

شبیه‌سازی دینامیک ابر حباب

حمیدرضا مساح^۱ و رضا ایزدی^۲ فریدون عباسی دوانی^۳

دانشکده علوم
دانشگاه فردوسی مشهد
گروه کاربرد پرتو
دانشگاه شهید بهشتی
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۴/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱۰/۲۳)

چکیده

بررسی حضور آبرهای حباب در مایعات به دلیل تاثیرات مثبت یا منفی آنها در فرآیندهای صنعتی مورد توجه پژوهشگران می‌باشد. در این مقاله هدف، شناخت رفتار یک مخلوط همگن حباب و مایع است. به سبب ساده‌سازی‌های رایج، معادلات حاکم بر رفتار آبرهای حباب، تحلیلی کامل از این پدیده ارائه نمی‌کنند. در این تحقیق سابقه کار دیگران بررسی و از میان آنها دست‌آوردهای تحقیقاتی "وانگ و برن" مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله ابتدا کد نوشته شده با الگوریتم این تحقیق، با نتایج "وانگ و برن" صحت‌سنجی شد. بعد، با محسوب کردن خاصیت تراکم‌پذیری در مرز حباب‌ها برای مخلوط همگن حباب‌ها و مایع، معادلات حاکم بر رفتار ابر حباب استخراج شدند. سپس، این معادلات تحت ترازهای مختلف فشار صوتی اعمالی به ابر و مقادیر گوناگون درصد گاز داخل مایع توسط کد تدوینی فوق‌الشاره حل شده‌اند. از نتایج به‌دست آمده تقلیل شدید بیشینه رشد با لحاظ تراکم‌پذیری حباب و رخداد فروپیکش تحت شرایطی می‌باشند. همچنین هنگامی که نسبت حضور حباب کم است رفتار ابر حباب به تراکم‌پذیری ارتباطی ندارد. برخی نتایج دیگر این پژوهش، چگونگی فروریزش حباب‌ها در لایه‌های بیرونی و درونی ابر حباب، وقوع پدیده فروپیکش و تأثیر عمیق تراکم‌پذیری بر بیشینه رشد حباب و شدت و زمان فروریزش‌ها است.

واژه‌های کلیدی: ابر حباب همگن، معادله «ریلی-پلسه-فلین»، تراکم‌پذیری، فروریزش، درصد گاز در مایع

Bubble Cloud Dynamics Simulation

H.R. Massah and R. Izadi

Science Department, Physics Group

Mashhad Ferdusi University

(Received: 09 July, 2013; Accepted: January 13, 2014)

F.A. Dawani

Applied Radiation Group

Shahid Beheshti University

ABSTRACT

Study of presence of bubble cloud in liquids has been of interest to researchers because of its positive or negative effects in many industrial processes. This paper aims to understand the behavior of a homogeneous mixture of bubbles and liquid. Due to usual simplifications, the equations governing bubble cloud behavior do not offer a complete analysis of this phenomenon. In this research, the works of the other scientists are reviewed especially the studies carried out by Wang and Brennen. In this study, first, the code devised according to numerical algorithm of this research is validated by results of Wang and Brennen. Then, by taking into account the compressibility property at the bubbles boundary for homogeneous mixture of bubbles in liquid, the governing equations are derived. Next, these equations under different applied sound pressure levels to the cloud, and a variety of gas percentage in liquid are numerically solved by the devised code. The severe reduction in maximum growth of bubbles with compressibility considerations, and the occurrence of collapses under some conditions are of the obtained results. Also, when bubble presence ratio is low the behavior of bubble cloud does not relate to compressibility. Some other outcomes of this research are manners of bubbles collapse in outer and inner layers of bubble cloud, serious compressibility effects on intensity and time of collapses, and maximum bubbles growth.

Keywords: Homogeneous Bubble Cloud, "Rayleigh-Plesset-Flynn" Equation, Compressibility, Collapse, Gas Percent in Liquid

۱- دانشجوی دکتری: h_r_massah@outlook.com

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): izadi@ferdowsi.um.ac.ir

۳- دانشیار

۱- مقدمه

پدیده کاواک‌زایی (کاویتاسیون^۱) ارتباط مستقیم با ظهور حباب در مایع دارد. حضور تعداد زیادی ذرات و حباب‌های معلق در مایع، مخلوط حاضر را تراکم‌پذیر می‌نماید، حتی اگر از تراکم‌پذیری مایع صرف نظر شود. در بررسی پدیده کاواک‌زایی که حدود قرن‌ها از آن می‌گذرد، شیوه‌های سنتی برای الگوسازی چنین مخلوط‌های تراکم‌پذیری از رابطه‌ای بین حجم حباب و فشار موضعی به دست آمده از حل معادله ریلی-پلسه برای تک‌حبابی در جریان آرام بی‌کرانه استفاده می‌کنند. البته به‌رغم حجم گسترده پژوهش‌های انجام شده در عرصه دینامیک جریان‌های چندفازی به‌ویژه حوزه دینامیک چندحبابی و ابر حباب، هنوز چالش‌ها و پیچیدگی‌های بسیاری وجود دارند [۱]. بنابراین، پرداختن به این پیچیدگی‌ها متناظر با پیشرفت‌های علمی و فناوری، از دغدغه‌های روز این حوزه است. پیشرفت فناوری‌های محاسباتی از مصداق‌های عبارات ذکر شده می‌باشد. به‌عنوان مثال، شیوه‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم موسوم به دی‌ان‌اس^۲ برای شبیه‌سازی جریان حبابی و بررسی نتایج فروریزش^۳ حباب و اثر جریان بر فروریزش و انتشار موج ضربه در مخلوط حاوی حباب‌ها رواج قابل توجهی یافته‌اند [۲].

تحقیقات نظری روی دینامیک ابر حباب در نیمه دوم قرن گذشته شروع و دنبال شده است. با وجود اهمیت فوق‌العاده شناخت رفتار ابر حباب، معادله‌های حاکم بر ابر حباب با اعمال تقریب‌ها و ساده‌سازی‌هایی توسط افراد و گروه‌های معدودی تشریح شده است. بقیه دانشمندان در زمینه دینامیک ابر حباب، معمولاً بسته به دقت مورد نیاز، به یک یا چند گروه از آنها ارجاع داده‌اند. تفاوت معادله‌های حاکمی که این گروه‌ها تبیین نموده‌اند زیاد نیست. برخی گروه‌ها از فرضیه‌های ساده‌کننده کمتری استفاده نموده‌اند، اما از طرفی مشاهده می‌شود که در ازای کمتر نمودن تقریب‌ها، تعداد محدودتری حباب را در نظر گرفته‌اند.

در دهه ۱۹۶۰، مطالعات تحلیلی بر روی دینامیک ابر حباب توسط وین‌گاردن^۴ انجام شد. او از یک الگوی پیوستاری برای مطالعه رفتار لایه فروریزیده^۵ (فروریزته) سیال حباب‌دار نزدیک یک دیوار تخت استفاده کرد. او در بررسی خود، اندازه همه حباب‌ها را یکسان فرض کرد و از چگالی گاز در مقابل مایع صرف نظر نمود. وی همچنین لزجت^۶ را از معادله‌ها حذف

کرد و هم‌گرایی^۷ را حاکم بر رفتار گاز داخل حباب در نظر گرفت [۳]. چاهین و دوراآیسومی^۸ (۱۹۹۲) دینامیک ابر حباب، شامل شمار کمی از حباب‌ها را مورد بررسی قرار دادند. آنها با فرض‌های: ۱- تراکم‌ناپذیری مایع، ۲- نامحدودی دامنه مایع، ۳- بی‌تأثیری لزجت مایع، ۴- جریان غیرپیچشی^۹ در مخلوط، ۵- بی‌تأثیری گرانش و ۶- تعداد N حباب توزیع شده با شماره در مایع ۱ تا N (تشکیل ابر داده‌اند)، به حل ابر پرداختند. آنها از معادله برنولی استفاده کرده و برای حل عددی، شیوه عناصر-مرزی سه-بعدی^{۱۰} را به کار گرفتند [۴].

