

قالب جزء محدود برای صفحه‌ی خمشی کیرششف چهار پهلوئی

محمد رضایی پژند*^۱ و حمیدرضا محمدزاده^۲

^۱استاد دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲کارشناس ارشد دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی کرمان

چکیده

یکی از راه‌کارهای نوین در رابطه‌سازی ماتریس سختی، بهره‌جویی از روش قالب جزء محدود می‌باشد. در این شیوه، ماتریس سختی به دو بخش پایه و مرتبه‌ی بالا تقسیم می‌شود. بخش پایه برای اطمینان از همگرایی و بخش مرتبه‌ی بالا برای دست یافتن به مرتبه‌ی کافی و افزایش دقت پاسخ‌ها به کار می‌روند. برای به دست آوردن ماتریس سختی پایه، باید از حالت‌های حرکتی کرنش ثابت سود جست. از سوی دیگر، برای رابطه‌سازی ماتریس سختی مرتبه‌ی بالا، باید از حالت‌های حرکتی مرتبه‌ی بالا بهره گرفت. در این بخش، سهم حرکتی حالت‌های کرنش ثابت کنار گذاشته می‌شود. در این مقاله از راهکار کرنش انحرافی طبیعی، برای رابطه‌سازی ماتریس سختی مرتبه‌ی بالا استفاده می‌شود. در فن قالب جزء محدود، ماتریس سختی پایه و مرتبه‌ی بالا باید عامل‌های آزادی را در خود جای دهند. قراردادن مقادیر مناسب به جای این عامل‌ها شرایطی را فراهم می‌آورد که ماتریس سختی برای هندسه‌های نامنظم رفتار مناسبی داشته باشد. در این مقاله، یک ماتریس سختی جزء چهار پهلوئی خمشی رابطه‌سازی می‌گردد. با بهره‌جستن از ماتریس سختی پیشنهادی، چندین مساله عددی تحلیل خواهد شد. نتیجه‌ها آشکار می‌سازند، جزء پیشنهادی نسبت به جزء‌های پیشین، رفتار بهتری از خود نشان می‌دهد و حساسیت کمی نسبت به کجی و جهت شبکه دارد.

واژگان کلیدی: قالب جزء محدود، اجزای محدود، صفحه‌ی کیرششف، ماتریس سختی.

۱- مقدمه

راهکار چگونگی رابطه‌سازی ماتریس سختی با این شیوه به نظر خوانندگان برسد. خاطر نشان می‌کند در این شیوه ماتریس سختی جزء به دو بخش پایه و مرتبه بالا تقسیم می‌شود. بخش پایه برای اطمینان از همگرایی و بخش مرتبه بالا برای دست یافتن به مرتبه کافی و رسیدن به پاسخ‌های دقیق مورد استفاده قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است، راهکارهای به دست آوردن ماتریس سختی پایه محدود می‌باشند. در صورتی که برای رابطه‌سازی سختی مرتبه بالا می‌توان از شیوه‌های گوناگونی بهره جست. در این مقاله از روش کرنش طبیعی فرضی برای رابطه‌سازی کرنش مرتبه بالا بهره‌جویی شده است. ناگفته نماند، رابطه‌سازی ماتریس سختی، برای صفحه‌های کیرششف صورت گرفته است. از این رو محدود کاربرد این ماتریس سختی برای صفحه‌های نازک با تغییر شکل‌های کوچک می‌باشد. به عبارت دیگر، در رابطه‌سازی ماتریس سختی از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر شده است. خاطر نشان می‌کند که در صورت نیاز به وارد کردن تغییر شکل‌های برشی، می‌توان از دیدگاه رایزینر-میندلین بهره جست [۱].

با وجود اینکه حدود ۶۰ سال از تولد راهکار جزء محدود می‌گذرد، هرروزه راهکارهای جدیدی توسط پژوهشگران در زمینه رابطه‌سازی این دانش ارائه می‌گردد. هدف اصلی این پژوهش‌ها ارائه راهکار ساده و مناسب برای دست یافتن به ماتریس سختی بهینه برای جزها می‌باشد. از آغاز دهه ۱۹۵۰ میلادی که روش جزء محدود به طور گسترده‌ای وارد دانش مهندسی و فیزیک شده است، تا به امروز دشواری‌ها و کامیابی‌های بسیاری را پشت‌سر گذاشته است. هدف اصلی پژوهشگران در بهره‌جویی از روش جزء محدود، ارائه راهکار مناسب برای حل مسائل محیط‌های پیوسته و تحلیل تنش و کرنش در مساله‌های مهندسی بوده است. راهکار بهره‌جستن از تابع شکل در ارائه ماتریس سختی، دشواری‌های بسیاری را در پیش داشته است. از این رو پژوهشگران تلاش کرده‌اند که با بهره‌جستن از راهکارهای مناسب دیگر، روشی را ارائه دهند تا بدون بهره‌جویی از تابع‌های شکل بتوانند ماتریس سختی جزء را بدست آورند. از این میان، راهکار قالب جزء محدود یکی از مناسب‌ترین و جدیدترین شیوه‌های ساختن ماتریس سختی است. در این پژوهش تلاش شده است تا با بهره‌جستن از این

۲- ویژگی کلی قالب جزء محدود

یکی از موضوعهای دانش جزء محدود که در مرزهای این دانش رو به رشد قرار دارد، برپایی اجزای با کارایی بالا است. برای رسیدن به این هدف، از راهکار قالب جزء محدود بهره می‌جویند. این روش یک راهکار جبری در ارائه ماتریس سختی می‌باشد. در این شیوه هر جزء باید شرطهای زیر را برآورده سازد [۲].

الف) سازگاری: هر جزء بایستی آزمون جزء تکین را پاسخگو باشد.
ب) پایداری: ماتریس سختی جزء باید دارای مرتبه کافی باشد.
ج) عاملدار بودن: معادله‌های سختی جزء بایست عامل‌های آزاد را در بر بگیرند.
د) نامتغیر بودن: معادله‌های سختی جزء نباید نسبت به انتخاب دستگاه سنجش و یا شماره گره حساس باشد.

در این راهکار شرطهای (الف) و (ب) برای اطمینان از همگرایی جواب‌ها به پاسخهای دقیق به کار می‌رود. شرط سوم امکان بهینه‌سازی جزء مورد نظر را برای کار بردهای ویژه فراهم می‌کند. و آخرین شرط، پیش‌بینی رفتار سازه را در آزمون‌ها ممکن می‌سازد.

۳- رابطه‌سازی ماتریس سختی

شکل کلی ماتریس سختی که از روش قالب جزء محدود به دست می‌آید، همانند رابطه (۱) می‌باشد [۲ و ۳].

$$K_e = K_b(\alpha_i) + K_h(\beta_j) \quad (1)$$

در این رابطه $K_b(\alpha_i)$ نشان دهنده ماتریس سختی پایه است. ماتریس یاد شده برای دست یافتن به همگرایی در تحلیل‌های عددی به کار می‌رود. $K_h(\beta_j)$ سختی مرتبه بالای جزء را در بر می‌گیرد. از ماتریس مذکور، برای پایداری در تحلیل‌های عددی بهره می‌گیرند. به زبان ساده‌تر می‌توان گفت، ماتریس سختی مرتبه بالا نقش رسیدن به مرتبه کافی در ماتریس سختی را به عهده دارد. باید دانست، این ماتریس را گاهی برای افزایش دقت در پاسخ‌ها نیز به کار می‌برند. در حالت کلی هر دو ماتریس K_b و K_h دارای عامل‌های آزاد هستند. خاطر نشان می‌کند، برای این عامل باید با راهکار مناسب، مقدارهای عددی مناسبی پیدا کرد. شمار این عامل‌های آزاد به طور معمول در ماتریس سختی پایه کمتر از شمار عامل‌های آزاد در ماتریس مرتبه بالا است. شایان توجه است که، شمار عامل‌های آزاد

