

# بررسی و تصحیح مدل آشفتگی اسپالارت-آلماراس و اعمال آن در جریان

## حول ایرفویل NACA0012

محمود پسندیده فرد<sup>۱</sup> و عدنان محمدی<sup>۲</sup>

دانشگاه فردوسی مشهد

(تاریخ دریافت: ۹۵/۶/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۱/۲۶)

### چکیده

در این مقاله معادلات کامل ناویر- استوکس دوبعدی در جریان خارجی آشفته به طور عددی مدل سازی شده است، بدین منظور، جهت محاسبه شارهای غیرلزج از روش بالادستی  $Ausm+up$  و برای مدل سازی جریان آشفته از مدل تک معادله ای اسپالارت- آلماراس استفاده شده است. مدل اسپالارت- آلماراس به کار گرفته شده، نسخه اصلاح شده این مدل آشفتگی است که از تولید لزجت دینامیکی منفی جلوگیری می کند. این مسئله کمتر در مقالات مورد توجه قرار گرفته است. اصلاحیه مطرح شده به کمک تصحیح ترم های پخش و چشمه در تک معادله مدل آشفتگی انجام شده است. جهت اعتبارسنجی دقت و پایداری مدل آشفتگی و روش محاسبه شارها جریان کاملاً آشفته با رینولدز  $9 \times 10^6$  در ماخ  $0.799$  در زاویه حمله  $2.26^\circ$  درجه و همچنین جریان با رینولدز  $6 \times 10^6$  و زوایای حمله (صفر و ده) درجه در اطراف ایرفویل NACA0012 بررسی شده است. نتایج حاصل از این پژوهش نشان می دهد، فریم محاسباتی طراحی شده تطبیق مناسبی با داده های آزمایشگاهی دارد و به علاوه تعداد تکرار لازم برای همگرایی کاهش یافته است.

**واژه های کلیدی:** مدل اصلاح شده ی اسپالارت-آلماراس، ویسکوزیته دینامیکی منفی، پایداری و دقت حل

## Investigation and Modification of Spalart-allmaras Turbulence Model and Its Application to Flow Over a NACA 0012 Airfoil

M. Pasandidefar and A. Mohammadi

Ferdowsi University of Mashhad

(Received: 7/September/2014; Accepted: 14/February/2017)

### ABSTRACT

In this paper, the full two-dimensional Navier-Stokes equations in the external turbulent flow were numerically modeled. Thus, in order to calculate the fluxes, the  $Ausm+up$  method was utilized and for modeling turbulent flows, the single-equation Spalart-Allmaras model was used. The employed Spalart-Allmaras model is a modification of this turbulence model, which prevents the formation of negative dynamic viscosity, a point that has gone generally unnoticed. The suggested modification was conducted on the distributing and the source terms in the single equation of turbulence model. For validation and assessment of accuracy and stability of the turbulence model and the calculation method of fluxes, the totally turbulent flow with Reynolds number of  $9 \times 10^6$  and Mach number of 0.799 and angle of attack  $2.26^\circ$  and also flow with Reynolds numbers of  $6 \times 10^6$  and Mach number of 0.15 and angles of attack zero,  $10^\circ$  around NACA 0012 airfoil are investigated. The results of this study show that computational framework designed have a good agreement with experimental data. Furthermore the number of iterations required for convergence is reduced.

**Keywords:** Modified Spalart-Allmaras Model, Negative Daynamic Viscosity, Accuracy and Stability of Solution

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): fard\_m@um.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری: adnan.mohammadi89@gmail.com

## ۱- مقدمه

معادله جابجایی برای لزجت گردابه‌ای می‌باشد [۱]. اولین نمونه از کد کامپیوتری اسپالارت-آلماراس در سال ۱۹۹۴ با روش حجم محدود اجرا شد. علی‌رغم ظهور مدل‌های جدید آشفتگی می‌توان اذعان داشت که: ۱- با این مدل می‌توان نتایج نزدیک‌تری به نتایج آزمایشگاهی در محاسبه نیروی برآ، و توزیع فشار رسید. ۲- به‌طور کمی تخمین‌های خوبی از مشخصه‌های واماندگی در زوایای حمله بالا می‌توان به دست آورد. ۳- هنگامی که مقدار  $\gamma^+$  داخلی‌ترین گره از یک کوچک‌تر است، مدل اسپالارت-آلماراس پروفیل سرعت لایه‌مرزی آشفتگی دقیقی ارائه می‌دهد. ۴- در مقایسه با مدل جبری بالدوین لومکس<sup>۱</sup> هزینه محاسباتی زیادی ندارد، سرعت همگرایی کاهش نمی‌یابد و برای ناحیه تداخل شوک و لایه‌مرزی جواب‌ها دقت بیشتری دارند. همچنین برای جریان‌های با جدایش نسبتاً کم جواب‌ها دقیق‌تر است. ۵- در بررسی اجسام آیرودینامیکی با نیروی برآی بالا و قیاس با مدل انتقال تنش‌برشی<sup>۲</sup> کارایی بهتری دارد و در یک جمع‌بندی کلی‌تر مدل انتقال تنش‌برشی مزیت چشمگیری نسبت به مدل اسپالارت و آلماراس ندارد [۲]. بنا به دلایل مطرح‌شده در حوزه هوا و فضا و مسائل آیرودینامیکی مدل اسپالارت-آلماراس عملکرد بهینه و مناسبی را دارا است و استفاده از آن در این حوزه بهینه و به‌صرفه می‌باشد که در ادامه بخش‌های مختلف این مدل را به‌اختصار بیان خواهیم کرد. جهت پیدا کردن دستگاهی از معادلات حاکم بر حرکت‌های متوسط‌گیری شده جریان، ابتدا باید توزیع تنش‌های رینولدز مشخص شود. بخش‌های مختلف در معادلات مربوط به تنش‌های رینولدز را می‌توان در بخش‌های جابجایی و پخش شونده‌گی و چشمه و استهلاکی دسته‌بندی کرد [۲]. مدل اسپالارت-آلماراس یک حدس ساده برای بخش‌های ذکرشده دارد که بر پایه فیزیک آشفتگی استوار است. متغیر وابسته در این مدل، لزجت آشفتگی می‌باشد که با تنش‌های رینولدز مرتبط می‌شود:

$$v_t = \frac{u'' v''}{du/dy} \quad (1)$$

## • بخش جابجایی

به‌طور کلی هر کمیت غیر برداری که قابلیت جابجایی دارد، بر طبق رابطه زیر جابجا می‌شود که معادله پایه برای مدل

