صورت گرفته است. مقاله حاضر کاربرد این روش را به طراحی مجراهای دوبعدی مبتنی بر معادلات ناویر - استوکس تراکم‌پذیر توسعه داده است. در طراحی نازل‌ها و دیفیوزرهای مافوق صوت و به‌ویژه ماوراءصوت که ضخامت لایه مرزی قابل توجه می‌باشد، کاربرد یک روش طراحی بر اساس معادلات جریان لزج به‌منظور بالا بردن دقت طراحی مرزها ضروری به‌نظر می‌رسد. همچنین به‌جای استفاده از روش بالادست ساده مرتبه اول برای محاسبه فلاکس‌ها که دارای پایداری کمی می‌باشد از روش‌های خانواده AUSM که به‌صورت ضمنی در معادلات قرار داده شده، بهره گرفته شده است. در این مقاله روش خطی‌سازی معادلات، نحوه اعمال فشار هدف و شرایط مرزی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نمونه تست اعتبارسنجی و نتایج طراحی بر اساس جریان‌های لزج و غیرلزج ارائه می‌شود. از نتایج قابل توجه این بررسی، عدم یکتایی پاسخ در مواردی است که جدایش در جریان رخ می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** فرمول‌بندی کاملاً کوپل، روش طراحی مستقیم، معادلات ناویراستوکس، لایه‌مرزی، AUSM<sup>+</sup>

## A Direct Design Method of 2d Duct Based on the Compressible Navier-Stokes Equations

J. Tahmasbi, F. Ghadak, and M. Mohammadi

Imam Hossein Univ.

(Received: 5 March, 2012; Accepted: 17 January, 2014)

#### ABSTRACT

In this paper, a fully coupled formulation of the surface shape design problem, called the direct design approach, has been proposed. In this method both the target surface pressure and the unknown nodal coordinates appear explicitly in the formulations. The proposed method is based on the compressible Navier-Stokes equations, but in the past work it has only been applied in the context of inviscid fluid flows. A cell-centered finite volume method and AUSM<sup>+</sup> scheme are used to discretize the Navier-Stokes equations. The details of linearization and imposition of the target pressure are discussed there. The validation test case is presented which show the robustness of the method in handling complex geometries and complex physical phenomena (such as shock waves). The importance role of viscosity dictates aerospace designers to consider this phenomenon especially in thick boundary layer regions (hypersonic nozzles), diffusers with separation possibility and many other cases. Stability of this method in viscous flow decreased extensively in comparison with the last version the method based on the Euler equations. The significant results of this study, no single answer that is where the separation occurs.

**Keywords:** Fully Coupled Method, Direct Design Method, Navier-Stokes Equations, Boundary layer, AUSM<sup>+</sup>

۱- کارشناس ارشد: tahmasbi11@gmail.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): fghadak@ihu.ac.ir

۳- کارشناس ارشد: m\_mohammadi1363@yahoo.com

## فهرست علائم

F	بردار شار
Q	بردار متغیرهای بقائی
$\rho$	چگالی
u	سرعت در جهت x
v	سرعت در جهت y
e	انرژی
P	فشار
$\tau$	تنش برشی
$\gamma$	نسبت ثابت گازها

## ۱- مقدمه

از دیرباز تلاش‌های بسیاری برای طراحی بهینه سیستم‌هایی که شامل عبور سیال یا انتقال حرارت بوده‌اند صورت گرفته است. از جمله این سیستم‌ها می‌توان به مانیفولدها در موتورهای احتراق داخلی، نازل‌ها، دیفیوزرها و پره‌ها اشاره کرد. در بخشی از این طراحی‌ها که موردنظر این مقاله است، به‌دست آوردن مرزهای یک جسم با توجه به توزیع فشار اعمال شده بر روی مرزها مورد توجه می‌باشد. مسائل طراحی شکل مرزی به‌وسیله دو روش تکراری و مستقیم حل می‌شود. روش‌های تکراری، نظیر روش‌های بهینه‌سازی از دیرباز جزء رایج‌ترین روش‌ها در حل مسائل کاربردی طراحی شکل اجسام بوده است. ولی این روش‌ها از لحاظ محاسباتی گران می‌باشد. در این روش‌ها معادلات حاکم در شکل متغیرهای اولیه یا ثانویه مورد استفاده قرار گرفته و زنجیره‌ای از حل تحلیلی میدان و به‌دنبال آن، تغییر شکل مرزها برای رسیدن به توزیع فشار هدف صورت می‌گیرد. در روش حل مستقیم شکل دیگری از فرمولاسیون مسئله استفاده شده است که در آن، مختصات نقاط مرزی به‌صورت متغیرهای وابسته (صریح یا ضمنی) در معادله دیفرانسیل حاکم ظاهر می‌شود. به‌عبارت دیگر، روش‌های مستقیم تمایل دارند که به مرز مجهول و مقادیر نامعین درون میدان در یک مرحله دست یابند. به این روش‌ها، روش‌های کاملاً درگیر یا کوپل<sup>۱</sup> نیز گفته می‌شود.

اولین روش، با کاربرد در طراحی معکوس ایرفویل در جریان تراکم‌ناپذیر، توسط بتز<sup>۲</sup> [۱] براساس نگاشت همدیس<sup>۳</sup> یک ایرفویل به دایره ارائه گردید. روش معکوس درلا<sup>۴</sup> [۲] نیز مثالی

از یک روش غیرتکراری است. کیم<sup>۵</sup> [۳] با استفاده از روش طراحی معکوس براساس معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر، طراحی پروانه‌های پمپ را انجام داد. ایده حل مسائل تحلیلی و طراحی فقط با یک فرمولاسیون، نتیجه طبیعی فلسفه طراحی مستقیم است. این ایده توسط ریت بی<sup>۶</sup> [۴] در زمینه جریان‌های سطحی آزاد مطرح گردید. این کار شروع اصلی بر ایده طراحی مستقیم به‌کار گرفته شده در روش اشرفی‌زاده [۵-۷] بود. اشرفی‌زاده این روش را ابتدا برای طراحی مجراهای مستقیم و S شکل به‌کار برد. سپس، کاربرد روش را به مسائل انتقال حرارت هدایت توسعه داد و در آخرین کار خود، از این ایده در طراحی ایرفویل در جریان خارجی بهره جست. قدک [۸]، کاربردهای روش اشرفی‌زاده را برای جریان تراکم‌پذیر غیرلزج (مبتنی بر معادله اوپلر دوبعدی) توسعه داد. در این روش، مدل‌های آزمایش شده بیانگر قوت روش در رسیدن به هندسه‌های پیچیده با فیزیک‌های پیچیده مانند پدیده موج ضربه‌ای می‌باشد. در ادامه نیز نجاتی [۹] روش قدک را برای جریان‌های مبتنی بر معادلات اوپلر تراکم‌پذیر سه‌بعدی توسعه داد.

