

# حل عددی مسئله کوئت ناپایا و دوبعدی با استفاده از روش شبکه بولتزمن تفاضل محدود

سید آرش شمس طالقانی<sup>۳</sup>

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
پژوهشگاه هوافضا

سید مهدی شیخ الاسلام نوری<sup>۱</sup> و محمد طیبی رهنی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی هوافضا  
دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۶/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۹/۲)

## چکیده

مدل دوبعدی تفاضل محدود شبکه بولتزمن برای بررسی مسائل تکفاز ارائه می‌شود. جمله زمان با استفاده از روش رانگ کوتای با خطای پراکندگی- پخش کم و جمله مکان با استفاده از روش بالادست مرتبه ۳ گسسته می‌شوند. معادلات حاکم و روش عددی ارائه خواهد شد. نحوه اعمال شرایط مرزی در روش FDLBM مطرح می‌شود. سپس جهت ارزیابی روش عددی، دو مسئله پایه گردابه‌های تیلور و جریان کوئت حل می‌شود. هدف از این نوشتار، معرفی روش یادشده و نشان دادن توانایی آن در حل مسائل پایا و ناپایا است.

**واژه‌های کلیدی:** روش شبکه بولتزمن تکفاز، تفاضل محدود، رانگ کوتای با خطای پراکندگی- پخش کم، گسسته‌سازی مکانی مرتبه سوم بالادست

## Numerical Solution of Unsteady Two Dimensional Couette Flow, Using Finite Difference LBM

S.M. Sheikholeslam and M. Taeibi-Rahni

Aerospace Engineering Department  
Sharif University of Technology

S.A. Shams

Aerospace Research Institute,  
Ministry of Science, Research and  
Technology

(Received:7/September/2016; Accepted:22/November/2016)

## ABSTRACT

A two dimensional finite difference lattice Boltzmann method (FDLBM) for computing single phase flow problems is developed here. Temporal term is discretized with low dissipation-low dispersion. Discretization of convective term is implemented with third order upwind method. It will be explained governing equations and numerical method. Methodology of imposing boundary conditions in FDLBM is described. Then for evaluation, two basic problems will be solved: Taylor's vortices and unsteady Couette flow. The purpose of this paper is the presentation of a robust method to solve unsteady and steady problems.

**Keywords:** Single Phase LBM, Finite Difference, Low-Dissipation Low-Dispersion Runge-Kutta, Third-Order Upwind Method

۱- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): sheikholeslam@ae.sharif.ir

۲- استاد: taeibi@sharif.edu

۳- استادیار: arash.taleghani@gmail.com

به دلیل بروز اثرات تراکم پذیری می باشد که مغایر با فرض عدد ماخ کوچک در استخراج تابع توزیع تعادلی می باشد. مقید بودن روش LBM با جمله برخورد BGK به شبکه یکنواخت با گام های فضایی برابر، دیگر محدودیت این روش محسوب می شود. بنابراین به کارگیری این روش در مسائل مهندسی واقعی با دشواری روبه رو است. مشکل دیگر روش یاد شده ناپایداری ذاتی آن در اعداد رینولدز<sup>۳</sup> (Re) بالاست. مشکل مقید بودن به شبکه را می توان از طریق جدا کردن شبکه عددی از ساختار شبکه لتیس حل کرد، که در این زمینه دو روش تفاضل محدود (FD)<sup>۴</sup> و حجم محدود (FV)<sup>۵</sup> استفاده می شوند. مراجع [۱-۶] را در زمینه روش شبکه بولتزمن تفاضل محدود (FDLBM) می توان نام برد. به جمله  $c_{i\alpha} \frac{\partial f_{i\alpha}}{\partial x_i}$  در روش FD به صورت یک عبارت معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)<sup>۶</sup> نگاه می شود که با روش های رایج در CFD مانند طرح بالادست مرتبه اول<sup>۷</sup>، طرح مرکزی در فضا<sup>۸</sup>، طرح بالادست مرتبه دوم<sup>۹</sup>، طرح لکس فردریش<sup>۱۰</sup>، طرح لکس وندروف<sup>۱۱</sup> و طرح بیم- وارمینگ<sup>۱۲</sup> گسسته می شود. مقدار فیزیکی ضریب لزجت به زمان آسایش مرتبط می شود. تمام روش های یاد شده یک لزجت اضافه که وابسته به روش عددی است را نشان می دهند که به لزجت فیزیکی اضافه می شود. البته در محدوده تراکم- ناپذیر، طرح مرکزی در فضا و مرتبه دوم بالادست، لزجت عددی وارد مسئله نخواهند کرد [۳].

مزیت روش FD در آن است که، تقارن فیزیکی از تقارن شبکه جدا می شود [۴]. منظور از تقارن فیزیکی آن است که، فضای سرعت و تابع توزیع تعادلی و تعداد جهات سرعت باید متقارن باشند. تقارن شبکه آن است که، تعداد جهات خطوط شبکه و تعداد خطوط ارتباطی باید منطبق بر توابع توزیع ذره باشند.