گستره محبوبیت دینامیک سیالات محاسباتی روزبه‌روز در حال افزایش است. این گستره محبوبیت را در دو عامل می‌توان اذعان کرد اول این‌که گسترش و پیشرفت علم موجب ظهور سامانه‌های محاسباتی با توانایی حجمی بسیار بالا و پردازشگرهای بسیار قوی شده است که قادرند تا معادلات کامل حاکم بر جریان را در حالت دو یا سه‌بعدی تنها طی چند روز حل نمایند و دوم این‌که نرم‌افزارهای تجاری مانند فلونت قادرند تا شبیه‌سازی‌های سودمندتر و کاراتری را نسبت به قبل داشته باشند [۱]. با این اوصاف می‌توان اذعان داشت که هر فردی به‌راحتی می‌تواند به ابزار لازم جهت انجام کارهای مختلف دینامیک سیالات محاسباتی دست پیدا کند اما این بدان معنا نیست که هر فردی به راحتی می‌تواند به کمک این ابزار موفق به رسیدن به نتایج فیزیکی برای هر مسئله می‌شود بلکه این مهم در صورتی محقق خواهد شد که فرد دانش موردنیاز را در ارتباط با مدل عددی مورد استفاده و انتخاب پارامترهای صحیح در مدل مورد نظر داشته باشد. به‌عبارت‌دیگر فرد در صورت نداشتن این دانش ممکن است موفق به راه اندازی یک شبیه‌سازی موفق شود ولی نتایج این شبیه‌سازی به‌دور از واقعیت و یا به‌طور کلی اشتباه خواهد بود. در راستای این مطلب در این تحقیق ترم‌های مربوط به مدل آشفته تک معادله‌ای اسپالارت-آلماراس را به‌طور دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌دهیم تا با ایجاد یک قالب دقیق از تولید لزجت آشفته منفی و ایجاد نتایج غیر فیزیکی جلوگیری به عمل آوریم؛ که این مطلب کمتر مورد توجه قرار گرفته است، در این راستا و در قالب برنامه‌نویسی فترن ابتدا مدل اسپالارت-آلماراس تصحیح‌شده توسط قالب مطرح‌شده ایجاد می‌شود و سپس این مدل با معادلات اصلی ناویراستوکس کوپل شده و در انتها اعتبار کد حاصل‌شده به‌واسطه پارامترهای دقت و پایداری حل در جریان خارجی حول ایرفویل ناکا ۰۰۱۲ و با رینولدز  $9 \times 10^6$  و ماخ ۰/۷۹۹ و زاویه حمله ۲/۲۶ و همچنین جریان با رینولدز  $6 \times 10^6$  و زوایای حمله (صفر و ده) درجه موردبررسی قرار می‌گیرد.

## ۲- مدل آشفته اسپالارت-آلماراس

مدل آشفته اسپالارت-آلماراس یک مدل یک معادله‌ای آشفتگی است که توسط اسپالارت-آلماراس برای جریان‌های آیرودینامیکی ارائه گردید. این مدل به‌طور اساسی دارای یک

1- Baldwin-Lomax

2- Shear Stress Transport

اسپالارت-آلمارس می‌باشد:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (u \cdot \nabla) F = \text{پخش}^1 + \text{استهلاک}^2 + \text{چشمه}^3 \quad (2)$$

در رابطه بالا  $F$  متغیر مدل آشفنگی می‌باشد که اسپالارت و آلمارس با استفاده از این متغیر بخش‌های مختلف این مدل را فرمول‌بندی کردند ولی در انتها متغیر جدیدی را به‌عنوان متغیر مدل اسپالارت-آلمارس معرفی نمودند که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود.

### • بخش پخش شوندگی

مدل آشفنگی اسپالارت-آلمارس عملگر زیر را برای پخش شوندگی ارائه دادند:

$$\text{پخش شوندگی} = \nabla \cdot \left( \frac{V_t}{\sigma} \nabla v_t \right) \quad (3)$$

$V_t$  همان لزجت توربولانسی و  $\sigma$  عددی ثابت می‌باشد. توسعه دهندگان اسپالارت-آلمارس هیچ دلیلی برای پایستار بودن انتگرال  $V_t$  پیدا نکردند. بنابراین، آن‌ها یک رابطه غیرپایستار برای بخش پخش شوندگی ارائه دادند که شامل مشتق اول  $V_t$  بود یعنی:

$$\text{پخش شوندگی} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((v + v_t) \nabla v_t) + c_{b2} (\nabla v_t)^2 \right] \quad (4)$$

### • بخش چشمه

چون اسپالارت و آلمارس قصد داشتند که بیشتر بر روی جریان‌های آیرودینامیکی کار کنند بنابراین، آن‌ها این‌گونه توجیه کردند که درجایی که گردابه وجود دارد، جریان نیز آشفته است بنابراین، آن‌ها از گردابه جهت مدل‌کردن بخش چشمه استفاده کردند. گردابه نیز توسط روابط زیر و با استفاده از مقادیر جریان اصلی به‌دست می‌آید [۳]:

$$\begin{aligned} \text{چشمه} &= c_{b1} \tilde{S} v_t \\ \tilde{S} &= S + \frac{\tilde{v}}{k^2 d^2} f_{v2}, \\ f_{v2} &= 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}; S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

### • بخش استهلاکی

توسعه‌دهندگان اسپالارت-آلمارس توجیه کردند که در لایه مرزی، اثر سدکنندگی دیواره بعد از یک طول مشخص توسط بخش فشار احساس می‌شود، که مهم‌ترین وسیله برای مستهلک کردن تنش‌های برشی رینولدز می‌باشد. بنابراین، با توجه به این موضوع و آنالیز ابعادی، شکل اولیه بخش استهلاکی معادل  $-c_{w1} (v_t / d)^2$  بوده که  $d$  فاصله از دیوار می‌باشد و  $c_{w1}$  یک مقدار ثابت است. آزمایش‌ها نشان می‌دهند هنگامی که این مدل با بخش استهلاکی همراه باشد یک‌لایه لگاریتمی خیلی دقیق به دست می‌آید. از طرف دیگر ضریب اصطکاک پوسته‌ای در لایه مرزی یک صفحه تخت مقدار بسیار کوچکی می‌شود. این مشاهدات نشان دادند که بخش استهلاکی مدل شده، به‌کندی در ناحیه بیرون لایه‌مرزی مستهلک می‌شود. برای غلبه بر این مشکل اسپالارت-آلمارس بخش استهلاکی را در یک تابع ضرب کردند. مقدار این تابع در لایه لگاریتمی برابر یک می‌باشد. بنابراین، بخش استهلاکی به‌صورت زیر مدل شد:

$$\text{استهلاک} = \begin{cases} -c_w f_w (v_t / d)^2, \\ c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1}{\sigma} (1 + c_{b2}). \end{cases} \quad (6)$$