و همچنین مقداری که این عامل‌ها در ماتریس پایه برای خود اختیار می‌کند، باید در یک شبکه یکسان باشد در غیر این صورت نمی‌توان از برآورده شدن آزمون جزء تکین اطمینان حاصل کرد [۴]. شمار عامل‌های آزاد در ماتریس سختی مرتبه بالا در صورتی که درایه‌های ماتریس سختی از دنباله‌های چند جمله‌ای به دست بیایند، نامحدود است. همچنین این عامل‌ها می‌توانند از جزئی به جزء دیگر در یک شبکه تحلیلی تغییر نمایند. این کار هیچ اثر منفی در همگرایی ندارد. از آنجا که بهره جستن از یک دنباله چند جمله‌ای با جمله‌های نامحدود، در کارهای عملی امکان‌پذیر نیست، شمار این عامل‌ها کاهش می‌یابد. همچنین پیشنهاد می‌شود، عامل‌های یاد شده برای همه جزءها در یک شبکه تحلیلی، یکسان فرض شوند.

۳-۱- رابطه‌سازی ماتریس سختی پایه

جزء چهار پهلوئی نشان داده شده در شکل (۱)، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ماتریس سختی پایه برای جزء مذکور با قراردادن یک حالت انحناء ثابت در لبه‌های جزء حاصل می‌گردد [۳ و ۵] انحناءهای ثابت، از لنگر ثابت در پهلوهای جزء به دست می‌آید. ماتریس سختی پایه که براساس روش قالب جزء محدود J به دست می‌آید، به شکل زیر می‌باشد:

$$K_b = \frac{1}{A} LDL^T \quad (2)$$

در این رابطه A سطح جزء، D ماتریس مواد و L ماتریس جایگزین کننده نیرو می‌باشد. در ادامه، چگونگی به دست آوردن ماتریس L ارائه می‌گردد. برای این منظور ابتدا باید لنگرهای هر پهلو براساس لنگرهای دکارتی به دست آید. برای رسیدن به این هدف، شکل (۲) را در نظر می‌گیریم. در هر راستای اختیاری ij که زاویه α نسبت به افق می‌سازد، لنگرهای هر پهلو براساس لنگرهای دکارتی محاسبه می‌شوند. لنگرهای پهلوئی جزء باید به روش مناسبی با نیروهای گره‌ای معادل جایگزین گردند. بردار نیروهای گره‌ای مذکور با اصل کار مجازی و یک میدان تغییر مکان مناسب در پهلوهای جزء به دست می‌آید. میدان جابجایی را باید به گونه‌ای تعریف نمود که سازگاری داخلی جزء را بر آورده سازد. از این رو، میدان جابجایی، تنها به درجه‌های آزادی ابتدا و انتهای هر پهلو وابستگی پیدا می‌کند. در این حالت، جمع نیروهایی که در یک گره وابسته به دو جزء کنار هم به یکدیگر می‌رسند، برابر با صفر خواهد شد، این کار سبب بر آوردن آزمون

درضمن، زاویه‌ای که امتداد i به j با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، با نماد α نشان داده شده است. با این فرض، سینوس‌ها و کوسینوس‌های وابسته به هر راستا و عمود بر آن به صورت زیر رابطه‌سازی می‌شود:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$C_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l_{ij}} \quad \text{و} \quad S_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}}$$

$$C_n = S_{ij} \quad \text{و} \quad S_n = -C_{ij} \quad (۳)$$

با توجه به شکل (۲)، لنگرهای ثابت در دستگاه سنجش n و t به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_n \\ \bar{M}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_n^2 & S_n^2 & 2S_n C_n \\ -S_n C_n & S_n C_n & C_n^2 - S_n^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{Bmatrix}^T \quad (۴)$$

نیروهای گره‌ای ناشی از لنگر ثابت، از رابطه (۵)، حاصل می‌گردد:

$$t_c = L \bar{\sigma} \quad (۵)$$

در این رابطه $\bar{\sigma}$ میدان تنش ثابت، L ماتریس جایگزین کننده نیرویی و t_c نیروی جایگزین شده گره‌ای است. ماتریس L را با اصل کار مجازی بر روی هر پهلوی ایجاد می‌کنند [۶]. با فرض میدان دورانی θ_i و θ_n بروی هر پهلوی می‌توان کار مجازی انجام شده را بروی جزء با رابطه زیر نوشت:

$$w_s = \int [M_t \theta_n + (-M_n \theta_i)] ds \quad (۶)$$

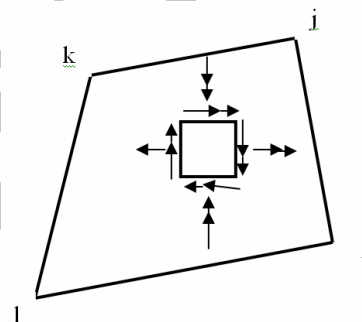
رابطه (۶) را به صورت ماتریسی زیر نیز می‌نویسند.

$$w_s = \int \begin{Bmatrix} \theta_n \\ \theta_i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_n \\ \bar{M}_t \end{Bmatrix} ds \quad (۷)$$

مقدارهای θ_i و θ_n در رابطه (۷)، بر روی هر پهلوی، با توجه به دورانه‌های ابتدا و انتهای هر پهلوی و با درون‌یابی به دست می‌آید. این رو می‌توان بر روی هر پهلوی مختصات بدون بعد $\xi = \frac{2S}{l_{ij}} - 1$ را تعریف نمود. در این رابطه S بیانگر فاصله از

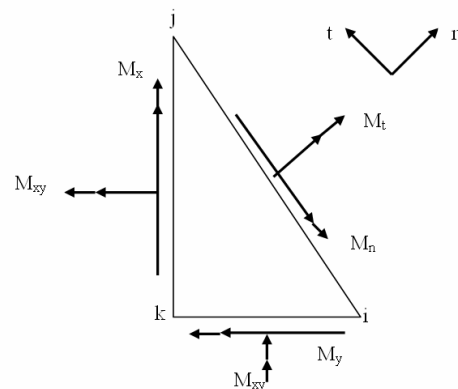
ابتدای هر پهلوی اختیاری ij در راستای ij می‌باشد. بنابراین، اگر

جزء تکین می‌گردد. بدین‌گونه، یکی از شرط‌های قالب جزء محدود برقرار خواهد شد. Felippa, Militelo [۵] دو میدان تغییر مکان مرزی مناسب را برای بردن لنگرهای هر پهلوی به گره‌های جزء برای اجزاء مثلثی پیشنهاد کردند. در اینجا، نیز از همین راهکار بهره جویی گردیده و رابطه‌ها برای جزء چهار پهلویی گسترش داده شده اند. برای به‌کار بردن این راهکار، بر روی هر پهلوی جزء، دستگاه سنجش محلی t و n تعریف می‌شود. بردار n عمود بر راستای پهلوی ij و بردار t در راستای هر پهلوی i به j در نظر گرفته شده است. برای روشن‌تر شدن این مطلب جزء چهارپهلویی $ijkl$ (شکل (۱))، را در نظر می‌گیرند. میدان‌های تنش نشان داده شده بر روی این شکل باید بر روی هر پهلوی محاسبه شوند.