برن^{۱۱} و همکاران در مقالات متعددی به بررسی دینامیک ابر حباب پرداخته‌اند [۱، ۵ و ۶]. در نهایت وانگ و برن یک توده چندحبابی که توسط یک مایع نامحدود خالص محاط شده است را مورد بررسی قرار دادند. آنها ابر را کروی همگن در نظر گرفتند و با فرض‌های ۱- تراکم‌ناپذیری مایع، ۲- دامنه نامحدود مایع، ۳- در نظر گرفتن جمله لزجت مایع در مرز حباب‌ها، ۴- جریان غیرپیچشی در مخلوط، ۵- بی‌تأثیری گرانش و ۶- تراکم‌ناپذیری مخلوط حبابی، تقریب‌های مد نظر خود را برای ساده‌سازی به معادله‌های حاکم بر دینامیک ابر حباب اعمال نمودند و سپس این معادله‌ها را در حالت‌های مختلف درصد گاز در مایع مورد بررسی قرار دادند [۱ و ۶]. برن ۲۰۱۱ در جمع‌بندی فعالیت‌های تحقیقاتی خود (پیوست) به پژوهش‌های آتی از جمله به ضرورت محاسبه دقیق جریان‌های سرعت بالا و پیچیده چندفازی، دخالت پدیده‌های چندمقیاسی زمانی و مکانی و دیگر تصحیحات اشاره کرده است [۱]. پس از وانگ و برن، تحقیقات نظری به‌صورت بنیادی روی دینامیک ابر حباب همگن گزارش نشده است. اکثر تحقیقاتی که به‌نوعی از رفتار دینامیکی ابر حباب ایستا (استاتیک) استفاده نموده‌اند، این بخش را به تحقیق وانگ و برن ارجاع داده و از این مرجع استفاده نموده‌اند.

در مقاله حاضر، دو نوآوری انجام شده است:

- ۱- لحاظ کردن تراکم‌پذیری در مخلوط حباب و مایع.
- ۲- اعمال ترازهای مختلف فشار صوتی و تحقیق تأثیر آنها روی رفتار ابر حباب برای درصدهای متفاوت حباب.

۲- معادله‌های حاکم بر ابر حباب

یک توده حباب به‌طور متقارن داخل یک ابر کروی مایع در نظر گرفته می‌شود. این ابر در یک محیط مایع همسان، که تا

7- Isothermal

8- Chahine and Duraiswami

9 -Non-Rotational

10 -Three-Dimensional Boundary-Elements Method

11- Brennen

1- Cavitation

2- Dns; Direct Numerical Simulation

3 -Collapse

4 -Wijngaarden

5 -Collapsed

6-Viscosity

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{ثابت} \\ M_L &= \text{ثابت} \quad (5) \\ V_L &= \text{ثابت.} \end{aligned}$$

با توجه به فرض تقارن کروی، رابطه مشتق مادی نسبت به زمان (لاگرانژی) به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r}.$$

برای مخلوط، از روابط (۲) و (۳) و تعریف فوق برای مشتق لاگرانژی و همچنین با جایگذاری و ساده‌سازی، نتیجه زیر گرفته می‌شود:

$$\frac{Dv_m}{Dt} = \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{r u_{mr}}{r} + \frac{\partial u_{mr}}{\partial r} \right), \quad (6)$$

که در آن، شاخص mr نشان مؤلفه شعاعی مخلوط است. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۶) و استفاده از رابطه حجم و شعاع حباب (۳)، رابطه (۷) برای بقای جرم مخلوط نتیجه می‌شود.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_{mr})}{\partial r} = \frac{12\pi\eta R^2}{3+4\pi\eta R^3} \frac{DR}{Dt}, \quad r \leq A(t) \quad (7)$$

برای بقای اندازه حرکت با توجه به تقارن کروی و با تقریب صفر بودن لزجت و نیروهای خارجی در دامنه ابر، تنها مؤلفه شعاعی به صورت رابطه (۸) باقی می‌ماند:

$$\frac{Du_r}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8)$$

برای داخل ابر، جرم حباب‌ها نسبت به جرم مایع قابل صرف نظر کردن است. با توجه به این تقریب، رابطه (۴) به شکل رابطه (۹) به شرح زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\rho_L} \left(\frac{3+4\pi\eta R^3}{3} \right) \quad (9)$$

با استفاده از رابطه (۸) برای مخلوط و جایگذاری رابطه (۹) در آن نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{Du_{mr}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_L} \left(1 + \frac{4}{3}\pi\eta R^3 \right) \frac{\partial p}{\partial r}, \quad r \leq A(t), \quad (10)$$

که در آن، $A(t)$ شعاع ابر و وابسته به زمان است. از رابطه بقای جرم (۲)، برای دامنه بیرون از ابر، با فرض تقارن کروی و تراکم‌ناپذیری مایع، رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

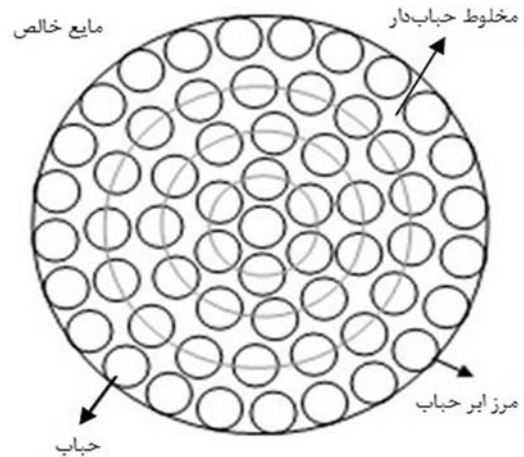
$$u_r = \frac{C(t)}{r^2}, \quad r \geq A(t) \quad (11)$$

که در آن، $C(t)$ ثابت وابسته به زمان است. با انتگرال‌گیری رابطه (۸) از $A(t)$ تا بی‌نهایت پس از جایگذاری سرعت از رابطه (۱۱) در آن، رابطه بقای اندازه حرکت در بیرون از ابر به صورت رابطه (۱۲) حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\rho_L} (p_{A(t)} - p_{\infty}) = \frac{\dot{C}(t)}{r} - \frac{C(t)^2}{2r^4}, \quad r \geq A(t) \quad (12)$$

بی‌نهایت ادامه دارد، مستقر است. شکل ۱ معادله بقای جرم در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_{\theta} \sin \theta)}{\partial t} + \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_{\varphi})}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$



شکل (۱): مخلوط مایع و حباب با تقارن کروی، داخل مایع بی‌کران.

