Journal of Soft Computing and Information Technology (JSCIT)

Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran
Journal Homepage: jscit.nit.ac.ir
Volume 8, Number 2, Summer 2019, pp. 76-88
Received: 01/31/2019, Revised: 04/07/2019, Accepted: 04/25/2019

A Novel Approach in Computer Vision and Photogrammetry to Recover the Relative Position and Orientation of Cameras in Stereo Images Using the SVD Decomposition of the Essential Matrix

Masood Vrshosaz[1*], Alireza Afary[2], Mohammad Saadatseresht[3] and Barat Mojaradi[4]
1*- Geomatics Engineering Faculty, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
2- Geomatics Engineering Faculty, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
3- School of Surveying and Geospatial Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
4- School of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

[1*]Varshosazm@kntu.ac.ir, [2]Arafary@mail.kntu.ac.ir, [3]Msaadat@ut.ac.ir, and [4]Mojaradi@iust.ac.ir

Corresponding author address: Masood Varshosaz, Department of Photogrammetry and Remote Sensing, Geomatics Engineering Faculty, K.N.Toosi University of Technology, Valiasr St., Mirdamad Cross, Tehran, Iran, Post Code: 19967 – 15433.

Abstract- The relative position and orientation parameters between two cameras in a stereo pair are included within the Essential matrix, *E*. The decomposition of this matrix into a rotation matrix, *R*, and a skew-symmetric matrix, *S*, is an efficient tool for retrieving the relative position and orientation of the cameras. In this paper, a new method is proposed to recover these parameters using the singular value decomposition (SVD) of the Essential matrix. First, using the SVD properties, the existing formulas in the decomposition of the Essential matrix into a rotation matrix and a skew-symmetric matrix are directly proved. Then, based on these results, a new method in the decomposition of the Essential matrix using SVD will be presented. The Essential matrix decomposition in this method is accomplished by extracting the base vector of the left null space of the Essential matrix and then followed by SVD decomposition of the skew-symmetric matrix corresponding to this base vector. In this method, the initial mapping of the Essential matrix, recovered from the erroneous coordinates of the corresponding image points in two images, into the space of Essential matrices does not require. The numerical analysis shows that the results of the new presented method are correct and identical with the results of the existing formulas.

Keywords- Essential Matrix, Relative Orientation, Position and Orientation Recovery, SVD.

مجله علمی پژوهشی رایانش نرم و فن‌آوری اطلاعات
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
صفحه مجله: jscit.nit.ac.ir
جلد ۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۸، صفحه ۸۸-۷۶
دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۱۱، بازنگری: ۱۳۹۸/۰۱/۱۸، پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۰۵

JSCIT
Journal of Soft Computing and Information Technology

راه‌کاری نوین در ماشین بینایی و فتوگرامتری برای بازیابی موقعیت نسبی دوربین‌ها در تصاویر استریو با استفاده از تجزیه SVD ماتریس اساسی

مسعود ورشوساز[۱*]، علیرضا آفری[۲]، محمد سعادت سرشت[۳]، برات مجردی[۴]
۱*- دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.
۲- دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.
۳- دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران، تهران، ایران.
۴- دانشکده عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
[1*]varshosazm@kntu.ac.ir, [2]arafary@mail.kntu.ac.ir, [3]msaadat@ut.ac.ir, and [3]mojaradi@iust.ac.ir

* نشانی نویسنده مسئول: مسعود ورشوساز، تهران، خیابان ولیعصر، تقاطع میرداماد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، کد پستی: ۱۹۹۶۷-۱۵۴۳۳.

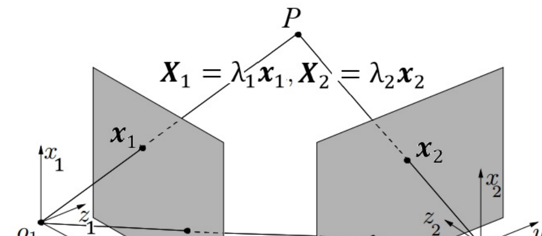
چکیده- اطلاعات موقعیت و وضعیت نسبی دوربین‌ها در تصاویر استریو، در درون ماتریس اساسی E (Essential Matrix) مندرج است. تجزیه این ماتریس به یک ماتریس دوران R و یک ماتریس پادمتقارن S، ابزاری کارآمد در بازیابی موقعیت و وضعیت نسبی دوربین‌ها در این تصاویر می‌باشد. در این مقاله، با استفاده از تجزیه ماتریس اساسی E و بردار پایه فضای پوچ چپ آن به مقادیر و بردارهای منفرد (Singular Value Decomposition)، روشی جدید برای بازیابی موقعیت نسبی دوربین‌ها در تصاویر استریو ارائه شده است. ابتدا فرمول‌های موجود در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S با استفاده از تجزیه SVD، به طور مستقیم اثبات و تبیین شده و در ادامه بر اساس نتایج آن، روشی جدید در این مقاله ارائه و اثبات می‌گردد. در این روش نیازی به نگاشت اولیه ماتریس اساسی E محاسبه شده از مختصات‌های خطادار نقاط عکسی متناظر در دو تصویر، به فضای ماتریس‌های اساسی نبوده و این نگاشت در هنگام تعیین ماتریس پادمتقارن S انجام می‌گردد. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که نتایج روش جدید ارائه شده با نتایج حاصل از فرمول‌های تجزیه موجود یکسان است.

واژه‌های کلیدی: ماتریس اساسی، توجیه نسبی، بازیابی موقعیت و وضعیت نسبی دوربین، تجزیه SVD.

۱- مقدمه

حل مسأله توجیه نسبی در فتوگرامتری یکی از بخش‌های اصلی و مهم محاسبات فتوگرامتری به منظور تولید ابر نقطه سه بعدی از تصاویر می‌باشد [۱, ۲]. در مسأله توجیه نسبی، پارامترهای توجیه دوربین‌های اول و دوم (موقعیت مرکز هر دوربین $\boldsymbol{X_O} = [X_o, Y_0, Z_o]^T$ و زوایای دوران $(\omega, \varphi, \kappa)$ و یا به طور معادل ماتریس دوران R) نسبت به سیستم مختصات مدل[۱] تعیین می‌گردد. در صورتی که سیستم مختصات دوربین اول، منطبق بر سیستم مختصات مدل فرض شود، یعنی: $\boldsymbol{X_{O1}} = \boldsymbol{0}$ و $R_1 = I$، (I ماتریس یکه از مرتبه ۳) در این صورت حل مسأله توجیه نسبی معادل با تعیین پارامترهای توجیه دوربین دوم نسبت به دوربین اول خواهد بود، یعنی پارامترهای $X_{o2}, Y_{02}, Z_{o2}, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$. این محاسبات معمولا با استفاده از شرط هم صفحه‌ای انجام می‌شود [۱]. شرط هم صفحه‌ای بیان کننده آن است که پنج نقطهٔ مراکز دوربین‌های اول و دوم، نقطه زمینی و دو نقطه عکسی متناظر با نقطه زمینی در تصویر اول و دوم همگی بر یک صفحه قرار دارند [۳]. شکل (۱) مولفه‌های شرط هم صفحه‌ای بین دو دوربین در یک زوج تصویر را نشان می‌دهد. در این شکل، بردارهای $\boldsymbol{X}_1$ و $\boldsymbol{X}_2$، به ترتیب بردار

مکان نقطه زمینی در سیستم مختصات دوربین اول و دوم، R ماتریس دوران نسبی تبدیل بردار مکان از سیستم مختصات دوربین دوم به سیستم مختصات دوربین اول و $\boldsymbol{T}$ بردار مکان مرکز دوربین دوم در سیستم مختصات دوربین اول می‌باشند. همچنین بردارهای $\boldsymbol{x}_1$ و $\boldsymbol{x}_2$، به ترتیب بردارهای مکان نقاط عکسی متناظر با نقطه زمینی در تصویر اول و دوم در سیستم مختصات‌های دوربین اول و دوم، و λ_1 و λ_2 دو ضریب مخالف با صفر می‌باشند. معادله شرط هم صفحه‌ای غیر خطی بوده و حل آن نیازمند مقادیر اولیه می‌باشد [۱، ۳]. در فتوگرامتری هوایی با توجه به این که عکس‌های اخذ شده نزدیک به حالت قائم می‌باشند و دوربین بر روی گیمبال[۲] مستقر است، در بیشتر مواقع می‌توان مقادیر اولیه مجهولات توجیه نسبی را برابر با صفر در نظر گرفت. در مقابل، در فتوگرامتری پهپاد و فتوگرامتری برد کوتاه حرکت دوربین آزادتر بوده و عکس‌های اخذ شده می‌توانند نسبت به هم دارای چرخش‌های زیادی باشند. در این مواقع، برابر با صفر قرار دادن مقادیر اولیه مجهولات درست نیست. در نتیجه، حتی اگر محاسبات توجیه نسبی به روش سرشکنی کمترین مربعات در تکرارهای متوالی همگرا هم بشوند، جواب‌های به دست آمده به احتمال زیاد درست نخواهد بود [۴]. در این مواقع، روش مناسب برای تعیین مقادیر اولیه مورد نیاز در محاسبات توجیه نسبی به روش سرشکنی کمترین مربعات، استفاده از تجزیه ماتریس اساسی[۳] E به ماتریس دوران نسبی و بردار جابجایی نسبی می‌باشد [۵، ۶]. این روش بیشتر در حوزه ماشین بینایی[۴] و فتوگرامتری برد کوتاه برای توجیه نسبی بین تصاویر متوالی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷].