مزیت دیگر این روش دست یابی به دقت زمانی و مکانی بالاتر است. این مهم در تحلیل مسائل ناپایا و پیچیده اهمیت دوچندان دارد. همچنین، استفاده از روش هایی نظیر رانگ کوتا می تواند پایداری روش را بهبود بخشد.

- 3- Reynolds Number
- 4- Finite Difference
- 5- Finite Volume
- 6- Partial Differential Equation
- 7- First Order Upwind
- 8- Space Centered Scheme
- 9- Second Order Upwind
- 10- Lax-Friedrichs Scheme
- 11- Lax-Wendroff Scheme
- 12- Beam-Warming Scheme

## فهرست علائم و اختصارات

|    |                                    |
|----|------------------------------------|
| c  | سرعت ذرات                          |
| f  | تابع توزیع احتمالی ذرات            |
| H  | طول میدان                          |
| i  | شمارنده در راستای محور x           |
| j  | شمارنده در راستای محور y           |
| k  | تعداد موج ها                       |
| L  | طول میدان                          |
| M  | عدد ماخ                            |
| P  | فشار                               |
| Re | عدد رینولدز                        |
| t  | زمان                               |
| u  | مؤلفه ی سرعت سیال در راستای محور x |
| v  | مؤلفه ی سرعت سیال در راستای محور y |
| w  | ثابت وزن دار                       |
| x  | محور مختصات کارتیزین               |
| y  | محور مختصات کارتیزین               |

## علائم یونانی

|          |                        |
|----------|------------------------|
| $\alpha$ | راستای مختصات کارتیزین |
| $\tau$   | زمان آسایش             |
| $\rho$   | چگالی                  |
| $\nu$    | ضریب لزجت سینماتیکی    |
| $\Delta$ | گام                    |

## زیر نویس

|   |                  |
|---|------------------|
| i | راستای سرعت ذرات |
| s | صوت              |

## بالا نویس

|    |        |
|----|--------|
| eq | تعادلی |
|----|--------|

## ۱- مقدمه

روش شبکه بولتزمن (LBM)<sup>۱</sup> به عنوان یکی از ابزارهای نوین در دینامیک سیالات محاسباتی (CFD)<sup>۲</sup> مطرح شده است. به دلیل دیدگاه مولکولی، می تواند بسیاری از پدیده ها نظیر پدیده های سطحی را با دقتی قابل قبول و به نسبت ساده، مدل کند. امروزه، این روش با توجه به توانمندی هایی که دارد، مورد توجه پژوهشگران متعددی قرار گرفته است.

این روش دارای محدودیت هایی می باشد. روش LBM رایج برای مسائل با گرادین های فشار بالا مناسب نیست. این مسئله

- 1- Lattice Boltzmann Method
- 2- Computational Fluid Dynamics

که در آن،  $\vec{u}$  بردار سرعت کلان نگرانه<sup>۴</sup> است. سایر متغیرهای کلان نگرانه با استفاده از ممان‌ها و بر اساس روابط (۶) و (۷) به دست می‌آیند:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (۶)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_{i=0}^8 f_i \vec{c}_i \quad (۷)$$

### ۳- روش عددی

گسسته‌سازی جمله مکانی با استفاده از روش مرتبه ۳ بالادست جانبدارانه<sup>۵</sup> به صورت زیر انجام می‌شود:

$$c_x \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} c_x \frac{f(i-2,j)-6f(i-1,j)+3f(i,j)+2f(i+1,j)}{6\Delta x} & c_x > 0 \\ c_x \frac{-f(i+2,j)+6f(i+1,j)-3f(i,j)-2f(i-1,j)}{6\Delta x} & c_x < 0 \end{cases} \quad (۸)$$

این روش خطای پراکندگی بسیار ناچیزی دارد. همچنین، گسسته‌سازی بالادست، پایداری روش را افزایش می‌دهد. نزدیک مرزها از گسسته‌سازی مرتبه اول بالادست استفاده می‌شود:

$$c_x \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} c_x \frac{f(i,j)-f(i-1,j)}{\Delta x} & c_x > 0 \\ c_x \frac{f(i+1,j)-f(i,j)}{\Delta x} & c_x < 0 \end{cases} \quad (۹)$$

گسسته‌سازی جمله‌ی زمانی با استفاده از روش رانگ کوتای با خطای پراکندگی-پخش کم انجام می‌گیرد [۸]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = R(f), \quad (۱۰)$$

$$R(f) = -\frac{1}{\tau} (f(x,y) - f^{eq}(x,y)) - c_x \frac{f(i-2,j)-6f(i-1,j)+3f(i,j)+2f(i+1,j)}{6\Delta x}, \quad (۱۱-الف)$$

$$R(f) = -\frac{1}{\tau} (f(x,y) - f^{eq}(x,y)) + c_x \frac{f(i-2,j)-6f(i-1,j)+3f(i,j)+2f(i+1,j)}{6\Delta x}, \quad (۱۱-ب)$$

که، معادلات (۱۱-الف و ب) به ترتیب مربوط به حالت  $c_x > 0$  و  $c_x < 0$  هستند.