بنابراین، اسپالارت-آلمارس تابع بی‌بعد  $f_w$  را بر اساس مدل‌های جبری که در آن‌ها طول اختلاط نقش اساسی در نزدیک دیوار ایفا می‌کند، تعریف کردند. مقیاس طول به‌وسیله  $l \propto \sqrt{v_t / S}$  تعریف شد و از  $(l / kd)^2$  برای بی‌بعد ساختن استفاده شد:

$$r = \frac{v_t}{Sk^2 d^2} \quad (7)$$

باید توجه داشت که  $r$  و  $f_w$  در لایه لگاریتمی برابر با یک می‌باشد؛ اما در لایه بیرونی این مقدار کاهش می‌یابد. نهایتاً  $f_w$  به‌صورت رابطه (۸) ارائه شد.

$$f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad (8)$$

همان‌طور که قبلاً عنوان شد، اسپالارت-آلمارس متغیر  $\tilde{v}$  را به‌جای  $v_t$  به‌عنوان متغیر مدل آشفته معرفی کردند.  $v_t$  نیز

<sup>1</sup>Diffusion

<sup>2</sup>Destruction

<sup>3</sup>Production

است که این مقادیر بی معنی بوده و توابع عنوان شده در معادلات (۶) و (۸) تنها برای مقادیر مثبت  $\tilde{v}$  توسعه داده شده‌اند. لذا اصلاح صورت گرفته شده در این قسمت به منظور حصول اطمینان از افزایش لزجت آشفته و فاصله گرفتن از مقادیر منفی است. بدین منظور ابتدا معادله اسپالارت-آلماراس را در متغیر مستقل  $\tilde{v}$  ضرب می‌کنیم و از قضیه گوس استفاده می‌کنیم، لذا برای سمت راست معادله داریم [۶]:

$$\int_{\Omega^-} \left( \left( \frac{c_b 2\tilde{v}}{\sigma} \right) \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} \right) dx + \int_{\Omega^-} \left( c_b 1 \tilde{s} \tilde{v}^2 \right) dx - \int_{\Omega^-} \left( c_w 1 f_w \frac{\tilde{v}^3}{d^2} \right) dx. \quad (12)$$

سمت چپ در واقع تغییرات مقدار  $\tilde{v}$  است ما به دنبال مقادیر منفی هستیم تا آن‌ها را کنترل نماییم لذا در سمت چپ معادله دو فرضیه را پیگیری می‌کنیم اولاً از مقادیر شارهای جابجایی آشفته چشم‌پوشی می‌کنیم و دوما فرض می‌شود  $\tilde{v}|_{\Omega^-} = 0$ ، لذا برای سمت راست داریم:

$$\int_{\Omega^-} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{v})^2 + \int_{\Omega^-} \frac{\xi}{\sigma} (\nabla \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v}) dx, \quad \xi = v + \tilde{v}. \quad (13)$$

لذا داریم:

$$\int_{\Omega^-} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{v})^2 = \int_{\Omega^-} \left( \left( \frac{c_b 2\tilde{v} - \xi}{\sigma} \right) \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} \right) dx + \int_{\Omega^-} \left( c_b 1 \tilde{s} \tilde{v}^2 \right) dx - \int_{\Omega^-} \left( c_w 1 f_w \frac{\tilde{v}^3}{d^2} \right) dx. \quad (14)$$

معادله (۱۴) در واقع نرخ تغییرات  $\tilde{v}$  در دامنه مطرح شده را بیان می‌کند ترم‌های (۱)، (۲) و (۳) در معادله (۱۴) به ترتیب ترم‌های پخش و چشمه و استهلاکی ضرب شده در  $\tilde{V}$  هستند پس اگر  $\tilde{V}$  منفی باشد، ترم‌های (۱) و (۲) منفی هستند و ترم (۳) می‌بایست مثبت باشد تا ترم لزجت منفی تولید شده و پخش شده را مستهلک نماید و نرخ رشد منفی معادله (۱۴) کاهش پیدا کند. ترم (۱): این ترم زمانی مثبت است که  $\tilde{v} < 0$  و  $(c_b 2\tilde{v} - \xi) > 0$  باشد بنابراین، ترم  $\xi$  برای حصول اطمینان از تولید دیفیوژن مثبت به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$\xi = \begin{cases} v(1 + \chi) & \chi \geq 0, \\ v(1 + \chi + \frac{\chi^2}{2}) & \chi < 0. \end{cases} \quad (15)$$

با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$v_i = f_{v1} \tilde{v}, f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}}, \chi = \frac{\tilde{v}}{v}. \quad (9)$$

بنابراین، معادله مدل اسپالارت و آلماراس به صورت زیر بیان می‌گردد. توجه شود که در این رابطه توابع مربوط به اعمال نقطه‌گذار آورده نشده است:

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j}}_{convective} - \frac{1}{\sigma} \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\tilde{v} + v) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) \right]}_{diffusion} = c_b 1 \tilde{s} \tilde{v} + \frac{1}{\sigma} \underbrace{\left[ c_b 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right]}_{diffusion} - \underbrace{c_w 1 f_w \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2}_{destruction}. \quad (10)$$

مدل اولیه اسپالارت-آلماراس برای جریان‌های تراکم ناپذیر بوده است ولی اصلاحاتی برای استفاده در جریان‌های تراکم‌پذیر انجام گرفته است، معادله مدل آشفته اسپالارت-آلماراس برای جریان‌های تراکم‌پذیر به صورت زیر نوشته می‌شود [۴]:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial x_j}}_{transient} = \underbrace{c_b 1 \tilde{s} \bar{\rho} \tilde{v}}_{production} + \frac{1}{\sigma} \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \bar{\rho} \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) \right]}_{diffusion} + c_b 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial x_j} - \underbrace{c_w 1 f_w \bar{\rho} \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2}_{destruction}. \quad (11)$$

در روابط ذکر شده فوق توابع مدل اسپالارت-آلماراس به شرح زیر است:

$$C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622, \\ C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2.$$

### ۳- اصلاح مدل اسپالارت-آلماراس

اصلاح مدل جهت جلوگیری از تولید مقادیر منفی  $\tilde{v}$ : در بررسی‌های انجام شده علت نوسانات شدید حل و حتی ناپایداری حل را تولید مقادیر منفی  $\tilde{v}$  عنوان کرده‌اند [۵] واضح

ترم (۲): در نسخه اصلی مدل اسپالارت-آلماراس این ترم تابعی از  $S$  و  $d^2$  است اما برای مقادیر منفی  $\chi$  این ترم همچنان مقادیر مثبت را برای  $\chi > -19.40$  تولید می‌کند. برای تصحیح این رفتار ترم چشمه به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$S_p = \begin{cases} C_{b1} \tilde{S} \tilde{v} & \chi \geq 0 \\ C_{b1} \tilde{S} \tilde{v} g_n & \chi < 0 \end{cases}, g_n = 1 - \frac{1000 \chi^2}{1 + \chi^2}. \quad (16)$$

