

# الگوی رتبه کاسته تخمین جریان تراکم‌پذیر بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه، با استفاده از میان‌یابی و برون‌یابی مدهای پرانرژی

محمد کاظم مؤیدی<sup>۱</sup>

گروه مهندسی مکانیک

دانشکده فنی، دانشگاه قم

(تاریخ دریافت: ۹۳/۱/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۳/۶/۱۹)

میلاذ نجف‌بیگی<sup>۲</sup>

گروه مهندسی هوافضا

دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۹۳/۱/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۳/۶/۱۹)

## چکیده

هدف از این پژوهش ارائه روشی جهت تخمین سریع ضرایب آیرودینامیکی و بازسازی میدان جریان حول ایرفویل NACA0012 در جریان مافوق صوت و مادون صوت، با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه و نیز بررسی تأثیر تعداد و نوع چیدمان نمایه‌های مورد استفاده در میدان جریان بازسازی شده می‌باشد. در الگوی مذکور، از ترکیب روش‌های تجزیه متعامد بهینه، میان‌یابی ماریچ درجه سوم و برون‌یابی توابع چندجمله‌ای استفاده شده تا داده‌های مربوط به زوایای حمله و اعداد ماخ مفقود شده و همچنین تولید نشده در فرآیند حل CFD، بسیار سریع‌تر نسبت به حل با روش عددی و با دقتی مناسب به دست آیند. در نهایت، نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته تجزیه متعامد بهینه با نتایج داده‌های حاصل از حل عددی مقایسه شده و نکاتی جهت انتخاب درست نمایه‌ها ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** روش تجزیه متعامد بهینه، الگوی رتبه کاسته، میان‌یابی مدها، انرژی مدها

## A Reduced Order Model for Compressible Flow Estimation, Based on POD Method, Using Interpolation and Extrapolation of High Level Energy Modes

M.K. Moayyedi

Department of Mechanical Engineering  
University of Qom

M. Najafbeygi

Aerospace Engineering Group  
School of New Science and Technology  
University of Tehran

(Received: 9 April, 2014; Accepted: 10 September, 2014)

### ABSTRACT

This article introduces a method for fast estimation of aerodynamic coefficients and flow field data reconstruction around a NACA0012 airfoil, based on proper orthogonal decomposition (both in subsonic and supersonic regimes). Also, the effects of snapshot numbers and their arrangements in reconstruction procedure have been investigated. In this method, a combined form of POD, cubic spline interpolation, and polynomial extrapolation method, has been used for estimation of gappy data of the flow field with respect to the variations of angle of attack and Mach number. The proposed method predicts the required data much faster than CFD with appropriate accuracy. Finally, the results were compared with related CFD ones, showing relatively close agreements.

**Keywords:** Proper Orthogonal Decomposition, Reduced Order Model, Interpolation of Modes, Modes' Energy

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): mk.moayyedi@qom.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: najafbeygi@yahoo.com

## فهرست علائم و اختصارات

$u(x, t)$	میدان بازسازی شده
$N_{total}$	تعداد کل نمایه‌ها
$N_r$	تعداد نمایه‌های مورد استفاده در مدل رتبه کاسته
$t$	زمان
<b>علائم یونانی</b>	
$\delta$	متغیر دلخواه برای ایجاد دسته نمایه
$\varphi(x)$	توابع پایه
$\Lambda$	بردار مقادیر ویژه

## ۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین نیازهای صنعت کاهش زمان محاسبات است که باعث کاهش هزینه‌ها و کوتاه‌تر شدن زمان طراحی می‌شود. بنابراین دستیابی به روش‌هایی جهت کاهش حجم محاسبات، کاهش حجم مورد نیاز برای ذخیره‌سازی داده‌ها و افزایش زمان بهره‌وری مفید از طرح، از جمله عمده‌ترین بررسی‌های صورت گرفته در دهه‌های اخیر می‌باشد. روش تجزیه متعامد بهینه یکی از روش‌های قدرتمند در زمینه کاهش زمان محاسبات است. در این روش با استفاده از راه‌کار بازسازی میدان، مدلی رتبه کاسته از میدان تولید شده. تا با بازسازی دینامیک حاکم بر میدان، با تعداد درجات آزادی کمتر، بتوان روشی سریع و با دقتی مناسب، جهت حل میدان و انجام محاسبات ارائه کرد.

روش تجزیه متعامد بهینه، یک دستگاه مختصات  $N$  بعدی متعامد ایجاد می‌کند، که نسبت به همه دستگاه‌های مختصات متعامد  $N$  بعدی دیگر که برای توصیف داده‌های یک میدان مفروض می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، تقریب بهتری را ارائه می‌دهد. بدین ترتیب شکلی رتبه کاسته از سیستم‌های دینامیکی با بعد بی‌نهایت ارائه می‌گردد که با تعداد جملات معلوم، بهینه می‌باشد. البته، لازم به ذکر است که این بهینگی از نظر کمینه کردن خطا در بازسازی مدل رتبه کاسته مد نظر است [۲، ۱]. این روش ابتدا به صورت مستقل توسط کارهونن-لوو<sup>۱</sup> و سپس کوسامبی<sup>۲</sup> به عنوان روشی برای تحلیل داده‌های آماری که دارای نوعی الگو بودند مطرح شد [۳]. برای اولین بار در زمینه جریان آشفته، لاملی<sup>۳</sup> در سال ۱۹۶۷ از این روش استفاده نمود [۴]. پس از آن با توجه به محدودیت‌های نرم‌افزاری و سخت‌افزاری

کامپیوترها، این روش برای مدت‌ها بدون کاربرد باقی ماند. تا اینکه در اواخر دهه هشتاد میلادی، به تدریج کاربردهای روش تجزیه متعامد افزایش یافت. با مطرح شدن روش نمایه<sup>۴</sup> توسط سیرویچ<sup>۵</sup> [۵] استفاده از این روش در ایجاد مدل‌های رتبه کاسته برای سیستم‌های دینامیکی پیچیده، که داده‌های اولیه خود را از تجربه و یا حل‌های عددی مستقیم به دست می‌آورند گسترش چشم‌گیری پیدا کرد. هدف از انجام این تحقیق، استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه جهت تخمین سریع داده‌های میدان جریان حول یک ایرفویل دوبعدی در جریان لزج و آرام می‌باشد. در این مورد با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه-نمایه، و ترکیب آن با یک روش میان‌یابی و یک روش برون‌یابی برای محاسبه ضرایب مجهول در زوایای حمله و اعداد ماخ مختلف استفاده شده و نتایج آن در دو حالت استفاده مستقیم از برون‌یابی و تولید میدان جدید و افزودن آن به داده‌های موجود جهت نزدیک‌تر شدن به داده مدنظر مورد بررسی قرار گرفته است. مدل حاصل قابلیت مناسبی را در بازسازی میدان جریان در رژیم جریان آرام ارائه کرده است.