برخلاف تراکم‌پذیری زیاد توده حباب، مایع خالص موجود در مخلوط، ساکن و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. از تبدیل فازهای مایع و بخار به یکدیگر صرف نظر شده و هیچ انتقال جرمی نیز لحاظ نشده است. با فرض تقارن θ و φ معادله بقای جرم به صورت معادله (۲) به شرح زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 u)}{\partial r} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2)$$

با تعیین m به عنوان نشان مخلوط، L نشانه مایع، B نشان حباب، B_s نشان تمامی حباب‌ها، n تعداد حباب‌ها در ابر، R شعاع حباب، V حجم، v حجم مخصوص و M جرم، تعاریف زیر برای مخلوط و مایع و حباب تعیین شده‌اند:

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{v_m}, \quad v_m = v_L + v_{B_s}, \\ V_L &= M_L v_L, \quad V_B = M_B v_B, \quad V_m = M_m v_m, \end{aligned} \quad (3)$$

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \eta = \frac{n}{V_L}, \quad \gamma = \frac{M_m}{M_L v_L}, \quad \alpha = \frac{n V_B}{V_m}.$$

از تعاریف فوق، رابطه (۴) قابل استخراج است:

$$V_m = V_L + V_{B_s} \rightarrow \frac{V_m}{V_L} = 1 + \eta V_B, \quad (4)$$

$$\rightarrow \gamma v_m = 1 + \eta \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)$$

با فرض عدم تراکم جرم و عدم تغییر فاز و فرض تراکم‌ناپذیری مایع، پارامترهای زیر ثابت هستند:

تغییرات شعاعی یک حباب که داخل یک مایع قرار دارد و به آن فشار صوتی متقارن اعمال می‌شود با معادله ریلی- پلسه قابل توصیف می‌باشند. وانگ و برنن از معادله ریلی- پلسه (۱۶) که طبق فرآیند مذکور بی‌بعد شده است، استفاده کرده‌اند [۶].

$$R \frac{D^2 R}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{DR}{Dt} \right)^2 + \frac{S}{2} (1 - R^{-3k}) + \frac{4}{Re} \frac{1}{R} \frac{DR}{Dt} + \frac{2}{We} (R^{-1} - R^{-3k}) + \frac{1}{2} C_p = 0 \quad (16)$$

در مطالعه حاضر از معادله ریلی- پلسه (۱۶) برای مقایسه، سنجش و تحقیق در بررسی درستی حل عددی استفاده شده است. همچنین تراکم‌پذیری مایع در مرز حباب منظور شده است که توسط معادله «ریلی- پلسه - فلین» بیان می‌شود (رابطه ۱۷). این تقریب تراکم‌پذیری به صورت جملات اتلافی در رابطه (۱۷) و به صورت سرعت شعاعی حباب نسبت به سرعت صدا در مایع گنجانده شده است [۷].

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{DR}{c_L}\right) R \frac{D^2 R}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{DR}{3c_L}\right) \left(\frac{DR}{Dt}\right)^2 + \\ & \left(1 + \frac{DR}{c_L}\right) \left(\frac{S}{2} (1 - R^{-3k}) + \frac{4}{Re} \frac{1}{R} \frac{DR}{Dt} + \right. \\ & \left. \frac{2}{We} (R^{-1} - R^{-3k}) + \frac{1}{2} C_p\right) - \\ & \left(1 - \frac{DR}{c_L}\right) \left(\frac{S}{2} \frac{D(R^{-3k})}{Dt} + \frac{4}{Re} \frac{D\left(\frac{1}{R} \frac{DR}{Dt}\right)}{Dt} + \right. \\ & \left. \frac{2}{We} \frac{D(R^{-1} - R^{-3k})}{Dt}\right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن، c_L کمیت بی‌بعد سرعت صدا در آب می‌باشد و نسبت به سرعت جریان U ، بی‌بعد شده است.

۳- شرایط مرزی و اولیه

برای بیرون از ابر همگن کروی با توجه به معادله پیوستگی و فرض تراکم‌ناپذیری نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 0 \quad (18)$$

$$\rightarrow u_r = \frac{C(t)}{r^2}, \quad r \geq A(t),$$

که در آن، $C(t)$ یک ثابت نسبت به شعاع و وابسته به زمان است. از طرفی، با جایگذاری رابطه (۱۸) در معادله بقای اندازه حرکت رابطه (۸)، رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود:

$$C_p(r,t) = C_{p_\infty}(t) + \frac{2}{r} \frac{dC(t)}{dt} - \frac{C^2(t)}{r^4}, \quad r \geq A(t) \quad (19)$$

که در آن، $C_{p_\infty}(t)$ ، ضریب فشار اعمال شده به مایع از بی‌نهایت (میدان صوتی اعمال شده به مایع) می‌باشد. رابطه $C_{p_\infty}(t)$

که در آن، $p_{A(t)}$ فشار در مرز ابر و p_∞ فشار در بی‌نهایت می‌باشند. معادله حاکم بر یک حباب، معادله ریلی- پلسه، با توجه به روابط بقای جرم، اندازه حرکت و فرض بی‌دررو برای داخل حباب و با فرض عدم تراورد جرم و تراورد فازی به صورت رابطه (۱۳) است [۶]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left(p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} - p - 2 \frac{S}{R} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad (13)$$

که در آن، R_0 شعاع اولیه حباب، p_0 فشار اولیه داخل حباب در حالت تعادل، p فشار اعمالی به مرز حباب از طرف مایع، k نسبت ظرفیت گرمایی در فشار ثابت به ظرفیت گرمایی در دمای ثابت، s کشش سطحی و μ ضریب لزجت مایع هستند. در مسئله حاضر فشار اعمالی به مرز هر حباب همان فشار مخلوط در مرز هر حباب است. برای بی‌بعدسازی معادله‌های فوق برای شبیه‌سازی عددی، می‌توان از روابط (۱۴) استفاده نمود:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{R}{R_0}, \quad \eta^* = \eta R_0^3, \quad r^* = \frac{r}{R_0}, \quad t^* = \frac{tU}{R_0} \\ C_p &= \frac{p_m - p_0}{\frac{1}{2} \rho_L U^2} \\ \sigma &= \frac{p_0 - p_V}{\frac{1}{2} \rho_L U^2} \\ Re &= \frac{\rho_L U R_0}{\mu_E} \\ We &= \frac{\rho_L U^2 R_0}{S} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن، R_0 شعاع اولیه حباب‌ها، U سرعت مرجع، p_0 فشار تعادل اولیه ابر، p_V فشار جزئی بخار داخل حباب، s تنش سطحی، μ_E لزجت مؤثر (که مجموع لزجت مایع و سازوکارهای اتلاف حباب شامل اتلاف صوتی، گرمایی و لزج است) می‌باشند. همچنین کمیت‌های بی‌بعد C_p ، σ ، Re و We نیز به ترتیب ضریب فشار، اعداد کاواک‌زایی، رینولدز و وبر هستند. بی‌بعدسازی معادله‌های (۷، ۱۳-۱۰) و همچنین با اعمال روابط (۱۴) و حذف نماد * از آنها، معادله‌هایی به صورت روابط (۱۵ و ۱۶) اعمال شده‌اند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_{mr})}{\partial r} &= \frac{12\pi\eta R^2}{3 + 4\pi\eta R^3} \frac{DR}{Dt}, \quad r \leq A(t) \\ \frac{Du_{mr}}{Dt} &= -\frac{1}{6} \left(3 + 4\pi\eta R^3 \right) \frac{\partial C_p}{\partial r}, \quad r \leq A(t) \\ u_r &= \frac{C(t)}{r^2}, \quad r \geq A(t) \end{aligned} \quad (15)$$

$$r(r_0, t) = \left\{ \frac{3}{3+4\pi\eta} \int_0^{r_0} \zeta^2 [3+4\pi\eta R^3(\zeta, t)] d\zeta \right\}^{\frac{1}{3}}, \quad (25)$$

که در آن، ζ یک متغیر کمکی به‌جای متغیر r برای انتگرال‌گیری می‌باشد. اکنون، با استفاده از شرط اولیه $r(r_0, t)=0$ در مرکز حباب، ثابت انتگرال‌گیری قابل محاسبه می‌باشد. سرعت مخلوط نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$u(r_0, t) = \frac{\partial r(r_0, t)}{\partial t} = \frac{12\pi\eta}{(3+4\pi\eta)r^2(r_0, t)} \int_0^{r_0} \frac{\partial R(r_0, t)}{\partial t} R^2(\zeta, t) d\zeta. \quad (26)$$