شکل ۱: مولفه‌های شرط هم صفحه‌ای بین دو دوربین

در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S دو رویکرد مختلف وجود دارد [۸]. رویکرد اول مبتنی بر تجزیه SVD[۵] ماتریس اساسی E به مقادیر و بردارهای منفرد می‌باشد [۵، ۶، ۹]. رویکرد دوم مبتنی بر ویژگی‌های ماتریس اساسی E، ماتریس پادمتقارن S و ماتریس دوران R می‌باشد [۸، ۱۰]. در [۸]، مبتنی بر رویکرد دوم از عملیات‌های انجام شده بر روی بردارهای سطری ماتریس اساسی E برای بازیابی ماتریس دوران R و ماتریس S استفاده شد و المان‌های ماتریس پادمتقارن S و ماتریس دوران به صورت صریح، بر حسب ضرب‌های داخلی بردارهای سطری ماتریس اساسی E استخراج شده است. مزیت رویکرد دوم در این است که نیازی به اِعمال جبری ویژگی‌های ماتریس اساسی E، مانند داشتن دترمینان برابر با صفر و داشتن دو مقدار منفرد اول و دوم یکسان و مقدار منفرد سوم مساوی با صفر به ماتریس اساسی E، محاسبه شده از مختصات خطادار نقاط عکسی متناظر در دو تصویر وجود ندارد [۸، ۱۰]. ولی در تجزیه ماتریس اساسی E از طریق رویکرد اول و با استفاده از تجزیه SVD، لازم است که ماتریس اساسی E محاسبه شده از روی نقاط متناظر به فضای ماتریس‌های اساسی که دارای دترمینان برابر با صفر و دو مقدار منفرد اول و دوم برابر با هم و مقدار منفرد سوم برابر با صفر می‌باشند، نگاشت شود [۵، ۶]. منظور از فضای ماتریس‌های اساسی، مجموعه تمام ماتریس-هایی از مرتبه ۳ می‌باشد که مقادیر منفرد اول و دوم آن با هم برابر و مقدار منفرد سوم آن برابر با صفر باشد. در [۱۱] با استفاده از رویکرد اول و با استفاده از تجزیه SVD ماتریس اساسی E هشت مجموعه جواب برای ماتریس دوران نسبی و بردار جابجایی نسبی بدست آورده است. در این کار برای پایدارسازی و رسیدن به جواب بهینه از اعمال ویژگی‌های ماتریس اساسی به صورت قیدهایی در حل مساله استفاده شده است. فرمول‌های ارائه شده برای تجزیه ماتریس اساسی E در رویکرد مبتنی بر SVD [۵، ۶] بر اساس معرفی ماتریس W (ماتریس دوران حول محور Z به اندازه زاویه $\alpha = \pm\pi/2$) می‌باشند. اثبات ارائه شده برای این معادلات بدون بیان دلیل استفاده از ماتریس W و تنها بر این اساس است که نتیجه حاصل ضرب ماتریس S در ماتریس R مساوی با تجزیه SVD ماتریس اساسی E بوده و ماتریس‌های R و S به ترتیب دارای ویژگیهای ماتریس دوران و ماتریس پادمتقارن می‌باشند. در این مقاله، ابتدا فرمول‌های موجود در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S بدون هیچ پیش فرضی و بر حسب ویژگی‌های تجزیه SVD و ماتریس اساسی اثبات شده و دلیل استفاده از ماتریس W تبیین می‌گردد. در ادامه، روش جدیدی مبتنی بر تجزیه SVD برای تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S ارائه می‌شود. در این روش نیازی به معرفی ماتریس W از خارج از مسأله نبوده و به جای آن از معلومات خود مسأله برای تعیین ماتریسی معادل با ماتریس W استفاده می‌شود. همچنین روشی برای اطمینان حاصل کردن از این که ماتریس‌های متعامد U و V در تجزیه SVD ماتریس اساسی E می بایست ماتریس دوران R باشند ارائه می‌گردد تا ابهام ناشی از این مساله در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس

پادمتقارن S برطرف شود. در این روش نیازی نیست که در ابتدا ماتریس اساسی E محاسبه شده از مختصات‌های عکسی خطادار به فضای ماتریس‌های اساسی نگاشت شود و این نگاشت در حین محاسبات ماتریس پادمتقارن S اعمال می‌گردد.

این مقاله در پنج بخش ارائه خواهد شد. بخش اول مقدمه و بیان مساله می‌باشد که در بالا ارائه گردید. بخش دوم شامل معرفی و اثبات فرمول ماتریس اساسی E، بیان ویژگی‌های آن و اثبات و تبیین فرمول‌های موجود در تجزیه ماتریس اساسی E به روش SVD می‌باشد. در بخش سوم، روش جدید ارائه شده در این مقاله برای تجزیه ماتریس اساسی E بیان شده و در بخش چهارم نتایج حاصل از بررسی عددی و عملی فرمول‌های موجود و روش ارائه شده مورد ارزیابی قرار خواهند گرفت. بخش پنجم نیز در برگیرنده نتیجه گیری می‌باشد.

۲- ماتریس اساسی E و بازیابی پارامترهای موقعیت و وضعیت دوربین

در این بخش، ابتدا فرمول ماتریس اساسی E بر اساس رابطه شرط هم صفحه‌ای و رابطه توجیه نسبی فتوگرامتری استخراج شده و ویژگی‌هایی از ماتریس اساسی E که در اثبات فرمول‌های موجود مورد استفاده خواهند بود بیان و سپس فرمول‌های موجود در تجزیه ماتریس SVD اثبات و تبیین خواهند شد.

۱-۲- ماتریس اساسی E

ماتریس اساسی E، همان بیان شرط هم صفحه‌ای فتوگرامتری به صورت یک رابطه خطی پروجکتیو دو بعدی می‌باشد [۵]. بنا به معادله (۱) که شرط هم صفحه‌ای نامیده می‌شود، سه بردار $\boldsymbol{x}_1$، $R\boldsymbol{x}_2$ و بردار $\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{T}$ در یک صفحه می‌باشند. به زبان ریاضی، برای اینکه سه بردار $\boldsymbol{x}_1$، $R\boldsymbol{x}_2$ و $\boldsymbol{t}$ در صفحه واقع باشند باید ضرب سه‌گانه آنها مطابق با معادله (۱) برابر با صفر باشد [۱۲]:

$$\boldsymbol{x}_1.(\boldsymbol{t}\times(R\boldsymbol{x}_2))=0,\qquad \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{bmatrix} \tag{۱}$$

اگر ضرب داخلی به صورت ماتریسی بیان شود و با توجه به این که ضرب خارجی $\boldsymbol{t}\times(R\boldsymbol{x}_2)$ با استفاده از یک ماتریس پادمتقارن مرتبه سه S و متناظر با بردار $\boldsymbol{t}$ قابل بیان است، رابطه ضرب سه‌گانه معادله (۱) به صورت زیر خواهد شد:

$$\boldsymbol{x}_1.(\boldsymbol{t}\times(R\boldsymbol{x}_2))=\boldsymbol{x}_1^TS(R\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{x}_1^TSR\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1^TE\boldsymbol{x}_2 \\ \Rightarrow E=SR \tag{۲}$$

و ماتریس S عبارت است از:

$$S=[\boldsymbol{t}]_\times=\begin{bmatrix}0&-t_z&t_y\\t_z&0&-t_x\\-t_y&t_x&0\end{bmatrix} \tag{۳}$$

در این رابطه بردارهای ماتریس $E=SR$ یک ماتریس از مرتبه سه بوده و ماتریس اساسی E نامیده می‌شود [۶]. با توجه به این که معادله (۲) در حد یک ضریب مقیاس همیشه برقرار است در این معادله بردارهای x_1 و x_2 هم می‌توانند به صورت بردارهای مختصات نقاط عکسی در سیستم مختصات دوربین و هم به صورت مختصات‌های هموژن و نرمال عکسی با مؤلفه سوم برابر با $z = 1$ فرض شوند. این معادله از رابطه توجیه نسبی در فتوگرامتری نیز به صورت زیر قابل استخراج می‌باشد:

$$\boldsymbol{X}_1=R\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{T} \tag{۴}$$

با ضرب خارجی طرفین در بردار $\boldsymbol{T}$ و اینکه $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{T}\times R\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\times R\boldsymbol{X}_2 \tag{۵}$$

با ضرب داخلی طرفین در $\boldsymbol{X}_1$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{X}_1.(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{X}_1)=\boldsymbol{X}_1.(\boldsymbol{T}\times R\boldsymbol{X}_2) \tag{۶}$$

سمت چپ رابطه فوق برابر با صفر می‌باشد چون $\boldsymbol{X}_1$ بر $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{X}_1$ عمود است در نتیجه:

$$\boldsymbol{X}_1.(\boldsymbol{T}\times R\boldsymbol{X}_2)=0\Rightarrow\lambda_1\boldsymbol{x}_1.(\lambda\boldsymbol{t}\times R(\lambda_2\boldsymbol{x}_2))=0 \\ \Rightarrow\boldsymbol{x}_1.(\boldsymbol{t}\times R\boldsymbol{x}_2)=0 \tag{۷}$$

بیان ضرب داخلی دو بردار به صورت ضرب ماتریسی، $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$، و نیز بیان ضرب خارجی دو بردار به صورت ضرب ماتریسی، $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a}]_\times\boldsymbol{b}$، همان رابطه معادله (۲) را نتیجه خواهد داد:

$$\boldsymbol{x}_1^TSR\boldsymbol{x}_2=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_1^TE\boldsymbol{x}_2\ ,\ S=[\boldsymbol{t}]_\times \tag{۸}$$

اهمیت معادله (۲) در آن است که یک رابطه خطی پروجکتیو بین مختصات‌های عکسی و هموژن نقاط عکسی متناظر ایجاد می‌کند. با استفاده از مختصات عکسی نقاط متناظر در دو تصویر می‌توان ماتریس اساسی E را در حد یک ضریب مقیاس تعیین کرد، به این معنی که هر مضرب غیر صفری از ماتریس اساسی E باز هم ماتریس اساسی محسوب می‌شود [۶, ۹]. در صورتی که ماتریس اساسی E معلوم باشد می‌توان با استفاده از تجزیه آن به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S، مقادیر زوایای دوران و بردار جابجایی نسبی بین دو دوربین را محاسبه کرد. در واقع، پارامترهای تشکیل دهنده این ماتریس همان پارامترهای توجیه نسبی می‌باشند.