در مقاله حاضر، ایده طراحی مستقیمی که توسط قدک [۸] ارائه شده است، جهت توسعه کد طراحی در زمینه جریان‌های لزج تراکم‌پذیر (با استفاده از معادلات ناویر-استوکس دوبعدی) مورد استفاده قرار می‌گیرد. در طراحی مجراهای با سرعت بالا (ماوراء صوت) که ضخامت لایه مرزی در آنها قابل توجه است، روش طراحی جدید به‌کار گرفته می‌شود. همچنین دقت آن نسبت به طراحی در حالت غیرلزج مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در ادامه، کاربرد و عملکرد این روش در طراحی دیفیوزرهای S شکل که امکان جدایش جریان در آنها وجود دارد، بررسی می‌شود.

## ۲- معادلات حاکم و گسسته‌سازی عددی

معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر در حالت دوبعدی بقایی به‌صورت معادلات (۴-۱) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F^i}{\partial x} + \frac{\partial G^i}{\partial y} = \frac{\partial F^v}{\partial x} + \frac{\partial G^v}{\partial y} \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} F^i = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho e + P)u \end{bmatrix} G^i = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho e + P)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

5- kim  
6- Raithby

1- Fully – Coupled Methods  
2- Betz  
3- Conformal Mapping  
4- Drela

می‌شود، به دست می‌آید. نحوه گسسته‌سازی فلاکس عبوری از وجه سلول در روش فوق به صورت زیر است:

$$F_K = \begin{cases} \rho_L \bar{\alpha} \xi_s M_K \phi_L + g P_K & \text{if } M_K \geq 0, \\ \rho_R \bar{\alpha} \xi_s M_K \phi_R + g P_K & \text{else.} \end{cases} \quad (10)$$

پارامترهای رابطه (۱۰) در مرجع [۱۱] به طور کامل اشاره شده است. این روش دارای عملکرد بسیار خوبی در ناپیوستگی‌های جریان و همچنین سرعت‌های پایین می‌باشد [۱۲].

همان‌طور که از معادله بقاء (۹) مشخص است و با توجه به اینکه مسئله به صورت ضمنی حل می‌شود، برای محاسبه شارها یعنی  $F$  و  $G$  نمی‌توان از رابطه (۱۰) که به صورت صریح می‌باشد استفاده کرد. برای محاسبه این کمیت‌ها در هر وجه سلول بین مقادیر آنها در سلول‌های طرفین آن وجه درون‌یابی خطی بر اساس عدد ماخ (محاسبه شده توسط روش  $AUSM^+$ ) آن وجه انجام می‌شود. به عنوان مثال در رابطه (۱۱) مقدار  $\rho u_k$  بر اساس مقادیر سلول‌های طرفین ( $L, R$ ) محاسبه می‌شود.  $M_L, M_R$  و  $M_k$  از روابط روش  $AUSM^+$  محاسبه می‌شود:

$$\rho u_k = \rho u_L + \frac{\rho u_R - \rho u_L}{M_R - M_L} (M_k - M_L). \quad (11)$$

همان‌طور که اشاره شد، در مسئله مذکور مختصات گره‌های مرزهای مجهول به صورت صریح وارد معادلات می‌شود. بنابراین، با توجه به اینکه مختصه  $x$  و  $y$  هر گره مجهول است، به منظور کاهش مجهولات مختصات گره‌های مرزی از مختصات اسپاین که مشابه کارهای قبلی [۹-۱۱] است، استفاده می‌شود. در این حالت هر گره دارای یک مختصه اسپاین  $R$  است که فقط در همان جهت اسپاین حرکت می‌کند. مختصات اسپاین یک نقطه روی مرز پایین ( $R_L$ ) و مرز بالایی ( $R_U$ ) که در شکل ۱ نشان داده شده است، توسط رابطه‌های (۱۲ و ۱۳) محاسبه می‌شود:

$$R_L = \frac{(X_L - X_0)}{\cos \theta} = \frac{(Y_L - Y_0)}{\sin \theta} \quad (12)$$

$$R_U = \frac{(X_U - X_0)}{\cos \theta} = \frac{(Y_U - Y_0)}{\sin \theta} \quad (13)$$

بنابراین  $\Delta x^{n+1}$  و  $\Delta y^{n+1}$  در رابطه (۹) که مجهول می‌باشد، با استفاده از روابط (۱۲ و ۱۳) بر اساس  $R_U$  و  $R_L$  بیان می‌شود. برای محاسبه انتگرال سمت راست رابطه (۵) بر اساس بردارهای  $F^v$  و  $G^v$  می‌بایست مقادیر تنش برشی بر روی سطوح سلول محاسبه شود:

$$\tau_{xx} = -\lambda \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\tau_{yy} = -\lambda \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = -2\mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \quad (16)$$

$$F^v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{xx}u - \tau_{xy}v - Q_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$G^v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{yy} \\ -\tau_{yy}v - \tau_{xy}u - Q_y \end{bmatrix}$$

$$\rho e = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2 + \rho v^2}{2\rho} \quad (4)$$

که در آن،  $\rho$ ،  $u$ ،  $v$ ،  $\rho e$  و  $P$  به ترتیب بیانگر چگالی، مؤلفه‌های سرعت و انرژی مخصوص کل و فشار می‌باشد.  $F^v$  و  $G^v$  ترم‌های مربوط به معادلات ناویر-استوکس می‌باشد که شامل تنش‌های برشی و ترم‌های انتقال حرارت بوده و به سمت راست معادله افزوده شده است. همچنین اندیس  $i$  و  $j$  به ترتیب بیانگر جریان غیرلج و لجز می‌باشد. فرم حجم محدود معادلات فوق برای یک سلول چهار ضلعی به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} \cdot Area^n + \sum (F^i \cdot \Delta y - G^i \cdot \Delta x)^{n+1} = \sum (F^v \cdot \Delta y - G^v \cdot \Delta x)^n. \quad (5)$$