$$f^{n+1} = f^n + \sum_{j=1}^4 \omega_j k_j, \quad (۱۲)$$

$$k_1 = R(f^n) \Delta t, \quad (۱۳-الف)$$

$$k_2 = R(f^n + \beta_2 k_1) \Delta t, \quad (۱۳-ب)$$

$$k_3 = R(f^n + \beta_3 k_2) \Delta t, \quad (۱۳-پ)$$

$$k_4 = R(f^n + \beta_4 k_3) \Delta t. \quad (۱۳-ت)$$

که، ضرایب معادلات به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\omega_1 = \omega_4 = 0.1630296, \omega_2 = 0.348012,$$

$$\omega_3 = 0.3259288, \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}, \beta_4 = 1.0$$

ابتدا معادلات حاکم و روش عددی معرفی می‌گردند، سپس نحوه اعمال شرایط مرزی از نظر می‌گذرد. پس از معرفی روش، مسئله‌های گردابه‌های تیلور<sup>۱</sup> و جریان کوئت ناپایا<sup>۲</sup> تحلیل شده و نتایج مورد ارزیابی روش پیشنهادی ارزیابی می‌شود. در انتها نتایج مورد ارزیابی و تحلیل قرار گرفته و مطالب جمع‌بندی می‌شوند.

### ۲- معادلات حاکم

معادله LB برای سیال تک‌فاز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{eq}), \quad (۱)$$

توزیع سرعت ذرات در مدل D2Q9 در شکل ۱ نمایش داده شده است و از رابطه زیر استخراج می‌شوند:

$$\vec{c}_i = (0,0), i = 0 \quad (الف)$$

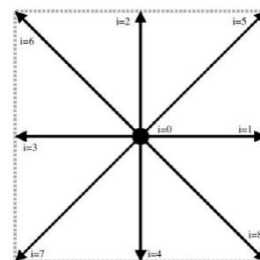
$$\vec{c}_i = \left( \cos \frac{\pi(i-1)}{2}, \sin \frac{\pi(i-1)}{2} \right), i = 1 - 4 \quad (ب)$$

$$\vec{c}_i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi(i-9)}{2}, \sin \frac{\pi(i-9)}{2} \right), i = 5 - 8 \quad (پ)$$

زمان آرامش به لزجت سیال مرتبط می‌شود [۳]:

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \quad (۳)$$

سرعت صوت در مدل D2Q9 برابر  $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$  است [۷]. همچنین، ارتباط بین فشار و چگالی در این مدل به صورت  $P = \rho c_s^2$  می‌باشد [۱].



شکل (۱): توزیع ذرات در مدل D2Q9.

فرم مناسب تابع توزیع تعادلی<sup>۳</sup> به صورت زیر است:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left( 1 + 3c_{i\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right), \quad (۴)$$

ثوابت به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_0 = \frac{4}{9}, \quad (۵-الف)$$

$$w_i = \frac{1}{9}, i = 1,2,3,4 \quad (۵-ب)$$

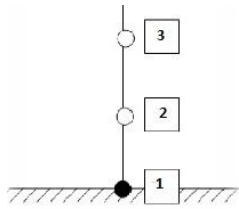
$$w_i = \frac{1}{36}, i = 5,6,7,8 \quad (۵-پ)$$

4- Macroscopic  
5- Third Order Upwind Biased

1- Taylor's Vortices  
2- Unsteady Couette Flow  
3- Equilibrium Probability Distribution Function

مقادیر  $f_i^{neq}$  در هر نقطه داخل میدان از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_i^{neq} = f_i - f_i^{eq} \quad (۱۷)$$



شکل (۲): اعمال شرط مرزی دیواره.

#### ۵- نتایج

در این مرحله ابتدا حل مسئله‌ی گردابه‌های ناپایای تیلور مورد توجه قرار می‌گیرد. این مسئله بدلیل نداشتن مرز جامد و تناوبی بودن شرایط مرزی جهت ارزیابی روش عددی بسیار مناسب است. سپس حل مسئله‌ی کوئت ناپایا بررسی می‌شود. هر دو مسئله از مسائل پایه‌ی مناسب هستند که بدلیل دارا بودن حل دقیق، انتخابی مناسب برای ارزیابی روش عددی می‌باشند.

#### ۵-۱- مسئله جریان گردابه‌ی تیلور ناپایا

مسئله‌ی گردابه‌های میرا شونده<sup>۴</sup> که توسط تیلور بر مبنای معادلات ناویر-استوکس (N-S) تراکم ناپذیر بر مبنای تابع جریان تعریف شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرید. مقادیر اولیه به صورت:

$$u(x, y, t) = -u_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y), \quad (الف) \quad (۱۸)$$

$$v(x, y, t) = \frac{k_x}{k_y} u_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y), \quad (ب) \quad (۱۸)$$