معادله اندازه حرکت و شرایط مرزی بر روی سطح ابر (دسته معادله‌های (۱۵)) برحسب مختصات لاگرانژی چنین نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial C_p(r_0, t)}{\partial r_0} = \frac{6}{3+4\pi\eta R^3(r_0, t)} \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial t} \frac{\partial r(r_0, t)}{\partial r_0}, \quad (27)$$

$$C_p(A_0, t) = C_{p\infty}(t) + \frac{2}{r(A_0, t)} \frac{d}{dt} [r^2(A_0, t) u(A_0, t)] - u^2(A_0, t). \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶) در (۲۷) و انتگرال‌گیری از رابطه (۲۷) و نیز با استفاده از مقدار ضریب فشار در مرز ابر رابطه (۲۸)، رابطه (۲۹) برای ضریب فشار داخل ابر حاصل می‌شود:

$$C_p(r_0, t) = \frac{6}{3+4\pi\eta} \left[\int_{r_0}^{r_0} \frac{g(\zeta, t; C_p) - 2r(\zeta, t) u(\zeta, t)}{r^4(\zeta, t)} \zeta^2 d\zeta \right] + \frac{2g(A_0, t)}{r(A_0, t)} - u^2(A_0, t) + C_{p\infty}(t) \quad (29)$$

تابع $g(\zeta, t; C_p)$ در معادله فوق به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$g(\zeta, t; C_p) = \frac{12\pi\eta}{3+4\pi\eta} \int_0^\zeta \left\{ \frac{2}{We} [R^{1-3k}(\zeta, t) - 1] - \frac{4}{Re} \frac{\partial R(\zeta, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{2} R(\zeta, t) [R^{1-3k}(\zeta, t) - 1] + \frac{1}{2} R(\zeta, t) \left[\left(\frac{\partial R(\zeta, t)}{\partial t} \right)^2 - C_{p\infty}(\zeta, t) \right] \right\} \zeta d\zeta. \quad (30)$$

لازم به‌ذکر است که توصیف الگوریتم استفاده شده توسط وانگ و برن [۱ و ۶] برای حل عددی معادله‌های (۲۵، ۲۶ و ۲۹) درج شده است:

جهت همانندی و مقایسه با نتایج وانگ و برن به‌صورت رابطه (۲۰) اعمال شده است:

$$C_{p\infty}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} C_{pMin} [1 - \cos(2\pi t/t_G)]; & 0 < t < t_G \\ 0 & ; t > t_G \end{cases} \quad (20)$$

معادله (۱۸ و ۱۹) برای روی ابر، به‌صورت رابطه (۲۱) می‌باشند:

$$C(t) = A^2(t) u(A(t), t), \quad (21)$$

$$C_p(A(t), t) = C_{p\infty}(t) + \frac{2}{A(t)} \frac{d}{dt} \left[\frac{A^2(t) u(A(t), t)}{dt} \right] - u^2(A(t), t)$$

در مرکز ابر نیز به‌دلیل تقارن، می‌توان رابطه زیر را بیان نمود:

$$u(0, t) = 0. \quad (22)$$

با به‌کارستن فرض ابر همگن پنداشته شده که در لحظه اول، قبل از اعمال امواج صوتی، شعاع تمامی حباب‌ها R_0 بوده و هیچ‌گونه حرکت شعاعی ندارند و این حباب‌ها روی کره‌های هم‌مرکز با ابر کروی به‌طور متقارن چیده شده‌اند (شکل ۱). با توجه به این فرضیه‌ها، روابط (۲۳) به‌عنوان شرایط اولیه لحاظ می‌شوند:

$$R(r, 0) = 1; \quad \frac{DR}{Dt}(r, 0) = 0 \quad (23)$$

$$u(r, 0) = 0; \quad C_p(r, 0) = 0$$

۴- شیوه حل عددی

برای حل عددی معادله‌های (۱۵ و ۱۶) با توجه به اینکه هدف شناخت رفتار هر حباب در موقعیت شعاعی در ابر کروی می‌باشد، از مختصات لاگرانژی - دستگاه مختصاتی که با ذره حرکت می‌کند، استفاده شده است.

در انتگرال‌گیری موسوم به لاگرانژی، از معادله‌های پایستاری جرم و اندازه حرکت در مختصات لاگرانژی (r, t) ، انتگرال‌گیری می‌شود. نماد r_0 بیانگر فاصله شعاعی اولیه از مرکز ابر در لحظه آغازین است. سایر متغیرها با پانویس صفر نیز به‌معنای مقادیر در لحظه اول می‌باشند. برای تبدیل از مختصات لاگرانژی به اویلری، باید از ژاکوبی تبدیل به‌صورت زیر (در حالت کروی) بهره برد [۸]:

$$\frac{\rho(r_0, t)}{\rho(r_0)} = \frac{1}{J}, \quad J = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\partial r}{\partial r_0}. \quad (24)$$

با قراردادن رابطه (۴) در معادله (۲۴) و انتگرال‌گیری از نتیجه آن، تعیین موقعیت یک ذره مخلوط در مختصات لاگرانژی ممکن می‌شود که به‌شرح زیر است:

۱- در هر یک از نقاط لاگرانژی r_0 ، مقادیر سه کمیت $\partial^2 R(r_0, t) / \partial t^2$ و $\partial R(r_0, t + \Delta t) / \partial t$ ، $R(r_0, t + \Delta t)$ با استفاده از معادله «ریلی-پلسه، معادله (۱۶)» و همچنین به صورت جداگانه از معادله «ریلی-پلسه-فلین (۱۷)» محاسبه می‌شوند. محاسبات به وسیله رسم رژه زمانی صریح «رونگ-کوتا ۴ و ۵ کش - کارپ» [۱۱] که دارای گام زمانی خودکار می‌باشد بر پایه مقادیر معلوم گام زمانی قبلی (از جمله ضریب فشار) انجام می‌شوند.

۲- کوچک‌ترین گام زمانی مرحله ۱، به‌عنوان گام زمانی انتخاب شده و مرحله ۱ برای همه نقاط لاگرانژی تکرار می‌شود.

۳- با محاسبه مقادیر $R(r_0, t + \Delta t)$ و $\partial R(r, t + \Delta t) / \partial t$ در مرحله قبل و با کمک معادله‌های (۲۵ و ۲۶) مقادیر $r(r, t)$ و $u(r, t)$ به دست می‌آیند.

۴- به کمک نتایج به دست آمده از مراحل ۱ و ۲ و با انجام انتگرال‌گیری بر روی معادله (۲۹)، مقادیر مربوط به $C_p(r, t)$ با استفاده از شیوه ماتریس معکوس محاسبه می‌شوند.

۵- تکرار مراحل ۱ الی ۴.

۵- نتایج حل عددی

در وهله اول، در بررسی تأیید درستی و صحت کد نوشته شده برای حل عددی ابر همگن حباب با الگوریتمی که در بخش قبل به آن اشاره شد، از دستگاه معادله‌های وانگ و برن (۱۶ و ۱۵)، شرایط اولیه (۲۳)، شرایط مرزی (۲۱) و مقادیر پارامترها (۳۱) استفاده شده است:

$$U = 10 \text{ m/s}, R_0 = 100 \mu\text{m}, \rho_L = 1,000 \text{ kg/m}^3, \\ \mu_E = 0,001 \text{ N s/m}^2, S = 0,035 \text{ N/m}, A = 100, \\ t_G = 1,000, \sigma = 0,4 \quad (31)$$

درصد گاز داخل مایع α ، پارامتری است که نقش تعیین‌کننده‌ای در رفتار حباب‌ها دارد. رابطه این پارامتر با η به صورت رابطه (۳۲) است:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \eta = \alpha / (1 - \alpha) \quad (32)$$

نتیجه حل عددی برای ابر حباب (۱۶ و ۱۵) با درصد گاز $\alpha = 0,05$ ، در سه نقطه لاگرانژی در شکل ۲ نشان داده شده است.

