

## شبیه‌سازی روش شبکه بولتزمن و بهینه‌سازی تاگوچی اثر میدان مغناطیسی روی همرفت طبیعی نانوسیال در محفظه‌ای نیم‌دایره‌ای

جواد ابوالفضلی اصفهانی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک،  
دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

جواد علی‌نژاد<sup>۱\*</sup>

گروه مهندسی مکانیک، واحد ساری،  
دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۹/۱۹)

### چکیده

در این مقاله اثر میدان مغناطیسی روی جریان همرفت طبیعی نانوسیال در یک محفظه نیم‌دایره‌ای با حضور منبع حرارتی شبیه‌سازی شده است. ابتدا انتقال حرارت همرفت طبیعی در یک محفظه ساده با یک دیوار گرم و یک دیوار سرد تحت تاثیر میدان مغناطیسی به کمک روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی شده و نتایج به دست آمده با داده‌های معتبر قبلی مقایسه شده است. در ادامه، پارامترهای تاثیرگذار دیگری، از فاصله قبیل هندسه منبع حرارتی ( $AR < 2$  و  $0.5 < AR$ )، زاویه میدان مغناطیسی ( $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ ) و درصد حجمی نانوسیال ( $0 < \phi < 3\%$ ) بر چگونگی نرخ انتقال حرارت مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور، نتایجی از قبیل خطوط جریان و همدمای ارائه شده است. در نهایت، با استفاده از روش تاگوچی پارامترهای تاثیرگذار و سطوح آنها شناسایی و با استفاده از آنالیز نسبت سیگنال به اغتشاش، حالت بهینه ( $AR=0.5$ ،  $CuO=3\%$  و  $\phi=3\%$  و  $\gamma=0^\circ$ ) جهت دستیابی به بیشترین نرخ انتقال حرارت و کمترین تولید انرژی تلفاتی پیش بینی و تایید شده است.

**واژه‌های کلیدی:** روش تاگوچی، روش شبکه بولتزمن، همرفت طبیعی، میدان مغناطیسی

## Lattice Boltzmann Simulation and Taguchi Optimization of Magnetic Field Effects on Nanofluid Natural Convection in a Semicircular Enclosure

J. Alinejad

Department of Mechanical Engineering,  
Sari Branch, Islamic Azad University, Sari, Iran

J. Abolfazli Esfahani

Department of Mechanical Engineering,  
Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

(Received: 07/May/2017; Accepted: 10/December/2017)

### ABSTRACT

This paper discusses the application of Taguchi method in assessing maximum heat transfer rate for a natural convection with magneto hydrodynamic flow in a semicircle enclosure, embedded with a heat source. The simulations were planned based on Taguchi method with each trial performed under different magnetic field, heat source aspect ratio, and particle volume fraction of nanofluid. Thermal lattice Boltzmann methods was used to simulate flow and thermal fields. Signal-to-noise ratio analysis was carried out in order to determine the effects of process parameters and optimal factor settings. Finally, confirmation tests verified that Taguchi method achieved optimization of heat transfer rate with sufficient accuracy.

**Keywords:** Taguchi Optimiz ation Method; Lattice Boltzmann Method; Natural Convection; Magnetic Field

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): Alinejad\_javad@iausari.ac.ir

۲- استاد: abolfazli@um.ac.ir

Archive of SID

## فهرست علائم و اختصارات

B	میدان مغناطیسی، T
g	شتاب جاذبه، ms <sup>-2</sup>
T	دما، K
u, v	سرعت، ms <sup>-1</sup>
x, y	مختصات، m
Nu <sub>l</sub>	عدد نوسلت محلی
Nu <sub>m</sub>	عدد نوسلت متوسط
Pr	عدد پرانتل
Ra	عدد رایلی، (gβΔTH <sup>3</sup> )/(αν)
Gr	عدد گراشوف، (gβΔTH <sup>3</sup> )/(ν <sup>2</sup> )
Ha	عدد هارتمن، (BH)/√(σ/ρν)

## علائم یونانی

α	ضریب پخش حرارتی، m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
ν	ضریب لزجت سینماتیکی، m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
θ	دمای بی بعد
σ	رسانایی الکتریکی

## زیرنویس

c	سرد
f	سیال
h	گرم
nf	نانوسیال
s	جامد

## ۱- مقدمه

محققان تلاش‌های وافر در جهت بهبود میزان انتقال حرارت داشته‌اند. این تلاش‌ها علی‌رغم آن‌که تا حدودی و برای تعدادی از کاربردها مثمرتر بوده، اما در جهان امروز و با پیشرفت سریع‌السیر علم، روش‌های قبلی در تعداد زیادی از کاربردها ناتوان جلوه می‌نماید. هدف اصلی این مقاله شبیه‌سازی همرفت طبیعی نانوسیال در یک محفظه نیم‌دایره‌ای با حضور میدان مغناطیسی و دست یافتن به بیشترین نرخ انتقال گرما و کمترین تولید انترپی در شرایط مذکور می‌باشد. این نوع انتقال حرارت کاربردهای متفاوتی در صنعت دارد. یکی از این کاربردها خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی می‌باشد. صمدیانی و همکاران [۱] به بررسی اصول مبنایی در طراحی سیستم خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی

پرداختند. تحلیل چگونگی خنک‌کاری و انتقال حرارت در راکتورهای شیمیایی و هسته‌ای یکی دیگر از مسائل مهم و پیرکاربرد در بررسی این نوع مسائل می‌باشد. کیم و همکاران [۲] به تحلیل انتقال حرارت در یک منبع نوترونی پرداخته و همچنین کارتیکیان و همکاران [۳] تاثیر رژیم جریان بر روی انتقال حرارت جابجایی در استخر سدیم دیگ بخار یک راکتور سریع زاینده را مورد تجزیه تحلیل قرار دادند. دسته دیگر از کاربرد این نوع تحلیل مربوط به تانکهای ذخیره سوخت می‌باشد. رودریگوئز و همکاران [۴] فرایند خنک‌کاری یک تانک ذخیره سوخت را مورد توجه قرار دادند. آنها موفق شدند فرایند انتقال حرارت جابجایی آزاد در این نوع مخازن را به صورت گذرا شبیه‌سازی و مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند. لین و آرمفیلد [۵] فرایند خنک‌کاری به روش انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک سیلندر با مقطع دایره‌ای را شبیه‌سازی نمودند. در این راستا شبیه‌سازی‌های متنوعی در مورد انتقال حرارت در تانک‌های سوخت برودتی صورت گرفته است [۶-۷]. در این کارها رژیم جریان انتقال حرارت جابه‌جایی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. تاثیر میدان مغناطیسی بر روی خصوصیات جریان سیال و همچنین نرخ انتقال حرارت که یکی از جهت‌گیری‌های اصلی این مقاله نیز می‌باشد، توسط کفایتی و همکاران [۸] و همچنین شیخ‌الاسلامی و همکاران [۹] اطراف سیلندر و در یک محفظه مورد مطالعه قرار گرفته است.

## ۲- روش شبکه بولتزمن

معادلات نظریه جنبشی ذرات و مخصوصاً روش شبکه بولتزمن برای تحلیل کلاس‌های مختلفی از مسائل شبیه‌سازی عددی توسعه چشم‌گیری یافته است [۱۰-۱۲]. روش شبکه بولتزمن از روش شبکه گازها و همچنین از گسسته‌سازی معادله بولتزمن استنتاج شده است. این روش یک تکنیک عددی قدرتمند برای شبیه‌سازی جریان سیال [۱۳-۱۴]، انتقال حرارت [۱۵-۱۶] و کاربردهای متنوع دیگری در مقایسه با روش‌های سنتی دینامیک سیالات محاسباتی می‌باشد. بر خلاف رویکرد ماکروسکوپیک ناویر-استوکس کلاسیک، از مدل مزوسکوپیک برای شبیه‌سازی جریان سیال استفاده می‌کند. این روش از مدل‌سازی حرکت ذرات سیال برای دستیابی به خصوصیات ماکروسکوپیک سیال مانند سرعت و

توزیع تعادل و  $F_k$  نیروی خارجی است که در راستای جهت‌های مختلف سرعت شبکه اعمال می‌شود. برای اعمال نیروی شناوری در محاسبات باید نیروی خارجی معرفی شده در معادله (۱) به صورت زیر محاسبه شود:

$$F = 3w_k g_y \beta \theta. \quad (3)$$

همچنین، تابع توزیع تعادلی به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

$$f_k^{eq} = \omega_k \rho \left[ 1 + \frac{c_k \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(c_k \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right] + \frac{\omega_k}{2c_s^2} \left[ \frac{B^2 c^2}{2} - (c \cdot B)^2 \right], \quad (4)$$