در صورت یکه نمودن طول بردار $\boldsymbol{t}$ یا ثابت فرض کردن یکی از المان‌های بردار $\boldsymbol{t}$ (مانند $t_x = 1$)، برای رفع نقص مقیاس در حل مسأله توجیه نسبی، این ماتریس دارای پنج درجه آزادی بوده و ۹ المان آن تابعی از پنج پارامتر توجیه نسبی $(t_y, t_z, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2)$ می‌باشند. در ازاء هر زوج نقطه عکسی متناظر در تصویر اول و دوم یک قید به این ماتریس وارد می‌شود و به لحاظ تئوری با پنج زوج نقطه عکسی متناظر در تصویر اول و دوم می‌توان ماتریس اساسی E را محاسبه کرد [۹]. در بیشتر مواقع، المان‌های ماتریس اساسی E با استفاده از بیش از ۵ نقطه و حداقل ۸ نقطه تعیین می‌گردد [۵, ۶].

در این زمینه لازم به ذکر است که ماتریس اساسی E یک رابطه بر اساس مختصات‌های هموژن و متناظر عکسیِ $\boldsymbol{x}_1$ و $\boldsymbol{x}_2$ بوده و تساوی در حد یک ضریب مقیاس غیر صفر برقرار می‌باشد. بنابراین، معادله (۲) یک رابطه پروجکتیو بوده و ماتریس اساسی E نیز یک ماتریس پروجکتیو می‌باشد. به عبارت دیگر ماتریس ($-E$) نیز ماتریس اساسی محسوب می‌گردد [۵, ۶] و داریم:

$$\boldsymbol{x}_1^T(\pm E)\boldsymbol{x}_2 = 0 \tag{۹}$$

۲-۲- ویژگی‌های ماتریس اساسی E

ماتریس اساسی E یک ماتریس مربعی مرتبه سه با رتبه دو و دترمینان صفر می‌باشد. تجزیه SVD ماتریس اساسی E به صورت معادله (۱۰) در زیر می‌باشد:

$$E = U\Sigma V^T \quad , \quad U^{-1} = U^T \quad , \quad V^{-1} = V^T \tag{۱۰}$$

که در این معادله ماتریس‌های U و V ماتریس‌های متعامد از مرتبه سه بوده و ثابت می‌شود که ماتریس Σ یک ماتریس قطری از مرتبه سه به صورت معادله (۱۱) می‌باشد [۶]. یعنی ماتریس اساسی E دارای دو مقدار منفرد مساوی با نرم بردار $\boldsymbol{t}$ (بردار جابجایی نسبی بین دو دوربین) می‌باشد: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \|\boldsymbol{t}\|$، و مقدار منفرد سوم آن نیز برابر با صفر می‌باشد: $\sigma_3 = 0$.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

همچنین در تجزیه ماتریس پادمتقارن S به صورت $S = U'\Sigma' V'^T$، ماتریس $\Sigma' = \Sigma$ می‌باشد [۶].

۲-۳- اثبات فرمول‌های موجود در تجزیه ماتریس اساسی E

در این قسمت فرمول‌های موجود در تجزیه ماتریس اساسی E با استفاده از تجزیه SVD (معادلات (۱۲)) [۶] به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S با استفاده از روش SVD به صورت قضیه (۱) اثبات و تبیین خواهند شد. اثبات موجود برای این فرمول‌ها تنها بر این اساس است که در این معادلات، فرمول‌های R_1 و R_2، ماتریس‌های دوران بوده و ماتریس‌های S_1 و S_2 ماتریس‌های پادمتقارن می‌باشند و با استفاده از معادله (۲) نتیجه ضرب ماتریس‌های S_1 و S_2 با ماتریس‌های R_1 و R_2 مساوی با همان تجزیه SVD ماتریس اساسی E در معادله (۱۰) می‌باشد.

$$\begin{aligned} S_1 &= UW^T\Sigma U^T \quad , \quad R_1 = UWV^T \\ S_2 &= UW\Sigma U^T \quad , \quad R_2 = UW^TV^T \end{aligned} \tag{۱۲}$$

و

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\pi/2) & sin(\pi/2) & 0 \\ -sin(\pi/2) & cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_Z\left(+\frac{\pi}{2}\right) \tag{۱۳}$$

در این فرمول‌ها، فرض بر این است که ماتریس‌های U و V ماتریس‌های متعامد و دوران با دترمینان ۱+ می‌باشند که این فرض در حالت کلی فرض درستی نمی‌باشد. چون در تجزیه SVD ماتریس‌های U و V ماتریس‌های متعامد با دترمینان ۱+ یا ۱- می باشند. در این اثبات دو سوال وجود دارد. سوال اول اینکه نقش ماتریس W در این معادلات چیست و سوال دوم اینکه آیا ما مجاز به درج این ماتریس در معادلات هستیم و آیا اضافه نمودن این ماتریس به تجزیه SVD، خللی در درست بودن تجزیه ماتریس اساسی وارد می‌نماید یا خیر؟ پاسخ سوال اول این است که درج این ماتریس در معادله ماتریس‌های S_1 و S_2 منجر به این می‌شود که این ماتریس‌ها یک ماتریس پادمتقارن باشند که اثبات آن در ادامه خواهد آمد. پاسخ سوال دوم نیز بر اساس ویژگی‌های تجزیه SVD در ادامه بیان خواهد شد. در معادلات (۱۲) اگر ماتریس‌های U و V ماتریس دوران فرض شوند، با توجه به اینکه ماتریس W نیز یک ماتریس دوران می‌باشد در نتیجه ماتریس‌های R_1 و R_2 هر دو ماتریس‌های دوران خواهند بود. در ادامه این معادلات بر اساس ویژگی‌های تجزیه SVD و ویژگی‌های ماتریس اساسی E اثبات شده و علت اینکه چرا ماتریس W در این فرمول‌ها استفاده می‌شود بر اساس این ویژگی‌ها بیان می‌گردد. در این اثبات از نتایج لم (۱) و (۲) استفاده خواهد شد.

لم (۱): اگر ماتریس A پادمتقارن باشد آنگاه $A^TA = AA^T$

اثبات: ماتریس A پادمتقارن است اگر $A^T = -A$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$A^TA = (-A)A = A(-A) = AA^T \tag{۱۴}$$

لم (۲): اگر E=SR، ماتریس اساسی باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$E^TE = R^TEE^TR \tag{۱۵}$$

اثبات: با توجه به اینکه طبق معادله (۲) ماتریس S یک ماتریس متقارن و ماتریس R یک ماتریس دوران می باشد و با استفاده از لم (۱) می‌توان نوشت:

$$EE^T = SR(SR)^T = SRR^TS^T = SS^T = S^TS \qquad (۱۶)$$

$$E^TE = (SR)^TSR = R^TS^TSR = R^TSS^TR = R^TEE^TR \qquad (۱۷)$$

قضیه (۱): در صورتی که $E = U\Sigma V^T$، تجزیه SVD ماتریس اساسی E باشد آنگاه ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S در رابطه ماتریس اساسی E=SR به ترتیب برابر با ماتریس‌های $R_1 = UW^TV^T$ یا $R_2 = UWV^T$ و $S_1 = U\Sigma WU^T$ یا $S_2 = U\Sigma W^TU^T$ خواهند بود که در آن ماتریس W، ماتریس دوران حول محور Z به اندازه زاویه $\alpha = \pi/2$ می‌باشد: $W = R_Z(\pi/2)$.

$$S = S_1 = U\Sigma WU^T \quad \text{یا} \quad S = S_2 = U\Sigma W^TU^T \qquad (۱۸)$$

$$R = R_1 = UW^TV^T \quad \text{یا} \quad R = R_2 = UWV^T \qquad (۱۹)$$

اثبات: با استفاده از معادله (۱۰) و تجزیه SVD ماتریس اساسی E خواهیم داشت:

$$EE^T = U\Sigma V^TV\Sigma U^T = U\Sigma\Sigma U^T = U\Sigma^2U^T \qquad (۲۰)$$

$$E^TE = V\Sigma U^TU\Sigma V^T = V\Sigma\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T \qquad (۲۱)$$

با جای‌گذاری معادلات (۲۰) و (۲۱) در معادله (۱۷) خواهیم داشت:

$$E^TE = R^TEE^TR \quad \Rightarrow$$
$$V\Sigma^2V^T = R^TU\Sigma^2U^TR = (R^TU)\Sigma^2(R^TU)^T \qquad (۲۲)$$

از مقایسه طرفین تساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$R^TU = V \;\Rightarrow\; R^T = VU^T \;\Rightarrow\; R = UV^T \qquad (۲۳)$$

با جای‌گذاری معادله (۲۳) و معادله (۱۰) در معادله (۲) خواهیم داشت:

$$E = SR \quad\Rightarrow\quad U\Sigma V^T = SUV^T \quad\Rightarrow\quad U\Sigma = SU \qquad (۲۴)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$S = U\Sigma U^T \qquad (۲۵)$$

در اینجا از ضرب معادله (۲۵) در معادله (۲۳) مطابق با معادله (۲)، معادله (۱۰) یا همان تجزیه SVD ماتریس اساسی E نتیجه می‌شود:

$$E = SR = U\Sigma U^TUV^T = U\Sigma V^T \qquad (۲۶)$$

ولی نتیجه معادله (۲۵)، نتیجه مورد نظر از تجزیه ماتریس اساسی E نمی‌باشد و متعاقب با آن نتیجه معادله (۲۳) نیز درست نخواهد بود. این که چرا معادله (۲۵) نتیجه درستی نمی‌باشد به این دلیل است که برای هر ماتریس A و هر ماتریس متقارن B، نتیجه ضرب‌های ماتریسی AA^T، A^TA، ABA^T و A^TBA، همگی ماتریس‌های متقارن می‌باشند. با توجه به این که ماتریس Σ یک ماتریس قطری و در نتیجه متقارن است بنابراین، نتیجه معادله (۲۵) نیز یک ماتریس متقارن خواهد بود. از طرفی در معادله (۲) فرض بر پادمتقارن بودن ماتریس S می‌باشد که منجر به یک تناقض شده و معادله (۲۵) رابطه درستی برای ماتریس پادمتقارن S نخواهد بود. برای رفع این مشکل، از ویژگی‌های ماتریس اساسی E و دو ویژگی در تجزیه SVD یک ماتریس کمک می‌گیریم. این ویژگی‌ها عبارتند از ابهام در جهت بردارهای یکه ماتریس‌های متعامد U و V، و نیز امکان جابجایی بردارهای یکه متناظر با مقادیر منفرد یکسان در این دو ماتریس که با این دو ویژگی می‌توان عملکرد ماتریس W در معادلات (۱۲) را تبیین و مشکل متقارن بودن نتیجه معادله (۲۵) را رفع نمود.