۱- در هر یک از نقاط لاگرانژی r_0 ، مقادیر کمیت‌های $R(r_0, t + \Delta t)$ و $\partial R(r_0, t + \Delta t) / \partial t$ با استفاده از رسم^۱ محاسباتی «رژه زمانی صریح^۲ (رونگ-کوتا ۴)» بر پایه مقادیر معلوم گام زمانی قبلی محاسبه می‌شوند.

۲- با مقادیر محاسبه شده $R(r, t + \Delta t)$ و $\partial R(r, t + \Delta t) / \partial t$ در مرحله قبل و با کمک معادله‌های (۲۵ و ۲۶)، کمیت‌های $r(r, t)$ و $u(r, t)$ به دست می‌آیند.

۳- به کمک نتایج به دست آمده از مراحل ۱ و ۲ و همچنین با انجام انتگرال‌گیری بر روی معادله (۲۹)، مقادیر مربوط به $C_p(r, t)$ با استفاده از شیوه تکرار حاصل می‌شوند. پس از محاسبه ضریب فشار با استفاده از معادله ریلی-پلسه (۱۶)، مقادیر مشتق دوم شعاع حباب در نقاط مختلف لاگرانژی نتیجه می‌شوند.

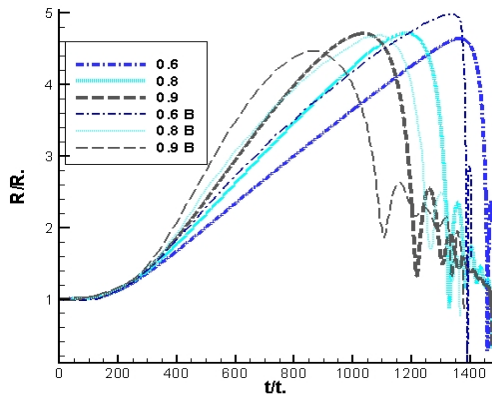
۴- تکرار مراحل ۱ الی ۳.

وانگ و برن برای هم‌گرایی فرآیند تکرار مجبور به اعمال شرایط تحت-واهلش^۳ شده‌اند [۹]. شرط گام زمانی در طی محاسبه به صورت خودکار تنظیم می‌شود، به گونه‌ای که بیشینه تغییر شعاع حباب در ابر حباب در هر زمان متوالی از ۵ درصد بیشتر نمی‌شود. این گروه تعداد نقاط لاگرانژی را ۱۰۰ در نظر گرفته‌اند و سپس با تعداد ۲۰۰ و ۴۰۰ گره، دوبرتبه نتایج را بررسی کرده‌اند.

سیار [۱۰] با استفاده از الگوریتم ارائه شده وانگ و برن [۶] موفق نشد نمودارهای ارائه شده توسط وانگ و برن [۱ و ۶] را دوباره به دست آورد. سیار طی چهار مرحله بهینه‌سازی فقط توانست بخشی از هر یک از نمودارهای ارائه شده توسط وانگ و برن را بازتولید نماید. حل او منجر به ناپایداری حباب‌های موجود در برخی نقاط لاگرانژی در بخش آغازین فروریزش می‌شد. دلیل اصلی این ناپایداری، تغییرات شدید بعضی حباب‌ها در برخی زمان‌ها است. گیراندازی^۴ این تغییرات شدید، نیازمند راه‌حل‌های عددی مناسب برای معادله‌های «سفت»^۵ می‌باشد.

در این تحقیق با الگوریتمی متفاوت از الگوریتم ارائه شده وانگ و برن [۶] دستگاه معادله‌های آنان برای توصیف رفتار ابر حباب حل شد. اجرا این الگوریتم منجر به حصول دوباره نتایج و نمودارهای ارائه شده توسط وانگ و برن [۱ و ۶] شد. شرح الگوریتم ذکر شده به شرح زیر است:

- 1- Scheme
- 2- Explicit Time Marching
- 3- under-Relaxation
- 4- Capture
- 5- Stiff



شکل (۴): نتایج کد تدوینی با الگوریتم تحقیق حاضر (خطوط نازک) در قیاس با نتایج کد وانگ [۱ و ۶] (خطوط ضخیم) از رفتار شعاعی حباب‌ها در ۳ نقطه لاگرانژی برای $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.05$ ارائه شده‌اند. مقادیر پارامترهای ثابت مقادیر رابطه (۳۱) هستند.

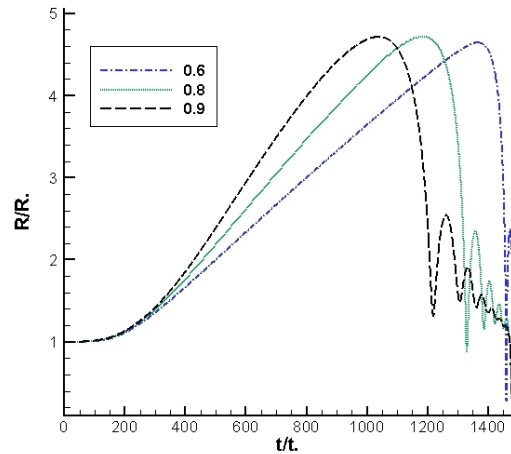
دلایل اختلاف‌های مشهود در شکل ۴ به شرح زیر می‌باشند:

- ۱- استفاده از رسم محاسباتی دقیق‌تر موسوم به «رونگ-کوتا کش-کارپ» از مجموعه شیوه‌های رونگ-کوتا با گام زمانی خودکار، به جای رسم «رونگ-کوتا ۴» با گام زمانی ثابت.
- ۲- تفاوت در نحوه محاسبه جمله $\partial^2 R(r_0, t) / \partial t^2$ که به طور همزمان با محاسبه $R(r_0, t + \Delta t)$ و $\partial R(r_0, t + \Delta t) / \partial t$ با استفاده از رسم محاسباتی «رونگ-کوتا کش - کارپ» انجام شده است. در حالی که وانگ و برنن در الگوریتم خود، ابتدا $R(r_0, t + \Delta t)$ و $\partial R(r_0, t + \Delta t) / \partial t$ را با استفاده از $\partial^2 R(r_0, t) / \partial t^2$ و رابطه ریلی-پلسه (۱۶) محاسبه نموده‌اند و سپس $\partial^2 R(r_0, t + \Delta t) / \partial t^2$ را با استفاده از $R(r_0, t + \Delta t)$ و $\partial R(r_0, t + \Delta t) / \partial t$ و رابطه (۱۶) محاسبه کرده‌اند که دقت کمتری از نظر حل عددی به رویکرد این مطالعه دارد.