که در آن، برای  $k = 0$  وزن  $\omega_k = 4/9$ ، برای  $k = 1, 2, 3, 4$  وزن  $\omega_k = 1/9$ ،  $\omega_k = 1/36$ ،  $\omega_k = 1/36$ ،  $\omega_k = 1/36$  و همچنین  $k = 5, 6, 7, 8$  و همچنین  $c_s = c_k / \sqrt{3}$  می‌باشد. در این تحقیق میدان مغناطیسی همانند میدان سرعت در مرحله به کمک روابط زیر محاسبه شده و در واقع در این روش تاثیر توام میدان سرعت بر روی میدان مغناطیسی و برعکس لحاظ شده است:

$$h_{kx}^{eq} = \lambda_k \left[ B_x + \frac{1}{c_s^2} e_{kx} (u_y B_x - u_x B_y) \right], \quad (5)$$

$$h_{ky}^{eq} = \lambda_k \left[ B_y + \frac{1}{c_s^2} e_{ky} (u_x B_y - u_y B_x) \right], \quad (6)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{3} \text{ for } k = 0, \quad \lambda_k = \frac{1}{6} \text{ for } k = 1 - 4,$$

$$h_k(x + c_k \Delta t, t + \Delta t) = h_k(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_m} [h_k^{eq}(x, t) - h_k(x, t)]. \quad (7)$$

همچنین، برای تحلیل میدان دما از معادلات زیر استفاده شده است:

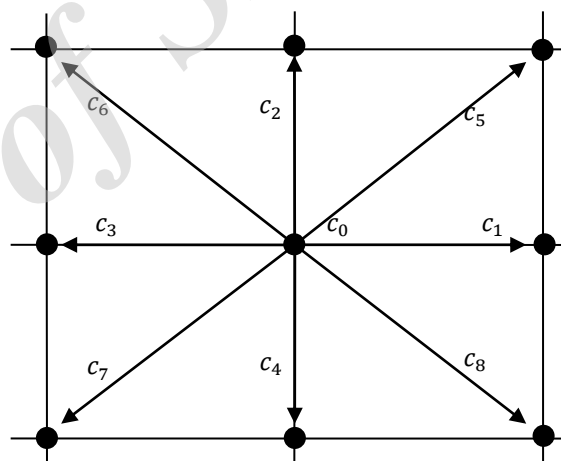
$$g_k(x + c_k \Delta t, t + \Delta t) = g_k(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_k^{eq}(x, t) - g_k(x, t)], \quad (8)$$

$$g_k^{eq} = \omega_k T \left[ 1 + \frac{c_k \cdot u}{c_s^2} \right], \quad (9)$$

و مقادیر ماکروسکوپی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$T = \sum g_k, \rho = \sum_{k=0}^8 f_k, u = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 f_k c_k, \quad (10)$$

فشار استفاده می‌کند. مدلی که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است همان مدلی است که در مرجع [۱۵] به آن اشاره شده است. تابع توزیع با حل معادله بولتزمن که نتیجه گسسته‌سازی خاصی از معادله جنبشی بولتزمن می‌باشد، محاسبه می‌شود. در این روش میدان سیال به سلول‌های یک شکل کارتیزی گسسته می‌شود و به هر سلول مقدار ثابتی از تابع توزیع که بیانگر تعداد ذرات سیالی است که در راستای جهت‌های گسسته‌شده در حرکت می‌باشند، اختصاص می‌یابد. براساس تعداد ابعاد مورد بررسی و تعداد جهت‌های سرعت، مدل‌های مختلفی ارائه شده است. این مقاله بر اساس شبکه بولتزمن دوبعدی با ۹ جهت سرعت پایه‌ریزی شده است. جهت‌های سرعت در یک مدل D2Q9 در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل (۱): مدل شبکه بولتزمن D2Q9

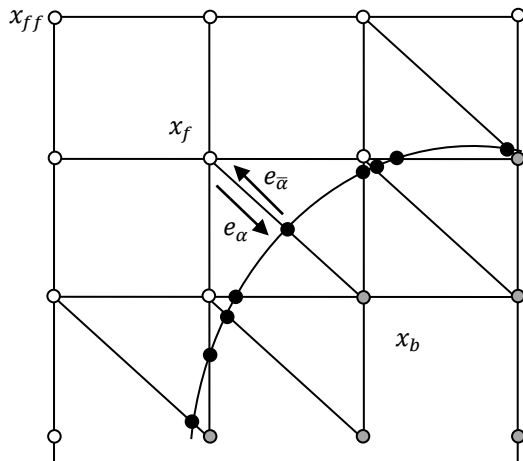
سرعت‌های نمایش داده شده به شرح زیر می‌باشد، که در آن  $c = \Delta x / \Delta t$  و  $k$  بیانگر جهت بردارهای سرعت می‌باشد:

$$c_k = \begin{cases} (0,0), & k = 0, \\ (\pm 1,0)c, (0, \pm 1)c, & k = 1,2,3,4, \\ (\pm 1, \pm 1)c, & k = 5,6,7,8. \end{cases} \quad (1)$$

بعد از تقریبی که باتناگار-گروس-کروک ارائه دادند، معادله بولتزمن به شکل زیر فرموله می‌شود:

$$f_k(x + c_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_k^{eq}(x, t) - f_k(x, t)] + \Delta t c_k F_k, \quad (2)$$

که در آن،  $\Delta t$  بیانگر گام زمانی،  $c_k$  سرعت گسسته شده شبکه در راستای  $k$ ، اشاره دارد به زمان آسایش شبکه،  $f_k^{eq}$  تابع



شکل (۲): نمایی شماتیک از یک شبکه کارترین و مرز منحنی.

در شکل ۳ سه مدل فرارگیری مرز جامد در شبکه را نمایش می‌دهد. شکل ۳-الف که بیانگر یک مرز جامد معمولی بوده و در آن مرز دقیقاً وسط میدان سیال و جامد قرار دارد که در این شرایط  $\Delta = 0.5$  لحاظ می‌شود. شکل ۳-ب و ۳-ج شرایطی را نمایش می‌دهد که در آن مقدار  $\Delta$  کوچکتر و یا بزرگتر از  $0.5$  می‌باشد. در تمامی این سه مورد مقدار تابع توزیع منعکس شده  $\tilde{f}_{\alpha}(x, t + \Delta t)$  مجهول می‌باشد. برای محاسبه این مقدار در گره  $x_f$  باید از میان‌یابی استفاده کرد. روشی که برای محاسبه میدان سرعت در مواجهه با مرز منحنی روش به کار رفته در این پروژه مشابه روش پیشنهادی در مرجع [۱۸] می‌باشد. برای محاسبه تابع توزیع در قسمت جامد  $\tilde{f}_{\alpha}(x_b, t)$  بر اساس گره‌های مرز که در میدان سیال قرار گرفته‌اند، از شرایط مرز جامد با در نظر گرفتن فاصله گره سیال و مرز استفاده می‌شود. مدلی که چاپمن-انسکوگ برای محاسبه تابع توزیع مرحله برخورد به شرح زیر می‌باشد:

$$\tilde{f}_{\alpha}(x_b, t + \Delta t) = (1 - \lambda)\tilde{f}_{\alpha}(x_f, t + \Delta t) + \lambda f_{\alpha}^0(x_b, t + \Delta t) - \frac{6}{c^2} w_{\alpha} \rho(x_f, t + \Delta t) e_{\alpha} \cdot u_w, \quad (21)$$

$$f_{\alpha}^0(x_b, t + \Delta t) = f_{\alpha}^{eq}(x_f, t + \Delta t) + \frac{3}{c^2} w_{\alpha} \rho(x_f, t + \Delta t) e_{\alpha} (u_{bf} - u_f), \quad (22)$$

$$u_{bf} = u_{ff}, \lambda = \frac{2\Delta - 1}{\tau_m - 2}, \quad \text{if } 0 < \Delta \leq \frac{1}{2}, \quad (23)$$

$$B_x = \sum h_{kx}, B_y = \sum h_{ky}.$$

برای لحاظ کردن تاثیر نانوذرات بر روی خواص ترموفیزیکی سیال از روابط زیر استفاده شده است [۱۷]:

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}}, \quad (11)$$

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s, \quad (12)$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho c_p)_f + \phi(\rho c_p)_s, \quad (13)$$

$$\beta_{nf} = (1 - \phi)\beta_f + \phi\beta_s, \quad (14)$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}}, \quad (15)$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = 1 + 64.7 \phi^{0.764} \left(\frac{d_f}{d_s}\right)^{0.369} \left(\frac{k_f}{k_s}\right)^{0.7476} \text{Pr}_f \text{Re}_f^{1.2321}. \quad (16)$$

همچنین، برای محاسبه عدد ناسلت و عدد انتروپی از روابط زیر استفاده شده است:

$$\text{Nu}_l = \frac{k_{nf} - 1}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\text{wall}}, \quad \theta_m = \frac{T - T_C}{T_h - T_C}, \quad (17)$$

$$\text{Nu}_m = \frac{1}{L} \int_0^L \text{Nu}_l dx, \quad (18)$$

$$N_s = \left[ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] + \phi \left[ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right], \quad (19)$$

$$; \quad \phi = \frac{\mu T_0}{k} \left(\frac{\alpha}{H\Delta T}\right)^2, S = \int_V N_s dV.$$