که در اینجا فرض می‌شود  $k_x = k_y = 4$  است.  $u_0$  نیز برابر  $0.1$  است. با استفاده از تعریف عدد ماخ  $M$  به صورت  $M = \frac{u_0}{c_s}$  بیشینه‌ی این کمیت  $M = 0.0173$  که با فرضیات حاکم بر معادله‌ی تابع توزیع تعادلی سازگار است. حل دقیق مسئله به صورت زیر موجود است:

$$u(x, y, t) = -u_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-vt(k_x^2 + k_y^2)}, \quad (الف) \quad (۱۹)$$

$$v(x, y, t) = \frac{k_x}{k_y} u_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-vt(k_x^2 + k_y^2)}. \quad (ب) \quad (۱۹)$$

عدد رینولدز  $Re = \frac{u_0 H}{\nu} = 2\pi$  فرض می‌شود که در آن  $H$  طول میدان مربع شکل است. طول میدان برابر  $2\pi$  است. شرایط مرزی در هر دو جهت شرایط تناوبی است. مسئله در زمان  $10$  ثانیه بررسی می‌شود.

این گسسته‌سازی ضمن پایداری، از دقت مناسبی برخوردار است. ضرایب روش یادشده بدین ترتیب محاسبه می‌شوند که مقادیر کمیت مورد حل در گام زمانی بالاتر بر مبنای مقادیر در گام زمانی پیشین به‌روزرسانی می‌شوند. برای این منظور جملاتی با وزن مشخص که تابعی از کمیت مورد نظر در گام زمانی پیشین هستند طی چند مرحله به آن کمیت افزوده می‌شوند. جهت محاسبه این ضرایب وزن‌دار، بسط تیلور<sup>۱</sup> در زمان برای کمیت مورد نظر نوشته شده و بر مبنای معیارهای مشخصی، قطع داده می‌شوند. در روش LDDRK این معیارها شامل دقت مرتبه ۲ زمانی و تمرکز بر گسسته‌سازی زمانی معادله انتقال موج است به‌گونه‌ای که کم‌ترین خطای پخش و پراکندگی اتفاق بیفتد [۱۹].

#### ۴- شرط مرزی

نحوه اعمال دو دسته شرط مرزی بحث می‌شود: ۱- شرط مرزی تناوبی<sup>۲</sup> و ۲- شرط عدم لغزش<sup>۳</sup> روی دیواره. ابتدا توجه شود که اعمال شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن می‌بایست بر مبنای مقادیر  $f_i$  انجام شود. این درحالی است که بر روی مرزها مقادیر خواص جریان نظیر  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$  و  $P$  معین هستند. تابع توزیع گسسته‌شده به صورت  $f(k, I, j)$  در نظر گرفته می‌شود که در آن،  $k=0-8$ .

برای اعمال شرایط تناوبی در جهت  $x$  به صورت زیر عمل می‌شود:

$$f(k, 1, j) = f(k, I - 1, j), \quad (الف) \quad (۱۴)$$

$$f(k, I, j) = f(k, 2, j), \quad (ب) \quad (۱۴)$$

که در آن،  $I$  تعداد نقاط شبکه در راستای  $x$  است.

برای اعمال شرایط مرزی دیواره شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود. تابع توزیع  $f_i$  به دو بخش تعادلی  $f_i^{eq}$  و غیرتعادلی  $f_i^{neq}$  تقسیم می‌شود:

$$f_i = f_i^{eq} + f_i^{neq} \quad (۱۵)$$

که در آن، به صورت تابعی از  $(\rho, u, v)$  روی دیواره با استفاده از معادله (۴) قابل محاسبه است. دقت شود که روی دیواره مقادیر  $u$  و  $v$  معین هستند. جهت محاسبه چگالی فرض می‌شود  $\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0$  باشد. مقادیر  $f_i^{neq}$  نیز با استفاده از درون‌یابی به‌دست می‌آید:

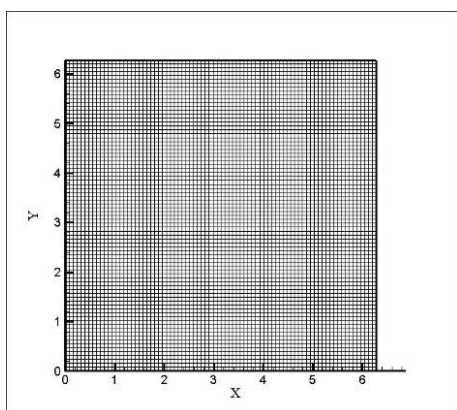
$$f_i^{neq}(k, i, 1) = 2f_i^{neq}(k, i, 2) - f_i^{neq}(k, i, 3). \quad (۱۶)$$

1- Taylor Expansion

2- Periodic Boundary Condition

3- No-Slip Boundary Condition

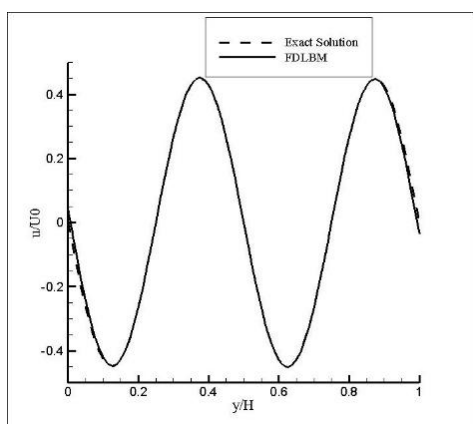
4- Vortex Decay



شکل (۵): شبکه محاسباتی در حل مسئله گردابه‌های تیلور.