شکل ۱- چهار پهلوی اختیاری ولنگرهای به کار رفته در مختصات دکارتی

خاطر نشان می‌کند، میدان تنش ثابت در حالت صفحه‌های خمشی همان لنگر ثابت است. این میدان را با توجه به شکل (۲)، از دستگاه سنجش x و y به دستگاه سنجش n و t می‌برند. بدین گونه تنش‌ها بر روی هر پهلوی به دست می‌آید.



شکل ۲- انتقال لنگرهای دکارتی به پهلوهای جزء

پهلوی درونیابی می‌شود. در صورت به کار بردن این راهکار، بجای رابطه (۸) باید از رابطه زیر بهره گرفت:

$$\begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_{ij} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3\xi-1/l_{ij} & 0 & \frac{1}{2}(3\xi+1)(\xi-1) & 3(1-\xi)/l_{ij} & 0 & \frac{1}{2}(3\xi-1)(\xi+1) \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_{ij} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

در پایان ماتریس جایگزین نیرویی که با درون یابی مرتبه ۲ θ_n به دست می‌آید، به صورت رابطه (۱۴) ارائه می‌گردد. خاطر نشان می‌کند، حالت کامل L_q در پیوست آمده است. زیر نویس q در رابطه (۱۴) برای نشان دادن درونیابی مرتبه ۲ θ_n به کار می‌رود. همانگونه که پیشتر ذکر شد، از ماتریس جایگزین نیرویی L برای ایجاد ماتریس سختی پایه بهره می‌جویند.

$$L_q = \{L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4\}^T \quad (14)$$

از آنجا که دو ماتریس متفاوت برای ماتریس جایگزین نیرویی L پیدا شده است، ترکیب خطی آنها را می‌توان به عنوان ماتریس جایگزین نیروی در نظر گرفت. در نتیجه رابطه (۱۵) برای ماتریس مذکور پیشنهاد می‌شود [۶].

$$L = (1-\alpha)L_L + \alpha L_q \quad (15)$$

در این رابطه α یک مقدار بزرگتر و یا مساوی با صفر است. توجه به این رابطه، ماتریس سختی پایه به راحتی بدست می‌آید.

۳-۲- ساختن ماتریس سختی مرتبه بالا

ماتریس سختی مرتبه بالا را برای افزایش دقت و ایجاد مرتبه کافی در رابطه‌سازی وارد می‌کنند. برای ساختن این ماتریس بایستی حرکت‌های وابسته به جسم سخت و کرنش ثابت را کنار گذاشت. در حقیقت، این ماتریس مزبور برای بخش انحرافی کرنش‌ها رابطه‌سازی می‌شود. این ماتریس را با راهکارهای گوناگونی می‌توان به دست آورد. در این پژوهش، برای ساختن ماتریس مرتبه بالا از راهکار کرنش انحرافی فرضی استفاده شده است. در این راهکار ماتریس سختی براساس یک مجموعه از کرنش‌های فرضی از سطح جزء به دست می‌آید. برای این منظور باید با راهکار مناسبی کرنش‌ها را در سطح جزء به دست آورد. در

تغییرات θ_i و θ_n بر روی هر پهلوی تابع خطی دوران‌های مماسی و عمودی از ابتدا و انتهای هر پهلوی درونیابی شود، رابطه (۸)، برای θ_i و θ_n حاصل می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} \theta_n \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_i \\ \theta_n \\ w_j \\ \theta_j \\ \theta_{ij} \end{Bmatrix}^T \quad (8)$$

دوران‌های θ_i و θ_n در رابطه (۸)، باید به درجه‌های آزادی دیداری جزء وابسته شود. از این رو، رابطه (۸)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \theta_n \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{nij} & S_{nij} \\ -S_{nij} & C_{nij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (9)$$

V_i و V_j درجه‌های آزادی دیداری جزء در گره‌های i و j است.

$$V = \{w \quad \theta_x \quad \theta_y\}^T \quad (10)$$

در صورتیکه رابطه (۹) در معادله (۷) جایگزین گردد و برابر با کار نیروهای گره‌ای قرار داده شود، ماتریس جایگزین نیروی حاصل می‌گردد:

$$L = \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} C_{nij} & S_{nij} \\ -S_{nij} & C_{nij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^2 & S_n^2 & 2S_n C_n \\ -S_n C_n & S_n C_n & C_n^2 - S_n^2 \end{bmatrix} ds \quad (11)$$

در پایان ماتریس جایگزین نیروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L_L^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{42} & 0 & 0 & y_{13} & 0 & 0 & y_{24} & 0 & 0 & y_{31} \\ 0 & x_{42} & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{24} & 0 & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & y_{24} & x_{24} & 0 & y_{31} & x_{31} & 0 & y_{42} & x_{42} & 0 & y_{13} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (12)$$

زیرنویس L بیان کننده درون یابی خطی دوران‌ها می‌باشد. با روش دیگری نیز می‌توان مقادیرهای θ_n را در هر پهلوی درونیابی کرد. در صورتی که هر پهلوی به عنوان یک تیر اولر برنولی در نظر گرفته شود، θ_n را با مشتق‌گیری از درون یابی خیز تیر اولر برنولی می‌توان به دست آورد. از این رو مقدار θ_n به صورت تابعی مرتبه ۲ از درجه‌های آزادی ابتدا و انتهای هر

$$K_{ij}|_i = \frac{1}{l_{ij}^2} \begin{Bmatrix} 6 & 2l_{ij} & -6 & 4l_{ij} \end{Bmatrix} \{V_{ij}\}_L = \{q_{ij}\}_i \{V_{ij}\}_L \quad (20)$$

در رابطه‌های (۲۰) و (۱۹) $\{V_{ij}\}_L$ درجه‌های آزادی وابسته به تیرهای فرضی هستند. درجه‌های آزادی یاد شده باید به درجه‌های آزادی دیداری جزء، وابستگی پیدا کنند. با به کار بردن ماتریس انتقال T این امکان فراهم می‌گردد تا درجه‌های آزادی تیرهای فرضی به درجه‌های آزادی جزء، وابسته گردند:

$$\begin{aligned} \{V_{ij}\}_G^T &= \{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}\} \\ \{V_{ij}\}_L^T &= \{w_i \quad \theta_{ni} \quad w_j \quad \theta_{nj}\} \\ \{V_{ij}\}_L &= [T] \{V_{ij}\}_G \\ T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_n & S_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_n & S_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

با بهره جستن از رابطه (۲۱) در معادله‌های (۲۰) و (۱۹) انحناء طبیعی در ابتدا و انتهای تیر فرضی برحسب درجه‌های آزادی دیداری جزء نتیجه می‌گردد:

$$K_{ij}|_i = \frac{1}{l_{ij}^2} \begin{Bmatrix} -6 & -4l_{ij}C_n & -4l_{ij}S_n & 6 & -2l_{ij}C_n & -2l_{ij}S_n \end{Bmatrix} \{V_{ij}\}_G \quad (22)$$

$$K_{ij}|_j = \frac{1}{l_{ij}^2} \begin{Bmatrix} 6 & 2l_{ij}C_n & 2l_{ij}S_n & -6 & 4l_{ij}C_n & 4l_{ij}S_n \end{Bmatrix} \{V_{ij}\}_G \quad (23)$$

با توجه به رابطه‌های (۲۳) و (۲۲) می‌توان انحناءهای طبیعی را در چهار گوشه جزء به دست آورد. انحناءهایی که با این روش برای هر گره محاسبه می‌شوند، در راستاهای فرضی هستند. بنابراین، لازم است این انحناءها به انحناءهای دکارتی وابسته شوند. برای رسیدن به این هدف، هر گره به سه راستای فرضی برای انتقال انحناءهای یاد شده نیاز دارد. در این پژوهش، راستاهای دو پهلو همسایه و امتدادی که گره مورد نظر را به گره رو برو وصل می‌کند، به عنوان راستاهای قراردادی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل (۳) می‌توان برای انحناءهای گره‌ای در راستاهای فرضی روابط زیر را برقرار نمود:

این شیوه، برای جزه‌های دو بعدی، خط‌های مرجعی بر سطح جزء معرفی می‌کنند. سپس بر روی این خط‌ها کرنش‌های فرضی محاسبه شده و با راهکار مناسبی در سطح جزء درون‌یابی می‌گردد. با این شیوه ماتریس کرنش جزء حاصل می‌گردد [۵]. این ماتریس می‌تواند عامل‌های آزاد را در برگیرد. عامل‌های آزاد برای کاربردهای ویژه‌ای بهینه‌سازی می‌شوند.