## ۲-۱- شرایط مرز منحنی

با توجه به شکل ۲ می‌توان مشاهده کرد که دایره مشکی  $x_w$  مربوط مرز منحنی، دایره توخالی  $x_f$  مربوط به نقاط میدان سیال و دایره خاکستری  $x_b$  مربوط به نقاط جامد می‌باشد. جهت اعمال مرحله جاری شدن روی مرز نیاز داریم  $\tilde{f}(x_b, t)$  را محاسبه کنیم. فاصله بی‌بعد بین نقاط موجود در میدان سیال و مرز منحنی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta = \frac{\|x_f - x_w\|}{\|x_f - x_b\|}. \quad (20)$$

دکتر تاگوچی ایجاد شرایط بهینه را به سه مرحله طراحی سیستم، طراحی پارامتر و طراحی تفرانس تقسیم‌بندی کرده است. موضوع اصلی این تحقیق «طراحی پارامتر» می‌باشد. روش تاگوچی دو عنصر جدید و قدرتمند را ایجاد می‌کند: اولی این است که، این روش یک روش مرتب و منظم برای توسعه یک محصول و یا بررسی مسائل پیچیده است. دوم این که، این روش وسیله‌ای را برای بازرسی مقرون به صرفه گزینه‌های نهایی قابل استفاده فراهم می‌کند. هر محصول برای ایجاد بعضی عملکردها طراحی می‌شود. برای بیان نحوه عملکرد خوب یک محصول از بعضی مشخصه‌های قابل اندازه‌گیری استفاده می‌شود که به‌طور کلی به‌عنوان شاخص کیفیت هستند. در اغلب موارد، ممکن است شاخص کیفیت کمیته قابل اندازه‌گیری از قبیل وزن، طول، ساعات و غیره باشد. در بعضی محصولات، از اندازه‌گیری‌های ذهنی نظیر «خوب»، «بد»، «کم» و «زیاد» می‌توان استفاده کرد. در سایر موارد، ارزیابی‌های ذهنی و واقعی را می‌توان در یک معیار ارزیابی کلی اعمال کرد. مهم نیست کیفیت محصول به چه نحوی اندازه‌گیری شود، توسط یک معیار یا به‌وسیله ترکیبی از معیارهای چندگانه، ولی در هر حال شامل یکی از سه مشخصه زیر خواهد بود:

- هر چه بزرگتر، بهتر،
- هر چه کوچکتر، بهتر و
- هر چه به مقدار اسمی نزدیکتر، بهتر.

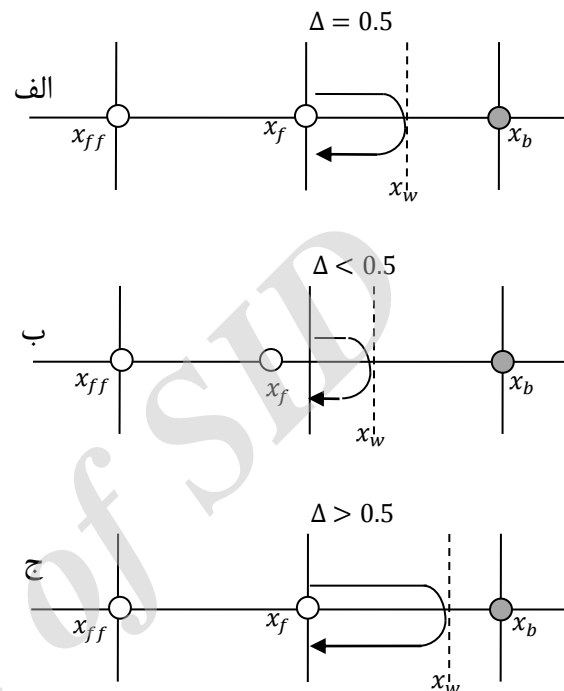
اگر یک سیستم خنک‌کاری در حال بررسی و تحلیل باشد تا بهترین پارامترهای طراحی را طوری تعیین شوند که این سیستم حداکثر نرخ انتقال گرما را داشته باشد، در این مورد کیفیت طراحی از طریق مقدار عدد ناسلت به‌دست آمده بررسی و از مشخصه «هر چه بزرگتر، بهتر» استفاده خواهد شد.

### ۳- مدل فیزیکی

شکل ۴-الف مدل فیزیکی مساله پایه شکل ۴-ب مدل فیزیکی مساله اصلی را نشان می‌دهد. همان‌طوری که مشاهده می‌شود در مساله پایه دیوار سمت چپ گرم، دیوار سمت راست سرد و دیوارهای بالا و پایین بی‌درو در نظر گرفته شده است. از طرف دیگر در مساله دیوار منبع حرارتی گرم، دیوار

$$u_{bf} = \left(1 - \frac{3}{2\Delta}\right) u_{f+} + \frac{3}{2\Delta} u_w, \quad \lambda = \frac{2\Delta-1}{\tau_m + \frac{1}{2}},$$

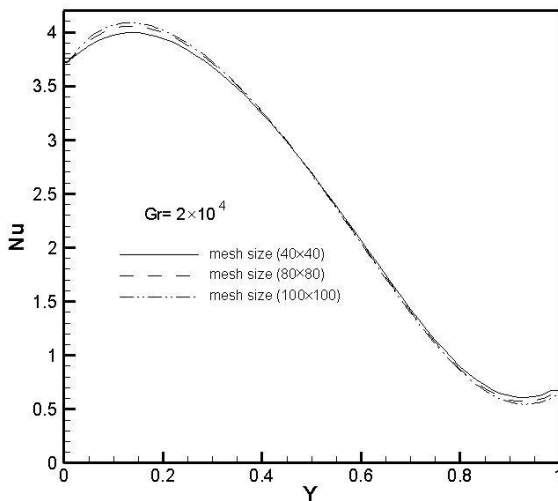
if  $\frac{1}{2} < \Delta \leq 1$ . (۲۴)



شکل (۳): تصویر مرز جسم جامد در شبکه بولتزمن

### ۲-۲- روش تاگوچی

با توجه به رقابت شدید مابین صنایع، تولید محصولاتی با کیفیت بالا و قیمت پایین رمز موفقیت و ثبات در عرصه بین المللی است. به همین علت، در مراکز تحقیق و توسعه کارخانجات هزینه‌های زیادی صرف بهینه‌سازی فرآیندها از طریق انجام آزمایشات و یا شبه‌سازی می‌گردد. از آنجا که انجام این قبیل آزمون‌ها به علت تعدد پارامترهای تولید و تداخل اثر آنها بر یکدیگر زمان بر و پرهزینه هستند، استفاده از روش‌های مختلف در طراحی این روند که قادر به کاهش تعداد آزمون‌ها باشند، امری ضروری است. طراحی آزمایشات تاگوچی [۲۰-۱۹] یکی از روش‌های مورد استفاده در مبحث طراحی آزمایشات است که اجرای آن در صنایع مختلف با موفقیت‌های زیادی همراه بوده است. استفاده از این روش برای کلیه مهندسی و محققینی که در زمینه‌های بهینه‌سازی یک فرآیند و مطالعه اثر پارامترهای مختلف بر روی یک ویژگی (خصوصیت) فعالیت می‌کنند مفید و کاربردی است.



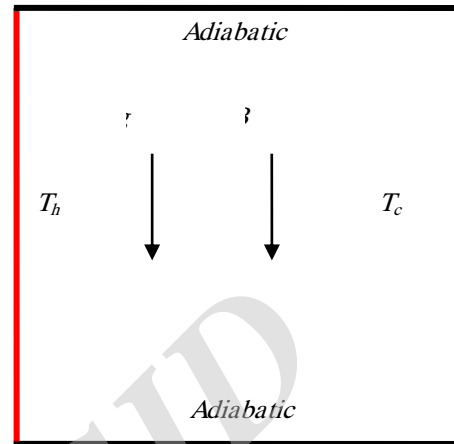
شکل (۵): عدد ناسلت محلی به ازای شبکه بندی مختلف.

جدول (۱): تاثیر شبکه بندی بر روی عدد ناسلت.

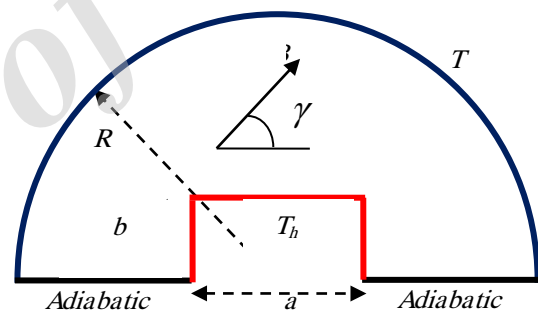
	۴۰×۴۰	۸۰×۸۰	۱۰۰×۱۰۰
Gr= ۲×۱۰ <sup>۴</sup>	۲/۵۳۱	۲/۵۰۴	۲/۴۹۷
Gr= ۲×۱۰ <sup>۶</sup>	۹/۱۷۹	۸/۸۹۶	۸/۸۴۱

در این بخش انتقال حرارت همرفت طبیعی در یک محفظه با یک دیوار گرم و یک دیوار سرد تحت تاثیر میدان مغناطیسی به عنوان مساله مرجع با جزئیات بسیار دقیقی مورد مطالعه قرار گرفته است. همان طوری که در شکل ۶ مشاهده می شود، در رایلی های پایین خطوط دما ثابت به صورت موازی با دیوارهای گرم و سرد از بالا به پایین امتداد داشته این خطوط با افزایش عدد رایلی به تدریج خمیده می شوند (Ra=۱۰<sup>۴</sup>). این مشاهده بیانگر این مساله می باشد که در رایلی های پایین سازوکار غالب انتقال حرارت از نوع رسانش بوده و به تدریج با افزایش عدد رایلی سهم همرفت در انتقال حرارت افزایش پیدا می کند تا جایی که در Ra=۱۰<sup>۶</sup> خطوط دما ثابت در میان محفظه به شکل تخت و در امتداد افقی مشاهده می شوند. با اعمال میدان مغناطیسی میدان سرعت و بالطبع میدان دما تحت تاثیر قرار می گیرند. میدان مغناطیسی بر خلاف نیروی شناوری عمل کرده و حرکت سیال را کند می کند. با افزایش نیروی مغناطیسی به تدریج مکانیزم هدایت حرارتی بر همرفت غلبه می کند. این پدیده در خطوط همدم که با افزایش نیروی مغناطیسی به شکل خطوط عمودی موازی در می آیند، به وضوح قابل مشاهده می باشد. برای اعتبارسنجی دقیق تر نتایج، عدد ناسلت به ازای عدد هارتمن

منحنی محفظه سرد و دیوارهای افقی محفظه بی درو لحاظ شده است.