در معادله (۱۶) نکات ذیل قابل تأمل هستند:

الف: اگر  $\chi < -\sqrt{1/999}$  باشد تابع  $g_n$  منفی ولی ترم چشمه مقداری مثبت دارد این مقدار مثبت برای حفظ پیوستگی حل غیرقابل اجتناب است یعنی اگر بخواهیم معادله اسپالارت-آلماراس حل همواره پیوسته‌ای داشته باشد این مقدار اجتناب‌ناپذیر است چرا که داریم  $S_p|_{\chi=0} = 0$  و  $\partial S_p / \partial \chi|_{\chi=0} = C_{b1} \tilde{S} \tilde{v}$  که با فرض مقادیر گردابه مثبت ترم چشمه می‌بایست در تغییر علامت دهد و

ب: تابع  $g_n$  مقدار بیشینه نامطلوب را محدود می‌کند و مقداری از این رفتار نامطلوب ذکر شده را بهبود می‌بخشد.  
 ترم (۳): علامت ترم استهلاکی  $S_D$  به علامت‌های  $\tilde{V}$  و  $Fw$  مربوط می‌شود که برای  $-1.185 < r < 0$  مقادیر منفی را تولید می‌کند بنابراین، داریم:

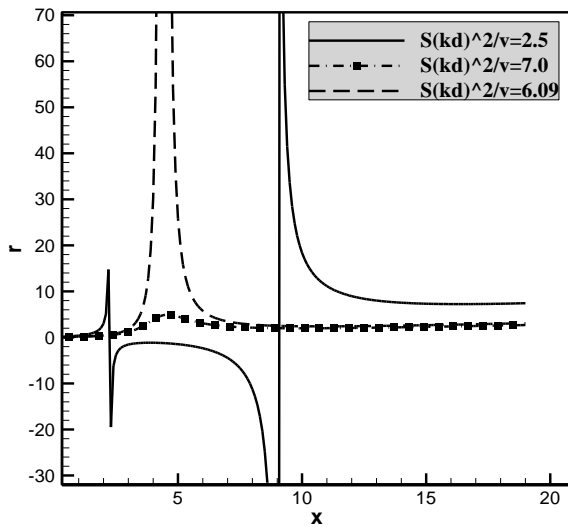
$$S_D = \begin{cases} C_w f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2 & \chi \geq 0, \\ -C_{w1} \left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2 & \chi < 0. \end{cases} \quad (17)$$

اصلاح مدل جهت جلوگیری از تولید مقادیر منفی  $\Gamma$ :

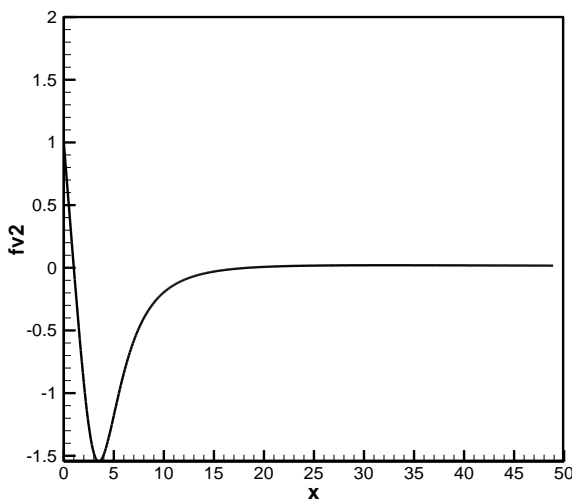
در مدل اولیه اسپالارت-آلماراس تابع  $\Gamma$  به صورت  $r = \left(\frac{l}{kd}\right)^2$  معرفی شد که در آن،  $L$  طول لایه اختلاط الهام گرفته شده از روش‌های جبری است. طبق تعریف انجام شده از قبل داریم:

$$r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S}(kd)^2} = \frac{\tilde{v}}{\frac{S(kd)^2}{\nu} + \chi f_{v2}}. \quad (18)$$

بر اساس معادله (۱۸)، تابع  $\Gamma$  وابسته به دو پارامتر  $\frac{\tilde{S}(kd)^2}{\nu}$  و  $\chi$  است. با تعریف بیان شده  $\Gamma$  می‌بایست مثبت باشد اما همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است؛ تابع  $\Gamma$  به‌ازای



شکل (۱): گراف تابع  $\Gamma$  به‌ازای مقادیر مختلف  $\frac{\tilde{v}}{\tilde{S}(kd)^2}$



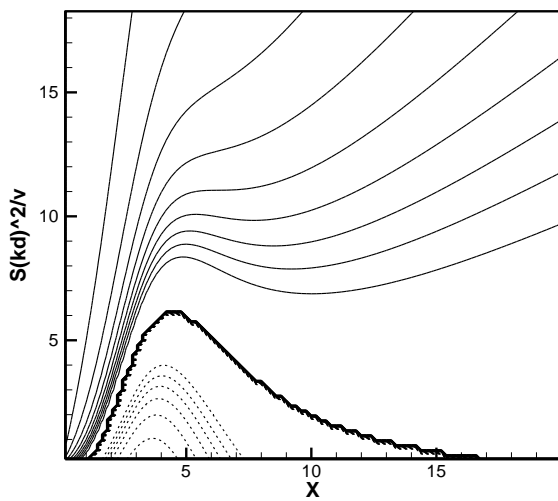
شکل (۲): گراف تابع  $f_{v2}$  به‌ازای مقادیر مختلف  $\chi$

همچنین خطوط هم تراز تابع  $\Gamma$  در شکل ۳ آورده شده است که در آن، مقادیر منفی  $\Gamma$  با خطوط خط‌چین نمایش داده شده است و مقادیر مثبت  $\Gamma$  به‌صورت خطوط پررنگ مشخص شده‌اند.

زیر بازنویسی کرد:

$$S_p = C_{b1} \frac{\tilde{v}^2}{r(kd)^2} \quad (20)$$

معادله (۲۰) نشان می‌دهد که ترم چشمه به‌ازای  $r < 0$  در صورت تصحیح نشدن همچنان مشکل تولید لزجت آشفته منفی را داراست به‌علاوه حتی ترم استهلاکی معادله اسپالارت-آلماراس اصلاح‌نشده  $r < 0$  می‌تواند منفی باشد؛ که این مطلب در خطوط هم‌تراز رسم شده در شکل ۴ به‌وضوح مشاهده می‌شود. خط‌چین در این شکل حوزه‌های منفی تابع  $f_w$  را نشان می‌دهد.