در رابطه (۵) از خطی‌سازی زیر که اولین بار توسط بیم و وارمینگ<sup>۱</sup> [۱۰] ارائه گردید، استفاده شده است. در این روش شار عبوری در مرحله زمانی  $(n+1)$  به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f^{n+1} = f^n + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^n \Delta t + O(\Delta t^2) = f^n + \left( \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)^n \Delta t + O(\Delta t^2) = f^n + \left( \frac{\partial f}{\partial Q} \right)^n \Delta Q + O(\Delta t^2), \quad (6)$$

که در آن،  $\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n$  و  $\frac{\partial f}{\partial Q}$  ماتریس ژاکوبین می‌باشد. در نتیجه عبارت  $f^{n+1}$  برابر است با:

$$F_i^{n+1} = F_i^n + \left( \frac{\partial F_i}{\partial Q} \right)^n \Delta Q^{n+1}. \quad (7)$$

به دلیل اینکه متغیرهای فیزیکی و هندسی توأمان مجهول است، خطی‌سازی نیوتون برای درون میدان به صورت رابطه (۸) مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$F^{n+1} \cdot \Delta y^{n+1} = F^{n+1} \cdot \Delta y^n + F^n \cdot \Delta y^{n+1} - F^n \cdot \Delta y^n \quad (8)$$

در نتیجه معادله (۵) به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\left[ \frac{Area^n}{\Delta t} + \sum \left( \left( \frac{\partial F_i}{\partial Q} \right)^n \Delta y^n - \left( \frac{\partial G_i}{\partial Q} \right)^n \Delta x^n \right) \right] \Delta Q^{n+1} + \sum (F_i^n \cdot \Delta y^{n+1} - G_i^n \cdot \Delta x^{n+1}) = \sum (F_v^n \cdot \Delta y^n - G_v^n \cdot \Delta x^n). \quad (9)$$

مقادیر فلاکس بر روی سطح سلول با استفاده از روش  $AUSM^+$  که از روش‌های تجزیه بردار شار (FVS) محسوب

1- Beam and Warming

2- Advection Upstream Splitting Method

ضمنی می‌باشد. در کار حاضر از روش حل مبتنی بر ماتریس‌های تنک استفاده شده است.

### ۳- شرایط مرزی

شرط مرز جامد برای معادلات ناویر-استوکس در واقع باید به صورتی اعمال گردد که شار جرمی عبوری از مرز دیواره صفر باشد و بر روی مرز مؤلفه مماسی سرعت صفر در نظر گرفته شود. در صورتی که در مورد معادلات اوپلر، می‌بایست سرعت مماسی غیر صفر در نظر گرفته شود.

در طراحی معکوس، با توجه به دستگاه معادلات ایجاد شده و بیشتر بودن تعداد مجهولات از تعداد معادلات، لازم است تا از یک معادله کمکی استفاده شود. این معادله که در سلول‌های مجاور دیواره به کار می‌رود، می‌بایست علاوه بر اعمال شروط مرزی فیزیکی مرسوم به‌عنوان یک شرط مرزی اضافی دستگاه معادلات نامعین را معین نموده و همچنین توزیع فشار هدف در راستای دیواره‌های صلب را که ورودی مسئله می‌باشد به دستگاه معادلات اعمال کند. برای این معادله اضافی شکل‌های مختلفی وجود دارد. قددک [۸] در روش خود برای معادلات اوپلر دوبعدی از معادله پیوستگی استفاده کرد. اما نجاتی [۹] برای معادلات اوپلر سه‌بعدی از معادله انرژی استفاده نمود و نشان داد که نسبت به معادله پیوستگی عملکرد بهتری در پایداری دارد. بر اساس رابطه (۵) استفاده از معادله انرژی به‌عنوان شرط مرزی اضافی به شکل رابطه (۲۰) می‌باشد.

$$\frac{(\rho e \text{Area})^{n+1} - (\rho e \text{Area})^n}{\Delta t} + \sum (F_4^i \cdot \Delta y - G_4^i \cdot \Delta x)^{n+1} = \sum (F_4^v \cdot \Delta y - G_4^v \cdot \Delta x)^n \quad (20)$$

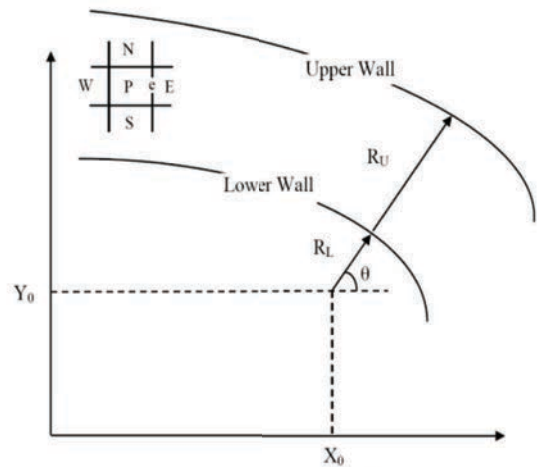
اکنون با جایگذاری مقدار فشار داده شده مطلوب ( $P_{given}$ ) در رابطه (۴)، مقدار انرژی در مرحله زمانی  $n+1$  با استفاده از رابطه (۲۱) تعیین شده و بدین شکل فشار مطلوب در معادلات اعمال می‌شود.

$$\rho e^{n+1} = \frac{P_{given}}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2 + \rho v^2}{2\rho} \quad (21)$$

در رابطه فوق مقادیر سرعت و چگالی از گام زمانی قبل برداشت می‌گردد. بنابراین، پس از جایگذاری رابطه فوق، معادله (۲۰) به صورت زیر می‌باشد:

$$\left[ \frac{P_{given}}{\gamma - 1} + \frac{(\rho u^n)^2 + (\rho v^n)^2}{2\rho^n} \right] \frac{\text{Area}^{n+1}}{\Delta t} + \sum (F_4^i \cdot \Delta y - G_4^i \cdot \Delta x)^{n+1} = \sum (F_4^v \cdot \Delta y - G_4^v \cdot \Delta x)^n + \frac{(\rho e \text{Area})^n}{\Delta t} \quad (22)$$

در اینجا نیز مشابه رابطه (۵)، پس از اعمال خطی‌سازی مجهولات فیزیکی و مجهولات هندسی مشخص شده و ضرایب مربوط در ماتریس ضرایب مشخص می‌گردد.