## ۲- روش POD - نمایه

بر اساس تجزیه کارهونن-لوو، لاملی توابعی با متغیرهای مکانی ارائه کرد که بیشینه انرژی میدان را دارا باشند، این توابع عبارت زیر را بیشینه می‌کنند:

$$\frac{\langle (\varphi(x), u(x, t))^2 \rangle}{\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle} \quad (1)$$

در عبارت بالا  $(f, g)$ ، برای بیان ضرب داخلی بر روی فضای  $L^2$  و به صورت انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\Omega} f g \, d\Omega,$$

$\langle \cdot \rangle$  متوسط‌گیری متغیرها بوده که به صورت زیر با متوسط‌گیری زمانی جایگزین می‌شود:

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \cdot \, dT \right). \quad (2)$$

بنابراین اگر  $\varphi(x)$ ، رابطه (۱) را بیشینه کند، میدان جریان تصویر شده در راستای  $\varphi(x)$ ، انرژی متوسط بیشتری را نسبت به ایجاد تصویر میدان جریان در راستای هر تابع پایه دیگر خواهد داشت. در این صورت یک سری از توابع متعامد  $\varphi_i(x)$  قابل محاسبه بوده که به آنها مودهای POD گفته می‌شود [۵].

4- Snapshot  
5- Sirovich

1- Karhunen- Loeve  
2- Kosambi  
3- Lumley

#### ۴- درون یابی پیستوله‌ای درجه سوم

تابع  $y_i = y(x_i)$  ( $i = 1 \dots N$ ) مفروض است، مسئله مورد نظر یافتن مقدار تابع در فاصله بین  $x_i$  و  $x_{i+1}$  می‌باشد، روش میان یابی خطی رابطه به صورت زیر را برای حل این مسئله پیشنهاد می‌دهد:

$$y = Ay_i + By_{i+1},$$

$$A = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad B = 1 - A = \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}, \quad (5)$$

معادلات فوق روابط درون یابی لاگرانژ است. از آنجایی که معادله یک رابطه خطی درجه یک مرتبه اول می‌باشد لذا در محاسبه مقدار میانی آن نیازی به هیچ گونه مشتق گیری مرتبه دوم نمی‌باشد.

برای یافتن مقدار مجهول مورد نظر با استفاده از روش مارپیچی از یک چند جمله‌ای درجه سوم به صورت زیر استفاده می‌شود [۹]:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (6)$$

این رابطه برای تمامی نقاط در فاصله مورد نظر صدق می‌کند. برای هر بازه ۴ ضریب برای محاسبه  $S_i(x_i)$  مورد نیاز است. اگر  $n$  بازه وجود داشته باشد،  $4n$  مقدار، برای ضرایب چند جمله‌ای در تمامی بازه‌های می‌بایست محاسبه شود. برای صدق کردن رابطه چند جمله‌ای در تمامی بازه‌ها دو شرط در ابتدا و انتهای هر بازه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}. \quad (7)$$

بنابراین، تعداد  $2n$  شرط به تعداد شروط مورد نیاز اضافه می‌شود. به منظور یافتن مدل میان یابی مناسب و همگن می‌بایست مشتقات اول و دوم تابع چند جمله‌ای پیوسته باشند:

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \quad (8)$$

رابطه فوق،  $2(n-1)$  قید جدید به مجموع شروط اضافه می‌کند. به منظور برابر شدن تعداد معلومات و مجهولات دستگاه معادلات مورد بحث، نیاز به دو شرط دیگر به شرح زیر می‌باشد:

$$S''_0(x_0) = 0, \quad S''_{n-1}(x_n) = 0,$$

$$S'_0(x_0) = y'(x_0), \quad S'_{n-1}(x_n) = y'(x_n). \quad (9)$$

با حل دستگاه معادلات و یافتن مجهولات (ضرایب چند جمله‌ای)، رابطه (۶) به منظور یافتن مقدار تابع مورد نظر در هر نقطه قابل استفاده است.

توابع ویژه POD، به صورت توابع ویژه تانسور فضای همبستگی معرفی می‌شوند. محاسبه دقیق این تانسور بسیار دشوار می‌باشد. برای غلبه بر این مشکل یک روش زمانی که رابطه مستقیم و وابسته با روش نمایه سیروچ دارد، به عنوان روشی جهت محاسبه این توابع ویژه استفاده می‌شود. این توابع در محاسبه انرژی مربوط به هر تابع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه - نمایه ابتدا نیاز به یک دسته  $N$  تایی از نمایه‌هایی به عنوان ورودی به صورت  $u_n(x)$ ، از میدان می‌باشد، که این نمایه‌ها از نتایج شبیه سازی عددی در زوایای حمله و اعداد ماخ متفاوت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_n(x) = u(x, t^n), \quad (3)$$

پارامترهای  $t^n$ ، با بازه‌های هم فاصله در نظر گرفته می‌شوند. از دیدگاه ریاضیات، تنها شرط لازم برای نمایه‌ها این است که مستقل خطی باشند. حال با داشتن موده‌های میدان جریان می‌توان کل میدان را از رابطه زیر بازسازی کرد [۶]:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^M a^k(t) \phi^k(x) \quad (4)$$

#### ۳- روش POD - نمایه همراه با میان یابی درجه سوم و برون یابی

در حالت کلی برای یک حل POD، تغییرات پارامتر مورد نظر به شکل ماتریسی از داده‌های مربوط به حل عددی یا داده‌های آزمایشگاهی میدان در زمان‌های مختلف، به عنوان داده اولیه در نظر گرفته می‌شوند. همچنین، این روند می‌تواند برای پارامترهای دلخواه دیگری، مانند زاویه حمله و عدد ماخ جریان آزاد، که تصویر لحظه‌ای بر حسب آنها ایجاد شده، مورد استفاده قرار گیرد. پارامتر دلخواه،  $\delta$  فرض می‌شود که این پارامتر می‌تواند زاویه حمله، عدد ماخ و یا هر پارامتری باشد که ماتریس نمایه‌های بر حسب آن تولید شده است [۸]. یک روش برای پیش بینی میدان جریان به ازای هر مقدار  $\delta$ ، بدین صورت است که یک دسته از حل عددی میدان جریان که به ازای مقادیر مختلف  $\delta$  مرتب شده، در نظر گرفته می‌شود. سپس حل مسئله مقدار ویژه برای این دسته داده اولیه انجام شده تا مقادیر  $\phi^k$ ، یا همان بردارهای پایه میدان جریان به دست آیند. حال برای بازسازی میدان به ازای مقادیری از  $\delta$  که مورد نظر است، ضرایب مودال ( $a^k$ ) با استفاده از روش میان یابی و یا برون یابی که به اندازه  $\delta$  بستگی دارد، محاسبه شده و میدان جریان با استفاده از رابطه (۴) بازسازی می‌شود [۷].

## ۵- برون‌یابی با تابع منطقی

برخی از توابع را نمی‌توان با استفاده از چند جمله‌ای‌ها به صورت مناسبی تقریب زد، این در حالی است که با استفاده از توابع منطقی تقریبی مناسب از همان توابع به دست می‌آید. در این مطالعه یک تابع منطقی که از  $m+1$  عبور می‌کند را با  $R_{i(i+1) \dots (i+m)}$  نشان داده داده و آن را به صورت زیر می‌توان فرض کرد:

$$R_{i(i+1) \dots (i+m)} = \frac{P_\mu}{Q_\nu} = \frac{p_0 + p_1(x) + \dots + p_\mu(x^\mu)}{q_0 + q_1(x) + \dots + q_\nu(x^\nu)} \quad (10)$$