ویژگی اول: بردارهای منفرد یک ماتریس دارای ابهام در جهت بردار می‌باشند [۱۳]. به این معنی که اگر بردارهای $\boldsymbol{v}_i$ و $\boldsymbol{u}_i$ به ترتیب بردارهای یکه فضای پوچ راست و چپ از ماتریس S باشد در این صورت بردارهای $(-\boldsymbol{v}_i)$ و $(-\boldsymbol{u}_i)$ نیز بردارهای منفرد ماتریس S می‌باشند:

$$S\boldsymbol{v}_i = \sigma_i\boldsymbol{u}_i \quad\Rightarrow\quad S(-\boldsymbol{v}_i) = \sigma_i(-\boldsymbol{u}_i) \qquad (۲۷)$$

بنابراین در یک تجزیه SVD می‌توان جهت بردارهای متناظر با هم در ماتریس‌های U و V را تغییر داد.

ویژگی دوم: در صورتی که دو مقدار منفرد یک ماتریس با هم برابر باشند بردارهای منفرد متناظر با آنها از نظر جایگاه‌شان در ماتریس‌های متعامد U و V هیچ رجحانی بر هم نداشته و در نتیجه می‌توان جای دو بردار منفرد و متناظر با دو مقدار منفرد مساوی را به صورت هم زمان در ماتریس‌های U و V با هم تعویض کرد. منظور از همزمانی این است که اگر در ماتریس U جای دو بردار با هم عوض شد در ماتریس V نیز باید جای بردارهای متناظر با آنها نیز با هم عوض شود. همچنین می‌توان این دو بردار منفرد را با هر دو بردار یکه متعامدی که در صفحه این دو بردار منفرد قرار دارند جایگزین کرد [۱۲]. در عمل تجزیه SVD برای ماتریس‌هایی که دارای مقادیر منفرد یکسان هستند صرفنظر از جهت بردارها، منحصر به فرد نیست. یعنی یک ماتریس می‌تواند دارای بینهایت تجزیه

SVD باشد. بنابراین با توجه به اینکه در تجزیه SVD ماتریس اساسی E، ماتریس Σ دارای دو مقدار منفرد مساوی با هم می‌باشد در نتیجه می‌توان در ماتریس‌های U و V جای دو بردار ستونی اول و دوم را به صورت همزمان با هم عوض کرد. تغییر جایگاه بردار ستونی سوم از ماتریس‌های U و V، با توجه به اینکه مقدار منفرد متناظر با این بردارهای منفرد تکراری نیست مجاز نبوده و تنها تغییر جهت این بردارها قابل انجام می‌باشند. بردارهای ستونی سوم در ماتریس‌های U و V به ترتیب همان بردارهای پایه برای فضای پوچ چپ و راست ماتریس اساسی E می‌باشند.

در تجزیه SVD ماتریس اساسی E، در صورتی که در ماتریس‌های U و V تغییر جهت یک بردار و تغییر مکان دو بردار اول و دوم با هم و به صورت همزمان انجام شود، علامت دترمینان ماتریس‌های U و V نیز تغییر نخواهد کرد. انجام توأم تغییر جهت یک بردار و تغییر مکان دو بردار ستونی اول و دوم در ماتریس‌های U و V معادل است با ضرب این دو ماتریس از راست با ماتریس دوران W حول محور Z به اندازه $\alpha = \pi/2$ یا $\alpha = -\pi/2$.

$$
\begin{aligned}
&U = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3] \Rightarrow \\
&\overline{U}_1 = UW = [-\boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_3] \\
&\overline{U}_2 = UW^T = [\boldsymbol{u}_2 \quad -\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_3]
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

$$
\begin{aligned}
&V = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_3] \Rightarrow \\
&\overline{V}_1 = VW = [-\boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_3] \\
&\overline{V}_2 = VW^T = [\boldsymbol{v}_2 \quad -\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_3]
\end{aligned}
\tag{۲۹}
$$

با توجه به اینکه ماتریس‌های W و W^T هر دو ماتریس دوران با دترمینان ۱+ می‌باشند بنابراین، ضرب این دو ماتریس علامت دترمینان ماتریس‌های U و V را تغییر نخواهد داد. همچنین همانطور که گفته شد تغییر جهت توأم یک بردار با تغییر مکان دو بردار متناظر با مقدارهای منفرد مساوی، تغییری در تجزیه SVD یک ماتریس ایجاد نخواهد کرد و نتیجه ضرب ماتریسی $\overline{U}_1\Sigma\overline{V}_1^T$ یا $\overline{U}_2\Sigma\overline{V}_2^T$ برابر با $U\Sigma V^T$ خواهد بود. برای اثبات این موضوع ابتدا با استفاده از معادله (۱۱) می‌توان نوشت:

$$
W\Sigma = \Sigma W = \begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; W^T\Sigma = \Sigma W^T = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{۳۰}
$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\overline{U}_1\Sigma\overline{V}_1^T &= UW\Sigma(VW)^T = UW\Sigma W^TV^T = U\Sigma WW^TV^T \\
&= U\Sigma V^T = E
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{U}_2\Sigma\overline{V}_2^T &= UW^T\Sigma(VW^T)^T = UW^T\Sigma WV^T = U\Sigma W^TWV^T \\
&= U\Sigma V^T = E
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

حال اگر در معادله (۲۵)، ماتریس U واقع در سمت چپ ماتریس Σ را از راست به ترتیب در W یا W^T ضرب کنیم و به عبارت دیگر U را به ترتیب به $\overline{U}_1$ یا $\overline{U}_2$ تبدیل کنیم و معادل با آن در معادله (۲۳)، ماتریس V را نیز از راست به ترتیب در W^T یا W ضرب کنیم و V را به ترتیب به $\overline{V}_1$ یا $\overline{V}_2$ تبدیل کنیم بایستی نتیجه ضرب ماتریس‌های پادمتقارن S و R دوباره با تجزیه SVD ماتریس اساسی E برابر باشد:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = \overline{U}_1\Sigma U^T = UW\Sigma U^T = U\Sigma WU^T \\
&R_1 = U\overline{V}_1{}^T = U(VW)^T = UW^TV^T \\
&\Rightarrow S_1R_1 = U\Sigma WUW^TV^T = U\Sigma WW^TV^T = U\Sigma V^T = E
\end{aligned}
\tag{۳۳}
$$

و همچنین:

$$
\begin{aligned}
&S_2 = \overline{U}_2\Sigma U^T = UW^T\Sigma U^T = U\Sigma W^TU^T \\
&R_2 = U\overline{V}_2{}^T = U(VW^T)^T = UWV^T \\
&\Rightarrow S_2R_2 = U\Sigma W^TU^TUWV^T = U\Sigma W^TWV^T = U\Sigma V^T = E
\end{aligned}
\tag{۳۴}
$$

حال باید ثابت شود که ماتریس‌های S_1 و S_2، ماتریس‌های پادمتقارن و ماتریس‌های R_1 و R_2، ماتریس‌های دوران می‌باشند. با توجه به این که در معادلات (۳۰) ماتریس‌های ΣW و ΣW^T ماتریس‌های پادمتقارن می‌باشند می‌توان نوشت:

$$
\Sigma W = \begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Sigma W)^T = -\Sigma W
\tag{۳۵}
$$

$$
\Sigma W^T = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\Sigma W^T)^T = -\Sigma W^T
\tag{۳۶}
$$

در نتیجه، ترانهاده ماتریس‌های $S_1 = U\Sigma WU^T$ و $S_2 = U\Sigma W^TU^T$ (در معادلات (۱۲)) به صورت زیر خواهند بود:

$$
\begin{aligned}
S_1^T &= (UW^T\Sigma U^T)^T = (U\Sigma W^TU^T)^T = U(\Sigma W^T)^TU^T \\
&= -U\Sigma W^TU^T = -S_1 \\
S_2^T &= (UW\Sigma U^T)^T = (U\Sigma WU^T)^T = U(\Sigma W)^TU^T = -U\Sigma WU^T \\
&= -S_2
\end{aligned}
\tag{۳۷}
$$

بنابراین، ماتریس‌های S_1 و S_2 ماتریس‌های پادمتقارن می‌باشند.