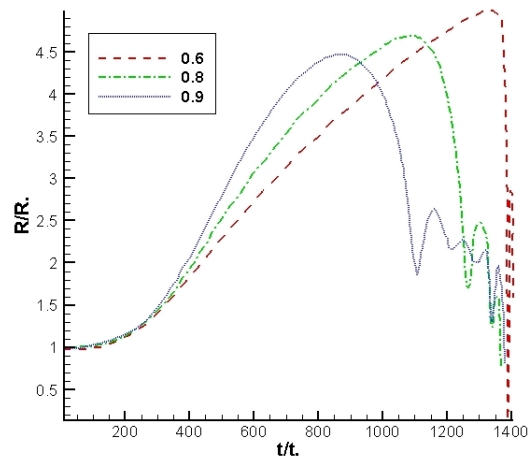
- ۳- در این مطالعه ضرایب فشار دقیق‌تر (با استفاده از شیوه ماتریس معکوس و به طور مستقیم) محاسبه شده‌اند. در صورتی که، وانگ و برنن [۶] ضریب فشار را از شیوه تکرار به دست آورده‌اند و دقت مورد نظر را حد رسیدن به همگرایی عنوان کرده‌اند. البته در حل معادله‌های فوق، از معادله ریلی-پلسه رابطه (۱۶) استفاده شده است.

در وهله دوم، اثرات خاصیت تراکم‌پذیری در شرایط ترکیبی گوناگون ترازهای شدت میدان صوتی و میزان درصد حباب در مخلوط همگن ابر حباب در قیاس با حالات تراکم‌ناپذیری مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج و تحلیل هر کدام از حالات با ارائه نمودار ذی‌ربط ارائه شده است.

نتایج حل عددی مندرج در مقاله وانگ و برنن برای ابر حباب و شرایط شکل ۲ نیز پس از استخراج رقومی از مرجع [۱ و ۶] در شکل ۳ نشان داده شده‌اند.



شکل (۲): نمودار رفتار شعاعی حباب‌ها در ۳ نقطه لاگرانژی $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.05$ برای معادله‌های مراجع [۱ و ۶] و $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.05$. مقادیر پارامترهای ثابت مقادیر رابطه (۳۱) هستند.

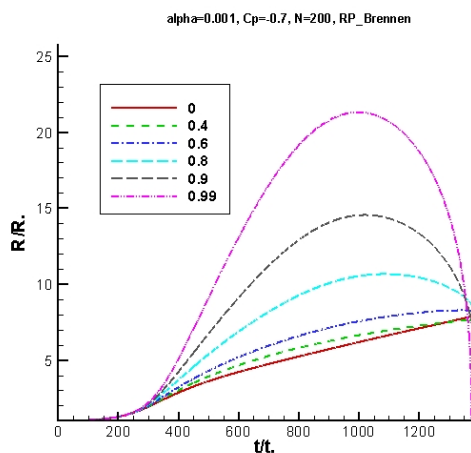


شکل (۳): نمودار نسخه رقومی استخراج شده از نتایج وانگ و برنن [۱ و ۶]. رفتار شعاعی حباب‌ها در ۳ نقطه لاگرانژی برای $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.05$ نشان داده‌است. مقادیر پارامترهای ثابت مقادیر رابطه (۳۱) هستند.

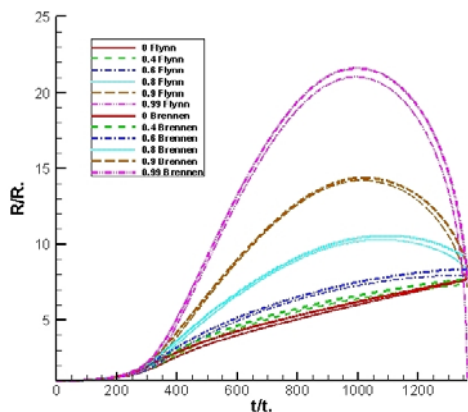
شکل ۴ مقایسه نتایج ارائه شده در شکل ۲ را با متناظرشان در شکل ۳ به تصویر کشیده است. از این شکل نتیجه می‌شود که تطابق و هم‌خوانی خوبی بین نتایج وانگ و برنن [۱ و ۶] و نتایج حل معادله‌های [۶] با شیوه عددی این تحقیق وجود دارد.

تقلیل یافته است و مقادیر بیشینه روند کاهشی متناظر با کاهش فاصله حباب از مرکز ابر (نقاط لاگرانژی) می‌یابند. عدم رخداد فروپکش تقریباً محرز است.

در شکل ۸ نتایج تحقیق حاضر (شکل ۶) با نتایج شرایط مشابه از وانگ و برنن (شکل ۷)، برای درصد گاز ۰/۰۱، مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که نتایج به هم نزدیک می‌باشند. بنابراین، منظور کردن تراکم‌پذیری مخلوط در شرایط میزان پایین گاز تأثیر چندانی در رفتار ابر حباب ندارد. از مقایسه شکل ۸ با شکل ۵ و ۲ نتیجه می‌شود که با کاهش درصد گاز داخل مخلوط، اثر تراکم‌پذیری تقلیل می‌یابد.

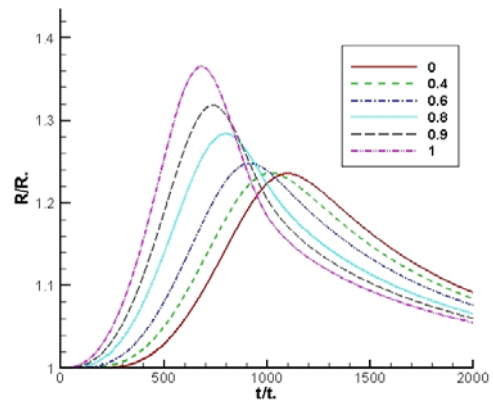


شکل (۷): نمودار فوق نشانگر رفتار شعاعی حباب‌ها در ۶ نقطه لاگرانژی برای $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.001$ با معادله ریلی-پلسه (۱۶) است. مقادیر پارامترها، مقادیر رابطه (۳۱) می‌باشند.

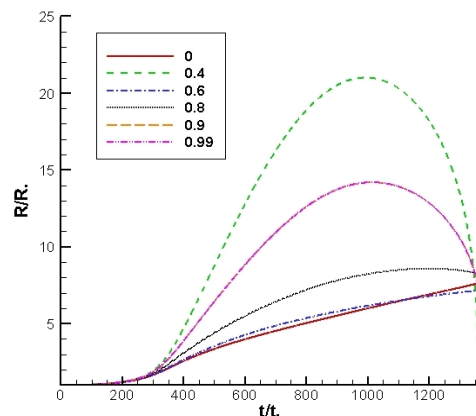


شکل (۸): مقایسه نتایج تحقیق حاضر (خطوط نازک؛ ریلی-پلسه-فلین؛ شکل ۶) با نتایج [۱ و ۶] (خطوط ضخیم؛ وانگ و برنن؛ شکل ۷) در ۶ نقطه لاگرانژی برای $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.001$ است. مقادیر پارامترهای ثابت مقادیر رابطه (۳۱) می‌باشند.

برای مطالعه تأثیر لحاظ کردن اتلاف ناشی از تراکم‌پذیری مایع در مرز حباب، نتایج حل عددی با معادله ریلی-پلسه-فلین در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند.



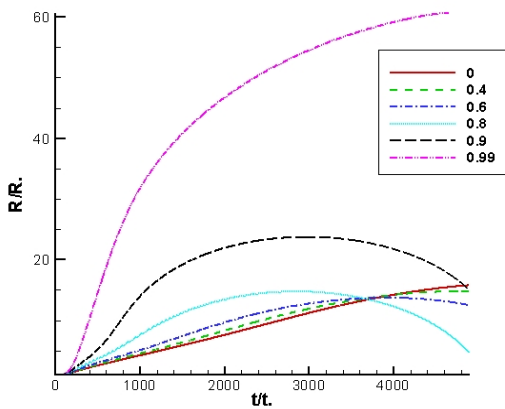
شکل (۵): نمودار رفتار شعاعی حباب‌ها در ۵ نقطه لاگرانژی برای $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.005$ طبق معادله ریلی-پلسه-فلین (رابطه ۱۷) می‌باشد. مقادیر پارامترها، مقادیر رابطه (۳۱) هستند.