اکنون برای دستیابی به کرنش‌های انحرافی باید به روشی مناسب، کرنش‌ها را در سطح جزء به دست آورد. برای به دست آوردن این کرنش‌ها در سطح جزء، راستاهای مرجع تعریف می‌شوند. در اینجا، هر راستا به عنوان یک تیر اولر برنولی فرض می‌گردد. میدان جابجایی برای هر راستای مرجع، به این صورت خواهد بود:

$$\begin{aligned} w &= N V_{ij} \\ N &= \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \end{aligned} \quad (16)$$

N توابع درون‌یاب، (همان تابع‌های درون‌یاب هریمیتی) و V_{ij} درجه‌های آزادی در ابتدا و انتهای هر تیر فرضی است. تابع‌های درون‌یاب هریمیتی براساس دستگاه سنجش محلی ξ_{ij} بر روی هر راستا تعریف می‌شود، این توابع عبارتند از:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (2 + \xi)(\xi - 1)^2 \\ N_2 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(\xi - 1)^2 l_{ij} \\ N_3 &= \frac{1}{4} (2 - \xi)(\xi + 1)^2 \\ N_4 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(\xi + 1)^2 l_{ij} \end{aligned} \quad (17)$$

با بهره جستن از رابطه (۱۶) می‌توان انحناء فرضی را در هر یک از تیرهای فرضی به دست آورد.

$$K = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{Bmatrix} 6\xi & l_{ij}(-1+3\xi) & -\xi & l_{ij}(1+3\xi) \end{Bmatrix} \{w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j\}^T \quad (18)$$

با قرار دادن مقادیر ۱ و -۱ بجای ξ انحناء فرضی در ابتدا و انتهای هر تیر حاصل می‌گردد.

$$K_{ij}|_i = \frac{1}{l_{ij}^2} \begin{Bmatrix} -6 & -4l_{ij} & 6 & -2l_{ij} \end{Bmatrix} \{V_{ij}\}_L = \{q_{ij}\}_i \{V_{ij}\}_L \quad (19)$$

با بهره‌گیری از رابطه‌های (۲۵) و (۲۶)، ماتریس کرنش در هر گره ایجاد می‌شود.

$$\begin{aligned} B_1 &= T_1 Q_1 & B_2 &= T_2 Q_2 & B_3 &= T_3 Q_3 \\ B_4 &= T_4 Q_4 \end{aligned} \quad (27)$$

روابط (۲۷) بیانگر کرنش در چهار گوشه جزء هستند. اکنون بایست با راهکار مناسبی ماتریس کرنش را در سطح جزء درون‌یابی کرد. این کار با درون‌یابی هم عامل (ایزو پارامتریک) انجام می‌گردد. در نتیجه ماتریس کرنش در سطح جزء به این صورت رابطه‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & f_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ f_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & f_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ B(\xi, \eta) &= f_1 B_1 + f_2 B_2 + f_3 B_3 + f_4 B_4 \end{aligned} \quad (28)$$

برای رابطه‌سازی ماتریس سختی مرتبه بالا، باید بخش انحرافی کرنش‌ها را بدست آورد. بخش انحرافی کرنش، با کاستن کرنش میانگین از کل کرنش نتیجه می‌شود. این کار برابر با کم کردن ماتریس کرنش میانگین از ماتریس کرنش جزء است. با این شیوه، رابطه زیر برای ماتریس کرنش انحرافی بدست می‌آید:

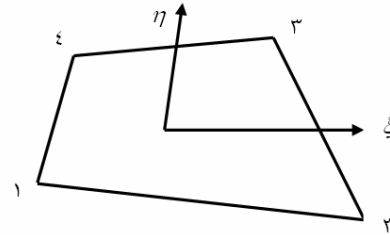
$$B_d = B(\xi, \eta) - \frac{1}{A} \int B(\xi, \eta) dA \quad (29)$$

در پایان، ماتریس سختی مرتبه بالا با استفاده از رابطه (۳۰) قابل محاسبه می‌باشد:

$$K_h = \int B_d^T D B_d dA \quad (30)$$

۳-۲-۱- جایگاه عامل‌های آزاد

همانطوری که اشاره شد، ماتریس سختی مرتبه بالا باید دارای عامل‌های آزاد باشد، رابطه‌سازی که در بخش پیشین برای ماتریس سختی پایه ارائه شد، دارای عامل آزاد نیست. راهکارهای گوناگونی برای جای دادن عامل و یا عامل‌های آزاد در اینگونه رابطه‌سازی پیشنهاد شده است. پرکاربردترین این راهکارها، این است که هر یک از مولفه‌های ماتریس کرنش فرضی در رابطه‌های (۲۰) و (۱۹) را در عاملی آزاد ضرب کرد. چنانچه با این راهکار



شکل ۳- راستاهای قراردادی عضو چهاربهدویی

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{Bmatrix} k_{12}|1 \\ k_{13}|1 \\ k_{41}|1 \end{Bmatrix} = Q_1 V & K_2 &= \begin{Bmatrix} k_{12}|2 \\ k_{24}|2 \\ k_{23}|2 \end{Bmatrix} = Q_2 V \\ K_4 &= \begin{Bmatrix} k_{41}|4 \\ k_{24}|4 \\ k_{34}|4 \end{Bmatrix} = Q_4 V & K_3 &= \begin{Bmatrix} k_{23}|3 \\ k_{13}|3 \\ k_{34}|3 \end{Bmatrix} = Q_3 V \\ V_i &= \{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\} \\ V^T &= \{V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4\} \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (24)$$

ماتریس‌های Q در معادله‌های (۲۴) در پیوست ارائه شده است. بدست آنچه پیشتر بحث شد، انحنایی که در گره‌های ۱ تا ۴ بدست آمدند، در راستاهای فرضی می‌باشد. این انحنای باید با انحنای دکارتی نشان داده شوند. بنابراین، می‌توان از ماتریس‌های انتقال T_1 تا T_4 که در ادامه می‌آیند، بهره جست.

$$K^T = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad K_i = T_i \kappa_i \quad (25)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} S_{12}^2 & C_{12}^2 & -S_{12}C_{12} \\ S_{13}^2 & C_{13}^2 & -S_{13}C_{13} \\ S_{41}^2 & C_{41}^2 & -S_{41}C_{41} \end{bmatrix}^{-1} \quad T_2 = \begin{bmatrix} S_{12}^2 & C_{12}^2 & -S_{12}C_{12} \\ S_{24}^2 & C_{24}^2 & -S_{24}C_{24} \\ S_{23}^2 & C_{23}^2 & -S_{23}C_{23} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} S_{41}^2 & C_{41}^2 & -S_{41}C_{41} \\ S_{24}^2 & C_{24}^2 & -S_{24}C_{24} \\ S_{34}^2 & C_{34}^2 & -S_{34}C_{34} \end{bmatrix}^{-1} \quad T_3 = \begin{bmatrix} S_{23}^2 & C_{23}^2 & -S_{23}C_{23} \\ S_{13}^2 & C_{13}^2 & -S_{13}C_{13} \\ S_{34}^2 & C_{34}^2 & -S_{34}C_{34} \end{bmatrix}^{-1} \quad (26)$$