از آنجایی که  $\mu+v+1$  عدد مجهول  $p$  و  $q$  و  $q_0$  وجود دارد، رابطه زیر بایستی برقرار باشد:

$$m+1 = \mu + \nu + 1, \quad (11)$$

توابع منطقی گاهی نسبت به چند جمله‌ای‌ها بهتر عمل می‌کنند. دلیل آن قابلیت این‌گونه از توابع، در مدل کردن توابع دارای قطب می‌باشد که این امر باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله (۹) خواهد شد. اگر تابع موردنظر که درون‌یابی روی آن انجام می‌شود، خود دارای قطب باشد آنگاه این قطب‌ها ممکن است به ازای مقادیری حقیقی از  $x$  ایجاد شوند. در اغلب موارد تابع  $f(x)$  به ازای تمامی مقادیر محدود خود محدود بوده و یک رابطه تحلیلی با قطب‌های مختلط خود خواهد داشت. در الگوریتم جدولی زیر هر ستون دارای یک مقدار اصلی و میزان خطای مربوط به آن مقدار می‌باشد.

$$\begin{array}{l} x_1 : y_1 = P_1 \\ \phantom{x_1 :} \phantom{y_1 =} P_{12} \\ x_2 : y_2 = P_2 \phantom{P_{12}} P_{123} \\ \phantom{x_2 :} \phantom{y_2 =} P_{23} \phantom{P_{1234}} \\ x_3 : y_3 = P_3 \phantom{P_{123}} P_{234} \\ \phantom{x_3 :} \phantom{y_3 =} P_{34} \\ x_4 : y_4 = P_4 \end{array} \quad (12)$$

الگوریتم مذکور یک تابع منطقی مورب را با درجه صورت و مخرج  $m$  و یا حتی در مواقعی با درجه مخرج بزرگ‌تر از  $m$  را می‌تواند تولید نماید. این الگوریتم را می‌توان به صورت معادله زیر خلاصه‌نویسی کرد:

$$R_{i(i+1) \dots (i+m)} = R_{(i+1) \dots (i+m)} \frac{R_{(i+1) \dots (i+m)} - R_{i \dots (i+m-1)}}{\left(\frac{x-x_i}{x-x_{i+m}}\right) \left(1 - \frac{R_{i(i+1) \dots (i+m)} - R_{i \dots (i+m-1)}}{R_{i(i+1) \dots (i+m)} - R_{(i+1) \dots (i+m-1)}}\right) - 1} \quad (13)$$

## ۶- حل عددی

در این مطالعه جهت دستیابی به داده‌های اولیه که همان نمایه‌های ذکر شده در بخش‌های پیشین می‌باشد، از روش دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شده است. برای تولید گره‌های محاسباتی از شبکه دایره‌ای (O-Type) استفاده شده است. داده‌ها برای زوایای حمله  $2/5$  تا  $37/5$  درجه و با گام‌های  $2/5$  درجه و عدد ماخ  $0/4$  از حل دینامیک سیالات محاسباتی با شبکه مذکور به دست آمده‌اند. در دسته نمایه‌ای که مربوط به تغییرات عدد ماخ می‌شود، داده‌ها برای اعداد ماخ مافوق صوت  $1/2$  تا  $2/8$  با زاویه حمله صفر درجه در نظر گرفته شده‌اند. برای هر دو مسئله (زاویه حمله و اعداد ماخ)، جریان آرام و با عدد رینولدز به ترتیب  $500$  و  $400$  مد نظر بوده است. این اعداد رینولدز از این رو انتخاب شده تا از آرام بودن جریان اطمینان کامل حاصل شود.

## ۷- انتخاب تعداد مودها جهت بازسازی میدان

در حل رتبه کاسته با افزایش تعداد مودهای میدان، مدل حاصل از دقت نزدیک‌تری به حل دقیق برخوردار می‌شود، بنابراین، با تعداد کمتری از مودهای تولید شده می‌توان سهم بالایی از انرژی موجود در میدان را تسخیر کرد. بدین ترتیب، برای محاسبه تعداد مودهایی که درصد انرژی بالاتری را دارا می‌باشند، عدد سهم به صورت زیر تعریف می‌شود:

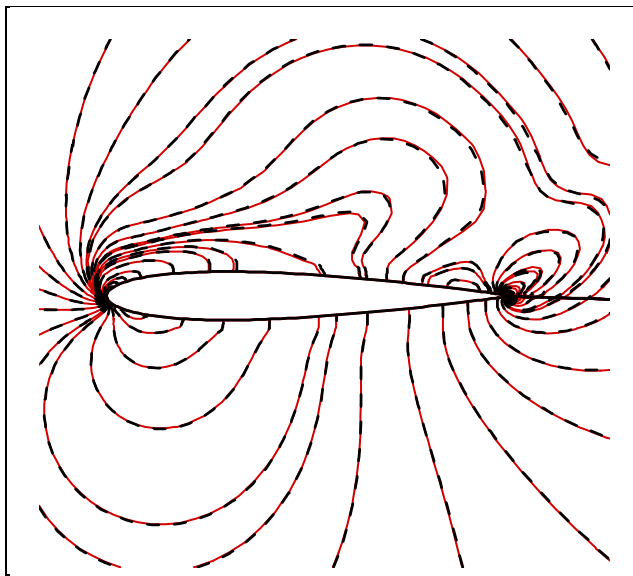
$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_{total}} \lambda_i} \quad (14)$$

در رابطه بالا،  $\lambda$  مقادیر ویژه حاصل از حل مسئله مقدار ویژه برای ماتریس داده‌ها می‌باشد. هرگاه مقدار  $\kappa$  برابر با  $99/9\%$  باشد،  $N_r$  حاصل، تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد یک مدل رتبه کاسته با دقت کافی را نشان می‌دهد [۹].

## ۸- نتایج و بحث

در این مطالعه داده‌های مربوط به ایرفویل NACA0012 برای زوایای حمله  $2/5$  تا  $37/5$  درجه با گام  $2/5$  درجه، در عدد ماخ  $0/4$  و عدد رینولدز  $500$  مورد استفاده قرار گرفته است. دسته نمایه مربوط به تغییرات عدد ماخ جریان مافوق صوت در بازه  $1/2$  تا  $2/8$  در زاویه حمله صفر درجه و رینولدز  $400$  ایجاد شده است. جریان مورد مطالعه برای هر دو دسته نمایه تراکم‌پذیر فرض شده است. در این تحقیق با استفاده از روش درون‌یابی و برون‌یابی داده‌های مفقود شده در دسته نمایه‌های اولیه محاسبه شده است.

به‌دست‌آمده را نشان می‌دهد. شکل ۲ توزیع فشار سطحی را برای همین شرایط نمایش می‌دهد. شکل ۳ خطوط هم‌تراز فشار میدان جریان حول ایرفویل را در زاویه حمله ۴۰ درجه که با استفاده از داده‌های مربوط به ۱۴ نمایه با همان چیدمان ولی با یک نمایه کمتر و به روش برون‌یابی به‌دست‌آمده را نمایش می‌دهد. در شکل ۴ توزیع فشار سطحی برای همین شرایط نمایش داده شده است. جهت بررسی تأثیر تعداد نمایه‌ها با میزان نزدیکی آخرین نمایه به داده موردنظر بر میزان خطای نسبی در بازسازی میدان جریان، برای بازسازی میدان جریان مربوط به عدد زاویه حمله ۴۰ درجه از ۸ نمایه که در آنها آخرین نمایه همان نمایه آخر دسته نمایه ۱۵ تایی است، استفاده شده است. این ۸ نمایه شامل داده‌های زوایای حمله ۲/۵ تا ۳۷/۵ درجه و با گام ۵ درجه‌ای است. در شکل ۵ می‌توان خطوط هم‌تراز فشار میدان جریان بازسازی شده به روش POD و میدان جریان حاصل از نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم را با هم مشاهده کرد. شکل ۶ توزیع فشار در اطراف ایرفویل برای میدان بازسازی شده با ۸ نمایه را نشان می‌دهد.