(الف)



$$AR \text{ (Aspect Ratio)} = a/b$$

$$D = 2R = 5\sqrt{ab}$$

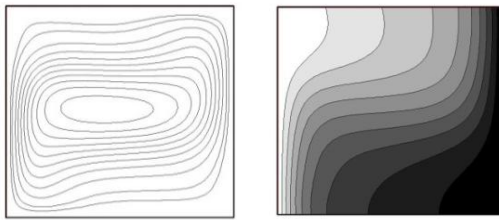
(ب)

شکل (۴): مدل فیزیکی (الف) مساله پایه، (ب) مساله اصلی.

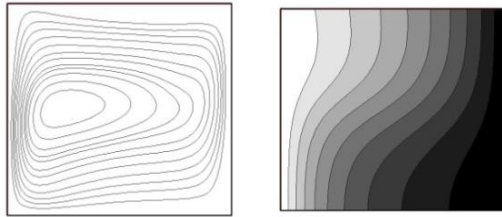
### ۳- اعتبارسنجی

برای بررسی عدم وابستگی نتایج به تعداد گره ها، شبیه سازی در دو عدد گراش مختلف با تعداد گره های متفاوت صورت گرفته است. نتایج این شبیه سازی ها به صورت عدد ناسلت در شکل ۵ و جدول ۱ ارائه شده است. همان طوری که مشاهده می شود در شبکه بندی ۱۰۰×۱۰۰ نسبت حالت قبل بیشترین تفاوت کمتر از ۰/۰۶٪ می باشد و لذا این شبکه بندی برای شبیه سازی های بعدی انتخاب شده است.

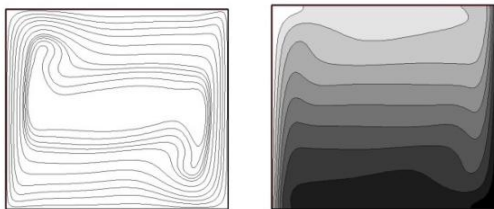
متفاوت در عدد گراف‌های مختلف در مقایسه با نتایج مرجع [۲۱] در جدول ۲ ارائه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که شبیه‌سازی صورت گرفته از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد.



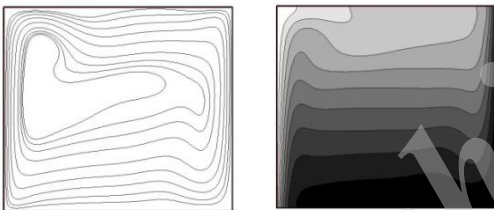
$Ha = 50$



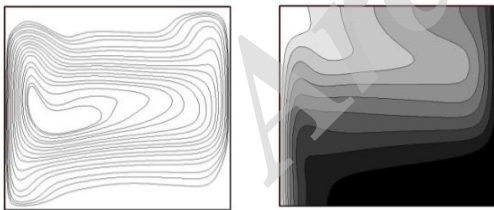
$Ha = 100$



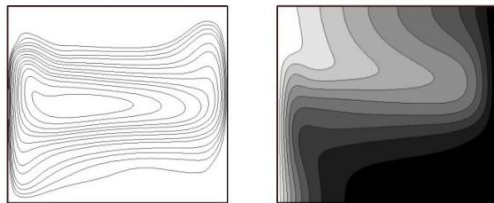
$Ha = 200$



$Ha = 500$

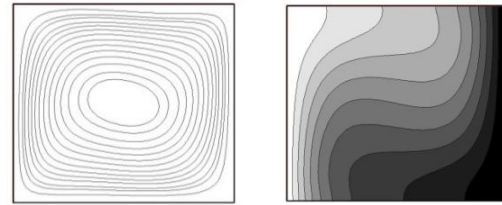


$Ha = 1000$

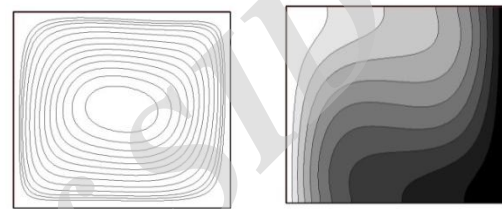


$Ha = 2000$

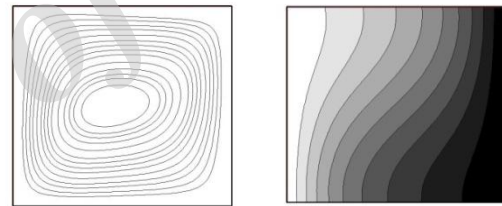
شکل (۶): خطوط جریان و خطوط هم‌دما به‌ازای  $Ha$  مختلف.



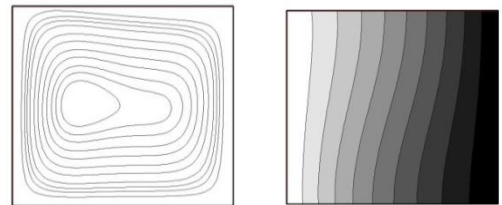
$Ha = 5000$



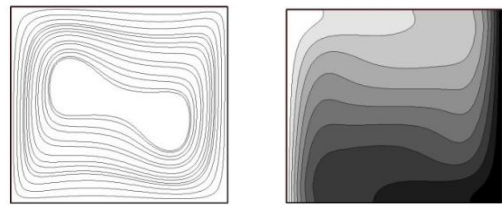
$Ha = 10000$



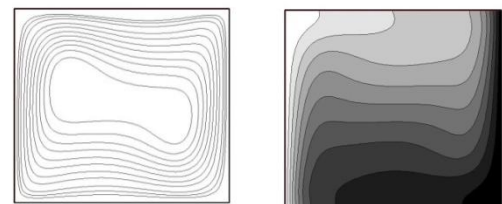
$Ha = 20000$



$Ha = 50000$



$Ha = 100000$



$Ha = 200000$

$Ra = 10^4$

$Ra = 10^5$



جدول (۲): مقایسه عدد ناسلت متوسط با نتایج قبلی.

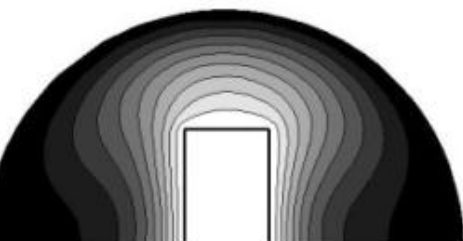
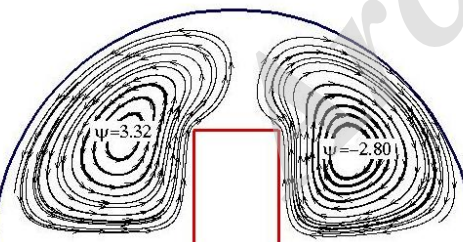
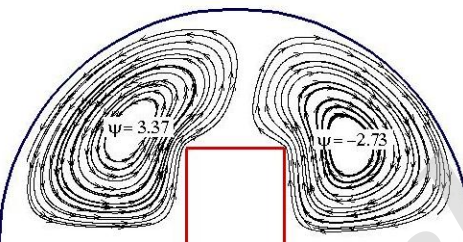
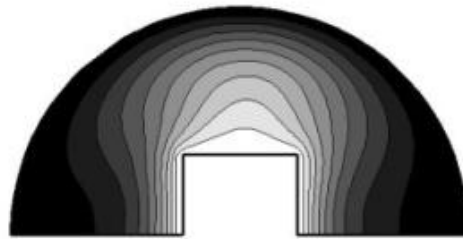
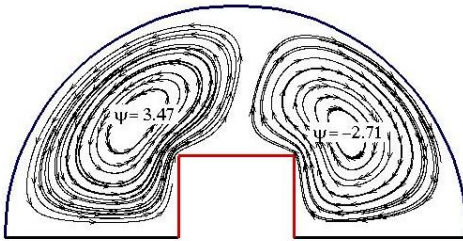
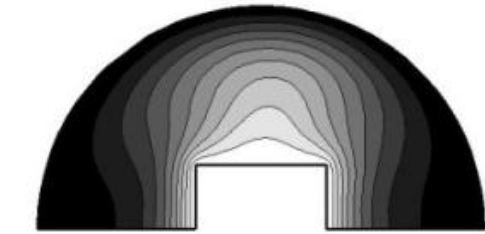
$Gr=2 \times 10^6$		$Gr=2 \times 10^5$		$Gr=2 \times 10^4$		Ha
مطالعه مرجع حاضر [۲۱]	مطالعه مرجع حاضر [۲۱]	مطالعه مرجع حاضر [۲۱]	مطالعه مرجع حاضر [۲۱]	مطالعه مرجع حاضر [۲۱]	مطالعه مرجع حاضر [۲۱]	
۸/۷۰۳	۸/۸۴۵	۴/۹۱۹	۵/۰۲۱	۲/۵۱۸	۲/۴۹۷	۰
۸/۶۴۶	۸/۶۸۹	۴/۸۰۵	۴/۹۱۲	۲/۲۲۳	۲/۲۳۰	۱۰
۷/۵۸۲	۷/۵۰۹	۲/۸۴۴	۲/۷۹۳	۱/۰۸۵	۱/۱۲۹	۵۰
۵/۵۴۱	۵/۵۱۳	۱/۴۳۱	۱/۴۳۳	۱/۰۱۱	۱/۰۳۹	۱۰۰