شکل (۶): نمودار فوق رفتار شعاعی حباب‌ها را در ۶ نقطه لاگرانژی برای $C_p = 0.7$ و $\alpha = 0.001$ با معادله ریلی-پلسه-فلین (رابطه ۱۷) ارائه می‌کند. مقادیر پارامترها، مقادیر رابطه (۳۱) می‌باشند.

با افزایش درصد گاز، زمان شروع فرآیند انقباض جلو می‌افتد و مدت دوره انقباض به طور مطلق چندین برابر می‌شود، به طوری که امکان وقوع فروریزش وجود ندارد. بیشینه دامنه حباب به طور مطلق به ترتیب لایه‌ها چندین مرتبه کاهش می‌یابد (این روند در درصد پایین حباب در لایه‌های زیرین مختل می‌شود). مقایسه شکل‌های ۲ و ۵ نشان می‌دهد در شرایطی که برای حل عددی در نظر گرفته شده، از رفتار قوی حباب‌ها به شدت کاسته شده و آنها رفتار هموارتری از خود نشان داده‌اند. همچنین بیشینه مطلق رشد دامنه حباب به شدت

تبدیل می‌شوند. در ترتیب شروع فرآیند انقباض در کل لایه‌ها اختلال روی می‌دهد.



شکل (۱۰): نمودار فوق رفتارهای شعاعی حباب‌ها در ۶ نقطه لاگرانژی برای $\alpha = 0.5$ و بیشینه فشار کششی اعمالی ۵/۵، با معادله ریلی-پلسه-فلین (رابطه ۱۷) است. مقادیر پارامترها، مقادیر رابطه (۳۱) می‌باشند.

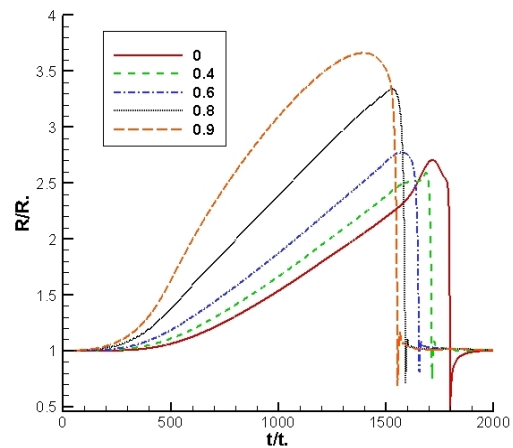
از مقایسه شکل‌های ۵، ۹ و ۱۰ نتیجه می‌شود که با افزایش فشار کششی، تأخیر در زمان آغاز انقباض (فروریزش در شکل ۹) پدید می‌آید (تأثیر تراکم‌پذیری).

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱، نتایج اعمال تراز بالای فشار صوتی در دو حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر نشان داده شده‌اند. از مقایسه این نتایج در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود که تراکم‌پذیری تأثیر عمیقی بر بیشینه رشد حباب‌ها، شدت و زمان وقوع انقباض دارد. برای نقاط منتخب شکل هیچ فروریزشی مشهود نیست.

در شکل ۱۱ و ۱۲ با افزایش تراز فشار صوتی (در حدود هشت برابر) بیشینه مطلق رشد دامنه حباب‌ها در ابر حباب افزایش (چندین برابری) می‌یابد. به‌طور مثال، برلی نقطه لاگرانژی ۰/۹ شعاع ابر، بیشینه رشد دامنه حباب‌ها در حدود ۵ برابر شده و زمان آغاز انقباض به شدت به تعویق می‌افتد. از مدت زمان آغاز انقباض برای لایه‌های بیرونی، به ترتیب کاهش فاصله از مرکز ابر کاسته می‌شود و برای لایه‌های درونی این مطلب معکوس می‌شود. در ترتیب شروع فرآیند انقباض در لایه‌ها اختلال روی می‌دهد و طول زمان انقباض خیلی افزایش می‌یابد.

برای مطالعه تأثیر تغییرات فشار کششی بر رفتار ابر حباب، معادله‌های (۱۷) برای ترازهای متفاوت فشار بررسی شده‌اند (از جمله تراز بیشینه فشار بی بعد ۰/۷، ۱/۵ و ۵/۵).

مقایسه شکل‌های ۹ و ۵ نشان می‌دهد در مخلوط ابر حباب با در نظر گرفتن اثرات تراکم‌پذیری و درصد یکسان حباب در تراز بالاتر فشار صوتی اعمالی، فروریزش و فروپکیدن رخ می‌دهد. مدت زمان خیز بیشتر شده و طول برهه انقباض (فروریزش و فروپکیدن) نیز به شدت کم می‌شود. اثر تراز بالاتر فشار صوتی بر لایه‌های درونی کاملاً مشهود است. اثر تراکم‌پذیری سبب ذخیره شدن انرژی در حباب‌های لایه‌های درونی می‌شود که منجر به ادامه رشد سریع لایه‌های درونی پس از فروریزش لایه بیرونی مجاور می‌شود. در این حالت فروریزش لایه‌ها به ترتیب کاهش فاصله لایه از مرکز ابر رخ می‌دهد، این ترتیب در فروپکیدن حباب‌ها هم دیده می‌شود.



شکل (۹): نمودار فوق رفتار شعاعی حباب‌ها در ۵ نقطه لاگرانژی برای $\alpha = 0.5$ و دامنه ضریب فشار اعمالی ۱/۵ کششی با معادله ریلی-پلسه-فلین (رابطه ۱۷) نشان می‌دهد. مقادیر پارامترها، مقادیر رابطه (۳۱) هستند.

از مقایسه شکل‌های ۹ و ۱۰ نتیجه می‌شود که با افزایش تراز فشار صوتی (در حدود چهار برابر) بیشینه مطلق رشد دامنه حباب‌ها در ابر حباب افزایش (چندین برابری) می‌یابد و زمان آغاز انقباض به شدت به تعویق می‌افتد. از مدت زمان آغاز انقباض برای لایه‌های بیرونی، به ترتیب کاهش فاصله از مرکز ابر کاسته شده و برای لایه‌های درونی این مطلب معکوس می‌شود. در ترتیب شروع فرآیند انقباض در لایه‌های درونی اختلال روی می‌دهد و طول زمان انقباض خیلی افزایش می‌یابد. تراکم‌پذیری سبب رشد چندین برابری شعاع ابر حباب (به‌ویژه لایه آخرین) می‌شود. فروریزش‌ها (فروپکیدن‌ها) به انقباض

۱- درصد گاز در مایع به شدت بر رفتار حبابها تأثیرگذار است. هر چه درصد گاز بیشتر باشد، رشد رفتار حبابها هموارتر شده و از رفتارهای شدید شعاعی حبابها کاسته می شود.

۲- درصد بیشتر گاز باعث کم تر شدن بیشینه رشد حبابها در مرحله رشد حبابها می شود.

۳- افزایش فشار کششی، باعث افزایش بیشینه رشد حبابها و به تعویق افتادن فروریزش آنها می شود.