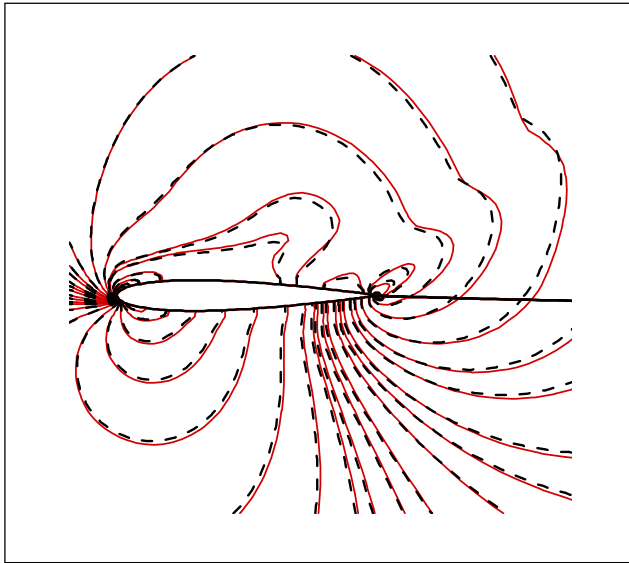


شکل (۱): خطوط هم‌تراز فشار حول ایرفویل در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۵ نمایه و به روش برون‌یابی.

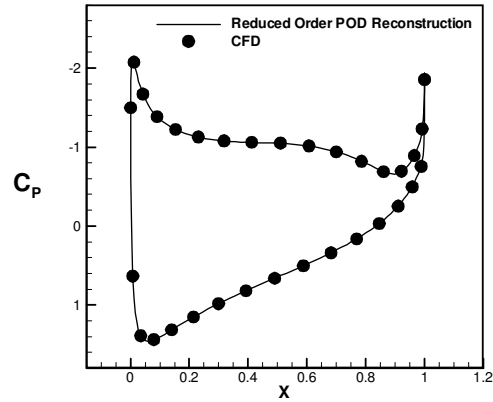
همچنین، به بررسی تأثیر تعداد نمایه‌های ورودی و نوع چیدمان آنها در بازسازی میدان جریان پرداخته شده است. برای درون‌یابی از روش مارپیچ درجه سوم استفاده شده که با توجه به خصوصیات روش تجزیه متعامد بهینه جواب‌های به‌دست‌آمده از دقت مناسب‌تری نسبت به روش برون‌یابی برخوردار می‌باشند. در مورد مدل ترکیبی POD همراه با یک الگوی برون‌یابی می‌توان گفت چون وابستگی این روش به مجموعه داده‌های ورودی و زیر فضای حاصل از آنها بسیار زیاد است، بنابراین برون‌یابی در این روش برای داده‌هایی که حالت غیرخطی داشته و در فاصله دورتری از زیر فضای تشکیل شده از داده‌های اولیه هستند، جواب‌های چندان مناسبی را ارائه نخواهد داد. از سوی دیگر دوری داده‌های دسته نمایه‌ها از مقادیر مورد نظر برای بازسازی میدان جریان، دقت این روش را بیش از پیش کاهش خواهد داد. در زوایای حمله ۲/۵ تا ۳۷/۵ درجه در جریان مادون صوت و اعداد ماخ ۱/۲ تا ۲/۸ در جریان مافوق صوت با تکیه بر روش‌های درون‌یابی و برون‌یابی در پی به‌دست آوردن دیدگاهی مناسب از توانایی‌های این روش در تخمین هرچه دقیق‌تر میدان جریان در اعداد ماخ مادون و مافوق صوت بوده و بدین منظور از تعداد نمایه‌های مختلفی برای بازسازی یک میدان جریان در رژیم جریان آرام استفاده شده است.

#### ۱-۶- بررسی تأثیر تعداد نمایه‌ها و چیدمان آنها در نتایج بازسازی میدان جریان با تغییرات زاویه حمله در جریان آرام مادون صوت

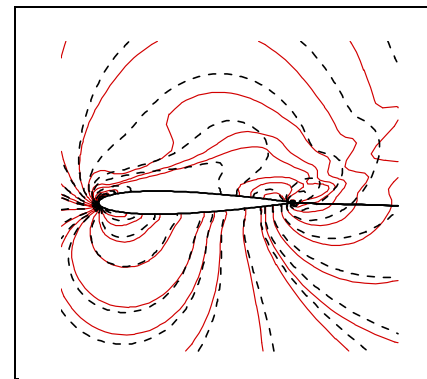
برای بازسازی میدان جریان در زوایای حمله ۲/۵ تا ۳۷/۵ درجه در جریان آرام، تراکم‌پذیر و لزج در عدد ماخ ۰/۴ و عدد رینولدز ۵۰۰ از ۱۵ نمایه به‌عنوان داده اولیه استفاده شده است. در مرحله بعدی جهت بررسی تأثیر کاهش تعداد داده‌های ورودی، به ترتیب از نمایه‌هایی با ۱۴ و ۸ عضو استفاده شده است. انتخاب ۱۴ نمایه جهت بررسی تأثیر دوری دسته نمایه‌ها از داده‌های موردنظر جهت بازسازی و با حذف عضو شماره ۱۵ صورت گرفته و برای ایجاد دسته نمایه ۸ عضوی، با حفظ نمایه آخر (شماره ۱۵)، کاهش تعداد در سایر نمایه‌ها صورت پذیرفته است. شکل ۱ خطوط هم‌تراز فشار میدان جریان حول ایرفویل در زاویه حمله ۴۰ درجه برای جریان آرام، تراکم‌پذیر و لزج در عدد رینولدز ۴۰۰ که با استفاده از داده‌های مربوط به ۱۵ نمایه شامل زوایای حمله ۲/۵ تا ۳۷/۵ درجه، با گام ۲/۵ درجه‌ای که با روش برون‌یابی



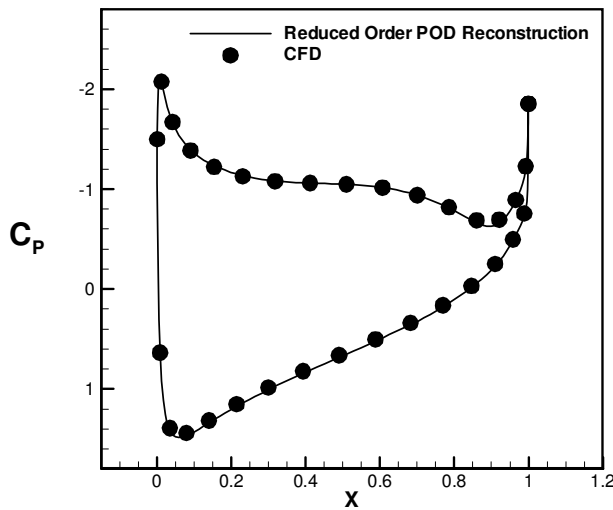
شکل (۵): خطوط همتراز فشار حول ایرفویل در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۸ نمایه و به روش برون‌یابی.