شکل (۴): خطوط هم‌تراز تابع  $f_w$

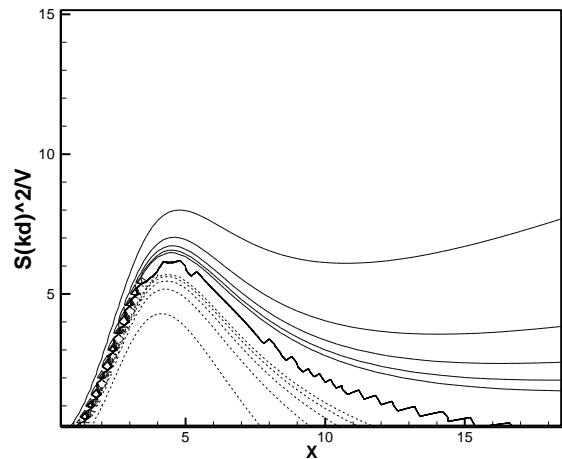
#### ۴- ارائه قالب اصلاح مدل اسپالارت-آلماراس

با توجه به مطالب ارائه‌شده قالب کلی اصلاح مدل اسپالارت-آلماراس را به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم:

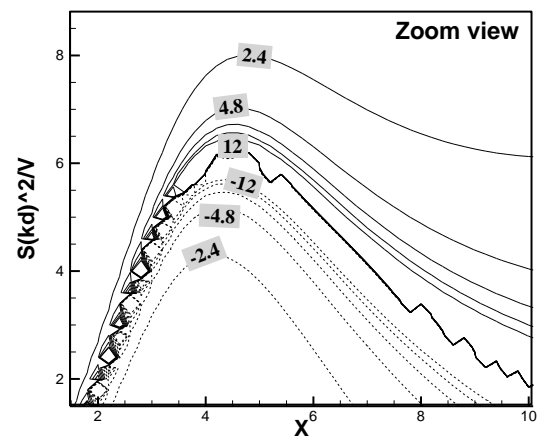
$$S = \begin{cases} C_{b1}\tilde{S}\tilde{v} + \frac{C_{b2}}{\sigma}\nabla\tilde{v}\cdot\nabla\tilde{v} - C_w f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2 & \chi \geq 0, \\ C_{b1}\tilde{S}\tilde{v}g_n + \frac{C_{b2}}{\sigma}\nabla\tilde{v}\cdot\nabla\tilde{v} + C_{w1}\left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2 & \chi < 0, \end{cases} \quad (21)$$

و برای تابع  $r$  معادله (۱۹) جایگزین خواهد شد.

باید متذکر شویم که تصحیح تابع  $r$  معادله اسپالارت-آلماراس در جریان‌هایی با گرادیان فشار بسیار بالا و جدایش زیاد بسیار لازم و ضروری است چراکه موجب نوسانات بسیار شدید در طول حل می‌شود.



شکل (۳): نمایش تابع  $f_{v2}$  به ازای مقادیر مختلف  $\chi$  و  $\tilde{S}(kd)^2/v$



تابع  $r$  به دو دلیل می‌بایست اصلاح شود اول اینکه ذات این تابع اساساً مثبت تعریف‌شده و باید از مقادیر منفی تولیدی جلوگیری به عمل آید و دوم این که این تابع در نقطه‌ای که  $-\tilde{S}(kd)^2/v = \chi f_{v2}$  دارای نقطه تکین و ناپیوستگی است که می‌بایست محدود شود. همچنین باید توجه داشت که تابع  $r = \tilde{v} / \tilde{S}(kd)^2$  تنها به‌ازای مقادیری که  $r \rightarrow \pm\infty$  منفی است. پس تابع  $r$  را به‌صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$r = \begin{cases} r_{\max} & r^* < 0, \\ r^* & 0 \leq r^* \leq r_{\max} \\ r_{\max} & r^* \geq r_{\max} \end{cases} \quad r^* = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S}(kd)^2}, \quad (19)$$

این نکته قابل‌ذکر است که می‌توان ترم چشمه معادله اسپالارت-آلماراس اصلاح‌نشده را با تعریف تابع  $r$  کنونی به فرم

$$M_{L,R} = \frac{u_{L,R}}{a_{1/2}},$$

$$a_{1/2} = \min(\widehat{a}_L, \widehat{a}_R), \quad (26)$$

$$\widehat{a}_L = \frac{a^{*2}}{\max(a^*, u_L)}, \widehat{a}_R = \frac{a^{*2}}{\max(a^*, -u_R)},$$

$$a^{*2} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} H_t.$$

گام دوم: محاسبه ماخ در وجه هر سلول محاسباتی:

$$M_{1/2} = M^+(M_L) + M^-(M_R) + M_P. \quad (27)$$

درواقع برای محاسبه ماخ در هر وجه و استفاده از اطلاعات طرفین هر وجه توابعی از درجه n معرفی شده است. در اینجا از توابع درجه چهارم استفاده می‌کنیم، همچنین جمله پخش فشاری که برای افزایش کارایی مدل در رینولدزهای پایین در نظر گرفته شده است به صورت زیر خواهد بود:

$$M^\pm = \begin{cases} \pm 0.25 \times (M \pm 1)^2 (1 - 4\beta(M \mp 1)^2) & |M| < 1 \\ 0.5 \times (M \pm |M|) & \text{Other} \end{cases}, \quad (28)$$

$$M_P = -\frac{K_P}{f_a} \max(1 - \sigma \overline{M}^2, 0) \frac{P_R - P_L}{a_{1/2}^2 \rho_{1/2}}, \quad (29)$$

$$\rho_{1/2} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}, \overline{M}^2 = \frac{((u_L)^2 + (u_R)^2)}{2a_{1/2}^2}.$$

همچنین، برای محاسبه  $f_a$  داریم:

$$f_a(M_o) = M_o(2 - M_o), \quad (30)$$

$$M_o^2 = \text{Min}(1, \max(\overline{M}^2, M_\infty^2)).$$

گام سوم. محاسبه شار فشاری:

$$p_{1/2} = p^+(M_L)P_L + p^-(M_R)P_R - P_u. \quad (31)$$

مشابه محاسبه ماخ در وجه‌های سلول‌های محاسباتی برای محاسبه فشار در وجوه نیز از توابع درجه چهارم استفاده می‌کنیم پس داریم:

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{M} M_{(1)}^\pm & \text{if } |M| \geq 1 \\ M_{(2)}^\pm \left[ (\pm 2 - M) \mp 16\alpha M M_{(2)}^\mp \right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

### ۵- الگوریتم حل معادلات ناویر- استوکس و نحوه کوپل این معادلات با مدل آشفنگی

با توجه به در نظرگرفتن جریان دوبعدی، لزج، تراکم‌پذیر و ناپایا، معادلات ناویر- استوکس در مختصات کارتزین به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y}, \quad (22)$$

در رابطه W متغیر وابسته،  $E_i$  و  $F_i$  بردارهای شار جابجایی غیر لزج می‌باشند که به صورت ذیل تعریف شده‌اند:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ v(\rho e + P) \end{bmatrix}, E_i = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho \\ \rho uv \\ u(\rho e + P) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$E_v$  و  $F_v$  بردارهای شار لزج بوده که عبارت‌اند از:

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x) \end{bmatrix}.$$

همچنین، e مجموع انرژی داخلی و انرژی جنبشی بر واحد جرم است و به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$e = \frac{P}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2). \quad (25)$$

در این تحقیق برای محاسبه شار غیر لزج از روش بالادستی آسم آپ استفاده شده است. در زیر به طور خلاصه به نحوه محاسبه شار توسط این روش می‌پردازیم.