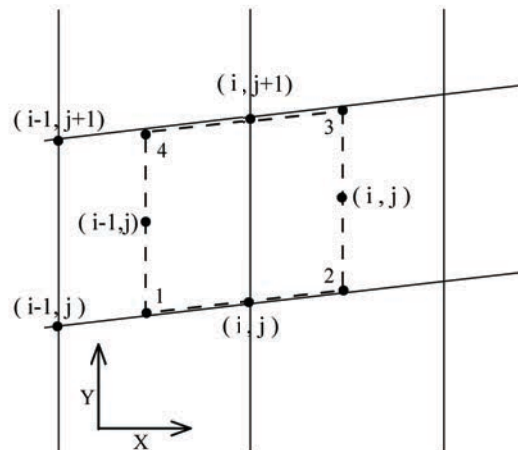
شکل (۱): مختصات اسپاین.

برای محاسبه مشتقات با توجه به سلول فرضی شکل ۲

از روش اشاره شده در مرجع [۱۳] استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{S_{1234}} \iint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \frac{1}{S_{1234}} \int \varphi dy, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-1}{S_{1234}} \iint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy = \frac{-1}{S_{1234}} \int \varphi dx. \quad (18)$$



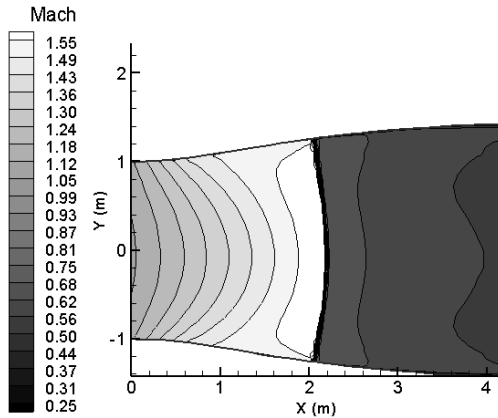
شکل (۲): سلول فرضی جهت محاسبه مشتق پیرامون دیواره سلول محاسباتی.

پس از اضافه نمودن معادله شرط مرزی اضافی به دستگاه معادلات که در بخش بعدی به آن اشاره می‌شود، فرم کلی دستگاه معادلات به صورت زیر به دست می‌آید:

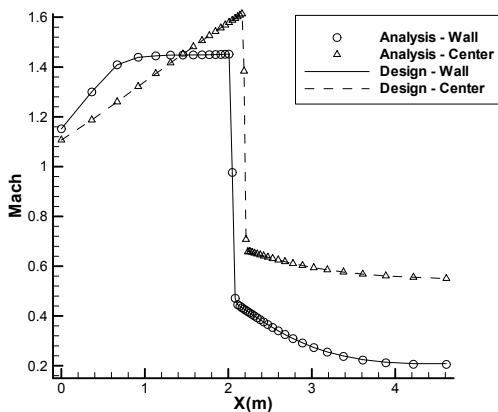
$$[A] \begin{Bmatrix} \text{Physical Unknowns} \\ \text{Geometric Unknowns} \end{Bmatrix} = [B]. \quad (19)$$

با توجه به مجهول بودن همزمان مقادیر فیزیکی و هندسی، تنها راه مطلوب جهت حل دستگاه معادلات فوق که پایداری مناسبی را نیز به همراه دارد، استفاده از روش‌های کاملاً کوپل

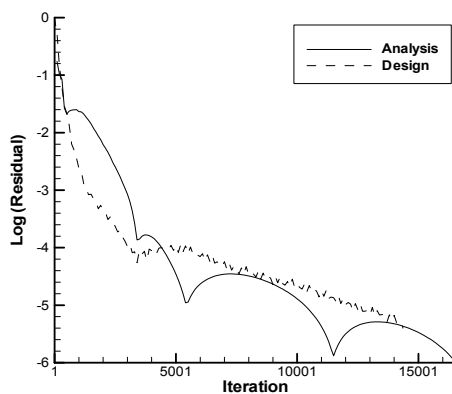
توزیع عدد ماخ و محل شوک این مدل در شکل ۴ آمده است. شکل ۵ توزیع ماخ بر روی دیواره و خط مرکز نازل در دو حالت تحلیل و طراحی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، جواب‌ها از تطابق خوبی برخوردار است. نرخ همگرایی دو روش نیز در شکل ۶ قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۴): توزیع عدد ماخ برای نازل مافوق صوت همراه با شوک قائم.



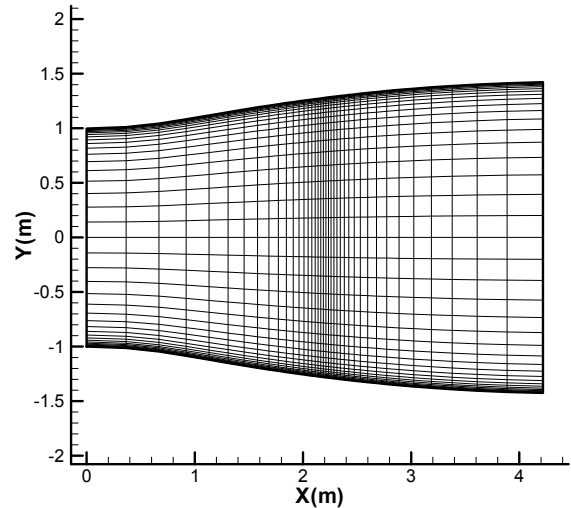
شکل (۵): نمودار توزیع ماخ بر روی دیواره و خط مرکز نازل مافوق صوت با شوک قائم در تحلیل و طراحی.



شکل (۶): نمودار خطای باقیمانده برای تحلیل و طراحی نازل مافوق صوت همراه با شوک قائم.