همچنین با توجه به اینکه در معادلات (۱۲)، فرض شده است که ماتریس‌های U و V ماتریس‌های دوران می‌باشند و نیز اینکه ماتریس W ماتریس دوران می‌باشد در نتیجه در روابط ماتریس‌های $R_1 =$

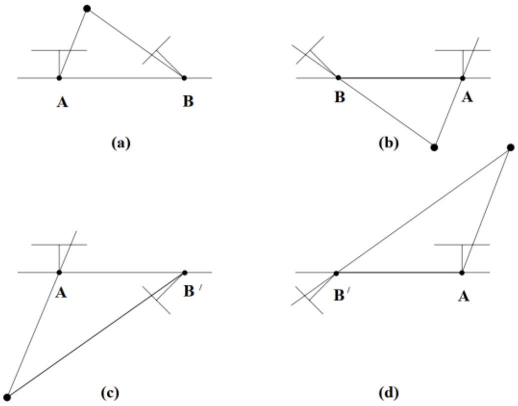
$UWWV^T$ و $R_2 = UWWV^T$ (در معادلات (۱۲)) نیز R_1 و R_2 ماتریس دوران خواهند بود.

پایان اثبات قضیه (۱).■

همانطور که قبلا نیز گفته شد ماتریس اساسی E یک ماتریس پروجکتیو می‌باشد بنابراین ارتباط بین دو تصویر اول و دوم هم توسط ماتریس E و هم توسط ماتریس $E-$ برقرار می‌باشد. بدین معنی که در معادله (۲)، تساوی در ازاء $\pm E$ برقرار است. تجزیه هر دو ماتریس E و $(-E)$ در ازاء استفاده از ماتریس‌های W و W^T در هر دو حالت، منجر به تولید ماتریس‌های دوران R_1 و R_2 یکسان خواهد شد. ولی ماتریس‌های S_1 و S_2 بدست آمده از تجزیه ماتریس E با ماتریس‌های S_1 و S_2 بدست آمده از تجزیه ماتریس $(-E)$ با هم قرینه می‌باشند. در حالت کلی تعداد جواب‌هایی که از تجزیه ماتریس‌های E و $E-$ بدست خواهد آمد، برابر با چهار زوج از ماتریس‌های $(R_1,S_1),(R_1,S_2),(R_2,S_1),(R_2,S_2)$ است که در آن $S_1 = -S_2$ می‌باشد. جواب واقعی از تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S، یکی از این چهار زوج ماتریس خواهد بود که بایستی به روشی مناسب مانند اعمال قید عمق مثبت یا اعمال قید cheirality constraint تعیین گردد [۱۴, ۱۵]. شکل (۲) نحوه قرارگیری دوربین‌ها در هر چهار حالت فوق را نشان می‌دهد.

۴-۲- تبدیل ماتریس‌های متعامد U و V به ماتریس دوران

همانطور که قبلا نیز اشاره شد، از شرایط استفاده از معادلات (۱۲) در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S این است که ماتریس‌های U و V حاصل از تجزیه SVD، ماتریس دوران با دترمینان ۱+ باشند. در این معادلات، ماتریس‌های R_1 و R_2 زمانی می‌توانند ماتریس‌های دوران باشند که دترمینان ماتریس‌های U و V هر دو با هم برابر با ۱+ یا ۱- باشند. ولی در تجزیه ماتریس اساسی E به مقادیر و بردارهای منفرد، ماتریس‌های U و V ماتریس‌های متعامد بوده و دترمینان



شکل ۲- چهار حالت مختلف قرارگیری دوربین‌های A و B بر حسب ماتریس‌های دوران R_1 و R_2 و ماتریس‌های پادمتقارن S_1 و S_2 [۵].

آنها برابر با ۱+ یا ۱- می‌باشد، بدین معنی که ماتریس‌های U و V در حالت کلی ماتریس‌های دوران نیستند [۱۲]. ولی اگر در معادلات (۱۲) ماتریس‌های U و V دارای دترمینان‌های غیر هم علامت باشند نتیجه فرمول‌های R_1 و R_2 دارای دترمینان برابر با ۱- خواهد بود که نادرست است و این موضوع، باعث سردرگمی و اشتباه در نتایج خواهد شد. بنابراین، بایستی به روشی مناسب آنها را به ماتریس دوران تبدیل کرد طوری که باعث ایجاد نتایج اشتباه در تجزیه ماتریس اساسی E نگردد. در اینجا برای حل این مشکل راه‌کاری به صورت زیر ارائه می‌شود به نحوی که در تجزیه SVD ماتریس اساسی E، ماتریس‌های U و V دارای دترمینان مساوی با ۱+ بوده و نتیجه فرمول‌های R_1 و R_2 در معادلات (۱۲) حتما ماتریس دوران باشند. برای این منظور در تجزیه SVD ماتریس اساسی E، ماتریس‌های U و V را با ماتریس‌های U_+ و V_+ در معادلات (۳۸) که دترمینان آنها همیشه برابر با ۱+ است جایگزین می‌کنیم.

$$U_+ = Udiag([1 \quad 1 \quad \det(U)])$$
$$V_+ = Udiag([1 \quad 1 \quad \det(V)]) \qquad (۳۸)$$

در این حال، اگر ماتریس Σ یک ماتریس قطری کامل به صورت $\Sigma = diag(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3)$ بود آنگاه بایستی با ماتریس Σ_+ در معادله (۱۶) جایگزین می‌شد و ماتریس اساسی E به صورت $E = U_+\Sigma_+V_+^T$ تجزیه می‌گردید.

$$\Sigma_+ = diag([\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3'])$$
$$\sigma_3' = \sigma_3 \det(U) \det(V) \qquad (۳۹)$$
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq |\sigma_3'|$$

اما با توجه به اینکه ماتریس Σ برابر با $\Sigma = diag([\sigma \quad \sigma \quad 0])$ می‌باشد و عضو قطری سوم آن برابر با صفر است بنابراین، $\Sigma_+ = \Sigma$ بوده و تجزیه SVD ماتریس اساسی E که در آن ماتریس‌های U و V به ماتریس‌های دوران U_+ و V_+ تبدیل شده‌اند به صورت معادله (۴۰) خواهد بود.

$$E = U_+ \Sigma V_+^T \tag{۴۰}$$

در ادامه مقاله فرض بر این خواهد بود که در تجزیه SVD ماتریس اساسی E، و یا ماتریس پادمتقارن S که در روش جدید تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S مورد استفاده قرار می‌گیرد، ماتریس‌های متعامد U و V به ترتیب به ماتریس‌های دوران U_+ و U_+ تبدیل شده‌اند و از این به بعد این ماتریس‌ها بدون اندیس '+' آورده خواهند شد. استفاده از این راه‌کار باعث رفع ابهام در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S با استفاده از معادلات (۱۲) خواهد شد.

۳- روش جدید در تعیین ماتریس‌های R و S از طریق تجزیه SVD ماتریس اساسی E

در این بخش، روش جدید تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S که مبتنی بر تجزیه SVD ماتریس اساسی E و بردار پایه فضای پوچ چپ آن می‌باشد ارائه می‌شود. در این روش همچون معادلات (۲۵) نیازی به معرفی ماتریس W از خارج از مسأله نبوده و به جای آن از معلومات خود مسأله برای تعیین ماتریسی معادل با ماتریس W استفاده می‌شود. برای اثبات این روش ابتدا لم (۳) اثبات می‌شود. در این لم بیان می‌شود که بردار جابجایی نسبی $\boldsymbol{t}$ بین دو تصویر، بردار پایه فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E و ماتریس پادمتقارن S در معادله (۲) می‌باشد. سپس در ادامه با استفاده از نتیجه این لم، روش جدید تجزیه ماتریس اساسی E بیان می‌گردد.

لم (۳): بردار جابجایی نسبی بین دو تصویر، $\boldsymbol{t}$، و متناظر با ماتریس پادمتقارن S، در معادله (۱)، بردار پایه برای فضای پوچ چپ ماتریس‌های E و S می‌باشد، یعنی: $\boldsymbol{t} = Null(E^T) = Null(S^T) = Null(S)$، و این بردار در صورت یکه بودن، مساوی با بردار ستونی $\boldsymbol{u}_3$ از ماتریس U در تجزیه SVD از ماتریس اساسی E می‌باشد.

اثبات: ثابت می‌کنیم $E^T\boldsymbol{t} = S^T\boldsymbol{t} = E\boldsymbol{t} = S\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$. با توجه به این که ضرب خارجی هر بردار با خودش برابر با بردار صفر است خواهیم داشت:

$$S^T\boldsymbol{t} = -S\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t} = Null(S) = Null(S^T)$$
$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad , \quad S = [\boldsymbol{t}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۱}$$

همچنین:

$$E = SR \quad \Rightarrow \quad E^T = R^T S^T = -R^T S$$
$$E^T\boldsymbol{t} = -R^T S\boldsymbol{t} = -R^T(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}) = -R^T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{t} = Null(E^T) \tag{۴۲}$$

با توجه به این که تنها، مقدار منفرد سوم ماتریس اساسی E برابر با صفر می‌باشد در نتیجه فضای پوچ راست و چپ ماتریس اساسی E یک بعدی می‌باشند. بنابراین، با توجه به ویژگی‌های تجزیه SVD، بردار ستونی سوم از ماتریس U همان بردار یکه ایجاد کننده فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E خواهد بود [۱۲]. در نتیجه اگر $U = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3]$ باشد، آنگاه بردار یکه $\hat{\boldsymbol{t}}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{t}}{\| \boldsymbol{t} \|} = \boldsymbol{u}_3 \tag{۴۳}$$

۱-۳- روش جدید در تجزیه ماتریس اساسی E

روش جدید ارائه شده در این مقاله برای تجزیه ماتریس اساسی E، مبتنی بر تجزیه SVD ماتریس اساسی E و ماتریس پادمتقارن S متناظر با بردار پایه فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E می‌باشد. در لم (۳) ثابت شد که بردار $\boldsymbol{t}$ که متناظر با ماتریس پادمتقارن S می‌باشد، بردار پایه برای فضای پوچ چپ ماتریس‌های $\pm E$ و $\pm S$ و همچنین بردار پایه برای فضای پوچ راست $\pm S$ می‌باشد. همچنین، بردار $\boldsymbol{t}$ در صورت یکه بودن مساوی با بردار ستونی سوم $\boldsymbol{u}_3$ از ماتریس U در تجزیه SVD ماتریس اساسی E می‌باشد:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_3 = Null(\pm E^T) = Null(\pm S^T) = Null(\pm S) \tag{۴۴}$$