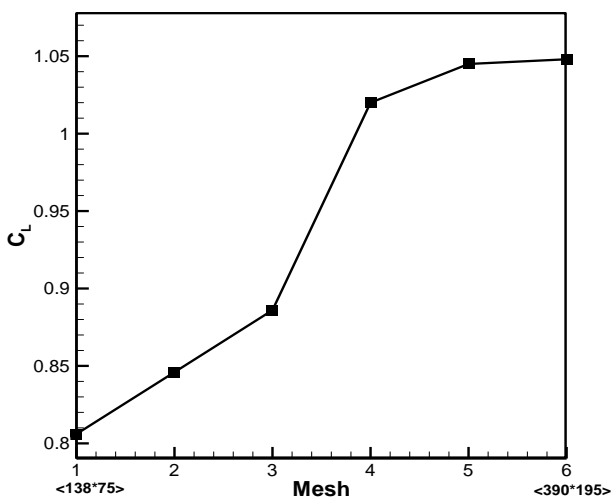
گام اول: برای هر وجه ماخ در طرفین آن به صورت رابطه (۲۶) محاسبه می‌شود [۷]:

روش حل معادله (۲۲) در کد فترن تدوین شده حجم محدود و شبکه مورد استفاده شبکه سازمان یافته از نوع دایروی<sup>۱</sup> است. فرم حجم محدود معادله (۲۲) برای یک سلول چهاروجهی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \times A^n + \sum_1^4 (F^i \times \Delta y - E^i \times \Delta x)^n = \sum_1^4 (F^v \times \Delta y - E^v \times \Delta x)^n + S \times A^n \quad (39)$$

**۷- شبکه مورد استفاده**

شبکه مورد نظر جهت حل مسئله شبکه با سازمان با سلول های چهاروجهی می باشد. به همین جهت منظور از شبکه  $N_x \times N_y$  به ترتیب تعداد نقاط شبکه در راستای ایرفویل و در راستای عمود بر ایرفویل می باشد. در این تحقیق جهت دستیابی به شبکه بهینه جریان با رینولدز  $6 \times 10^6$  و زاویه حمله ۱۰ درجه در مش های مختلف مورد بررسی قرار داده شده است بر این اساس مش  $138 \times 75$  به عنوان مش (۱) در نظر گرفته شده و مش در دو جهت x و y با ضریب  $1/25$  ریز شده است بر این اساس طبق شکل ۵ مشاهده می شود تغییرات ضریب برا در دو مش نهایی ناچیز است بر این اساس مش پنجم ( $312 \times 156$ ) جهت ادامه محاسبات برگزیده شده است لذا تمام نتایج این تحقیق بر مبنای این مش حاصل شده است. نمای کلی از مش مورد استفاده در شکل ۶ آورده شده است.



شکل (۵): تغییرات ضریب برای ایرفویل در مش های مختلف.

جمله پخشی سرعت برای لحاظ کردن تأثیرات جریان با عدد ماخ کم است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_u = K_u p^+ p^- (\rho_L + \rho_R) (f_a a_{1/2}) (u_R - u_L) \quad (33)$$

گام چهارم: محاسبه شار جرمی:

$$\dot{m}_{1/2} = a_{1/2} M_{1/2} \begin{cases} \rho_L & M_{1/2} > 0, \\ \rho_R & otherwise. \end{cases} \quad (34)$$

گام پنجم: محاسبه فلاکس در وجوه سلول های محاسباتی:

$$f_{1/2} = \dot{m}_{1/2} \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}_L & \text{if } \dot{m}_{1/2} > 0, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}_R & \text{otherwise.} \end{cases} + p_{1/2} \quad (35)$$

**۶- کوپل معادلات مدل آشفتگی و ناویراستوکس:**

برای این کار ترم های معادله اسپالارت- آلماراس را منطبق بر معادله (۲۲) به صورت زیر بازنویسی می کنیم [۸]:

$$W^{(5)} = \rho \tilde{v} \quad F^{(5)}_i = \rho v \tilde{v} \quad E^{(5)}_i = \rho u \tilde{v}, \quad (36)$$

$$F^{(5)}_v = \frac{\rho(\tilde{v} + v)}{\sigma Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \quad E^{(5)}_v = \frac{\rho(\tilde{v} + v)}{\sigma Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$$

تذکر: برای محاسبات مشتقات مرتبه اول ترم های لزج معادلات ناویراستوکس و مدل آشفتگی از دقت مرتبه اول استفاده شده است بعلاوه ترم پخش در معادله اسپالارت- آلماراس به صورت زیر بازنویسی شده است [۹]:

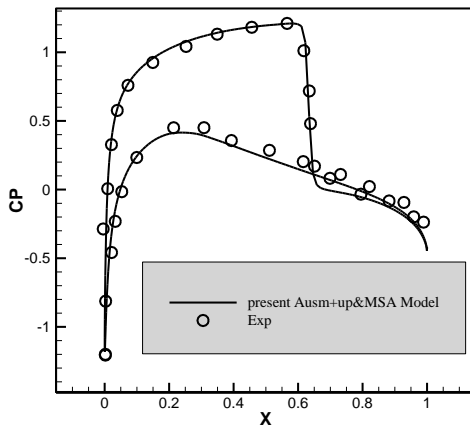
$$\frac{\rho}{\sigma} [\nabla \cdot ((v + \tilde{v})) \nabla \tilde{v} + C_{b2} (\nabla \tilde{v})^2] = \frac{\rho}{\sigma} \nabla \cdot ((v + \tilde{v})) \nabla \tilde{v} + \frac{\rho}{\sigma} C_{b2} (\nabla \tilde{v})^2 = \underbrace{\nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\sigma} (v + \tilde{v}) \nabla \tilde{v} \right)}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} ((v + \tilde{v})) \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \rho + \frac{\rho}{\sigma} C_{b2} (\nabla \tilde{v})^2}_{(2)} \quad (37)$$