جزء به دست آورد [۸]. کارمایه کرنشی جزء را برای یک حالت حرکتی به این صورت می توان نوشت:

$$U_b = \frac{1}{2} u^T K_b u = U_1 + \alpha U_2 + \alpha^2 U_3 \quad (31)$$

اگر رابطه (۳۱) نسبت به α کمینه گردد، مقدار بهینه α به دست می آید. برای هر یک از حالت‌های حرکتی وابسته به کرنش ثابت، مقدار α جداگانه حساب شده است. مقدار بهینه α برای هر یک از حالت‌های حرکتی تفاوت دارد. این مقدار بین صفر تا دو تغییر می‌کند. آزمون‌های عددی بسیاری برای یافتن مقدار بهینه آن انجام گردیده است. نتیجه‌ها نشان می‌دهند؛ چنانچه مقدار صفر، برای α اختیار شود، سهم سختی پایه از حالتی که مقدار α بزرگتر از صفر باشد، کمتر است. به سخن دیگر، α برابر با صفر، ماتریس سختی نرمتری را نتیجه می‌دهد. همچنین آزمون‌های عددی مشخص می‌سازند، α بین ۰/۶ تا ۰/۸ به ویژه برای شبکه‌های منظم کارایی بهتری دارد. باید آگاه بود، مقدار α به دست آمده در این قسمت برای حالت‌های حرکتی مرتبه پایه مشخصی می‌باشد. این مقدار دارای کاستی‌هایی می‌باشد. این کاستی‌ها در شبکه‌های درشت بیشتر آشکار می‌گردد. از این‌رو، آزمون عددی بسیاری انجام گرفت، تا مقدار مناسبی برای α مشخص گردد. در این آزمون با فرض ثابت بودن مقدارهای عامل‌های آزاد مرتبه بالا تغییر مقدار α در پاسخ‌های سازهای متفاوت واریسی گردید. نتیجه‌ها مشخص ساخت، مقدار α برابر با ۲/۵ پاسخ‌هایی را فراهم می‌آورد که حساسیت بسیار کمی در درشتی و ریزی شبکه دارد.

۴-۲- شرط نا متغیر بودن

این شرط یکی از مهم‌ترین قیدهایی است که بر روی عامل‌های آزاد به کار می‌رود. قید مزبور بیان می‌کند که ماتریس سختی جزء باید نسبت به دستگاه سنجش، نامتغیر باشد. به سخن دیگر، هنگامی که جزء، هندسه متقارن برای خود اختیار می‌کند، این تقارن باید در مولفه‌های ماتریس سختی اثر بگذارد. برای نمونه، در حالتی که جزء مربع شکل است. بین برخی از مولفه‌ها رابطه‌های ویژه‌ای برقرار می‌شود. با بهره جستن از برنامه رایانه‌ای Mathematica این رابطه‌ها بین عامل‌های آزاد نتیجه شده‌اند:

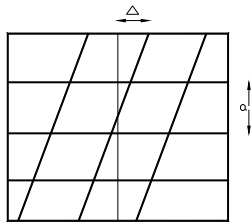
جزء چهار پهلویی خمشی مورد بررسی، رابطه‌سازی گردد، ۴۸ عامل آزاد برای ایجاد ماتریس سختی مرتبه بالا مورد نیاز است. روش دیگری نیز برای وارد کردن عامل‌های آزاد امکان‌پذیر می‌باشد. اگر عامل‌های آزاد در رابطه‌های (۲۳) و (۲۲) وارد شوند، قالبی با ۷۲ عامل آزاد ساخته خواهد شد. ساده‌ترین روش وارد کردن عامل آزاد در ماتریس سختی به اینگونه است که تنها یک عامل آزاد در ماتریس سختی مرتبه بالا جای گیرد. این کار، همانند این است که همه عامل‌های آزاد برابر با یکدیگر فرض گردند. اگر شمار عامل‌های آزاد بسنده باشند، و نیز جایگاه مناسبی برای آنها در نظر گرفته شود، قالبی فراگیری ایجاد خواهد شد. قالب مذکور همه اجزای محدود برای یک ساختار ویژه را دربر می‌گیرد. در این صورت، قالب یاد شده، جزءهایی که با روش‌های سنتی ایجاد شده‌اند را نیز دربر می‌گیرد. برای رسیدن از این قالب به جزءهای پیشین، بایست مقدارهای عددی مشخصی به جای عامل‌های معینی قرار گیرد. افزون بر اینکه راهکار قالب، جزءهای پیشین را در بر می‌گیرد، بی‌شمار جزء نوین دیگر نیز پدید می‌آورد. برای نمونه قالب ۴۸ عاملی دارای ∞ ماتریس سختی مرتبه بالا است. از این میان، کدام ماتریس رفتار بهتری از خود نشان می‌دهد؟ با چه راهکاری می‌توان مقدارهای مناسب برای عامل‌های آزاد را بدست آورد؟ به‌طور کلی، روش مشخصی برای یافتن مقدارهای مناسب موجود نمی‌باشد. با این حال، روش‌هایی توسط پژوهشگران پیشنهاد شده است که می‌توان از آنها بهره جست [۲] و یا اینکه از آزمون‌های عددی مناسبی برای بدست آوردن این عامل‌ها استفاده کرد. در ادامه از این شیوه‌ها سخن به میان می‌آید. باید آگاه بود، در حالت کلی نمی‌توان جزءهای خمشی را با یک عامل آزاد بهینه کرد. در صورتی که برای جزءهای غشایی این امکان وجود دارد و می‌توان با یک عامل آزاد جزء را در همه شرایط تا حدی بهینه نمود [۷]. از این رو بررسی حالت‌های کلی جزءهای خمشی کار بسیار دشواری می‌باشد. در ادامه تلاش شده تا رابطه‌ای بین عامل‌های آزاد، برای قالب مورد نظر ارائه گردد. برای این هدف، نخست شرط نامتغیر بودن بر روی ماتریس سختی وارد می‌گردد. خاطر نشان می‌کند، شکل کلی قالب پیشنهادی در پیوست آورده شده است.

۴-۴- مقدار مناسب عامل‌های آزاد

۴-۱- مقدار بهینه α

عامل آزاد در ماتریس سختی پایه، نقش مهمی در همگرایی پاسخ‌ها دارد. مقدار مناسب α را می‌توان با کمینه کردن کارمایه

صفحه مربع شکل، زیر اثر بار متمرکز در مرکز، با تکیه گاه‌های کناری ساده، مورد واریسی قرار گرفته است. در این تحلیل، از یک شبکه 4×4 برای یک چهارم صفحه بهره‌جویی شده است. در این آزمون، همانطور که در شکل (۴) آمده، پاسخ سازه نسبت به تغییر Δ مورد واریسی قرار گرفته است. مقدارهایی از عامل‌های آزاد، که حساسیت کمتری نسبت به تغییر Δ دارد به عنوان عامل‌های آزاد مناسب برای ماتریس سختی مورد نظر اختیار گردیده‌اند.