۴- نتایج و بحث

در این قسمت ابتدا تاثیر هندسه منبع حرارتی و درصد حجمی نانوسیال بر روی میدان سیال و نرخ انتقال حرارت مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس به کمک روش تاگوجی شرایط بهینه پیش بینی خواهد شد.

۴-۱- تاثیر هندسه منبع حرارتی

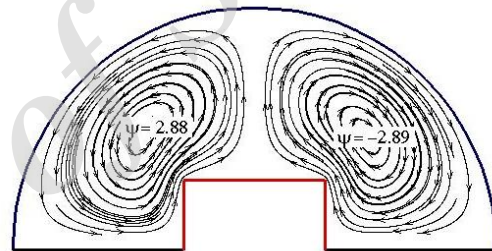
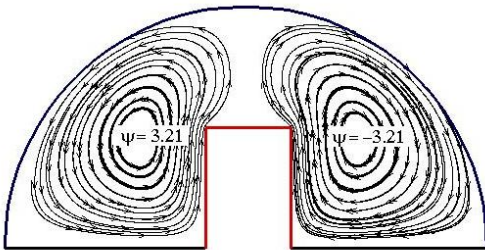
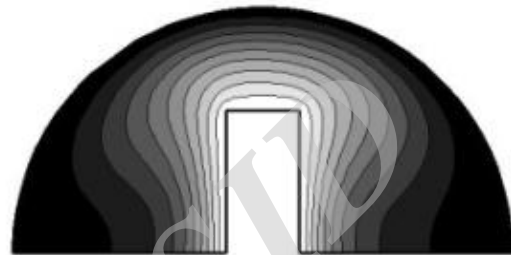
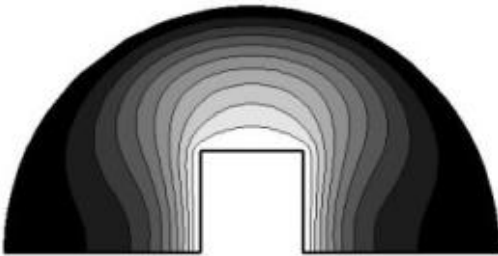
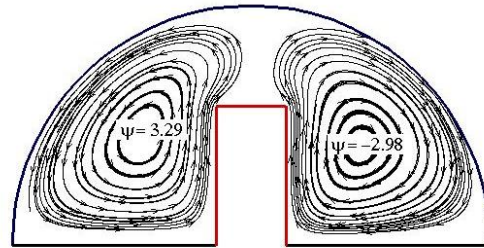
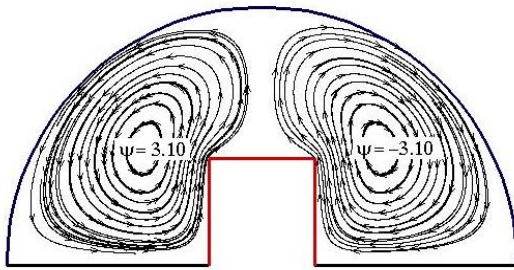
بعد از اعتبارسنجی نتایج، تاثیر تغییر هندسه منبع حرارتی و همچنین درصد حجمی نانوسیال بر روی نرخ انتقال حرارت داخل محفظه مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. تاثیر تغییر هندسه مانع داخل محفظه بر روی خطوط جریان و خطوط همدمما در شکل ۷ قابل رویت می‌باشد. خطوط جریان به صورت دو گردابه اصلی داخل محفظه درآمده، که این گردابه‌ها در  $\gamma=90^\circ$  متقارن می‌باشند. با تغییر زاویه میدان مغناطیسی ( $\gamma=30^\circ$ ) خطوط جریان منحرف شده و جریان به صورت دو گردابه غیر متقارن درمی‌آید. خطوط همدمما به صورت یک فواره از اطراف مانع به سمت دیوار منحنی محفظه امتداد داشته و در نهایت به سمت دیوارهای پایینی منحرف خواهند شد. لازم به ذکر است که اعداد بی بعد  $Ha$ ,  $Ra$ ,  $Gr$  برای محفظه نیم‌دایره‌ای با طول مشخصه  $D$  (قطر نیم دایره) محاسبه شده‌اند.



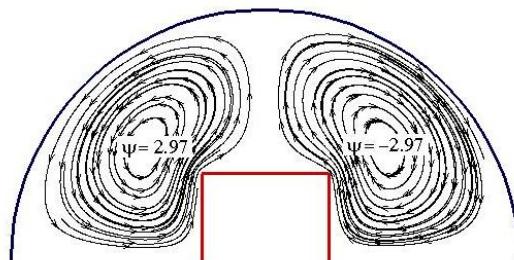
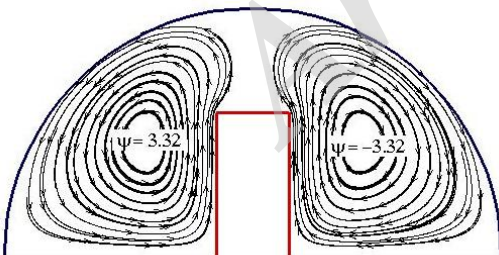
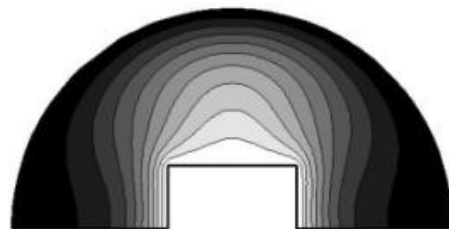
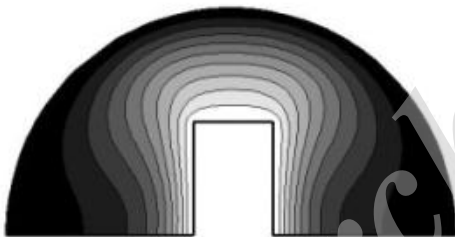
شکل (۷): خطوط جریان و همدمما  $Ha=50$ ،  $Ra=10^5$ .

۰  
۰  
۰

۰  
۰  
۰

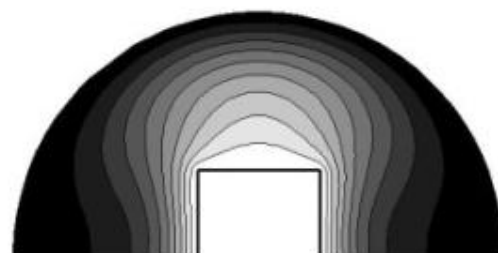
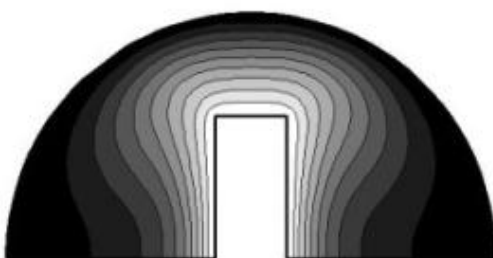