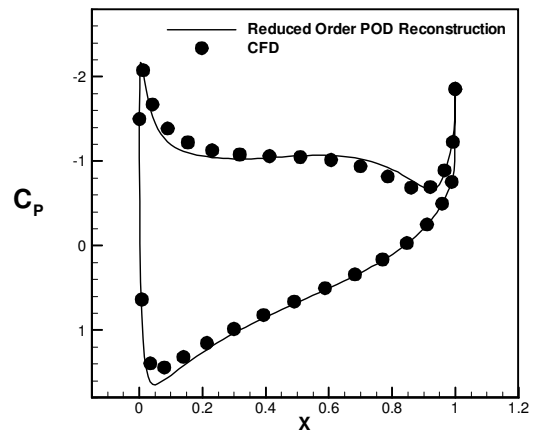
شکل (۲): توزیع فشار سطحی در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۵ نمایه و به روش برون‌یابی.



شکل (۳): خطوط همتراز فشار حول ایرفویل در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۴ نمایه و به روش برون‌یابی.



شکل (۶): توزیع فشار سطحی در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۸ نمایه و به روش برون‌یابی.

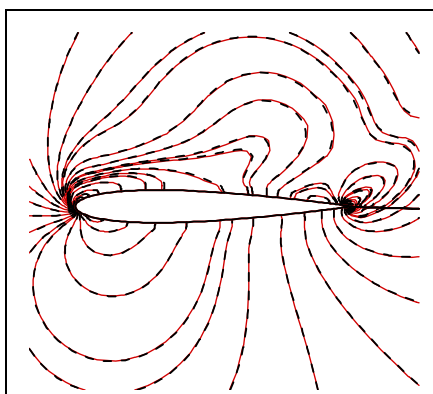


شکل (۴): توزیع فشار سطحی در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۴ نمایه و به روش برون‌یابی.

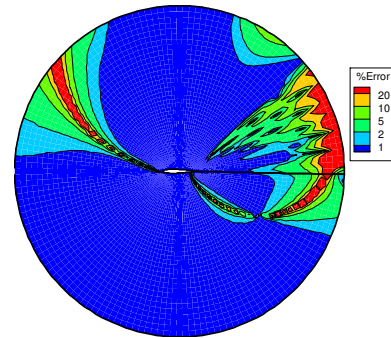
در شکل ۷ نمودار میزان خطای نسبی میدان جریان در عدد زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۵ نمایه و به روش برون‌یابی نشان داده شده است. شکل ۸ نمودار میزان خطای نسبی تمامی نقاط شبکه را برای میدان جریان در عدد زاویه حمله ۴۰ درجه که با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۴ نمایه و با روش برون‌یابی بازسازی شده را نشان می‌دهد.

## ۲-۶- بررسی تأثیر تعداد نمایه‌ها و چیدمان آنها در نتایج بازسازی میدان جریان با تغییرات عدد ماخ در جریان آرام مافوق صوت

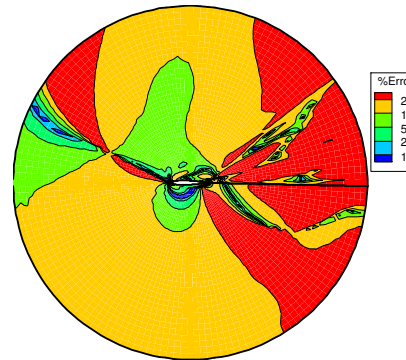
در این بخش به بررسی تأثیر تعداد نمایه‌های ورودی در نتایج حاصل از بازسازی میدان جریان با استفاده از روش POD در جریان مافوق صوت، لزج و آرام با عدد رینولدز ۴۰۰ پرداخته می‌شود. برای نمایش بهتر میزان خطا در نقاط مختلف میدان جریان نمودار خطای نسبی تک تک نقاط میدان نیز نشان داده شده و بدین منظور دسته نمایه‌های مختلفی مورد استفاده قرار گرفته‌است. ابتدا نتایج برای دسته نمایه‌ای با ۹ عضو که شامل داده‌های مربوط به عدد ماخ ۱/۲ تا ۲/۸ با گام ۰/۲، بازسازی شده‌است. سپس از دسته نمایه‌ای که شامل داده‌های مربوط به عدد ماخ در همان بازه و با گام ۰/۴ استفاده شده، این دسته نمایه شامل ۵ نمایه می‌باشد. در نهایت دسته نمایه‌ای با ۳ عضو که شامل اعداد ماخ ۱/۲ و ۱/۸ و ۲/۶ مورد بررسی قرار گرفته‌است. در شکل ۱۰ خطوط همتراز فشار در میدان جریان حول ایرفویل برای زاویه حمله صفر درجه و عدد ماخ ۲/۱ نشان داده شده‌است. میدان جریان در این شکل با استفاده از ۹ نمایه و به روش درون‌یابی بازسازی شده‌است. در شکل ۱۱ توزیع فشار سطحی روی ایرفویل در همین شرایط قابل مشاهده است، که با استفاده از ۹ نمایه و با روش درون‌یابی تولید شده است. شکل‌های ۱۲ و ۱۳ خطوط همتراز فشار در میدان جریان حول ایرفویل را در عدد ماخ ۲/۱ و در زاویه حمله صفر درجه برای دو حالتی نشان می‌دهند که در بازسازی میدان جریان به ترتیب از ۵ نمایه و ۳ نمایه با روش درون‌یابی استفاده شده‌است.



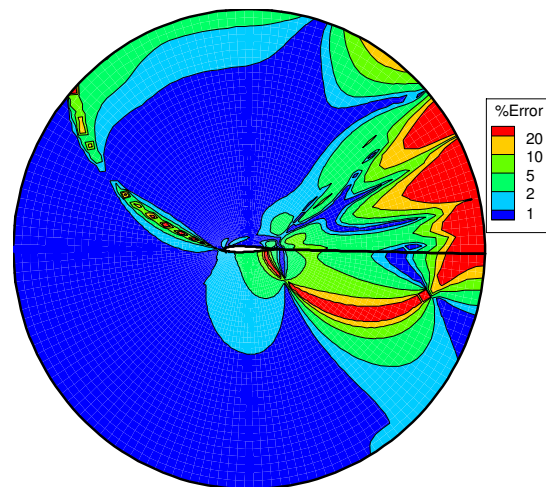
شکل (۱۰): خطوط همتراز فشار حول ایرفویل در زاویه حمله ۴۰ درجه با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۱۵ نمایه و به روش برون‌یابی.



شکل (۷): توزیع خطای نسبی میدان جریان در زاویه حمله ۴۰ درجه (داده‌های بازسازی شده با ۱۵ نمایه با روش برون‌یابی).



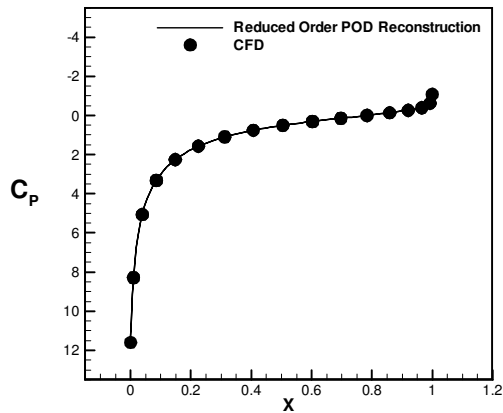
شکل (۸): توزیع خطای نسبی میدان جریان در زاویه حمله ۴۰ درجه (داده‌های بازسازی شده با ۱۴ نمایه با روش برون‌یابی).