شکل ۴- یک چهارم صفحه مربعی

در این واریسی، تغییر Δ از مرکز به سمت راست مثبت فرض شده است. آزمون دیگری نیز برای واریسی و یافتن مقدارهای مناسب عامل‌های آزاد به کار رفته است. در این آزمون تلاش بر این بوده که مقدارهایی برای عامل‌های آزاد در نظر گرفته شود تا نسبت به جهت شبکه حساس نباشد. از این رو صفحه مربعی شکل، زیر اثر بار گسترده، مورد بررسی قرار گرفته است. در این بررسی یک چهارم صفحه مربعی شکل با چهار جزء الگوسازی شده است. در این تحلیل، پاسخ‌های مساله برحسب تغییر مقدار a که در شکل (۵) آمده، مورد بررسی قرار گرفت. مقدارهایی برای عامل‌های آزاد انتخاب گردید که نسبت به تغییر a حساسیت کمتری داشته و به جهت شبکه‌بندی نیز حساس نباشد. در پایان چنین نتیجه شد که، مقدار عامل‌های آزاد مرتبه بالا برابر با $0/9$ و $0/93$ اختیار گردد. مقدار $0/9$ برای عامل‌هایی که تابع مرتبه یک از درازای تیرهای فرضی است و مقدار $0/93$ برای عامل‌هایی که تابع درجه دو از درازای تیرهای یاد شده است، اختیار گردیده‌اند. با توجه به این مقادیر، پاسخ مساله نخست در جدول (۱) برحسب درصد خطاء نسبت به تغییر Δ درج گردیده‌اند. همانطور که از این جدول دیده می‌شود، تغییر Δ اثر زیادی در پاسخ‌ها ندارد. از این رو می‌توان نتیجه گرفت، که ماتریس سختی ارائه شده نسبت به کجی شبکه حساسیت کمی دارد.

$$\begin{aligned} \beta_{21} = \beta_{25} = \beta_{31} = \beta_{35} = \beta_{41} = \beta_{43} = \beta_{45} = \beta_{47} \\ \beta_{11} = \beta_{15} = \beta_{17} = \beta_{23} = \beta_{27} = \beta_{13} = \beta_{33} = \beta_{37} \\ \beta_{12} = \beta_{18} = \beta_{22} = \beta_{28} = \beta_{32} = \beta_{38} = \beta_{42} = \beta_{48} \\ \beta_{14} = \beta_{16} = \beta_{24} = \beta_{26} = \beta_{34} = \beta_{36} = \beta_{44} = \beta_{46} \\ \beta_{52} = \beta_{58} = \beta_{62} = \beta_{68} \quad , \quad \beta_{51} = \beta_{53} = \beta_{61} = \beta_{63} \quad , \\ \beta_{55} = \beta_{57} = \beta_{65} = \beta_{67} \quad \text{و} \quad \beta_{54} = \beta_{56} = \beta_{64} = \beta_{66} \quad (32) \end{aligned}$$

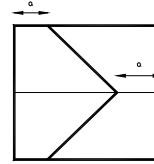
با توجه به رابطه‌های (۳۲) شمار عامل‌های آزاد مستقل برای جزء چهار پهلویی به ۸ کاهش می‌یابد.

۴-۳- حساس نبودن به نسبت شکل

قید حساس نبودن به نسبت شکل (ARI) شرط مفیدی برای کارایی جزء با هندسه‌های نامتقارن است. برای این کار لازم است نسبت شکل مناسبی برای جزء در نظر گرفت. این کار برای جزء چهار پهلویی دشوارتر از جزیهای سه پهلویی است. در صورتی که به توان یک نسبت شکل مناسب برای جزء چهار پهلویی در نظر گرفت، باید اثر تغییر این نسبت شکل را در ماتریس سختی جزء واریسی نمود. برای این هدف، باید عامل‌هایی که سبب افزایش و یا کاهش بیش از اندازه درایه‌های ماتریس سختی می‌شوند را با راهکار مناسبی حذف کرد. این کار نیز بسیار مشکل است. از این رو آزمون‌های عددی بسیاری برای رسیدن به حل بهینه انجام شده‌اند. پاسخ‌های سازه‌های مختلف برای عامل‌های آزاد متفاوت واریسی گردید. در پایان، این نتیجه به دست آمد که، باید در ماتریس کرنش مرتبه بالا، دو عامل آزاد جای گیرد. یک عامل برای درایه‌هایی از ماتریس Q که تابع مرتبه یک از درازای تیرهای فرضی است و عامل دیگر برای درایه‌هایی از ماتریس Q که تابع مرتبه ۲ از درازای تیرهای فرضی هستند، در نظر گرفته شد. خاطر نشان می‌کند، آزمون‌های برای این کار مورد بهره‌جویی قرار گرفت، بدین گونه می‌باشد. نخست با ثابت فرض کردن عامل آزاد مرتبه پایه و یکی از عامل‌های ماتریس مرتبه بالا، تغییرات این عامل مورد واریسی قرار گرفت. سپس با ثابت نگه داشتن دو عامل قبلی، تغییرات عامل سوم (عامل دوم مرتبه بالا) بررسی گردید. در اینجا، خاطر نشان می‌کند، برای دست یافتن به عامل‌های آزاد مناسب، آزمون‌های ویژه‌ای به کار گرفته شده است. یکی از کاراترین آنها، به کار بردن آزمون‌های می‌باشد که بیانگر حساسیت جزء به کجی است. در این آزمون تلاش شده است تا عامل‌های آزادی یافت شود که حساسیت جزء به کجی را کاهش دهد. برای این منظور، پاسخ

در شکل (۶) درصد خطاء پاسخ مسأله دوم نسبت به تغییر $\frac{2a}{L/2}$

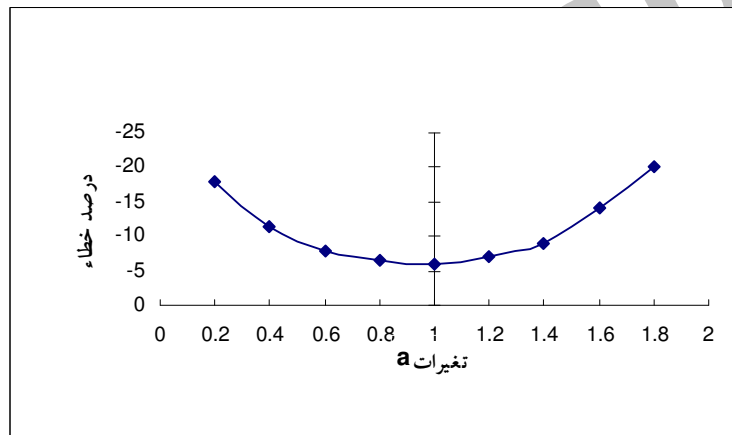
نشان داده شده است. L بیانگر درازای کل جزء می‌باشد. همانطور که از شکل (۶) دیده می‌شود. آشکار است که، ماتریس ارائه شده نسبت به جهت شبکه حساسیت بسیار کمی دارد. در ادامه چند نمونه از آزمون‌های نشانه برای بررسی کارایی جزء ارائه می‌شود.



شکل ۵- الگوی یک چهارم صفحه مربعی با تکیه‌گاه گیردار

جدول ۱- درصد خطا در پاسخ مسأله برحسب تغییر Δ

Δ / L	-۰/۸	-۰/۶	-۰/۴	-۰/۲	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
خطا	۰/۲	۰/۳	۰/۲	۰	۰/۱۴	-۱	۰	-۰/۴	-۰/۱

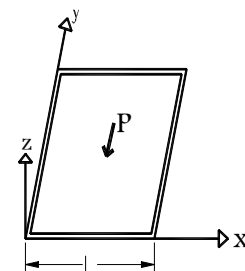


شکل ۶- نمودار درصد خطاء نسبت به تغییرات $\frac{2a}{L/2}$

۵- آزمون‌های عددی

۵-۱- صفحه مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده

در اینجا صفحه مربعی شکل باتکیه‌گاه‌های ساده زیر بار متمرکز که بر مرکز صفحه وارد می‌شود، تحلیل می‌گردد. درازای هر پهلو صفحه برابر با L است. شکل (۷)، این صفحه را نشان می‌دهد.