$\gamma = 90^\circ$



$\gamma = 90^\circ$

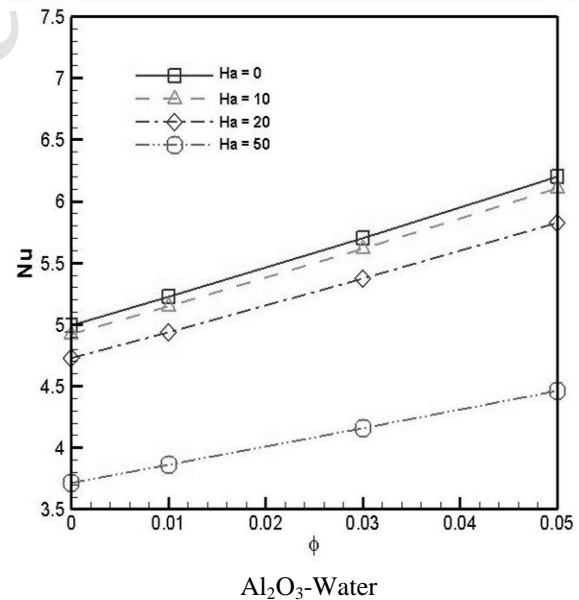
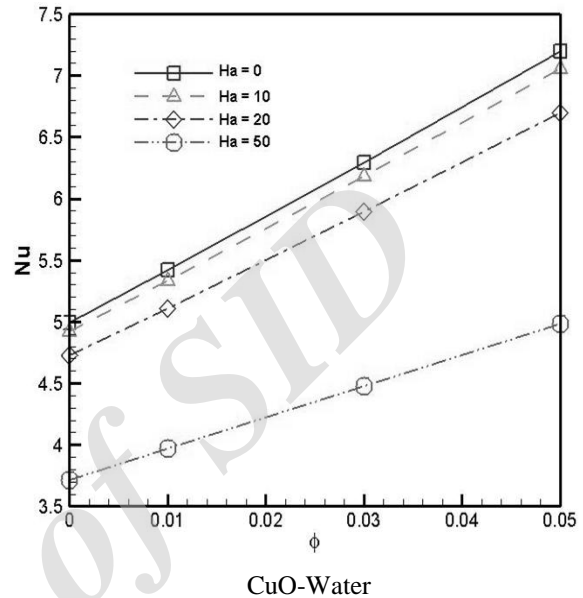
$\gamma = 90^\circ$



شکل (۷): ادامه.

## ۲-۴- تاثیر درصد حجمی نانوسیال

جهت بررسی تاثیر درصد حجمی نانوسیال، عدد ناسلت متوسط به ازای اعداد هارتمن مختلف در شکل ۸ رسم شده است.



شکل (۸): عدد ناسلت متوسط به ازای Ha متفاوت در  $Ra=10^5$ .

همان طوری که مشاهده می شود، با افزایش درصد حجمی نانوذرات ناسلت متوسط افزایش پیدا می کند. از طرف دیگر با افزایش عدد هارتمن این روند کاهش یافته، که این تغییرات در هارتمن بالاتر به وضوح قابل مشاهده است.

## ۳-۴- بهینه سازی

اساساً روش تاگوچی برای بهبود کیفیت محصولات و فرآیندهایی طراحی می شود که در آن عملکرد سیستم بیشتر به فاکتورها طراحی بستگی داشته باشد. در طرح ریزی آزمایشات و استراتژی توسعه، برای ایجاد کلیه ترکیبات ممکن از فاکتورها به همراه محدوده های قابل قبول در هر کدام از فاکتورهای مربوطه، معمولاً منطق ساده ای به کار گرفته می شود. اما در پروژه های مهندسی که دارای تعداد زیادی از فاکتورهای مؤثر است، تعداد ترکیبات ممکن خیلی زیاد باشد. به علاوه، پروژه های خاص ممکن است نیاز داشته باشد تا تداخل بین فاکتورهای تأثیرگذار هم بررسی شود. تاگوچی مجموعه ویژه ای از طرح های کلی برای آزمایشات ایجاد کرده است که اغلب کاربردها را پوشش می دهد. در این مقاله سه فاکتور تأثیرگذار یعنی هندسه، درصد حجمی نانو سیال و زاویه میدان مغناطیسی وجود دارد که برای هر کدام از این فاکتورها، ۵ سطح برای تغییرات در نظر گرفته شده است (جدول ۳).

جدول (۳): فاکتورها و سطوح آنها در شبیه سازی.

نسبت	در صد نانو	زاویه میدان	شماره سطح
هندسی	سیال	مغناطیسی	
AR	$\phi$	$\gamma$	
۲	CuO-۳%	۹۰°	۱
۱/۵	CuO-۱%	۶۰°	۲
۱	Water	۴۵°	۳
۰/۶۶	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -۱%	۳۰°	۴
۰/۵	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -۳%	۰°	۵

به طور طبیعی تعداد حالات ممکن  $5^3=125$  حالت می باشد که روش تاگوچی پیشنهاد ۲۵ شبیه سازی از ۱۲۵ شبیه سازی ممکن را ارائه می دهد (جدول ۴).

**جدول (۴):** چیدمان سطوح مختلف فاکتورها جهت شبیه‌سازی.

شبیه‌سازی	AR	$\varphi$	$\gamma$
۱	۱	۱	۱
۲	۱	۲	۲
۳	۱	۳	۳
۴	۱	۴	۴
۵	۱	۵	۵
۶	۲	۱	۲
۷	۲	۲	۳
۸	۲	۳	۴
۹	۲	۴	۵
۱۰	۲	۵	۱
۱۱	۳	۱	۳
۱۲	۳	۲	۴
۱۳	۳	۳	۵
۱۴	۳	۴	۱
۱۵	۳	۵	۲
۱۶	۴	۱	۴
۱۷	۴	۲	۵
۱۸	۴	۳	۱
۱۹	۴	۴	۲
۲۰	۴	۵	۳
۲۱	۵	۱	۵
۲۲	۵	۲	۱
۲۳	۵	۳	۲
۲۴	۵	۴	۳
۲۵	۵	۵	۴

نتایج این ۲۵ شبیه‌سازی در جدول ۵ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود عدد ناسلت به عنوان معیاری برای سنجش نرخ انتقال حرارت در این جدول ارائه شده است.

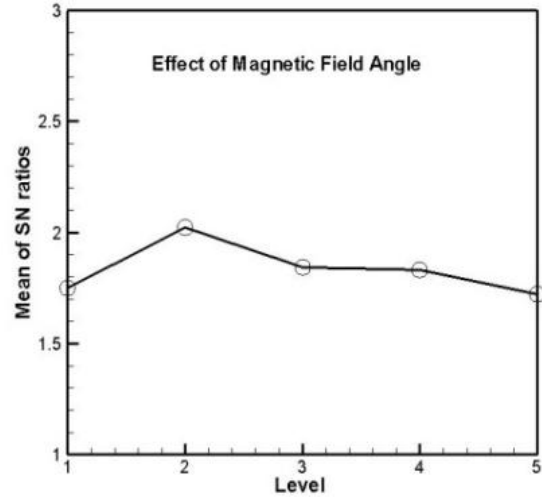
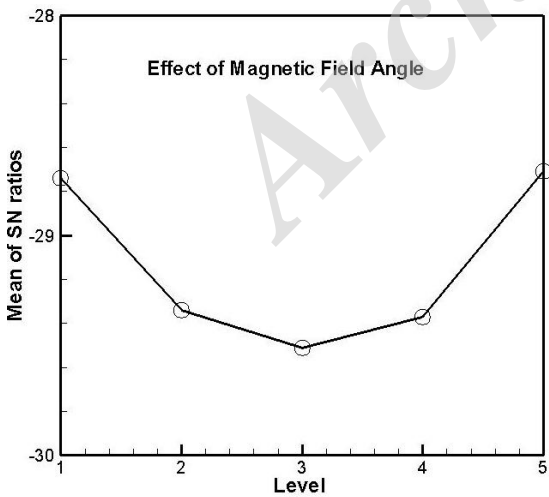
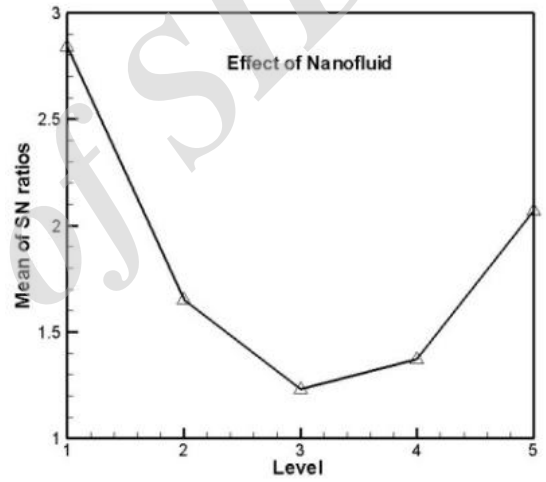
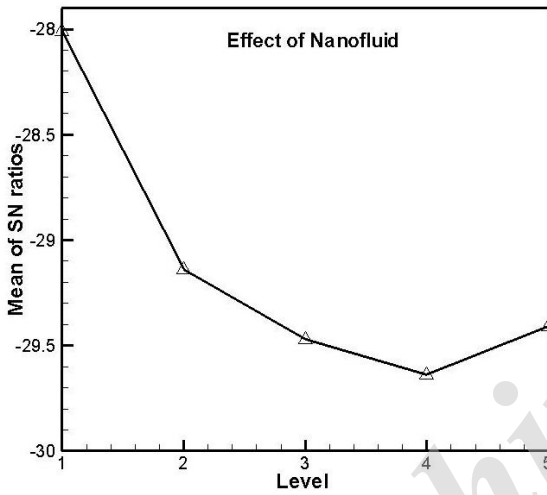
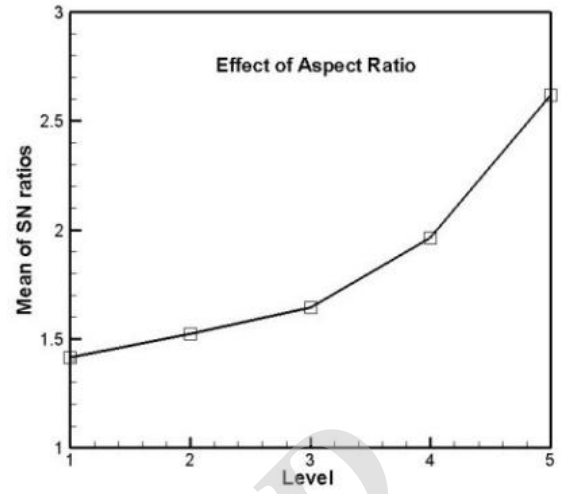
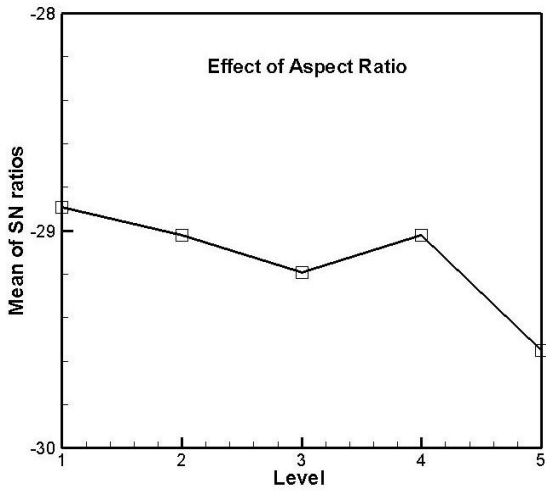
در مساله شرایط بهینه زمانی اتفاق می‌افتد که عدد ناسلت بیشینه باشد، لذا برای محقق شدن این هدف نتایج تحلیل شده است. تحلیل این نتایج به کمک نمودارهای (Signal) S/N (to Noise) صورت گرفته است. سیگنال به پارامترهایی گفته می‌شود که در طراحی لحاظ شده و تغییر آنها بر روی کیفیت محصول تاثیر دارند. نویز (اغتشاشات) به پارامترهایی گفته می‌شود که در طراحی در نظر گرفته نشده‌اند ولی روی محصول نهایی تاثیر دارند. ما در طراحی همواره به دنبال مقادیر بالای S/N می‌باشیم. مقادیر بالای این نسبت بیانگر این است که، اثر پارامترهای قابل کنترل بیشتر از اثر پارامترهای غیر قابل کنترل می‌باشد. نرخ S/N از روی میانگین مربعات انحراف از هدف محاسبه می‌شود. به این ترتیب که اگر شاخص کیفیت مورد نظر ما هرچه بزرگتر بهتر باشد، S/N به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MSD = \frac{\frac{1}{Y_1^2} + \frac{1}{Y_2^2} + \dots + \frac{1}{Y_N^2}}{N}, \quad (25)$$