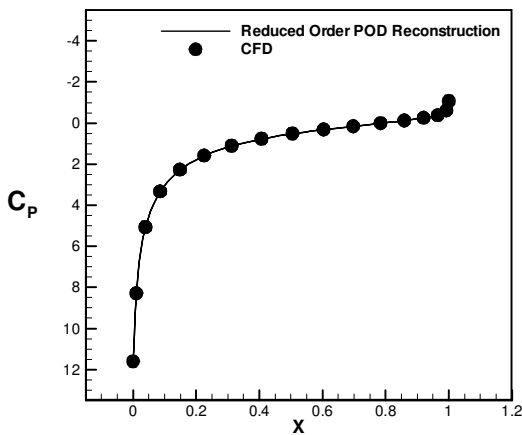
شکل (۹): توزیع خطای نسبی میدان جریان در زاویه حمله ۴۰ درجه (داده‌های بازسازی شده با ۸ نمایه با روش برون‌یابی).

در شکل ۹ نمودار خطای نسبی میدان در حالتی که میدان جریان با استفاده از ۸ نمایه بازسازی شده، نمایش داده شده است.

در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ توزیع فشار روی سطح ایرفویل در عدد ماخ ۲/۱ و با زاویه حمله صفر درجه نشان داده شده که به ترتیب هر کدام با استفاده از ۵ و ۳ نمایه و به روش درون‌یابی بازسازی شده‌اند.

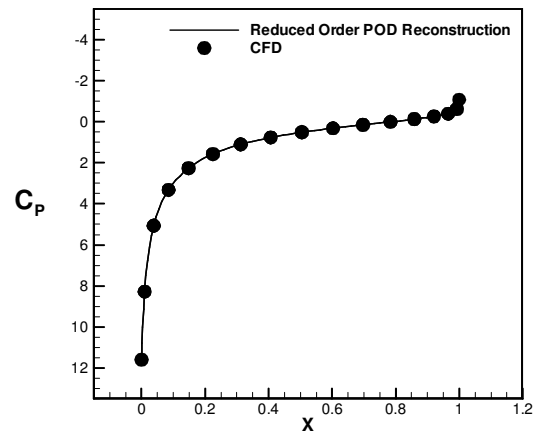


شکل (۱۴): توزیع فشار سطحی در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۵ نمایه و با روش درون‌یابی.

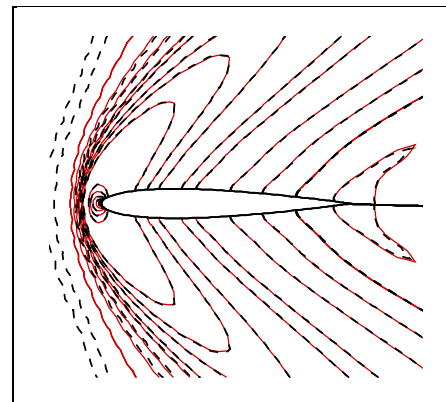


شکل (۱۵): توزیع فشار سطحی در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۳ نمایه و با روش درون‌یابی.

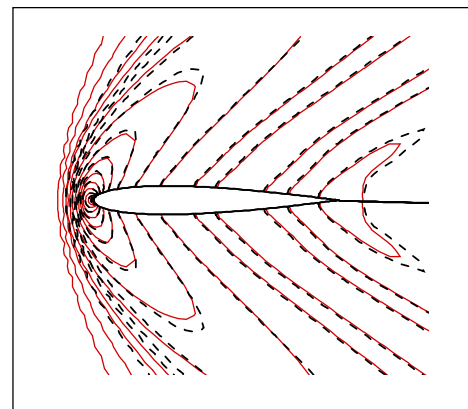
شکل ۱۶ توزیع خطای نسبی تک‌تک نقاط میدان جریان در عدد ماخ ۲/۱ که با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۳ نمایه و به روش درون‌یابی به دست آمده را نشان می‌دهد. در شکل ۱۷ توزیع خطای نسبی در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۵ نمایه و با روش درون‌یابی آورده شده است. شکل ۱۸ نیز توزیع خطای نسبی را در نقاط میدان برای همین شرایط و با استفاده از ۹ نمایه را نمایش می‌دهد.



شکل (۱۱): توزیع فشار سطحی در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۹ نمایه و با روش درون‌یابی.



شکل (۱۲): خطوط هم‌تراز فشار حول ایرفویل در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۵ نمایه و با روش درون‌یابی.

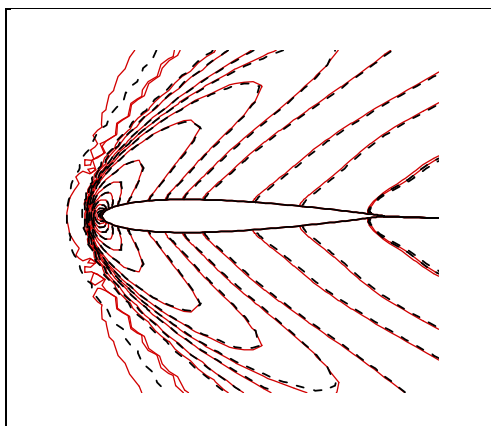


شکل (۱۳): خطوط هم‌تراز فشار حول ایرفویل در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۳ نمایه و با روش درون‌یابی.

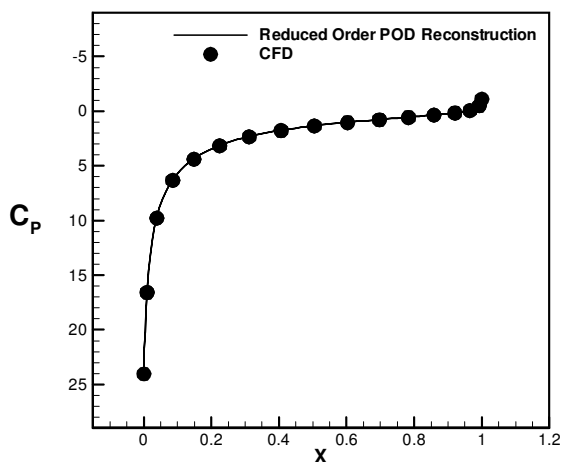


می یابد خطای ناشی از بازسازی میدان جریان بیشتر در نقاط دورتر از ایرفویل دیده می شود. همچنین به نظر می رسد که کاهش تعداد نمایه ها در نزدیکی دیواره ایرفویل تأثیر کمتری را بر خطوط همتراز فشار در میدان جریان خواهد داشت.

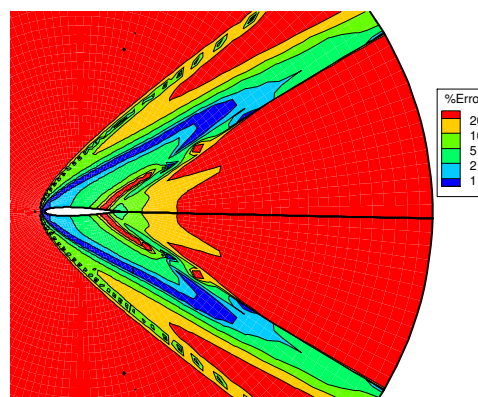
در شکل ۱۹ خطوط همتراز فشار در میدان جریان حول ایرفویل در عدد ماخ ۳ که با استفاده از ۹ نمایه که با روش برون یابی بازسازی شده، نمایش داده شده است. شکل ۲۰ نمودار توزیع فشار سطحی را برای همین شرایط نشان می دهد. در شکل ۲۱ خطوط همتراز فشار در عدد ماخ ۳ که با استفاده از ۸ نمایه و به روش برون یابی بازسازی شده، آورده شده است. شکل ۲۲ توزیع فشار در همین شرایط روی سطح ایرفویل را نمایش می دهد.