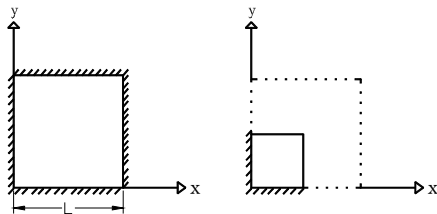
شکل ۷- صفحه مربعی باتکیه‌گاه ساده زیر بار متمرکز

به سبب تقارن، تنها یک چهارم صفحه شبکه‌بندی شده و در تحلیل شرکت می‌کند. در جدول (۲) نتیجه‌های به دست آمده از تحلیل این صفحه با دیگر جزءها مقایسه شده است. همانطور که از این جدول دیده می‌شود، جزء پیشنهادی از دقت خوبی نسبت به دیگر جزءها برخوردار است.

جدول ۲- تغییر مکان مرکز صفحه مربعی زیر اثر بار متمرکز در مرکز

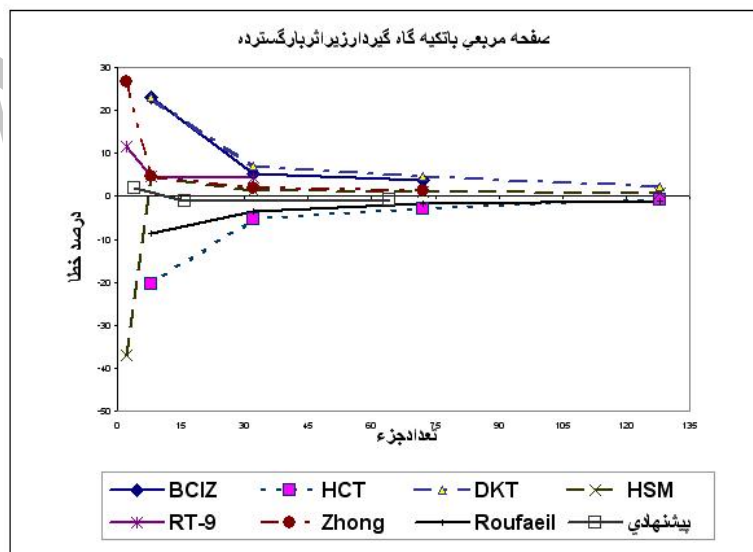
شکل جزء	نمایه جزء	$\frac{qL^4}{D}$			
		۱×۱	۲×۲	۴×۴	مرجع
مشئی	BCIZ	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۱۷۴	۰/۰۱۱۶۴	۹
	CMT		۰/۰۱۳۴۶	۰/۰۱۱۹۳	۱۰
	DKT	۰/۰۱۲۴۸	۰/۰۱۱۶۹	۰/۰۱۱۶۳	۱۰
	RT-9	۰/۰۱۲۱۷	۰/۰۱۱۴۸	۰/۰۱۱۵۹	۱۱
	Zhong	۰/۰۱۴۰۸	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۱۸۴	۱۲
چهار پهلوئی	NCQ		۰/۰۱۱۳۸	۰/۰۱۱۵۴	۱۳
	AFSIQ	۰/۰۱۰۴۴	۰/۰۱۱۱۲	۰/۰۱۱۳۹	۱۴
	پیشنهادی	۰/۰۱۱۹۱	۰/۰۱۱۹۴	۰/۰۱۱۶۱	
دقیقی		۰/۰۱۱۶			

۵-۲- صفحه مربعی با تکیه‌گاه گیردار

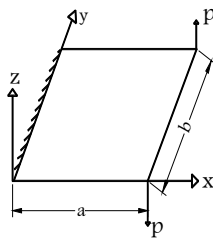


در اینجا، صفحه مربعی شکل با تکیه‌گاه‌های گیردار، زیر بار گسترده یکنواخت تحلیل می‌گردد. شدت بار وارده برابر با q است. درازای هر پهلو مربع L می‌باشد. در این مثال نیز به سبب تقارن تنها یک چهارم صفحه تحلیل می‌شود. شکل (۸) نشان دهنده این مثال می‌باشد. نمودار همگرایی برای این صفحه در شکل (۹) آمده است [۱۵ و ۱۶].

شکل ۸- صفحه مربعی با تکیه‌گاه گیردار زیر بار گسترده



شکل ۹- نمودار همگرایی صفحه مربعی با تکیه‌گاه گیردار

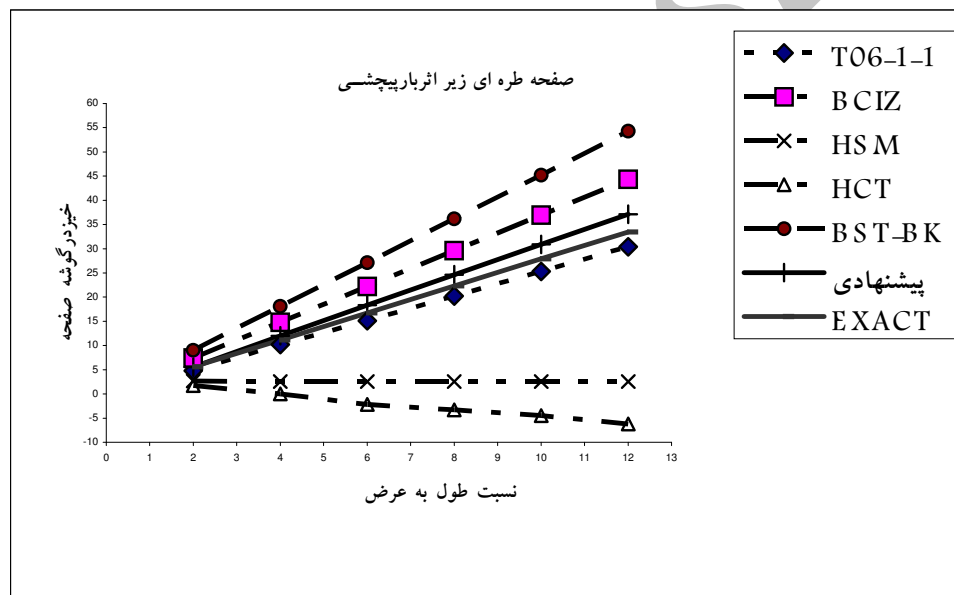


شکل ۱۰- صفحه طره زیر بار پیچشی

۵-۳- صفحه طره پیچشی

یکی از آزمون‌های سخت که برای نشان دادن کارایی جزء در نسبت شکل‌های مختلف بکار می‌رود، آزمون صفحه پیچشی است. برای این منظور، دو نیروی برابر، در خلاف جهت هم، بر دو گوشه آزاد یک صفحه طره وارد می‌شوند. این دو نیرو همانند یک بار پیچشی بر لبه آزاد طره اثر می‌کند. شکل (۱۰) این مسأله را نشان می‌دهد.

یادآوری می‌کند، در بررسی رفتار سازه زیر اثر این دو نیرو و تنها از یک جزء چهار پهلو بهره جویی شده است. در شکل (۱۱) تغییر مکان گوشه آزاد جزه‌های مختلف به صورت ترسیمی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. از این شکل آشکارا دیده می‌شود که جزء پیشنهادی، این آزمون را به خوبی پاسخگو است.