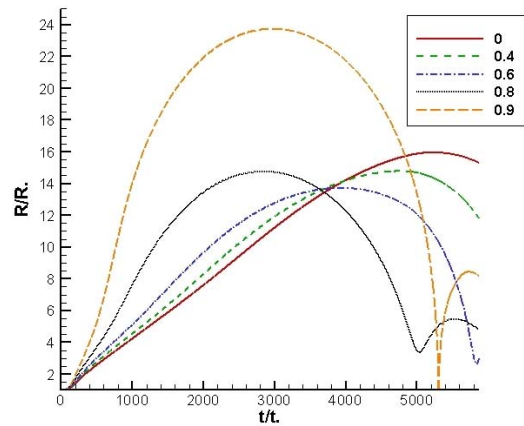
۴- رشد حبابها کم تر شده و زمانهای فروریزش تغییر می کنند، اما در برخی حالات رفتار نسبی حبابها نسبت به یکدیگر (ترتیب رشد و فروریزش) به هم می خورد.

۵- تأخیر فروریزش هم به شدت میدان صوتی و هم به درصد گاز وابسته است. با این دو پارامتر انقیاد رفتار ابر حباب تا حدودی میسر می شود. به عنوان مثال امکان مهار و انقیاد زمانی فروریزش حبابهای لایه خاصی از ابر متقارن فراهم می شود.

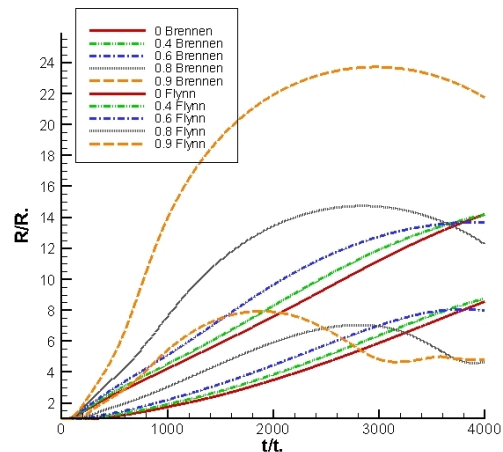
در تجربه، مهار و پاییدن خاصیت تراکم پذیری محیط (مایع - آب) به تنهایی کاری بسیار دشوار است. بنابراین جهت ایجاد راحت تر شرایط مطلوب برای انقیاد رفتار ابر حباب، بهره گیری از تراز شدت میدان صوتی و میزان درصد حباب در مخلوط ضروری است.

۷- مراجع

1. Brennen, C.E. "An Introduction to Cavitation Fundamentals", Cavitation: Turbo-Machinery and Medical Applications, WIMRC Forum 2011, Univ. Warwick, UK, 4th-6th, July 2011.
2. Tryggvason, G. and Dabiri, S. "Direct Numerical Simulation of Shock Propagation in Bubbly Liquids", in Bubble and Shock Waves, Shockwave 8, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 177-201, 2013.
3. Wijngaarden, L. Van "On the Equations of Motion for Mixtures of Liquid and Gas Bubbles", J. Fluid Mech, Vol. 33, No. 3, pp. 465-474, 1968.
4. Chahine, G.L. and Duraiswami, R. "Dynamical Interaction in a Multi-Bubble Cloud", J. Fluids Eng. Transactions of the ASME, Vol. 114, No. 4, pp. 680-686, 1992.
5. Brennen, C.E. "Cavitation and Bubble Dynamics", Oxford Univ. Press, New York, 1995.
6. Wang, Y.C. and Brennen, C.E. "Numerical Computation of Shock Waves in a Spherical Cloud of Cavitation Bubbles", J. Fluids Eng. Transactions of the ASME, Vol. 121, No. 4, pp. 872-880, 1999.
7. Flynn, H.G. "Cavitation Dynamics: I. A Mathematical Formulation", J. Acoustic. Soc. Am., Vol. 57, No. 6, Part I, 1975.
8. Lai, M., Kremple, E., and Ruben, D. "Introduction to Continuum Mechanics", 4th ed., Butterworth-Heinemann, Elsevier, Oxford UK, 2010.



شکل (۱۳): نمودار فوق، رفتارهای شعاعی حبابها در ۵ نقطه لاگرانژی برای $\alpha = 0.5$ و بیشینه فشار کششی اعمالی ۵/۵، با معادله ریلی- پلسه مورد استفاده وانگ و برن (رابطه ۱۶) است. مقادیر پارامترها، مقادیر رابطه (۳۱) می باشند.



شکل (۱۲): مقایسه نتایج بیشینه فشار کششی اعمالی ۵/۵ با در نظر گرفتن تراکم پذیری مخلوط (خطوط نازک؛ ریلی- پلسه - فلین، رابطه (۱۷)) با نتایج تراکم ناپذیری مخلوط (خطوط ضخیم؛ وانگ و برن - رابطه ۱۶) در ۵ نقطه لاگرانژی برای $\alpha = 0.5$. مقادیر پارامترهای ثابت مقادیر رابطه (۳۱) هستند.

۶- نتیجه گیری

معادله های حاکم بر ابر حباب بسیار پیچیده اند و در بررسی و تجزیه و تحلیل آن ساده سازی های زیادی صورت می گیرند. این تحقیق در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری در مرز حباب باعث پیچیدگی بیشتری شده است. حل عددی معادله های استخراج شده با لحاظ کردن تراکم پذیری مایعات در مرز حبابها و همچنین افزایش میزان شدت میدان صوتی اعمال شده (افزایش فشار کششی به مخلوط) برای مقادیر متفاوت درصد نشان داده است که:

ایشان طی دوره تدریس خود، شمار قابل ملاحظه‌ای مناصب دانشگاهی داشته‌اند و دارای افتخارات متعدد علمی از جمله فلو^۲ انجمن مهندسیین مکانیک آمریکا و انجمن مهندسیین مکانیک ژاپن می‌باشند.

دکتر برن صاحب سه عنوان کتاب؛ "دینامیک کاواکیدن و حباب"، "هیدرودینامیک تلمبه‌ها" و "مبانی جریان‌های چندفازی"، می‌باشد که زیر نظر خودشان به چندین زبان؛ فارسی، چینی و ژاپنی، ترجمه شده‌اند. ایشان دو کتاب را نیز ویراستاری کرده‌اند؛ "جریان‌های چندفازی در توربوماشین‌ها"، و "پروسیدینگ^۳ چهارمین سمپوزیوم بین‌المللی در زمینه کاواکیدن".

دکتر برن مؤلف ۲۵۰ مقاله در نشریات معتبر علمی و نیز ۱۳۵ مقاله ارائه شده در کنفرانس‌ها هست.

ایشان سبک خاصی برای شبیه‌سازی عددی دینامیک ابر حبابی دارند و به‌عنوان مرجع در زمینه دینامیک ابر حبابی ایستا مطرح می‌باشند.

9. Wang, Y.C. "Shock Waves in Bubbly Cavitating Flows", PhD Thesis, California Institute of Tech. Pasadena, California, 1996.
10. Sayyar, H. "An Investigation of Multibubble Dynamics", MS Thesis, Shahid Beheshti University, Aug. 2009 (in Persian).
11. Cash, J.R. and Karp, A.H. "A Variable Order Runge - Kutta Method for Initial Value Problems with Rapidly Varying Right-Hand Sides", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 16, No. 3, pp. 201-222, 1990.

پیوست

زی‌نگاشت کریستوفر ارل برن

دکتر کریستوفر ارل برن، ۷۲ ساله، استاد تمام موسسه فناوری کالیفرنیا (اینستیتوت آو تکنالوژی) موسوم به کلتک^۱ که از سال ۱۹۶۹ در این موسسه مشغول به تدریس‌اند. تخصص ایشان علوم گرمایی و سیالات، به‌خصوص دینامیک حباب است و در دینامیک چندحبابی صاحب سبک، مکتب و مرجعیت می‌باشد. ایشان در این زمینه آثار بی‌شماری را تالیف کرده و شاگردان دکترای متعددی را تربیت نموده‌اند (بیش از ۳۰ نفر).