همانطور که در بالا و در معادله (۳۹) گفته شد ماتریس $S = U\Sigma U^T$ بدست آمده از تجزیه SVD ماتریس اساسی E، یک ماتریس پادمتقارن نبوده و یک ماتریس متقارن است که مد نظر ما نیست. بنابراین، با فرض معلوم بودن ماتریس اساسی E و با استفاده از تجزیه SVD ماتریس اساسی E، می‌توان ماتریس $S = [\boldsymbol{t}]_\times = [\boldsymbol{u}_3]_\times$ را محاسبه کرد. البته در این رابطه، بردار یکه $\boldsymbol{u}_3$ می‌تواند از تجزیه ماتریس اساسی E قبل از نگاشت آن به فضای ماتریس‌های اساسی باشد که از مختصات‌های خطادار نقاط عکسی متناظر در دو تصویر اول و دوم تعیین شده است. حال اگر تجزیه SVD ماتریس S بدست آمده از این روش برابر با $\bar{S} = U'\Sigma'V'^T$ باشد در این صورت می‌توان با اعمال یک سری تبدیلات ماتریسی، رابطه ماتریسی $S = U\Sigma U^T$

در معادله (۲۵) را به یک ماتریس پادمتقارن بر حسب ماتریس‌های U', V' و Σ' تبدیل کرد. همانطور که قبلا ذکر شد از ویژگی‌های ماتریس اساسی E که به فضای ماتریس‌های اساسی نگاشت شده این است که ماتریس مقادیر منفرد آن، Σ، با ماتریس مقادیر منفرد ماتریس S یکسان می‌باشند: $\Sigma = \Sigma'$ [۶]. در نتیجه می‌توان نوشت: $S = U'\Sigma V'^T$. با توجه به این که بردار $\boldsymbol{u}_3$ دارای طول واحد است و چون ماتریس S از رابطه $\bar{S} = [\boldsymbol{u}_3]_\times$ محاسبه می‌شود بنابراین مقادیر منفرد اول و دوم ماتریس S، برابر با یک خواهند بود و در این صورت رابطه بین ماتریس Σ' و Σ به صورت $\Sigma = \sigma\Sigma'$ خواهد بود.

با توجه به این که هر سه ماتریس U، U' و V' ماتریس‌های دوران می‌باشند بنابراین می‌توان با یک تبدیل متعامد آنها را به یکدیگر تبدیل کرد. اگر فرض کنیم ماتریس U' و ماتریس U با استفاده از ماتریس متعامد A، و ماتریس V' و ماتریس U با استفاده از ماتریس متعامد B، و به صورت زیر با یکدیگر مرتبط باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$U' = UA \Rightarrow A = U^T U' \qquad V' = UB \;\Rightarrow\; B = U^T V' \tag{۴۵}$$

حال با جایگزینی Σ' با Σ و ماتریس‌های U' و V' بر حسب ماتریس U از معادلات (۴۵) در رابطه $S = U'\Sigma' V'^T$ خواهیم داشت:

$$S = UA\Sigma(UB)^T = UA\Sigma B^T U^T \tag{۴۶}$$

و چون در ازاء هر ماتریس A، رابطه $A\Sigma = \Sigma A$ برقرار می‌باشد (قبلا ثابت شد) رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$S = U\Sigma AB^T U^T \tag{۴۷}$$

در این حال ماتریس S بدست آمده از معادله (۴۷) یک ماتریس پادمتقارن خواهد بود. با اعمال این تغییر در معادله (۲۵) به صورت متقابل باید رابطه ماتریس R در معادله (۲۳) نیز باید تغییر یابد تا نتیجه ضرب ماتریسی SR معادل با ماتریس اساسی E باشد. برای این منظور ماتریس R در معادله (۲۳) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$R = UBA^T V^T \tag{۴۸}$$

حال اگر معادلات (۴۷) و (۴۸) را در معادله (۲) جای‌گذاری کنیم، با توجه به اینکه ماتریس‌های U، A و B ماتریس‌های متعامد هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E = SR = U\Sigma AB^T U^T UBA^T V^T &= U\Sigma AB^T BA^T V^T \\ &= U\Sigma AA^T V^T = U\Sigma V^T \end{aligned} \tag{۴۹}$$

که همان تجزیه SVD ماتریس اساسی E در معادله (۱۰) می‌باشد.

همانطور که قبلا نیز ذکر شد بردار $(-\boldsymbol{t})$ نیز بردار پایه برای فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E محسوب می‌شود. در نتیجه بایستی محاسبات یک بار دیگر برای ماتریس $S = [-\boldsymbol{t}]_\times$ نیز تکرار شود. اگر ماتریس‌های S و R بدست آمده از تجزیه SVD ماتریس $S = [\boldsymbol{t}]_\times$ را با S_1 و R_1 و ماتریس‌های S و R بدست آمده از تجزیه ماتریس $S = [-\boldsymbol{t}]_\times$ را با S_2 و R_2 نشان دهیم باز هم از بین چهار زوج ماتریس $(R_1, S_1), (R_1, S_2), (R_2, S_1), (R_2, S_2)$ که در آن $S_1 = -S_2$ می‌باشد تنها یکی جواب مسأله ما خواهد بود.

در این روش، ماتریس‌های A و B در معادلات (۴۵) بایستی ماتریس‌های دوران حول محور Z و یا ماتریس‌های دوران حول محور Z که در یک ماتریس انعکاس ضرب شده‌اند باشند. علت این موضوع آن است که بردار **t**، بردار پایه فضای پوچ راست و چپ ماتریس پادمتقارن S بوده و همچنین بردار **t**، بردار پایه فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E در معادله (۲) می‌باشد. بنابراین، بردارهای ستونی سوم از ماتریس‌های U، U' و V' در حد یک ضریب ±۱ با هم برابر خواهند بود. همچنین، نتیجه ضرب ماتریسی AB^T در نهایت یک ماتریس دوران حول محور Z خواهد بود. از مقایسه معادله (۴۷) و (۴۸) با معادلات (۱۲) نتیجه می‌شود که $AB^T = W$ و یا $AB^T = W^T$ خواهد بود. در این روش دیگر نیازی به معرفی ماتریس W از خارج از مساله نبوده و به جای آن ماتریس‌های A و B از درون خود مساله بدست می‌آیند. بنابراین دیگر ابهامی در نحوه تاثیر ماتریس W در نتایج وجود نخواهد داشت.

۲-۳- خلاصه مرحله به مرحله روش موجود و روش جدید در تجزیه ماتریس اساسی E

در این قسمت خلاصه‌ای از مراحل روش موجود و روش جدید در تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس‌های دوران R و ماتریس پادمتقارن S آورده می‌شود. به صورت خلاصه در تجزیه ماتریس اساسی به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S با استفاده از تجزیه SVD ماتریس اساسی E، چهار سری جواب ممکن از دو روش زیر قابل محاسبه می‌باشند:

۱-۲-۳- مراحل روش موجود در تجزیه ماتریس اساسی E

۱. تجزیه ماتریس اساسی E به مقادیر و بردارهای منفرد با استفاده از رابطه (۱۰)
۲. تبدیل ماتریس‌های متعامد U و V به ماتریس‌های دوران با دترمینان برابر با ۱+ با استفاده از رابطه (۳۸).

۳. محاسبه ماتریس‌های دوران R_1 و R_2 با استفاده از روابط (۵۰) و (۱۳)

۴. محاسبه ماتریس‌های S_1, S_2 و $S_2 = -S_1$ از روابط زیر:

$$S_1 = U_+\Sigma W^T U_+^T \quad , \quad S_2 = U_+\Sigma W U_+^T \tag{۵۱}$$

۵. تعیین جواب درست از بین جواب‌های چهارگانه ممکن

۲-۲-۳- مراحل روش جدید در تجزیه ماتریس اساسی E

۱. تجزیه SVD ماتریس اساسی E به مقادیر و بردارهای منفرد با استفاده از رابطه (۱۰)

۲. تعیین ماتریس $S = [\boldsymbol{u}_3]_\times$ که $\boldsymbol{u}_3$ بردار ستونی سوم از ماتریس U_+ می‌باشد.

۳. تبدیل ماتریس‌های متعامد U و V به ماتریس‌های دوران با دترمینان برابر با ۱+ با استفاده از رابطه (۳۸).