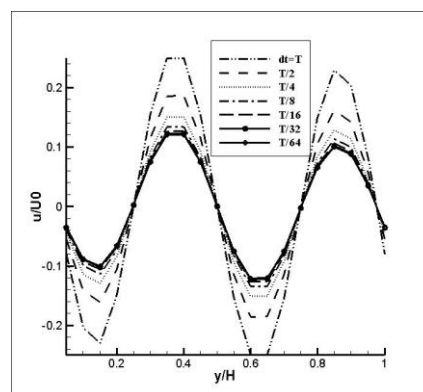
مقایسه حل عددی و حل دقیق مسئله در شکل ۶ قابل مشاهده است. ملاحظه می‌شود که حل عددی و حل دقیق کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند. این مسئله دقت حل را نشان می‌دهد.

شکل ۷ الف-ب و پ به ترتیب کانتور توزیع سرعت  $u$ ، خطوط هم‌تراز کانتور سرعت  $u$  و خطوط جریان را نشان می‌دهد. با توجه به دقت حل روش عددی، از مقایسه با حل دقیق پرهیز شده است. مسئله گردابه‌های تیلور یکی از مسائل پایه مطلوب است که می‌توان روش‌های عددی لزج را در آن مورد سنجش گذاشت. تحلیل این مسئله نشان می‌دهد که روش عددی LDDRK-3U-FDLBM از توانمندی مناسبی جهت بررسی این مسئله برخوردار است.



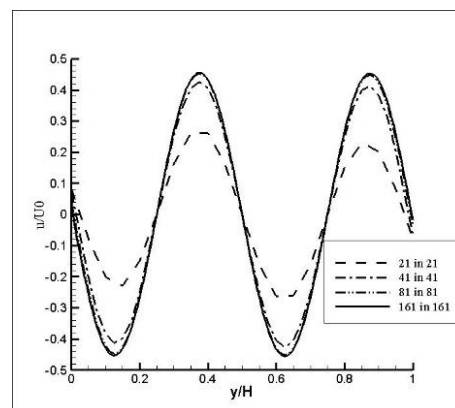
شکل (۶): مقایسه حل دقیق و حل عددی در مسئله گردابه‌های تیلور.

ابتدا حل در شبکه  $21 \times 21$  جهت تعیین گام زمانی صورت می‌پذیرد. شکل ۳ توزیع  $u/u_0$  برحسب  $y/H$  را در میانه میدان و در گام‌های زمانی مختلف نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در  $\Delta t = \tau/32$  حل مسئله از گام زمانی مستقل می‌شود.



شکل (۳): بررسی اثر گام زمانی روی حل در مسئله گردابه‌های تیلور.

گام بعدی در راستای حل مسئله، بررسی استقلال از شبکه است. برای این منظور اثر کاهش گام مکانی روی حل در چهار شبکه مختلف بررسی شده است. در شکل ۴ ملاحظه می‌شود که شبکه  $81 \times 81$  به میزان کافی ریز شده است.



شکل (۴): بررسی استقلال از شبکه محاسباتی در حل مسئله گردابه‌های تیلور.

شبکه محاسباتی در شکل ۵ ارائه شده است. شبکه یکنواخت که در آن،  $\Delta x = \Delta y = 7.854 \times 10^{-2}$  است. تعداد سلول‌های محاسباتی ۶۵۶۱ عدد می‌باشد. محاسبات بعدی در این شبکه انجام می‌شوند.

برحسب  $H$  برابر ۱۰ فرض می‌شود. حل تحلیلی مسئله در [۱۰] به صورت زیر است:

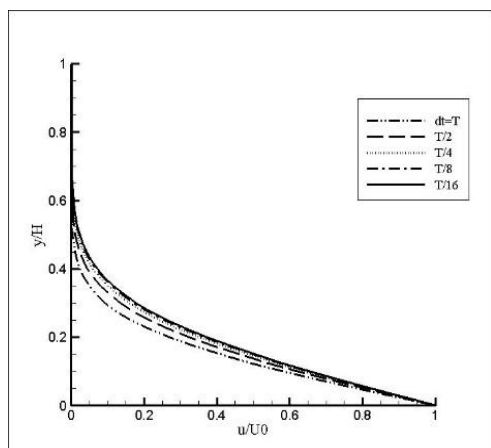
$$u = u_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc}(2n\eta_1 + \eta) - \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc}[2(n+1)\eta_1 - \eta] \right], \quad (20)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad (21)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}, \quad (22)$$

$$\eta_1 = \frac{H}{2\sqrt{vt}}, \quad (23)$$

ابتدا مسئله در شبکه نسبتاً درشت  $21 \times 41$  و گام زمانی بزرگ  $\Delta t = \tau$  حل می‌شود. مقدار  $\tau = 3 \times 4e-5 = 1.2e-4$  است. جهت دستیابی به گام زمانی مناسب، مطابق شکل ۸،  $\Delta t$  کاهش می‌یابد. ملاحظه می‌شود که از  $\Delta t = \tau/8$  حل وابسته به گام زمانی نیست. بنابراین، این گام زمانی برای محاسبات بعدی انتخاب می‌شود. شکل ۸، مقادیر توزیع سرعت بی بعد  $u/u_0$  برحسب فاصله بی بعد از دیواره را در زمان ۱ s نشان می‌دهد.