$$S/N = -10 \log(MSD),$$

که در آن،  $Y_i$  نتایج حاصل از  $N$  بار تکرار هر شبیه‌سازی جدول ۴ می‌باشد. تحلیل این نتایج بر اساس تابع هدف بیشینه عدد ناسلت نشان می‌دهد که ترکیب سطح ۵ از فاکتور اول (AR = ۰/۵)، سطح ۱ از فاکتور دوم (CuO-۳%) و سطح ۲ از فاکتور سوم ( $\gamma = 60^\circ$ ) نتایج مطلوب مورد نظر را خواهد داد. شکل ۹ نتایج این تحلیل را نشان می‌دهد.

همچنین، تحلیل نتایج به دست آمده بر اساس تابع هدف کمینه عدد انتروپی نشان می‌دهد که ترکیب سطح ۱ از فاکتور اول (AR = ۲)، سطح ۱ از فاکتور دوم (CuO-۳%) و سطح ۱ از فاکتور سوم ( $\gamma = 90^\circ$ ) نتایج مطلوب مورد نظر را خواهد داد. شکل ۱۰ نتایج این تحلیل را نشان می‌دهد. در نهایت تحلیل نتایج بر اساس تابع دو هدفه بیشینه عدد ناسلت و کمینه عدد انتروپی (عدد ناسلت +  $\frac{C}{\text{عدد انتروپی}}$  = تابع دو هدفه) نشان می‌دهد. برای این که وزن کمینه شدن انتروپی نسبت به بیشینه شدن عدد ناسلت در تابع هدف یکسان باشد، در رابطه بالا مقدار عدد ثابت  $C = 30$  در نظر گرفته شده است.



شکل (۱۰): نمودار SN برای تابع هدف کمینه عدد انتروپی.

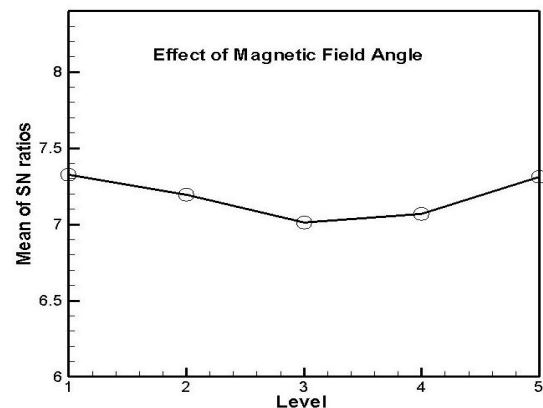
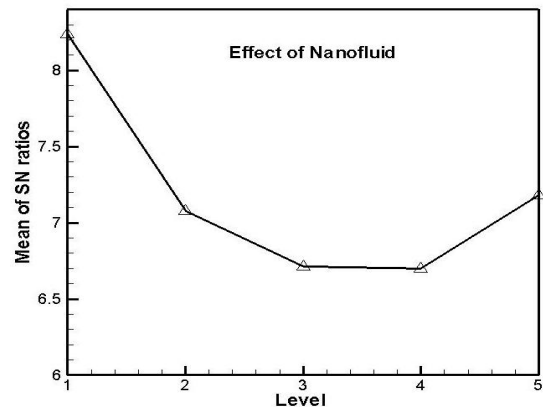
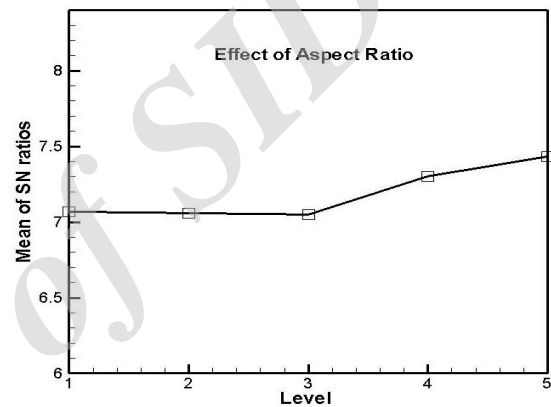
شکل (۹): نمودار SN برای تابع هدف بیشینه عدد ناسلت.

**جدول (۵):** عدد ناسلت در شبیه سازی پیشنهادی تاگوچی،  $Ha=50$ .

عدد انتروپی	عدد ناسلت	زاویه میدان مغناطیسی	درصد حجمی نانوسیال	
۲۲/۶۴	۱/۳۰۳	۹۰ °	CuO- %۳	AR=۲
۲۷/۵۱	۱/۱۵۵	۶۰ °	CuO- %۱	
۳۰/۷۶	۱/۰۸۴	۴۵ °	Water	
۳۰/۷۳	۱/۱۳۴	۳۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> - %۱	
۲۸/۳۳	۱/۲۱۹	۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -% ۳	
۲۵/۳۹	۱/۳۴۸	۶۰ °	CuO- %۳	AR=۱/۵
۲۹/۱۸	۱/۱۸۱	۴۵ °	CuO- %۱	
۳۰/۸۲	۱/۰۹۶	۳۰ °	Water	
۲۸/۳۷	۱/۱۲۹	۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> - %۱	
۲۷/۸۰	۱/۲۱۸	۹۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -% ۳	
۲۶/۸۵	۱/۳۸۰	۴۵ °	CuO- %۳	AR=۱
۲۹/۰۱	۱/۱۹۲	۳۰ °	CuO- %۱	
۲۸/۴۵	۱/۰۸۹	۰ °	Water	
۲۹/۵۵	۱/۱۴۶	۹۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> - %۱	
۳۰/۲۷	۱/۲۵۳	۶۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -%۳	
۲۶/۳۷	۱/۴۲۶	۳۰ °	CuO- %۳	AR=۰/۶۶
۲۶/۶۳	۱/۲۱۲	۰ °	CuO-%۱	
۲۶/۴۲	۱/۱۴۶	۹۰ °	Water	
۳۱/۲۸	۱/۱۹۷	۶۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -% ۱	
۳۱/۰۳	۱/۳۰۲	۴۵ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -%۳	
۲۴/۷۸	۱/۴۸۱	۰ °	CuO-%۳	AR=۰/۵
۳۱/۰۹	۱/۳۱۱	۹۰ °	CuO- %۱	
۳۲/۶۴	۱/۳۶۸	۶۰ °	Water	
۳۱/۸۱	۱/۲۵۳	۴۵ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> - %۱	
۳۰/۴۴	۱/۳۵۶	۳۰ °	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -%۳	