#### ۴- اعتبارسنجی

در این بررسی یک نازل مافوق صوت همراه با شرایطی که یک شوک قائم در آن رخ می‌دهد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه و شبکه این نازل در شکل ۳ قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۳): هندسه و شبکه تولید شده برای نازل مافوق صوت همراه با شوک قائم.

مطابق شکل، شبکه در نزدیکی دیواره‌ها تا حدی ریز شده است. خصوصیات شبکه و مشخصات جریان در جدول ۱ ذکر شده است.

جدول (۱): مشخصات جریان و نازل مافوق صوت همراه با شوک قائم.

شبکه	ضخامت اولین سلول (mm)	ماخ ورود	فشار ورود (KPa)	فشار خروج (KPa)
۴۰×۴۰	۲/۳ - ۳/۳	۱/۰۲	۵۰	۷۰

میدان فوق با استفاده از یک کد اعتبارسنجی شده تحلیل گردیده و فشار ایجاد شده بر روی دیواره‌ها به عنوان ورودی کد طراحی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در جدول ۲ نیز نتایج تحلیل و طراحی آورده شده است.

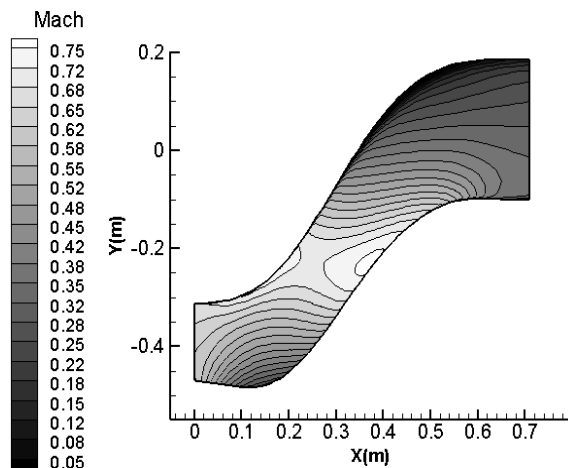
جدول (۲): نتایج تحلیل و طراحی برای نازل مافوق صوت همراه با شوک قائم.

تحلیل	CFL <sub>max</sub>	زمان (s)	تکرار	لگاریتم خطای باقیمانده
تحلیل	۰/۹۵	۲۸۹/۶	۱۶۵۴۵	-۶
طراحی	۰/۶	۴۱۴/۳	۱۴۳۵۹	-۵/۵

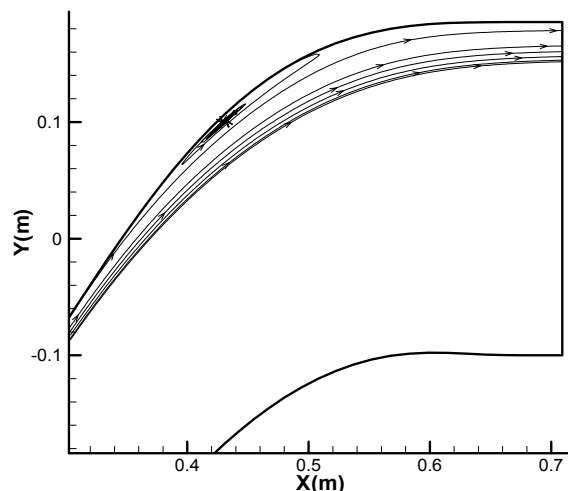
جدول (۴): نتایج تحلیل و طراحی برای شکل اصلی و جدید.

لگاریتم خطای باقیمانده	CFL <sub>max</sub>	زمان (s)	تکرار	تحلیل
-۳	۰/۹۵	۵۸/۱	۲۰۵۰	تحلیل
-۳	۰/۰۸	۴۸۵/۲	۱۰۵۰۹	طراحی
-۳	۰/۹۵	۱۱۵/۲	۲۴۲۰	تحلیل مجدد

در شکل ۸ توزیع عدد ماخ بر روی مجرای دیفیوزر و در شکل ۹ محل جدایش جریان در انتهای دیواره بالایی هندسه اصلی نشان داده شده است. شکل ۱۰ نیز توزیع فشار بر روی دیواره بالایی و پایینی این هندسه را نشان می‌دهد. شکل ۱۱ پاسخ کد طراحی و هندسه جدید به دست آمده به همراه توزیع عدد ماخ بر روی آن را نمایش می‌دهد.



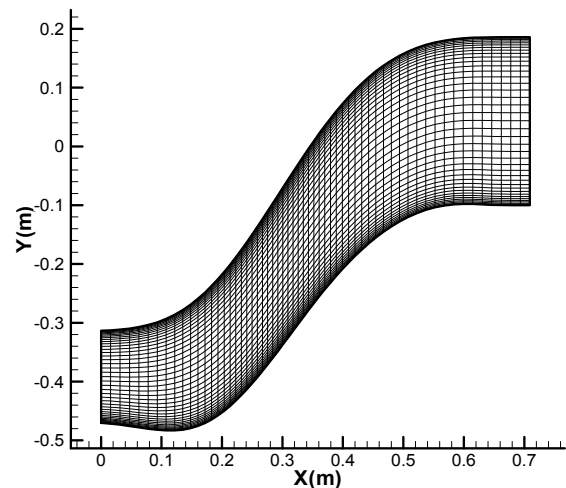
شکل (۸): توزیع ماخ بر روی هندسه اصلی.



شکل (۹): محل جدایش جریان در هندسه اصلی.