۴. تجزیه SVD ماتریس S به مقادیر و بردارهای منفرد

$$S = U'\Sigma' V'^T \tag{۵۲}$$

۵. تبدیل ماتریس‌های متعامد U' و V' به ماتریس‌های دوران با دترمینان برابر با ۱+.

$$V'_+ = V' diag([1 \quad 1 \quad \det(V')]) \\ U'_+ = U'\, diag([1 \quad 1 \quad \det(U')]) \tag{۵۳}$$

۶. محاسبه ماتریس‌های A و B

$$A = U_+^T U'_+ \quad , \quad B = U_+^T V'_+ \tag{۵۴}$$

۷. محاسبه ماتریس دوران R_1 و ماتریس پادمتقارن S_1

$$R_1 = U_+ B A^T V_+^T \quad , \quad S_1 = U_+ \Sigma A B^T U_+^T \tag{۵۵}$$

۸. تکرار مراحل ۴ تا ۷ در ازاء ماتریس $S = [-\boldsymbol{u}_3]_\times$ برای تعیین ماتریس‌های S_2 و R_2

۹. تعیین جواب درست از بین جواب‌های چهارگانه ممکن

۴- ارزیابی روش اول و دوم در تجزیه ماتریس اساسی E

در این قسمت عملکرد روش موجود و روش جدید در تجزیه ماتریس اساسی E مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور دو تست با استفاده از روش موجود در تجزیه ماتریس اساسی E، بر اساس معادلات (۱۲)، و روش جدید ارائه شده بر اساس معادلات (۴۷) و (۴۸) انجام خواهد شد. تست اول بر روی ماتریس اساسی بدست آمده از شبیه سازی عددی خواهد بود و تست دوم بر روی ماتریس اساسی بدست آمده از مختصات‌های نقاط عکسی متناظر در دو تصویر هوایی اخذ شده توسط پهپاد انجام خواهد شد. در تست اول، با توجه به معادله (۲) یک ماتریس اساسی از ضرب یک ماتریس پادمتقارن S با یک ماتریس دوران R ایجاد و سپس با هر دو روش موجود و روش جدید، مجدد تجزیه و نتایج آن را با ماتریس‌های دوران و پادمتقارن اولیه مقایسه خواهد شد. در تست دوم، ماتریس اساسی E بدست آمده از مختصات‌های عکسی نقاط متناظر در دو تصویر هوایی، با استفاده از هر دو روش موجود تجزیه شده و پارامترهای توجیه نسبی بین این دو تصویر شامل زوایای دوران و بردار جابجایی نسبی بدست آمده از تجزیه ماتریس اساسی E با پارامترهای توجیه نسبی بدست آمده از روش کمترین مربعات مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.

۴-۱- تست اول، تجزیه ماتریس اساسی E شبیه‌سازی شده

در این قسمت عملکرد روش موجود (معادلات (۱۲)) و روش جدید (معادلات (۴۷) و (۴۸)) در تجزیه یک ماتریس اساسی شبیه سازی شده را مورد بررسی قرار دهیم. همانطور که گفته شد هر ماتریس مرتبه ۳ که دو مقدار منفرد اول آن با هم برابر و مقدار منفرد سوم آن صفر باشد ماتریس اساسی محسوب می‌شود. با توجه به معادله (۲)، نتیجه ضرب یک ماتریس پادمتقارن S با یک دوران R برابر با ماتریس اساسی E می‌باشد. در اینجا برای شبیه‌سازی و تولید ماتریس اساسی E، ماتریس دوران R، برابر با ماتریس دوران $R(\omega = 20°, \varphi = 15°, \kappa = 50°)$ و ماتریس S، متناظر با بردار جابجایی $\boldsymbol{t} = [1 \quad 0.2 \quad -0.3]^T$ در نظر گرفته شد.

$$R = \begin{bmatrix} 0.6209 & 0.7767 & 0.1057 \\ -0.7399 & 0.5362 & 0.4062 \\ 0.2588 & -0.3304 & 0.9077 \end{bmatrix}$$

$$S = [\boldsymbol{t}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.2 \\ -0.3 & 0 & -1 \\ -0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E = SR = \begin{bmatrix} -0.1702 & 0.0948 & 0.3034 \\ -0.4451 & 0.0973 & -0.9394 \\ -0.8641 & 0.3809 & 0.3850 \end{bmatrix}$$

تجزیه SVD ماتریس اساسی E به صورت زیر خواهد بود:

$$U = \begin{bmatrix} 0.2920 & -0.1725 & -0.9407 \\ -0.8724 & -0.4510 & -0.1881 \\ 0.3918 & -0.8757 & 0.2822 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.063 & 0 & 0 \\ 0 & 1.063 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0.9283 & -0.3718 \\ 0.0865 & -0.3704 & -0.9248 \\ 0.9962 & 0.0322 & 0.0803 \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود دو مقدار منفرد اول ماتریس اساسی E با هم برابر و مساوی با نرم بردار $\boldsymbol{t}$ و مقدار منفرد سوم آن صفر است:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \| \boldsymbol{t} \| = 1.063 \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

همچنین بردار ستونی سوم از ماتریس U همان بردار یکه در جهت بردار $\boldsymbol{-t}$ می‌باشد:

$$\boldsymbol{u_3} = -\hat{\boldsymbol{t}} = -\frac{\boldsymbol{t}}{\| \boldsymbol{t} \|} = [-0.9407 \quad -0.1881 \quad 0.2822]^T$$

نتیجه تجزیه ماتریس اساسی E با استفاده معادلات (۱۲) به ماتریس‌های دوران R_1, R_2 و ماتریس‌های پادمتقارن S_1, S_2 به صورت زیر می‌باشد:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0787 & 0.9633 & -0.2568 \\ 0.8799 & -0.1882 & -0.4364 \\ -0.4687 & -0.1916 & -0.8623 \end{bmatrix}$$

$$= R_1(\omega = 167.47°, \varphi = -27.95°\,, \kappa = -84.889°$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.6209 & 0.7767 & 0.1057 \\ -0.7399 & 0.5362 & 0.4062 \\ 0.2588 & -0.3304 & 0.9077 \end{bmatrix}$$

$$= R_2(\omega = 20.001°, \varphi = 14.999°\,, \kappa = 49.998°$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.3000 & -0.2000 \\ 0.3000 & -0.0000 & 1.0000 \\ 0.2000 & -1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.3000 & 0.2000 \\ -0.3000 & 0.0000 & -1.0000 \\ -0.2000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می‌شود زوج (R_2, S_2) از این نتایج، با تفاوت نزدیک به $0.001°$ در مقادیر زوایای دوران همان، ماتریس‌های اولیه می‌باشند که ماتریس اساسی E از آنها تولید شده است (R, S) و جواب مورد نظر از تجزیه ماتریس اساسی E می‌باشد.

همچنین با استفاده از روش جدید ارائه شده در اینجا و معادلات (۴۷) و (۴۸) نیز پس از تجزیه SVD ماتریس اساسی E که همان ماتریس‌های U، V و Σ در بالا می‌باشند، ابتدا ماتریس پادمتقارن S_1، متناظر با بردار ستونی سوم $\boldsymbol{u}_3$ از ماتریس U تشکیل شد که نتایج تجزیه SVD آن به ماتریس‌های U'، V' و Σ' به صورت زیر می‌باشد:

$$S_1 = [\boldsymbol{u}_3]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -0.2822 & -0.1881 \\ 0.2822 & 0 & 0.9407 \\ 0.1881 & -0.9407 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U' = \begin{bmatrix} 0.3392 & -0.000 & -0.9407 \\ -0.5218 & 0.8321 & -0.1881 \\ 0.7827 & 0.5547 & 0.2822 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$V' = \begin{bmatrix} 0 & 0.3392 & -0.9407 \\ -0.8321 & -0.5218 & -0.1881 \\ -0.5547 & 0.7827 & 0.2822 \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه بین ماتریس Σ و ماتریس Σ' به صورت $\Sigma = \| \boldsymbol{t} \| \Sigma'$ برقرار است.

در اینجا ماتریس‌های A و B مطابق با معادلات (۴۵) به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8610 & -0.5086 & -0.0000 \\ -0.5086 & -0.8610 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5086 & 0.8610 & 0.0000 \\ 0.8610 & -0.5086 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می‌شود ماتریس A ماتریس دوران حول محور Z به اندازه زاویه $\beta = 30.5682°$ و ماتریس B ماتریس دوران حول محور Z به اندازه زاویه $\theta = 59.4318°$ می‌باشند که در ماتریس $P = diag([1 \quad -1 \quad -1])$ ضرب شده‌اند.

نتیجه ضرب ماتریسی AB^T نیز به صورت زیر است که ماتریس دوران حول محور W به اندازه زاویه $\alpha = \pi/2 = 90°$ می‌باشد:

$$AB^T = \begin{bmatrix} -0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -1.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

نتایج تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس‌های دوران R_1, R_2 و ماتریس‌های پادمتقارن S_1, S_2 با استفاده معادلات (۴۷) و (۴۸) به صورت زیر می‌باشد:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0787 & 0.9633 & -0.2568 \\ 0.8799 & -0.1882 & -0.4364 \\ -0.4687 & -0.1916 & -0.8623 \end{bmatrix}$$

$$= R_1(\omega = 167.47°, \varphi = -27.95°\,, \kappa = -84.889°$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.6209 & 0.7767 & 0.1057 \\ -0.7399 & 0.5362 & 0.4062 \\ 0.2588 & -0.3304 & 0.9077 \end{bmatrix}$$

$$= R_2(\omega = 20.001°, \varphi = 14.999°\,, \kappa = 49.998°$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.3000 & -0.2000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.2000 & -1.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.3000 & -0.2000 \\ 0.3000 & -0.0000 & 1.0000 \\ 0.2000 & -1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود ماتریس‌های دوران $R_1 . R_2$ و ماتریس‌های پادمتقارن $S_1 . S_2$ بدست آمده از تجزیه ماتریس اساسی E با استفاده از معادلات (۱۲) و نیز با استفاده از معادلات (۴۷) و (۴۸) در روش جدید با هم یکسان بوده و در اینجا نیز زوج $(R_2 . S_2)$

با تفاوت نزدیک به $0.001°$ در مقادیر زوایای دوران، جواب درستی است که ماتریس اساسی E از آنها ایجاد شده است.