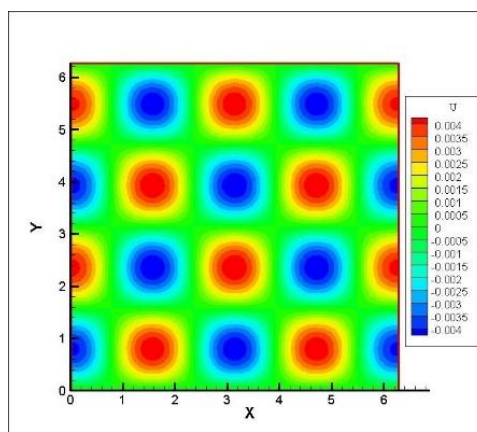


شکل (۸): بررسی اثر گام زمانی در حل مسئله جریان کوئت.

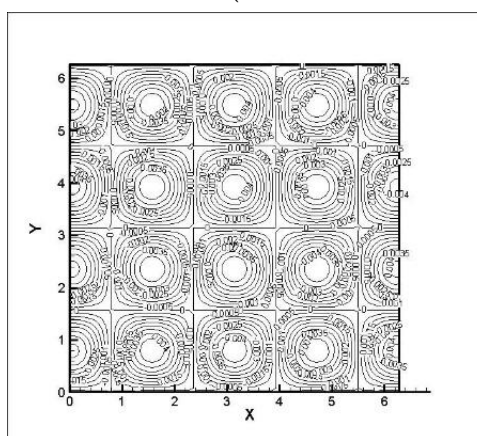
مرحله بعد بررسی استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی است. شکل ۹، توزیع سرعت برحسب فاصله از دیواره را در زمان ۱ s و گام زمانی  $\Delta t = \tau/8$  نشان می‌دهد. سه شبکه  $21 \times 41$ ،  $41 \times 81$  و  $81 \times 161$  برای محاسبات انتخاب شده‌اند که مطابق شکل، شبکه  $41 \times 81$ ، شبکه‌ای مناسب برای بررسی حل عددی است.

شبکه محاسباتی در شکل ۱۰ ترسیم شده است. شبکه یکنواخت با گام‌های مکانی  $\Delta x = 2 \times 10^{-3}$  و  $\Delta y = 5 \times 10^{-4}$ . تعداد سلول‌های محاسباتی ۳۳۲۱ می‌باشد.

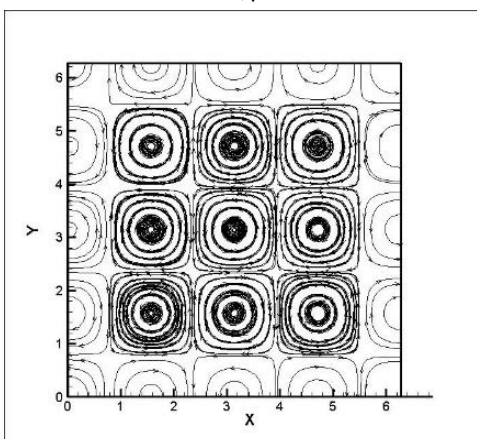
شکل ۱۴ حل عددی مسئله را در چند گام زمانی مختلف نشان می‌دهد. جهت نشان دادن دقت حل، نتایج FDLBM با



(الف)



(ب)



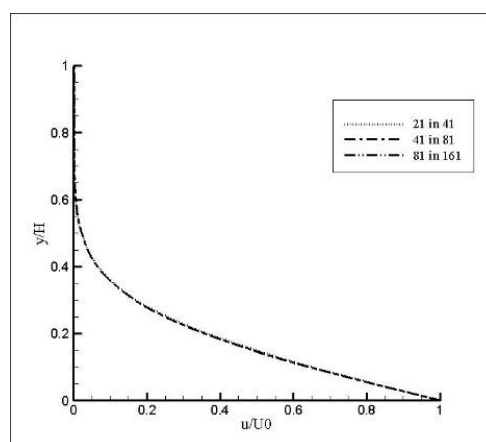
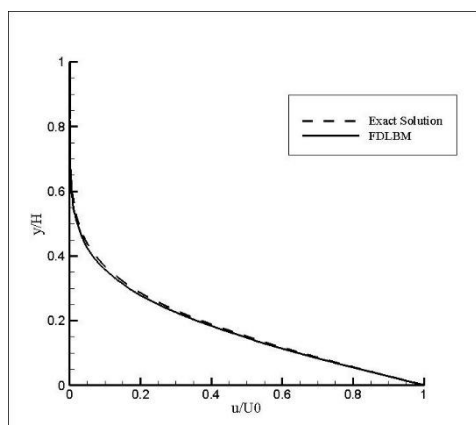
(پ)

شکل (۷): حل عددی مسئله گردابه‌های تیلور: (الف) کانتور سرعت، (ب) خطوط هم‌تراز کانتور سرعت و (پ) خطوط جریان.