## ۵- عدم یکتایی جواب در جریان لزج

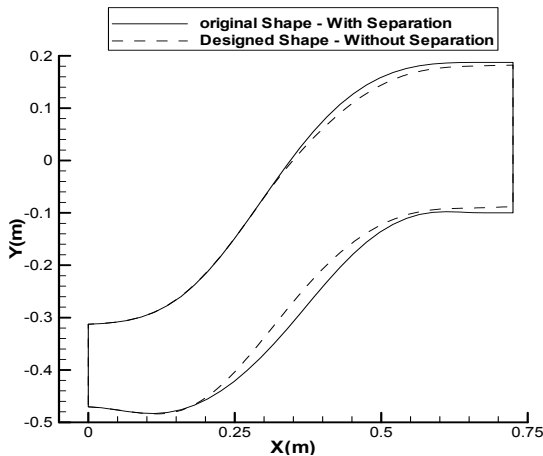
تاکنون نتایج گواه بر این بوده که در طراحی معکوس مبتنی بر جریان لزج، به‌ازای هر توزیع فشار، یک هندسه یگانه به‌دست می‌آید [۸]. در جریان لزجی که جدایش جریان رخ نمی‌دهد نیز همین قاعده صادق می‌باشد، اما چنانچه توزیع فشار مجرای که در آن جدایش رخ داده به‌عنوان توزیع فشار هدف به نرم‌افزار طراحی معکوس داده شود، هندسه‌ای به‌دست می‌آید که متناظر با همان توزیع فشار ولی بدون جدایش جریان است. نکته حائز اهمیت آن است که در حضور جدایش جریان، جواب یکتا نیست. اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا در جریان غیرلزج یکتایی وجود دارد و در لزج همراه با جدایش، یکتایی نقض می‌شود؟ پاسخ این است که در جریان لزج، علاوه بر توزیع فشار، توزیع تنش برشی در راستای بدنه نیز نقش اساسی در شکل جریان دارد. به‌دلیل اینکه عملاً امکان تعریف توزیع تنش برشی مطلوب در فرآیند طراحی معکوس وجود ندارد و فقط به توزیع فشار مطلوب بسنده می‌شود، خروجی روش طراحی معکوس هندسه‌ای با حفظ توزیع فشار مطلوب در حالت جریان بدون جدایش است. هندسه مورد بررسی، یک مجرای S شکل می‌باشد که در شکل ۷ آمده است. مشخصات شبکه و شرایط جریان در جدول ۳ ذکر شده است. همچنین نتایج حل در جدول ۴ بیان شده است.



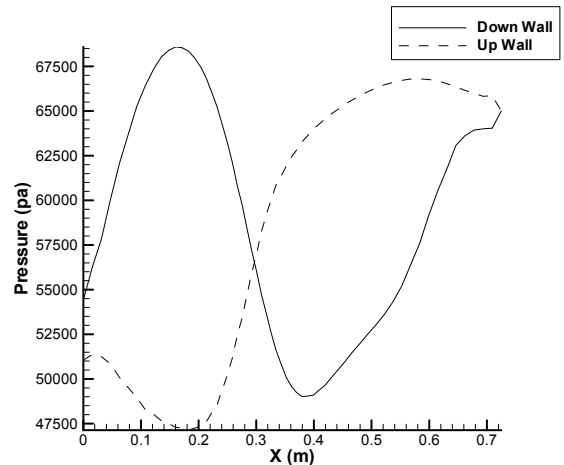
شکل (۷): مدل و شبکه تولید شده برای هندسه اصلی.

جدول (۳): مشخصات جریان و شبکه مجرای S شکل.

شبکه	ضخامت اولین سلول (mm)	ماخ ورود	فشار ورود (KPa)	فشار خروج (KPa)
۶۰×۴۰	۰/۹-۱/۶	۰/۷	۵۰	۶۵



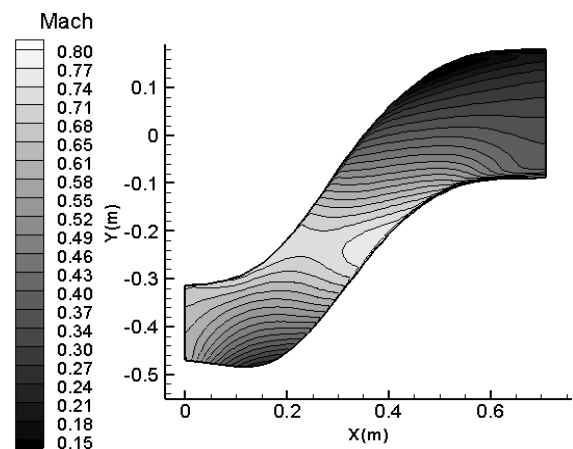
شکل (۱۲): مرزهای شکل اصلی و شکل جدید طراحی شده.



شکل (۱۰): توزیع فشار بر روی دیواره بالا و پایین شکل اصلی.

### ۶- نتایج

نازل‌های سرعت بالا دارای لایه مرزی با ضخامت قابل توجهی می‌باشد که می‌بایست مدنظر طراحان قرار گیرد. بنابراین، در این بخش یک نازل با ماخ خروجی حدود ۴ طراحی می‌شود. توزیع فشار مطلوب این طراحی بر روی دیواره نازل در شکل ۱۳ ترسیم شده است. نحوه تعیین این توزیع فشار، موضوع مورد بحث این مقاله نبوده و طراح می‌بایست با توجه به مورد طراحی و ملاحظه خواص جریان و همچنین تجربه کافی در فشار نمونه با خصوصیات شبکه و جریان اشاره شده در جدول ۵ مورد طراحی قرار می‌گیرد. شبکه تا حدی که حل با ناپایداری مواجه نگردد ریز شده است. همچنین طول دهانه ورودی نازل که در جدول ۵ اشاره شده، به‌عنوان ورودی توسط کاربر وارد می‌شود. نتایج طراحی و ضخامت لایه مرزی در مقاطع مختلف در جدول ۶ بیان شده است.



شکل (۱۱): توزیع ماخ بر روی مدل جدید طراحی شده.

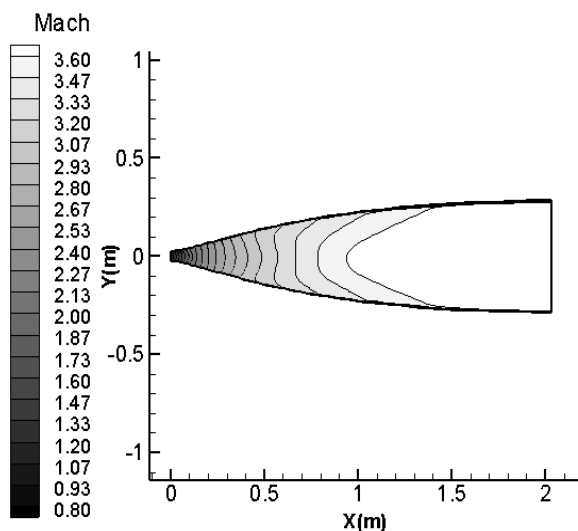
شکل ۱۲ تفاوت مرزهای شکل اصلی (همراه با جدایش) و شکل جدید (بدون جدایش) را بهتر نمایش می‌دهد. بنابراین، با توجه به توضیحاتی که در ابتدای این بخش ذکر شد، عدم یکتا بودن پاسخ مسئله در جریان لزج عملاً مشاهده می‌شود.