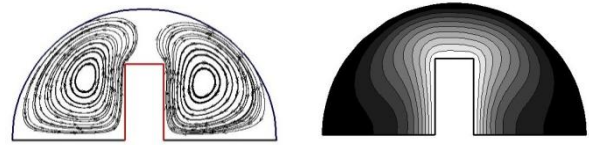
تحلیل این نتایج نشان می‌دهد که، ترکیب سطح ۵ از فاکتور اول (AR=۰/۵)، سطح ۱ از فاکتور دوم (CuO-۳%) و سطح ۵ از فاکتور سوم (γ=۰°) بهترین انتخاب خواهد بود. (شکل ۱۱)

آخرین مرحله روش تاگوچی تایید نتایج پیش بینی شده توسط این روش می‌باشد. برای تایید نتایج مذکور، شبیه‌سازی مورد نظر با پارامترهای بهینه پیش‌بینی شده صورت گرفته است (شکل ۱۲). نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که عدد ناسلت در این شرایط برابر ۱/۴۸۱ و عدد انتروپی برابر ۲۴/۷۸ می‌باشد

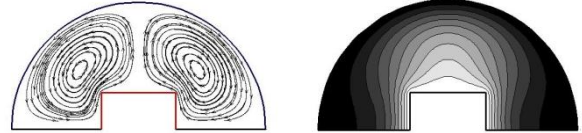


**شکل (۱۱):** نمودار SN برای تابع دو هدفه بیشینه عدد ناسلت و کمینه عدد انتروپی.

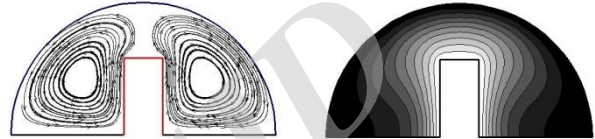
۴- در تحلیل با استفاده از تابع دو هدفه با استفاده از روش تاگوچی هندسه، درصد حجمی نانوسیال و زاویه میدان مغناطیسی بهینه (  $AR=0/5$ ،  $CuO=3\%$  و  $\gamma=0^\circ$  ) پیش-بینی و تایید شده است.



بر اساس تابع هدف بیشینه عدد ناسلت



بر اساس تابع هدف کمینه عدد انترویی



بر اساس تابع دوهدفه هدف بیشینه عدد ناسلت و کمینه عدد انترویی

شکل (۱۲): خطوط جریان و خطوط همدمای در شرایط

بهینه پیش‌بینی شده روش تاگوچی.

## ۵- نتیجه‌گیری

هدف ما از انجام این تحقیق شبیه‌سازی میدان سیال و دما داخل یک محفظه نیم‌دایره‌ای به کمک روش شبکه بولتزمن و همچنین پیش‌بینی بالاترین نرخ انتقال حرارت و کمترین تولید انترویی با استفاده از روش تاگوچی می‌باشد. برخی از نتایج اصلی حاصله به شرح زیر می‌باشد:

- ۱- اعتبارسنجی نتایج به‌دست آمده در این مقاله نشان می‌دهد که شبیه‌سازی تاثیر میدان مغناطیسی در انتقال گرمای همرفت طبیعی با روش شبکه بولتزمن، از دقت بسیار خوبی برخوردار می‌باشد،
- ۲- استفاده از روش تاگوچی هندسه، درصد حجمی نانوسیال و زاویه میدان مغناطیسی بهینه (  $AR=0/5$ ،  $CuO=3\%$  و  $\gamma=60^\circ$  ) در انتقال گرمای همرفت طبیعی داخل محفظه برای رسیدن به بیشترین نرخ انتقال حرارت را تعیین می‌کند،
- ۳- استفاده از روش تاگوچی هندسه، درصد حجمی نانوسیال و زاویه میدان مغناطیسی بهینه (  $AR=2$ ،  $CuO=3\%$  و  $\gamma=90^\circ$  ) در انتقال گرمای همرفت طبیعی داخل محفظه برای رسیدن به کمترین مقدار تولید انترویی را تعیین می‌کند و

## ۶- تشکر و قدردانی

بدینوسیله تشکر و قدردانی صمیمانه خود را از دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری به جهت حمایت از این طرح پژوهشی اعلام می‌دارد.

## ۷- مراجع

1. Samadiani, E., Joshi, Y., and Mistree, F. "The Thermal Design of a Next Generation Data Center: A Conceptual Exposition", Journal of Electronic Packaging, Vol. 130, No. 4, pp.1104–1112, 2008.
2. Kim, Y.K., Lee, K.H., and Kim, H.R. "Cold Neutron Source at Kaeri Korea", Nuclear Engineering and Design, Vol. 238, pp.1664–1669, 2008.
3. Karthikeyan, S., Sundararajan, T., Shet, U.S.P., and Selvaraj, P. "Effect of Turbulent Natural Convection on Sodium Pool Combustion in the Steam Generator Building of a Fast Breeder Reactor", Nuclear Engineering and Design, Vol. 239, No.12, pp. 2992–3002, 2009.
4. Rodriguez, I., Castro, J., Perez-Segarra, C.D., and Oliva, A. "Unsteady Numerical Simulation of the Cooling Process of Vertical Storage Tanks under Laminar Natural Convection," International Journal of Thermal Sciences, Vol. 48, No. 4, pp.708–721, 2009.
5. Lin, W. and Armfield, S.W. "Direct Simulation of Natural Convection Cooling in a Vertical Circular Cylinder," International Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 42, pp. 4117–4130, 1999.
6. Kurian, V., Varma, M.N., and Kannan, A. "Numerical Studies on Laminar Natural Convection Inside Inclined Cylinders of Unity Aspect Ratio," International Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 52, pp.822–838, 2009.
7. Cherkasov, S.G. "Natural Convection and Temperature Stratification in a Cryogenic Fuel Tank in Microgravity," Fluid Dynamics, Vol. 29, No. 5, pp. 710–716, 1994.
8. Kefayati, G.R., Gorji, M., Sajjadi, H., Ganji, D.D. "Investigation of Prandtl Number Effect on Natural Convection MHD in an Open Cavity by Lattice Boltzmann Method", Engineering

16. He, X. and Luo, L.S., "Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier–Stokes Equations," *Journal of Statistical Physics*, Vol. 88, Nos. 3–4, pp. 927–944, 1997.
17. Chon, C.H., Kihm, K.D., Lee, S.P., and Choi, S.U.S. "Empirical Correlation Finding the Role of Temperature and Particle Size for Nanofluid (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), Thermal Conductivity Enhancement," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 87, pp. 153107, 2005 .
18. Thürey, N. and Rüde, U. "Stable Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method on Adaptively Coarsened Grids," *Computing and Visualization in Science*, Vol. 12, pp. 247–263, 2009.
19. Taguchi, G. "On-Line Quality Control During Production", Japan Standard Association, Tokyo, 1981.
20. Taguchi, G., Elsayed, E. A., and Hsiang, T. "Quality Engineering in Production Systems", McGraw-Hill, New York, 1989.
21. Lin, K.H., Liao, C.C., Lien, S.Y., Lin, C.A., "Thermal Lattice Boltzmann Simulations of Natural Convection with Complex Geometry", *J. Computers & Fluids*, Vol. 69, pp.35–44, 2012.
22. Shu, C., Xue, H., and Zhu., Y.D., "Numerical Study of Natural Convection in An Eccentric Annulus Between a Square Outer Cylinder and a Circular Inner Cylinder Using DQ Method", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 44, pp. 3321, 2001.
9. Sheikholeslami, M., Jalili, P., Ganji, D.D. "Magnetic Field Effect on Nanofluid Flow between Two Circular Cylinders, Using AGM", *Alexandria Engineering Journal*, in press, 2017.
10. Chopard, B. and Luthi, P.O. "Lattice Boltzmann Computations and Applications to Physics," *Theoretical Computational Physics*, Vol. 217, pp. 115–130, 1999.
11. Nourgaliev, R.R., Dinh, T.N., Theofanous, T.G., and Joseph, D. "The Lattice Boltzmann Equation Method: Theoretical Interpretation, Numerics and Implications," *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 29, No. 1, pp. 117–169, 2003.
12. Yu, D., Mei, R., Luo, L.S., and Shyy, W. "Viscous Flow Computations with the Method of Lattice Boltzmann Equation," *Progress in Aerospace Science*, Vol. 39, No. 5, pp. 329–367, 2003.
13. Mohammad, A.A. "Applied Lattice Boltzmann Method for Transport Phenomena Momentum Heat Mass Transfer," Springer, London, 2011.
14. Aghajani, D.M., Farhadi, M., and Sedighi, K. "Effect of Heater Location on Heat Transfer and Entropy Generation in the Cavity, Using the Lattice Boltzmann Method," *Heat Transfer Research*, Vol. 40, pp. 521–536, 2009.
15. Mezrhab, A., Jami, M., Abid, C., Bouzidi, M., and Lallemand, P. "Lattice Boltzmann Modeling of Natural Convection in an Inclined Square Enclosure with Partitions Attached to Its Cold Wall," *International Journal of Heat of Fluid Flow*, Vol. 27, pp. 456–465, 2006.