## ۵-۲- حل مسئله کوئت

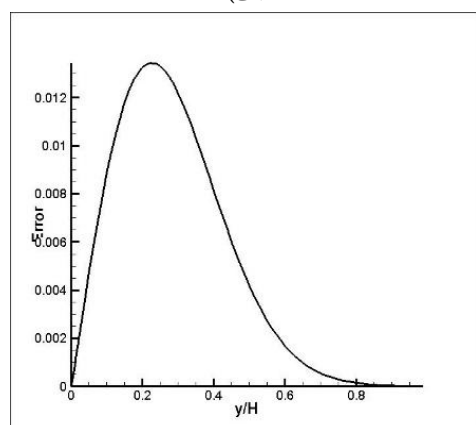
مسئله کوئت ۲-D مفروض است. فاصله بین دو صفحه  $m$  و  $H=0.04$  و طول دو صفحه  $L=0.08$  m فرض می‌شود. صفحه پایینی با سرعت  $u_0=0.01$  m/s حرکت می‌کند. عدد رینولدز

به دو دلیل، خطا زیاد است. ابتدا استفاده از گسسته‌سازی مرتبه اول نزدیک مرزها و دوم اعمال شرط مرزی. در شکل ۱۲ و ۱۳، نمودار لگاریتمی خطا به ترتیب برحسب گام مکانی  $\Delta y$  و گام زمانی  $\Delta t$  رسم شده است. خطا بزرگ‌ترین مقدار  $|u_{exact} - u_{numerical}|$  است. شیب خط در حل مرتبه سوم باید مساوی ۳ بدست آید که در این مسئله ۲/۹۱۱۶ بدست آمده است. علت اختلاف استفاده از گسسته‌سازی‌های مرتبه ۱ در نزدیک مرزها است. اما حل عددی با دقت قابل قبولی محقق شده است و مرتبه سوم بودن روش را نشان می‌دهد. همچنین، انتظار می‌رفت دقت زمانی از مرتبه ۲ باشد که در این مسئله نزدیک به ۲ بدست آمده است. علت می‌تواند به دلیل اعمال شرایط مرزی باشد.



شکل (۹): بررسی استقلال از شبکه محاسباتی در مسئله جریان کوئت.

(الف)



(ب)

شکل (۱۱): مقایسه حل دقیق و حل عددی در مسئله جریان کوئت. (الف) توزیع سرعت و (ب) توزیع خطا.

نتایج حل دقیق مقایسه شده‌اند. با توجه به [۱۱] مسئله از زمان‌های  $\frac{vt}{H^2} < 0.3$  به بعد به حل پایا می‌رسد. با توجه به مقادیر معین  $t > 12$  s حل پایا را به دست می‌دهد که در شکل در زمان  $t = 14$  s حل عددی و حل تحلیلی مقایسه می‌شوند که ملاحظه می‌شود نتایج کاملاً تطبیق دارند.

شکل (۱۰): شبکه محاسباتی در مسئله جریان کوئت.

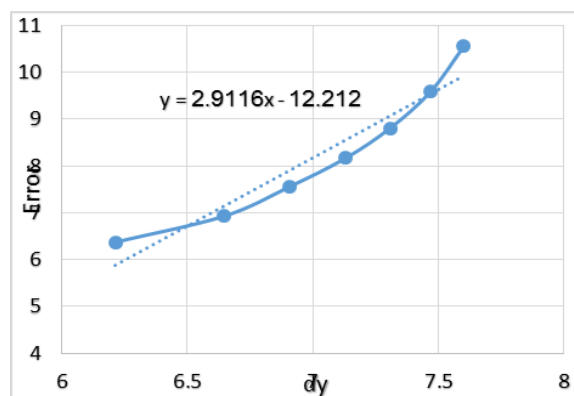
مقایسه با حل تحلیلی در شبکه محاسباتی یادشده و گام زمانی  $\Delta t = 7.45 \times 10^{-6}$  s در زمان ۱ s در شکل ۱۱-الف مشاهده می‌شود. مطابق شکل، روش عددی با دقت قابل قبولی بر حل تحلیلی تطبیق یافته است. شکل ۱۱-ب توزیع خطا برحسب فاصله از دیواره را تصویر می‌کند. خطا به صورت  $|u_{exact} - u_{numerical}|/u_0$  محاسبه شده است. که در آن،  $u_{exact}$  حل تحلیلی و  $u_{numerical}$  حل عددی است. نزدیک دیواره

گرفت. علت انتخاب این مسئله، سادگی آن و داشتن حل تحلیلی می‌باشد. این مسئله به دلیل ماهیت ناپایا، و نیز داشتن شرط مرزی دیواره، انتخاب مناسبی برای بررسی روش عددی است. نتایج ارائه شده در تحقیق فوق نشان می‌دهند که روش عددی می‌تواند جهت تحلیل مسائل تک‌فاز با استفاده از معادله LBM مورد استفاده قرار گیرد.