جدول (۵): مشخصات جریان و نازل مافوق صوت (ماخ ۴).

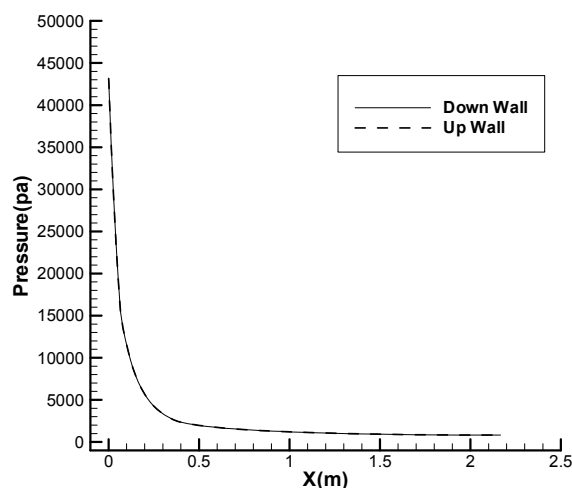
فشار خروج (Pa)	فشار ورود (kpa)	دهانه ورود (m)	طول نازل (m)	ماخ ورود	ضخامت اولین سلول (mm)	شبکه
۵۰	۵۰	۰/۰۵۳۷	۲/۱۶۶	۱/۰۲	۰/۲۴-۲/۵	۵۰×۴۰

جدول (۶): نتایج طراحی نازل ماخ ۴ و ضخامت لایه مرزی در مقاطع مختلف.

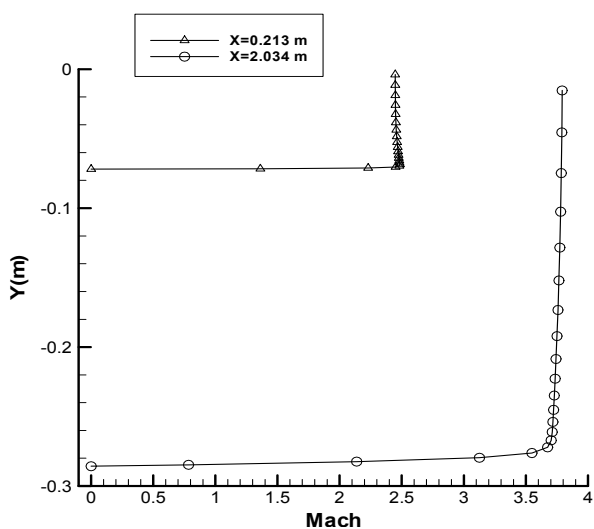
ضخامت لایه مرزی مقاطع مختلف				لگاریتم خطای باقیمانده	تکرار	زمان (s)	CFL <sub>max</sub>
x=۰/۰۱۴m	x=۰/۲۱۴۷m	x=۰/۶۹۱m	x=۲/۰۳۴m				
۰/۵۸ mm	۲/۳۹ mm	۳/۰۹ mm	۳/۴۲ mm	-۶	۷۵۰۱	۲۶۶/۱	۰/۲۵



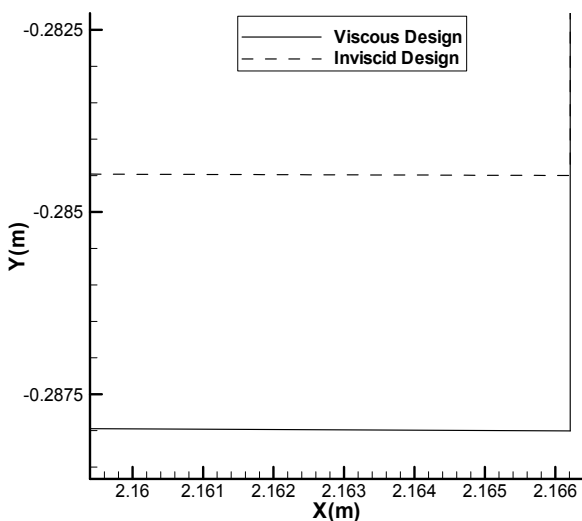
شکل (۱۵): توزیع ماخ بر روی نازل ماخ ۴.



شکل (۱۳): توزیع فشار بر روی دیواره بالا و پایین نازل ماخ ۴.

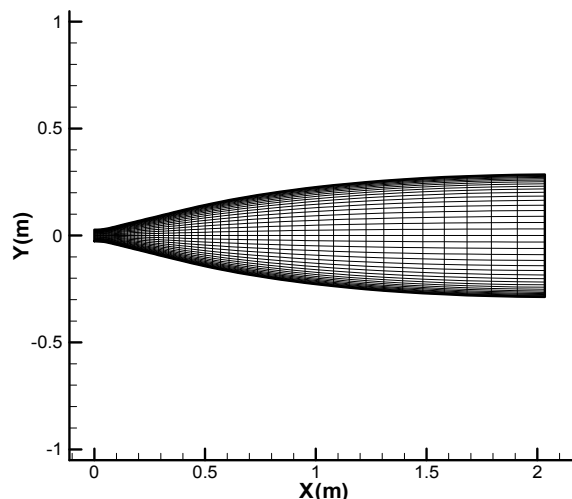


شکل (۱۶): پروفیل ماخ در مجاورت دیواره نازل ماخ ۴ در مقاطع مختلف.



شکل (۱۷): دیواره طراحی شده نازل ماخ ۴ با روش لزج و غیرلزج در انتهای نازل.

شکل ۱۴ هندسه تولید شده توسط کد طراحی به همراه شبکه آن می‌باشد. توزیع ماخ بر روی نازل نیز در شکل ۱۵ آورده شده است. برای مشاهده پروفیل لایه مرزی، در شکل ۱۶ در دو مقطع ذکر شده در نازل، پروفیل ماخ ترسیم شده است. برای بررسی تفاوت طراحی لزج و غیرلزج طراحی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بین طراحی لزج و غیرلزج اختلاف وجود دارد. در یک نگاه ساده نیز این مطلب قابل درک است که در تحلیل لزج به علت مدل‌سازی لایه مرزی جریان، قطر نازل تقریباً به اندازه ضخامت لایه مرزی بزرگ‌تر از حالت غیرلزج است. با افزایش ماخ جریان و افزایش ضخامت لایه مرزی این اختلاف زیادتر شده و استفاده از این روش در طراحی اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. در شکل ۱۸ نیز نمودار نرخ همگرایی و زمان حل ترسیم شده است.