۲-۴- تست دوم، تجزیه ماتریس اساسی E بدست آمده از مختصات نقاط متناظر

در این قسمت برای ارزیابی معادلات (۱۲) و معادلات (۴۷) و (۴۸)، پارامترهای توجیه نسبی بین دو تصویر واقعی که توسط پهپاد اخذ شده‌اند و دوران قابل توجهی نسبت به هم دارند با استفاده از تجزیه ماتریس اساسی E محاسبه شده و پارامترهای توجیه نسبی بدست آمده با نتایج بدست آمده از روش محاسبات توجیه نسبی فتوگرامتری به روش سرشکنی کمترین مربعات مورد مقایسه قرار خواهد گرفت. تصاویر مورد استفاده در این بررسی، دو تصویر از محدوده دانشگاه صنعتی بابل اخذ شده توسط پهپاد فانتوم ۴ پرو می‌باشد (شکل ۳). این دو تصویر از ارتفاع ۲۳۳m و ۲۰۵m اخذ شده‌اند. ابعاد هر دو تصور ۵۴۷۲ در ۳۰۷۸ پیکسل و فاصله کانونی دوربین نیز ۹mm می‌باشد. پارامترهای کالیبراسیون دوربین در این تست بر حسب مدل *Brown* [۱۶] در جدول (۱) آورده شده است. به منظور انجام محاسبات توجیه نسبی فتوگرامتری با استفاده از شرط هم صفحه‌ای و روش کمترین مربعات، تعداد ۱۵۵۸ نقطه عکسی متناظر در دو تصویر با استفاده از نرم افزار *Australis 8.2*، شناسایی و با انجام محاسبات توجیه نسبی به روش سرشکنی کمترین مربعات، ماتریس دوران نسبی R به همراه زوایای دوران معادل و ماتریس پادمتقارن S، متناظر با بردار جابجایی نسبی بین این دو تصویر به صورت زیر توسط نرم‌افزار *Australis* تعیین گردید:

$$R=\begin{bmatrix}-0.7791 & -0.5638 & 0.2740\\ 0.6266 & -0.7140 & 0.3123\\ 0.0196 & 0.4150 & 0.9096\end{bmatrix}$$

$$=R(\omega=-24.5252°,\varphi=1.1234°,\kappa=-141.1914°)$$

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0.6458 & 0.7575\\ -0.6458 & 0 & -0.0956\\ -0.7575 & 0.0956 & 0\end{bmatrix}$$

در ادامه با استفاده از مختصات‌های نقاط عکسی در سیستم مختصات سه بعدی دوربین برای نقاط عکسی متناظر در دو تصویر، ماتریس اساسی E به صورت زیر محاسبه شد [۶]:

$$E=\begin{bmatrix}0.2898 & -0.0736 & 0.6416\\ 0.3441 & 0.2181 & -0.1878\\ 0.4596 & 0.2590 & -0.1391\end{bmatrix}$$

تجزیه این ماتریس اساسی به ماتریس‌های دوران $R_1.R_2$ و ماتریس‌های پادمتقارن $S_1.S_2$، با استفاده از معادلات (۱۲) و نیز معادلات (۴۷) و (۴۸) با هم برابر و به صورت زیر می‌باشد:

$$R_1=\begin{bmatrix}0.8493 & 0.4023 & -0.3418\\ -0.0064 & -0.6396 & -0.7687\\ -0.5279 & 0.6550 & -0.5406\end{bmatrix}$$

$$=R_1(\omega=-129.5338°,\varphi=-31.8641°,\kappa=0.4321°)$$

$$R_2=\begin{bmatrix}-0.7784 & -0.5555 & 0.2923\\ 0.6274 & -0.7031 & 0.3346\\ 0.0197 & 0.4438 & 0.8959\end{bmatrix}$$

$$=R_2(\omega=-26.3537°,\varphi=1.1270°,\kappa=-141.1298°)$$

$$S_1=\begin{bmatrix}-0.0000 & -0.6309 & -0.7709\\ 0.6309 & -0.0000 & 0.0880\\ 0.7709 & -0.0880 & -0.0000\end{bmatrix}$$

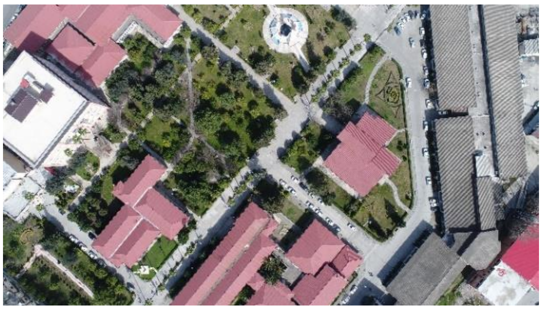
$$S_2=\begin{bmatrix}-0.0000 & 0.6309 & 0.7709\\ -0.6309 & -0.0000 & -0.0880\\ -0.7709 & 0.0880 & -0.0000\end{bmatrix}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود در این بررسی نیز زوج $(R_2.S_2)$ با بیشترین خطای در حدود $2°$ در مقادیر زوایای دوران، نزدیکترین جواب به ماتریس‌های *(R, S)* از محاسبات توجیه نسبی بین دو تصویر شکل (۳) با استفاده از شرط هم صفحه‌ای به روش سرشکنی کمترین مربعات می‌باشند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله فرمول‌های موجود برای تجزیه ماتریس اساسی E به روش تجزیه SVD با توجه به ویژگی‌های روش تجزیه SVD اثبات و تبیین گردید. همچنین یک روش جدید برای تجزیه ماتریس اساسی E مبتنی بر بردار پایه فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E و تجزیه SVD ماتریس اساسی E و ماتریس پادمتقارن S متناظر با بردار پایه فضای پوچ چپ ماتریس اساسی E ارائه شد. در روش جدید ارائه شده نیازی به وارد نمودن ماتریس W در معادلات تجزیه ماتریس اساسی E، از خارج از مسأله نبوده و معادل این ماتریس، ماتریس های A و B از پارامترهای داخلی مسأله تعیین می‌گردد. همچنین در این روش نیازی نیست که در ابتدا ماتریس اساسی E محاسبه شده از مختصات‌های عکسی خطادار ابتدا به فضای ماتریس‌های اساسی نگاشت شود. بلکه این نگاشت در محاسبات ماتریس پادمتقارن S اعمال می‌گردد. نتایج عددی نشان می‌دهد که هر دو روش موجود و روش جدید ارائه شده در این مقاله می‌توانند موقعیت و وضعیت نسبی دوربین‌ها در تصاویر استریو را به طور کامل از تجزیه ماتریس اساسی E به ماتریس دوران R و ماتریس پادمتقارن S متناظر با بردار جابجایی نسبی بین دو تصویر بازیابی کنند.

(ب)



(الف)

شکل ۳: تصاویر اخذ شده توسط پهپاد. تصویر (الف): اخذ شده از ارتفاع ۲۳۳m. تصویر (ب): اخذ شده از ارتفاع ۲۰۵m

جدول ۱: پارامترهای کالیبراسیون دوربین

ابعاد پیکسلی در جهت افقی و عمودی *(mm)*	*Pixel_dim = 0.00252687*
فاصله کانونی *(mm)*	*C = 9.1803*
مختصات نقطه اصلی *(mm)*	*XP = -0.0695*
	YP = -0.1560
ضرایب اعوجاج شعاعی	*K1 = 9.63173e-005*
	K2 = -3.56513e-007
	K3 = -3.17325e-009
ضرایب اعوجاج مماسی	*P1 = 2.25129e-004*
	P2 = 6.89181e-004
ضرایب افینیتی	*B1 = -5.80377e-004*
	B2 = -2.21701e-004

زیرنویس‌ها:

1 Model Coordinate System

2 Gimbal

3 Essential Matrix

مراجع

[1] T. Luhmann, S. Robson, S. Kyle, and J. Boehm, *Close-range photogrammetry and 3D imaging*. Walter de Gruyter, 2013.

[2] J. C. McGlone, E. M. Mikhail, J. S. Bethel, and R. Mullen, "Manual of photogrammetry," 2004: American society for photogrammetry and remote sensing Bethesda, MD.

[3] K. Kraus, *Photogrammetry: geometry from images and laser scans*. Walter de Gruyter, 2011.

[4] J. O. Ogundare, *Understanding Least Squares Estimation and Geomatics Data Analysis*. John Wiley & Sons, 2018.

[5] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press, 2003.

[6] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S. S. Sastry, *An invitation to 3-d vision: from images to geometric models*. Springer Science & Business Media, 2012.

[7] H. C. J. N. Longuet-Higgins, "A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections," vol. 293, no. 5828, p. 133, 1981.

[8] G. H. Georgiev and V. D. J. A. M. S. Radulov, "A practical method for decomposition of the essential matrix," vol. 8, no. 176, pp. 8755-8770, 2014.

[9] M. J. T. P. R. Gerke, "Photogrammetric Computer Vision–Statistics, Geometry, Orientation and Reconstruction. By Wolfgang Förstner and Bernhard P. Wrobel. Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-3-319-11549-8. 816 pages with 59 colour figures. Price:£ 44· 99 hardback;£ 35· 99 eBook," vol. 32, no. 158, pp. 182-183, 2017.

[10] B. K. J. J. o. t. O. S. o. A. Horn, "Recovering baseline and orientation from essential matrix," vol. 1000, pp. 1-10, 1990.

[11] W. Wei and T. Hung Tat, "A SVD decomposition of essential matrix with eight solutions for the relative positions of two perspective cameras," in *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition. ICPR-2000*, 2000, vol. 1, pp. 362-365 vol.1.

[12] G. Strang, "Introduction to Linear Algebra . Wellesley Cambridge, 2016," ISBN 978-09802327-7-62016.

[13] R. Bro, E. Acar, and T. G. J. J. o. C. A. J. o. t. C. S. Kolda, "Resolving the sign ambiguity in the singular value decomposition," vol. 22, no. 2, pp. 135-140, 2008.

[14] D. J. I. t. o. p. a. Nistér and m. intelligence, "An efficient solution to the five-point relative pose problem," vol. 26, no. 6, pp. 756-770, 2004.

[15] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*. Clarendon Press, 1993.

[16] C. B. J. P. E. Duane, "Close-range camera calibration," vol. 37, no. 8, pp. 855-866, 1971.

4 Computer Vision

5 Singular value Decomposition