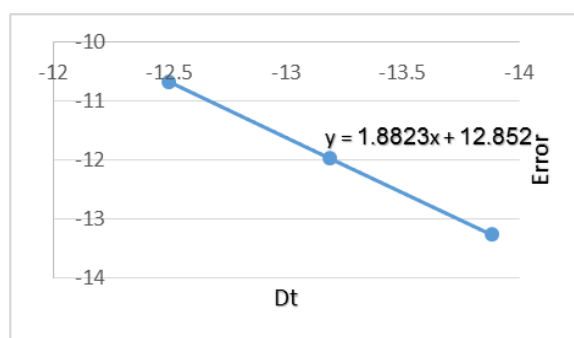
اعمال شرط مرزی در روش بولتزمن تفاضل محدود نسبتاً ساده است. ملاحظه می‌شود، حتی روش ساده ارائه شده در این پژوهش نشان می‌دهد که با تأثیر کم روی دقت روش، می‌تواند نتایج مناسبی به دست دهد. روش ارائه شده پایدار و با دقت مناسب است. می‌توان از روش پیشنهادی در حل مسائل پیچیده‌تر نظیر آکوستیک استفاده کرد.

#### ۷- مراجع

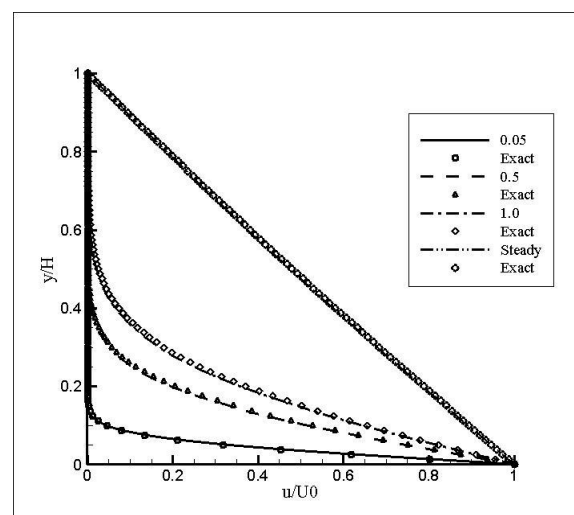
1. Tsutahara, M., Kataoka, T., Shikata, K. and Takada, N. "New Model and Scheme for Compressible Fluids of the Finite Difference Lattice Boltzmann Method and Direct Simulations of Aerodynamics", Computational Fluids, Vol. 37, No. 12, pp. 79-89, 2008.
2. Xu, A. "Finite-Difference Lattice Boltzmann Methods for Binary Fluids", Physics Review, Vol. 71, No. 6, pp. 1-20, 2005.
3. Sofonea, V. and Sekerka, R.F. "Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models", Journal of Computational Physics, Vol. 184, No. 10, pp. 422-434, 2002.
4. Cao, N., Chen, S., Jin, S. and Martínez, D. "Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method", Physics Review, Vol. 55, No. 1, pp. 21-25, 1997.
5. Zarghami, A., Maghrebi, M.J., Ghasemi, J., and Ubertaini, S. "Lattice Boltzmann Finite Volume Formulation with Improved Stability", Computational Physics, Vol. 12, No. 1, pp. 42-64, 2012.
6. Peng, G., Xi, H. and Duncan, C. "Finite Volume Scheme for the Lattice Boltzmann Method on Unstructured Meshes", Physics Review, Vol. 59, No. 4, pp. 4675-4682, 1999.
7. Tajiri, S., Tsutahara, M. and Tanaka, H. "Direct Simulation of Sound and Underwater Sound Generated by a Water Drop Hitting a Water Surface Using the Finite Difference Lattice Boltzmann Method", Computers and Mathematics with Applications, Vol. 59, No. 1, pp. 2411-2420, 2010.
8. Tam, C.K.W. "Computational Aero Acoustics", Cambridge, New York, First Ed., 2012.



شکل (۱۲): نمودار لگاریتمی خطا جهت بررسی دقت مکانی.



شکل (۱۳): نمودار لگاریتمی خطا جهت بررسی دقت زمانی.



شکل (۱۴): حل مسئله کوئت در زمان‌های مختلف.

#### ۶- نتیجه‌گیری

جهت حل معادله LBM با استفاده از روش تفاضل محدود روش LDDR-3U-FDLBM توسعه داده شده است. روش یادشده دارای دقت مکانی ۳ و زمانی ۲ است. نحوه اعمال شرایط مرزی در روش عددی توضیح داده شد. جهت ارزیابی روش یادشده، مسئله ساده اما پایه‌ای کوئت مورد بررسی قرار



9. Hu, F.Q., Hussaini, M.Y. and Manthey, J.L. "Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics", J. Computational Physics, Vol. 124, No. 52, pp. 177-191, 1196.
10. Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T. "Computational Fluid Dynamics" Engineering Educational System, USA, 4<sup>th</sup> Ed., 2000.
11. White, F.M. "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, USA, 3<sup>th</sup> Ed., 2006.