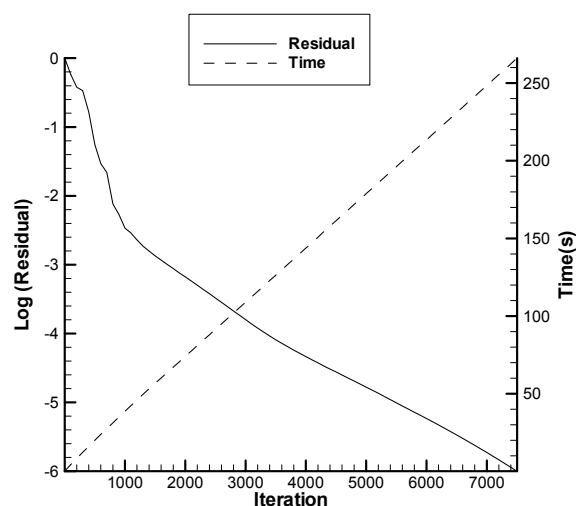
شکل (۱۴): هندسه و شبکه تولید شده توسط کد طراحی.



مواردی ناپایدار می‌شود. بنابراین، استفاده از روش‌های حل GMRes<sup>1</sup> به‌عنوان پیشنهاد کارهای بعدی مطرح می‌گردد.

#### ۸- مراجع

1. Betz, A., "Anderung eines Profils zur Erzielung Einer Vorgegebenen Anderung Der Druckverteilung", Luftfahrtforschung 11, pp. 158-164, 1934.
2. Drela, M. and Giles, M.B. "A Two-Dimensional Viscous Aerodynamic Design and Analysis Code", AIAA-87-0424, 1987.
3. Kim, J.S. and Park, W.G. "Optimized Inverse Design Method for Pump Impeller", Mech. Research Communications, Vol. 27, No. 4, pp. 465-473, 2000.
4. Raithby, G.D., Xu, W.X., and Stubby, G.D. "Prediction of Incompressible Free Surface Flows with an Element-Based Finite Volume Method", Computational Fluid Dynamics J. Vol. 4, No. 3, pp. 353-371, 1995.
5. Ashrafizadeh, A., Raithby, G.D., and Stubby, G.D. "Direct Design of Shape", Numerical Heat Transfer - Part B, Vol. 41, pp. 501-520, 2002.
6. Ashrafizadeh, A., Raithby, G.D., and Stubby, G.D. "Direct Design of Ducts", J. Fluids Eng. Transaction ASME, Vol. 125, pp. 158-165, 2003.
7. Ashrafizadeh, A., Raithby, G.D., and Stubby, G.D. "Direct Design of Airfoil Shape with a prescribed Surface Pressure", J. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, Vol. 46, No. 6, pp. 505-527, 2004.
8. Ghadak, F. "A Direct Design Method Based on the Laplace and the Euler Equations with Application in Internal Subsonic and Supersonic Flows", PhD diss., Sharif Univ. of Tech., Iran, 2007 (In Persian).
9. Nejati, A. "A Direct Design Method Based on the 3D Euler Equations with Application in Internal Subsonic and Supersonic Flows", M.Sc. Thesis, Sharif Univ. of Tech., Iran, 2009 (In Persian).
10. Beam, R.M. and Warming, R.F. "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form", J. Computational Physics, Vol. 22, No. 1, 87-109, 1976.
11. Liou, M.S. "A Sequel to AUSM: AUSM+", Computational Physics, J., Vol. 129, No. 2, pp. 364-382, 1996.
12. Ghadak, M. "The Numerical Simulation of the Euler Equations Using AUSM+ Scheme on Transonic Regime and Increasing its Precision", M.Sc. Thesis, Tarbiat Modarres Univ., Iran, 2010 (In Persian).
13. Fletcher, Clive A.J. "Computational Technique for Fluid Dynamics 1", Germany: Springer-Vilag, Vol. 1, pp. 107-11, 1991.



شکل (۱۸): نمودار نرخ همگرایی و زمان برای نازل ماخ ۰.۴

#### ۷- نتیجه‌گیری

در این قسمت به بررسی مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده در روش طراحی مستقیم مبتنی بر معادلات ناویر-استوکس دوبعدی تراکم‌پذیر و همچنین تفاوت آن با روش غیرلزج پرداخته می‌شود.

با توجه به اختلاف دیواره جسم مورد طراحی در جریان غیرلزج (کار قبلی) و لزج، استفاده از این روش به‌منظور دستیابی به دقت بالاتر در طراحی مجراهای دوبعدی با ماخ جریان بالا که ضخامت لایه‌مرزی آن قابل توجه می‌باشد، اجتناب‌ناپذیر است. همچنین در طراحی مواردی که احتمال جدایش جریان وجود دارد، استفاده از روش فوق ضروری به‌نظر می‌رسد.

استفاده از روش AUSM+ به‌صورت ضمنی در این روش طراحی، به‌دلیل دقت بالا در تسخیر ناپیوستگی‌های جریان و همچنین توانایی کارکرد در سرعت‌های پایین به‌ویژه در لایه‌مرزی، عملکرد بسیار بهتری نسبت به روش‌های بالادست (کار قبلی) دارد.

در طراحی مجراهایی که جدایش جریان در آن رخ می‌دهد، مسئله یکتا بودن پاسخ‌ها که در جریان غیرلزج برقرار می‌باشد، نقض می‌شود. بنابراین، این مسئله می‌بایست مدنظر طراح قرار داشته باشد که یک توزیع فشار خاص روی دیواره توسط دو شکل متفاوت پدید می‌آید که یکی همراه با جدایش جریان و دیگری بدون جدایش جریان می‌باشد.

با ریز شدن شبکه در نزدیکی دیواره‌ها و همچنین در شرایط جدایش جریان، پایداری مسئله کاهش یافته و در