در معادله (۳۷) ترم (۱) به ماتریس ترم های لزجت اضافه می شود و ترم (۲) به عنوان ترم پخش معادله اسپالارت- آلماراس به ترم های استهلاکی و چشمه اضافه شده و به عنوان ترم چشمه به معادله (۲۲) به صورت زیر اضافه می شوند:

$$S = \rho C_{b1} \tilde{S} \tilde{v} - \frac{1}{\sigma} ((v + \tilde{v})) \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \rho + \frac{\rho}{\sigma} C_{b2} (\nabla \tilde{v})^2 - \rho C_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 \quad (38)$$

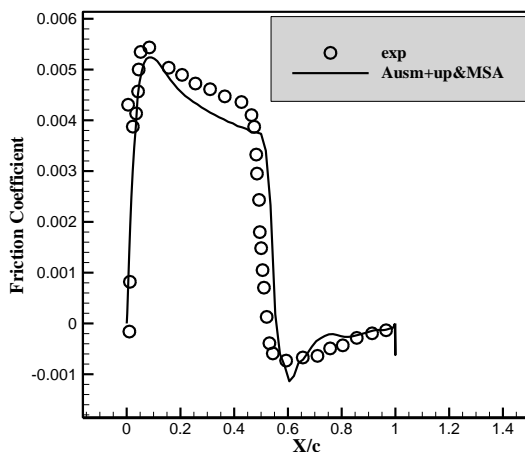
1- O-Grid





شکل (۷): نمودار ضریب فشار در جریان با ماخ ۰/۹۹ و رینولدز ۹ میلیون و زاویه ۲/۲۶ صفر درجه.

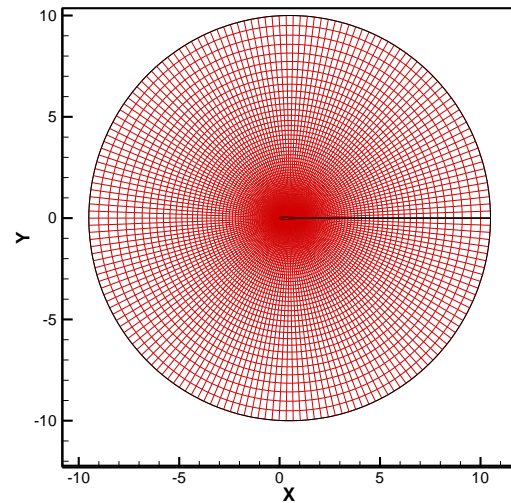
همچنین در این جریان نمودار تغییرات ضریب اصطکاکی نیز در شکل (۸) آورده شده است، تغییرات ناگهانی ضریب اصطکاکی محل رخداد موج ضربه ای را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این شکل محل رخداد موج ضربه ای و الگوی کلی تغییرات این ضریب به‌خوبی نتایج فیزیکی را دنبال می‌کند.



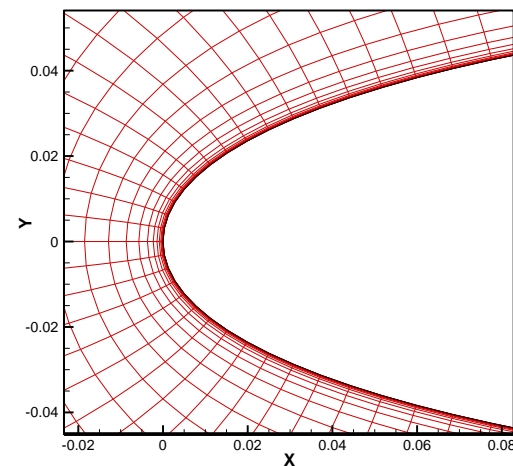
شکل (۸): نمودار تغییرات ضریب اصطکاکی در جریان با ماخ ۰/۷۹۹ و رینولدز ۹ میلیون و زاویه ۲/۲۶ صفر درجه.

ب- جریان با ماخ ۰/۱۵ و رینولدز ۶ میلیون و زوایای حمله صفر و ۱۰ درجه

همان‌طور که در شکل‌های (۹) و (۱۰) مشاهده می‌شود قالب ذکرشده در قسمت‌های قبل به‌خوبی در جریان‌هایی با ماخ پایین نیز توانسته است نتایج فیزیکی ضریب فشار را دنبال کند.



شکل (۶): نمای کلی از شبکه مورد استفاده در این پژوهش.



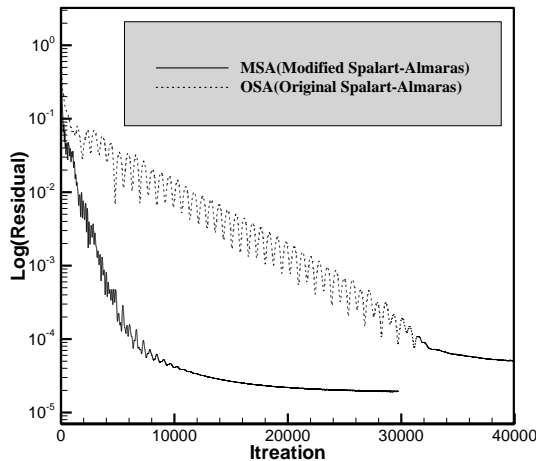
### ۸- اعتبار سنجی

جهت اعتبار سنجی موارد زیر را در جریان خارجی ایرفویل ناکا ۰۰۱۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم:

الف- جریان با ماخ ۰/۷۹۹ و رینولدز ۹ میلیون و زاویه حمله ۲/۲۶

یکی از ویژگی‌های مهم و مشهود یک حل گر معادلات ناویر-استوکس توانمندی در اعمال صحیح لزجت است از آنجاکه در حل معادلات کامل ناویر-استوکس احتمال آلودگی عددی وجود دارد این پدیده می‌تواند محل و قدرت شوک را تحت‌الشعاع قرار دهد اما همان‌طور که در شکل (۷) مشاهده می‌شود در نمودار ضریب فشار در این جریان محل قدرت موج ضربه‌ای با دقت بسیار خوبی پیش‌بینی شده است.

به علاوه نحوه کاهش باقی مانده‌ها در دو نسخه اصلی و اصلاح شده مدل اسپالارت-آلماراس برای زاویه حمله ۱۰ درجه در شکل ۱۱ آورده شده است همان طور که مشاهده می شود در نسخه اصلاح شده برای مقادیر باقی مانده می توان سریع تر به همگرایی مطلوب تر رسید.