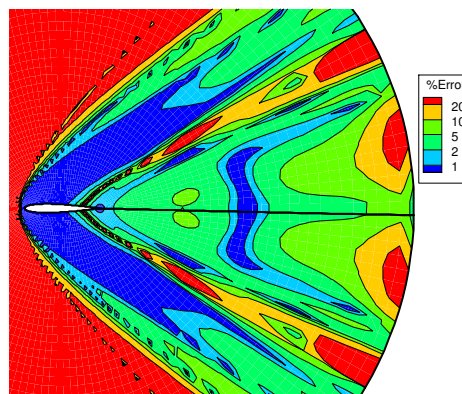
شکل (۱۹): خطوط همتراز فشار حول ایرفویل در عدد ماخ ۳ با استفاده از داده های بازسازی شده با ۹ نمایه و با روش برون یابی.



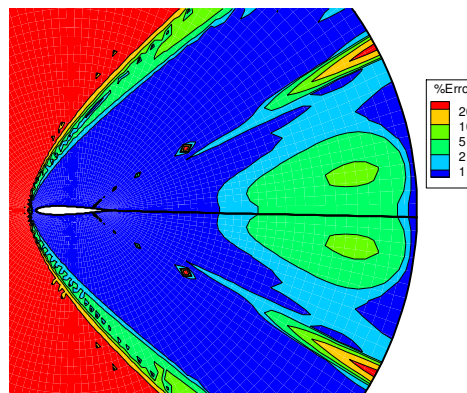
شکل (۲۰): توزیع فشار سطحی در عدد ماخ ۳ با استفاده از داده های بازسازی شده با ۹ نمایه و با روش برون یابی.



شکل (۱۶): توزیع خطای نسبی میدان جریان در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده های بازسازی شده با ۳ نمایه با روش برون یابی.

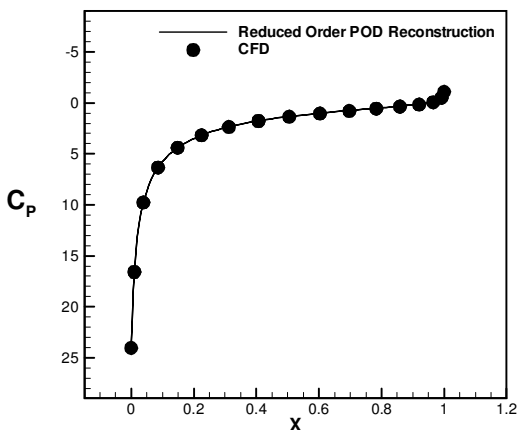


شکل (۱۷): توزیع خطای نسبی میدان جریان در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده های بازسازی شده با ۵ نمایه با روش برون یابی.

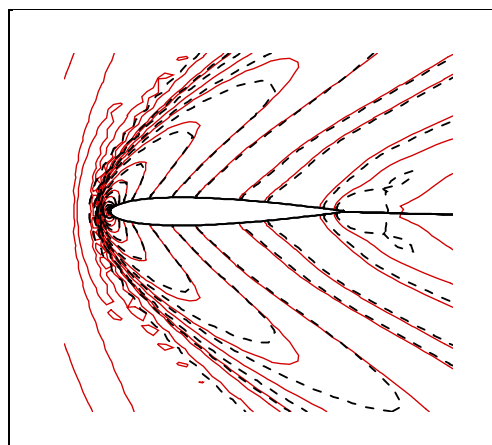


شکل (۱۸): توزیع خطای نسبی میدان جریان در عدد ماخ ۲/۱ با استفاده از داده های بازسازی شده با ۹ نمایه با روش برون یابی.

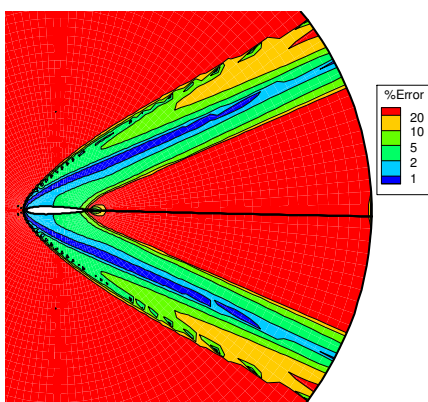
برای الگوی ترکیبی روش تجزیه متعامد بهینه و روش برون یابی مارپیچ در جریان مافوق صوت نتایج بیانگر دقت بالای روش در نزدیکی دیواره ایرفویل است. هنگامی که تعداد نمایه ها کاهش



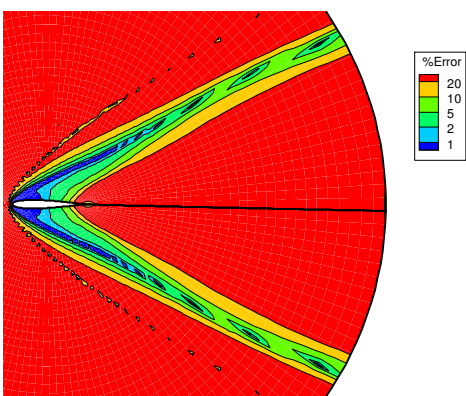
شکل (۲۲): توزیع فشار سطحی در عدد ماخ ۳ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۸ نمایه و با روش درون‌یابی.



شکل (۲۱): خطوط هم‌تراز فشار حول ایرفویل در عدد ماخ ۳ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۸ نمایه و با روش برون‌یابی.



شکل (۲۳): توزیع خطای نسبی میدان جریان در عدد ماخ ۳ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۹ نمایه با روش برون‌یابی.



شکل (۲۴): توزیع خطای نسبی میدان جریان در عدد ماخ ۳ با استفاده از داده‌های بازسازی شده با ۸ نمایه با روش برون‌یابی.

شکل‌های ۲۳ و ۲۴ به ترتیب خطوط هم‌تراز میزان خطای نسبی فشار در عدد ماخ ۳ که با استفاده از دسته نمایه‌هایی با ۹ و ۸ عضو و با بهره‌گیری از روش برون‌یابی بازسازی شده را نشان می‌دهند.

در جدول ۱ ضریب نیروی برآ و پسای فشاری برای حالت‌های مختلف نشان داده شده‌است. در این جدول  $C_L$  و  $C_D$  به ترتیب نشان‌دهنده ضریب برآ و پسای فشاری،  $C_{DR}$  و  $C_{LR}$  به ترتیب نشان‌دهنده ضرایب برآ و پسای فشاری به دست‌آمده از مدل‌سازی عددی و  $Error_{C_L}$  و  $Error_{C_D}$  نیز نشان‌دهنده میزان درصد خطای نسبی ضریب پسا و برآ می‌باشد. داده‌های موجود در این جدول، میزان دقت روش مورد بحث را در نزدیکی دیواره ایرفویل با در نظر گرفتن تعداد و چیدمان نمایه‌ها، برای حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار داده است. برای جریان مادون‌صوت در زاویه حمله ۴۰ درجه، سه دسته نمایه در بازسازی میدان جریان حول ایرفویل NACA0012 با هم مقایسه شده که به ترتیب شامل ۱۵، ۱۴ و ۸ عضو می‌باشند (توضیحات بیشتر در مورد این دسته داده‌ها در بخش‌های پیشین ذکر شده‌است). در جریان مافوق‌صوت درون‌یابی میدان جریان در عدد ماخ ۲/۱ برای تعداد و چیدمان‌های مختلف نمایه‌ها بررسی شده و در نهایت میدان بازسازی شده به کمک برون‌یابی در جریان مافوق‌صوت با عدد رینولدز ۴۰۰، زاویه حمله صفر و در عدد ماخ ۳ مورد مطالعه قرار گرفته‌است.