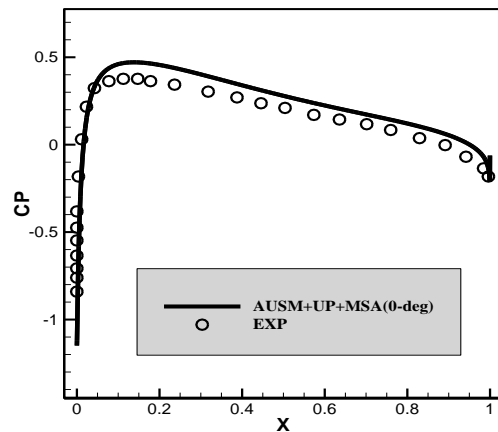


شکل (۱۱): مقایسه نمودارهای کاهش باقی مانده در جریان با ماخ ۰/۱۵ و رینولدز ۶ میلیون و زاویه حمله ۱۰ درجه.

تذکر: اعتبار سنجی نتایج قسمت (الف) بر اساس مرجع [۱۱] و نتایج قسمت (ب) بر اساس مرجع [۱۰] انجام شده است.

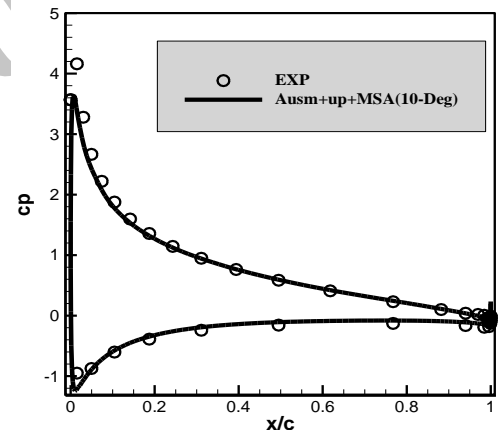
#### ۱۰- نتیجه گیری

در این تحقیق در راستای شناخت دقیق تر معادله حاکم بر جریان لزج خارجی آشفته ابتدا و در گام اول مدل آشفته اسپالارت-آلماراس به طور دقیق بیان شده و در گام بعدی جهت افزایش پایداری و استحکام اصلاحات موردنظر بر روی ترم های چشمه و استهلاکی به منظور عدم تولید لزجت آشفته انجام شده است، تابع  $\Gamma$  نیز به دلیل ذات همواره مثبت خود و جهت عدم تولید مقادیر منفی اصلاح گردید. مجموع این اصلاحات موجب جلوگیری از نوسانات شدید حل و افزایش استحکام و پایداری و دقت حل می شود. در ادامه معادلات مدل آشفته با معادلات ناویر استوکس کوپل شدند که نحوه کوپلینگ این معادلات و روش حل به تفصیل بیان شد در انتها و به جهت اعتبارسنجی فریم محدودکننده مطرح شده کد عددی موردنظر بر روی جریان خارجی ایرفویل ناکا ۰۰۱۲ و در سه حالت مختلف مورد بررسی قرار گرفت که در هر سه حالت نتایج تطبیق بسیار خوبی با داده های آزمایشگاهی دارند. مجموعاً از آنجاکه می توان



شکل (۹): نمودار ضریب فشار در جریان با ماخ ۰/۱۵ و رینولدز ۶ میلیون و زاویه حمله صفر درجه.

همچنین در زاویه حمله صفر و با توجه به تقارن ایرفویل ناکا ۰۰۱۲ انتظار داریم تا توزیع ضریب فشار بالا و پایین ایرفویل یکسان باشد که این مسئله در شکل (۹) با دقت بالایی مشاهده می شود.



شکل (۱۰): نمودار ضریب فشار در جریان با ماخ ۰/۱۵ و رینولدز ۶ میلیون و زاویه حمله ۱۰ درجه.

همچنین، در جدول ۱ مقادیر ضریب پسای کلی در دو زاویه حمله صفر و ۱۵ درجه آورده شده است، همان طور که مشاهده می شود کد ارائه شده به همراه قالب طراحی شده با دقت قابل قبولی این پارامتر را پیش بینی کرده است.

جدول (۱): مقایسه ضریب پسای ایرفویل و نتایج آزمایشگاهی در ماخ ۰/۱۵ و زوایای حمله صفر و ۱۵ درجه.

مقادیر آزمایشگاهی [۱۰]	مطالعه انجام شده	زاویه حمله
۰/۰۸	۰/۰۶۸	صفر
۰/۰۱۸	۰/۰۱۵۱	۱۵

Verification and Validation”, AIAA Paper, Vol.4742, 2010.

11. Nakamori, I. and Ikohagi, T. “Large Eddy Simulation of Transonic Turbulent Flow Over an Airfoil Using a Shock Capturing Scheme with Zonal Embedded Mesh”, Tohoku univ Sendai (Japan) Inst of fluid science , 2001

تنها با اضافه کردن چند خط در کد مدل آشفته اسپالارات-آلماراس حل قدرتمندتر و مستحکم‌تر و به‌صرفه‌تری را در کدهای عددی موجود تجربه کرد اعمال این تصحیحات می‌تواند در بهبود و تسریع نتایج مدنظر سودمند واقع گردد.

#### ۱۱- مراجع

1. Javaherchi, T. “Review of Spalart-Allmaras Turbulence Model and Its Modifications”. University of Washington, 2010.
2. Gatsis, j. “Investigating the Spalart-Allmaras Turbulence model”, university of Toronto, Institute for Aerospace Studies, 2007.
3. Lorin, E., Amine, A, and Soulaïmani, A. “A Positivity Preserving Finite Element-Finite Volume Solver for the Spalart-Allmaras Turbulence Model”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 196, NO. 17 , pp. 2097-2116, 2007.
4. Pletcher, R.H, Tannehill, J. C., and Anderson, D. “Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer”. CRC Press, Florida, 2012.
5. Oliver, T.A and Darmofal, D.L. “An Unsteady Adaptation Algorithm for Discontinuous Galerkin Discretizations of RANS Equations”, In 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference , 2007.
6. Drosson, M. “Development of a High-Order Interior Penalty Discontinuous Galerkin Method for Compressible Turbulent Flows Application to Reynolds-Averaged Navier-Stokes and Large Eddy Simulations”, Phd dissertation, Aerospace and aeronautics engineering, Université de Liège, Belgique, 2008.
7. Sepahi, j. “Numerical and Experimental Investigation of Supersonic Flow in Axisymmetric Inlet”, M.Sc. Thesis, Aerospace department , 2009.
8. xiaobo, Y. “Implementation and Validation Spalart-Allmaras Turbulence Model in PMB3D Code”, Department of Aerospace Engineering, University of Glasgow, United Kingdom, 2002.
9. Wang, B. “Detached-Eddy Simulation of Flow Non-Linearity of Fluid-Structural Schemes and Parallel Computation”, Phd Dissertation, Miami Univ. , Mechanical and Aerospace department, 2009.
10. Rusmey, C, and Smith, B. “Description of a Website Resource for Turbulence Modeling,