جدول (۱): میزان خطای ضریب نیروی برآ و پسای فشاری برای حالت‌های مختلف.

$C_D$	$C_{DR}$	$C_L$	$C_{LR}$	$C_L$ Error	$C_D$ Error	
۱/۲۷۲	۱/۲۷۴	۱/۲۵۳	۱/۲۵۵	۰/۱۵	۰/۱۵	برون‌یابی زاویه حمله ۴۰ با ۱۵ نمایه
۱/۳۲۱	۱/۲۷۴	۱/۲۶۳	۱/۲۵۵	۰/۶۳	۳/۶۵	برون‌یابی زاویه حمله ۴۰ با ۱۴ نمایه
۱/۳۰۲	۱/۲۷۴	۱/۲۶۶	۱/۲۵۵	۰/۸۱	۲/۱۸	برون‌یابی زاویه حمله ۴۰ با ۸ نمایه
۰/۴۲۶	۰/۴۲۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۲	جریان مافوق صوت در عدد ماخ ۲/۱ با ۹ نمایه
۰/۴۲۶	۰/۴۲۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۲	جریان مافوق صوت در عدد ماخ ۲/۱ با ۵ نمایه
۰/۴۴۳	۰/۴۲۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۴/۰۸	جریان مافوق صوت در عدد ماخ ۲/۱ با ۳ نمایه
۱/۲۱	۱/۲۳	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۱/۶	جریان مافوق صوت در عدد ماخ ۳ با ۹ نمایه
۴/۴۹	۴/۵۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۱/۵	جریان مافوق صوت در عدد ماخ ۳ با ۸ نمایه

#### ۷- نتیجه‌گیری

تغییرات گسترده تر در فیزیک حاکم بر میدان جریان و تغییرات غیرخطی ایجاد شده در اثر تغییر عدد ماخ وابسته می‌باشد. نتایج به‌دست آمده از نمودار خطای نسبی تک‌تک نقاط میدان در هر دو بررسی مربوط به برون‌یابی و درون‌یابی میدان جریان با تغییرات عدد ماخ در جریان آرام مافوق صوت گویای این است که برای بازسازی میدان جریان در اطراف ایرفویل با شرط آنکه حداقل یکی از نمایه‌ها داده‌های مربوط به عدد ماخ نزدیک به عدد ماخ مورد نظر باشد، نمودار تغییرات فشار بر روی سطح ایرفویل نتایج نزدیک به حل عددی را در پی خواهد داشت. این در حالی است که تعداد نمایه‌ها تأثیر مستقیمی بر بازسازی خطوط همتراز اطراف ایرفویل و کل میدان ندارد. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از نمودارها و جداول می‌توان به این نتیجه رسید که نزدیکی حداقل یکی از نمایه‌ها به شرایط مورد نظر باعث دستیابی به جواب‌های دقیق‌تری خواهد شد.

#### ۷- مراجع

1. Taeibi-Rahni, M., Sabetghadam, F., and Moayyedi, M.K., "Fast Estimation of Aerodynamic Data, Using Proper Orthogonal Decomposition Method", The 10th Conference on Fluid Dynamics, University of Yazd, 2006, (In Persian).
2. Moayyedi, M.K., Taeibi-Rahni, M., and Sabetghadam, F., "Calibrated Low-dimensional POD Dynamical Model for Simulation of the Unsteady Incompressible Flows", Aerodynamics and Fluid Mechanics Journal, Vol. 1, No.1, 2012, (In Persian).

در این بررسی داده‌های مربوط به ضریب فشار ایرفویل NACA0012 با استفاده از الگوی ترکیبی روش تجزیه متعامد بهینه و روش درون‌یابی ماریچ درجه سوم و نیز روش برون‌یابی با استفاده از توابع منطقی مورد مطالعه قرار گرفته است. انتخاب تعداد و چیدمان صحیح نمایه‌ها در روش POD-نمایه از جمله مواردی است که در کاهش سرعت محاسبات عددی بسیار تعیین‌کننده می‌باشد در این تحقیق تعداد و نوع چیدمان نمایه‌ها برای دو جریان مادون‌صوت و مافوق‌صوت مورد با تغییرات عدد ماخ و زاویه حمله مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از این پژوهش می‌توان به این نتیجه رسید که ترکیب روش POD با یک روش درون‌یابی منجر به بازسازی میدان جریان با دقت مناسبی خواهد شد. در روش درون‌یابی که برای دسته نمایه‌های اعداد ماخ در جریان مافوق صوت مورد بررسی قرار گرفت می‌توان گفت که اگر در بازسازی میدان از داده‌هایی مانند عدد ماخ و یا زاویه حمله و متغیرهای دیگر استفاده شود که شرایطی نزدیک به شرایط مورد نظر برای بازسازی را داشته باشند، نتایج مناسب‌تر و دقیق‌تری حاصل خواهد شد. البته، لازم به ذکر است، مدل توسعه‌یافته در این پژوهش به تغییرات عدد ماخ نسبت به تغییرات زاویه حمله حساسیت بیشتر داشته و دوری داده‌های ورودی یا همان نمایه‌ها تأثیر بسیار زیادتری در بازسازی میدان جریان خواهد داشت. روشن است این موضوع به

3. Karhunen, K., "Zur Spektraltheorie Stochastischer Prozesse", Ann. Acad. Sci. Fenn, Cambridge University Press, 1996.
4. Lumley, J. L., "The Structure of Inhomogeneous Turbulence in Atmospheric Turbulence And Radio Wave Propagation", Yag Lom Am. Tatarok: VA(Editors) Nauka, Moscow, pp.166-178, 1967.
5. Sirovich, L. and Kirby, M., "Low-dimensional Procedure for the Characterization of Human Faces", J. Optical Society of America, Vol. 4, No.3, pp. 519-24, 1987.
6. Chambres, D.H., Adrian, R. J., Moin, P., Stewart, D. S., and Sung, H.J., "Karhunen-Loeve Expansion of Burger's Model of Turbulence", Physics of Fluids, Vol. 31, pp. 2573-2582, 1988.
7. Sabetghadam, F., Taeibi-Rahni, M., and Moayyedi, M. K., "Low-Dimensional Proper Orthogonal Decomposition Method for Gappy Data Reconstruction of Unsteady Flow Field", The 1st Unsteady Aerodynamics Symposium of The Iranian Aerospace Society, SUT, Tehran, 2008 (In Persian).
8. Bui-Thanh, T., Damodaran, M., and Willcox, K., "Aerodynamic Data Reconstruction and Inverse Design, Using Proper Orthogonal Decomposition", AIAA J., 2004.
9. Taeibi-Rahni, M., Sabetghadam, F., and Moayyedi, M.K., "Compressible Flow Field Analysis around 2D Bodies, Using Proper Orthogonal Decomposition Method", The 7th International Conference of Iranian Aerospace Society, Sharif University of Technology, 2008, (In Persian).