شکل ۱۱- نمودار تغییر مکان در گوشه صفحه ره زیر اثر بار پیچشی

۶- نتیجه‌گیری

بر پایه‌ی شیوه‌ی قالب جزء محدود، ماتریس سختی یک جزء صفحه‌ی خمشی رابطه‌سازی شد. توانایی‌های جزء پیشنهادی با آزمون‌های عددی به دست آمدند. در ادامه، نتایج این پژوهش بطور خلاصه عبارتند از:

۱- بهره‌جویی از روش پیشنهادی سبب می‌شود تا خانواده‌ای از جزءها در یک قالب جای گیرند. همه‌ی این جزءها دارای عامل‌های آزادی می‌باشند. جای دادن مقدارهای عددی به جای عامل‌های آزاد، سبب به وجود آمدن جزءهای ویژه‌ای می‌گردد.

۲- برای دست یافتن به همگرایی در ماتریس سختی پایه، عامل آزادی معرفی گردید. این کار برای دسترسی به پاسخ‌های دقیق نسبت به دیگر شیوه‌های سنتی راحت‌تر می‌باشد.

۳- عامل‌های آزاد مرتبه‌ی بالا سبب افزایش دقت و پایداری در تحلیل‌های عددی می‌گردند. انجام این کار، شرایطی را فراهم می‌آورد که سازه در شرایط خاص نرم و یا سخت نشود.

۴- آزمون‌های عددی نشان دادند که جزء پیشنهادی نسبت به کجی و نسبت هندسی حساسیت کمتری دارد.

- Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1987, 61, 129-160.
- [8] Bergan, P.G., Felippa, C.A., "A triangular Membrane Element With Rotational Degrees of freedom", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 50, 25-69.
- [9] Zienkiewicz O.C., and Taylor R.L., "The Finite Element Method", 4th Edition, Volume 2, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [۱۰] اختری، م.ر.، "اثر محل گره و نوع درجه آزادی در جزء مثلثی صفحه خمشی"، پایان نامه کارشناسی ارشد ناپیوسته، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران، ۱۳۷۵.
- [11] Cheung, Y.K. and wanji., "Refind nine parameter triangular thin plate bending element by using refind direct stiffness method", International Journal for Numerical methods in Engineering, 1995 38, 283-298.
- [12] Zhangnian, X., "A Thick-Thin Triangular Plate Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33, 963-973.
- [13] Liu, I. W., "A conforming Quadrilateral Plate Bending Element Revisited", International Journal For Numerical Methods in Engineering, 1995, 38, 2449-2463.
- [14] Zhenfeng, Z., Wanji, C., "New Finite Element Model For Analysis Of Kirchhoff Plate", International Journal For Numerical Methods in Engineering, 1995, 38, 1201-1214.
- [15] Roufaeil, O., "A New Four-Node Quadrilateral Plate Bending Element", Computers & Structures, 1995, 54, (5), 871-879.
- [16] Weaver, W., Johnston P.R., "Finite Element for Structural Analysis", Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey, 1984.
- ۵- تحلیل‌ها نشان دادند که افزایش شمار نقطه‌های گوسی از 2×2 به 3×3 و 4×4 اثری زیادی در پاسخ‌ها ندارد. به سخن دیگر، تغییر شمار نقطه‌های گوسی سبب نرم و یا سخت شدن ماتریس سختی نمی‌گردد. به کار بردن نقطه‌های گوسی 2×2 دقت مناسبی دارند. این نتیجه یکی از ویژگی‌های مناسب راه‌کار پیشنهادی است.
- ۷- مراجع
- [۱] اخویسی، ا.ه.، احمدی م.ت.، "یک جزء جدید خمشی چهارگره‌ای در محدوده پوسته‌های نازک با استفاده از نگره رایزنر میندلین"، مجله فنی مهندسی مدرس، شماره ۲۷، بهار ۱۳۸۶، صفحه ۴۳-۵۴.
- [2] Felippa, C.A., "Recent Advances in Finite Element Templates", Chapter 4 in Computational Mechanics for the twenty-first century, ed. By B.H.V. Topping, Saxe-Coburn Publication, Edinburgh, 2000, 71-98.
- [3] Felippa, C.A., "A Survey of parameterized Variational Principles and Applications to Computational Mechanics", Invited Chapter in Sience and Perspectives in Mechanics, ed. by B. Nayroles, J. Etay and D. Renouard, END Grenoble, France, 1994, 1- 42.
- [4] Felippa, C.A., "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: II. Hybrid Functionals and the Free Formulation", Communications in Applied Numerical Methods, 1989, 5, 79-88.
- [5] Militelo, C., Felippa, C.A., The first ANDES element: 9-dof bending triangles, Comuter Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 95, 217-246.
- [6] Felippa, C.A, Haugen, B., and Militello, C., "From the Individual Element Test to Finite Element Templates: Evaluation of Patch Test", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38, 199 -229.
- [7] Felippa, C.A., Bregan, P.G., "A Triangular Bending Element Based on an Energy-Orthogonal Free Formulation", Computer

پیوست:

شکل کلی ماتریس‌های L و Q_i :

$$L_q = \begin{Bmatrix} s_{12} c_{12} - s_{41} c_{41} & -s_{12} c_{12} + s_{41} c_{41} & s_{12}^2 - c_{12}^2 + c_{41}^2 - s_{41}^2 \\ -\frac{1}{2}(c_{12}^2 x_{12} + c_{41}^2 x_{41}) & -\frac{1}{2}(s_{12}^2 x_{12} + s_{41}^2 x_{41}) & s_{12}^2 y_{12} + s_{41}^2 y_{41} \\ -\frac{1}{2}(c_{12}^2 y_{12} + c_{41}^2 y_{41}) & -\frac{1}{2}(s_{12}^2 y_{12} + s_{41}^2 y_{41}) & c_{12}^2 x_{12} + c_{41}^2 x_{41} \\ -c_{12} s_{12} + s_{23} c_{23} & s_{12} c_{12} - s_{23} c_{23} & c_{12}^2 - s_{12}^2 + s_{23}^2 - c_{23}^2 \\ -\frac{1}{2}(c_{12}^2 x_{12} + c_{23}^2 x_{23}) & -\frac{1}{2}(s_{12}^2 x_{12} + s_{23}^2 x_{23}) & s_{12}^2 y_{12} + s_{23}^2 y_{23} \\ -\frac{1}{2}(c_{12}^2 y_{12} + c_{23}^2 y_{23}) & -\frac{1}{2}(s_{12}^2 y_{12} + s_{23}^2 y_{23}) & c_{12}^2 x_{12} + c_{23}^2 x_{23} \\ -s_{23} c_{23} + c_{34} s_{34} & s_{23} c_{23} - s_{34} c_{34} & s_{34}^2 - c_{34}^2 + c_{23}^2 - s_{23}^2 \\ -\frac{1}{2}(c_{23}^2 x_{23} + c_{34}^2 x_{34}) & -\frac{1}{2}(s_{23}^2 x_{23} + s_{34}^2 x_{34}) & s_{23}^2 y_{23} + s_{34}^2 y_{34} \\ -\frac{1}{2}(c_{23}^2 y_{23} + c_{34}^2 y_{34}) & -\frac{1}{2}(s_{23}^2 y_{23} + s_{34}^2 y_{34}) & c_{23}^2 x_{23} + c_{34}^2 x_{34} \\ c_{41} s_{41} - c_{34} s_{34} & -s_{41} c_{41} + c_{34} s_{34} & s_{41}^2 - c_{41}^2 + c_{34}^2 - s_{34}^2 \\ -\frac{1}{2}(c_{41}^2 x_{41} + c_{34}^2 x_{34}) & -\frac{1}{2}(s_{41}^2 x_{41} + s_{34}^2 x_{34}) & s_{41}^2 y_{41} + s_{34}^2 y_{34} \\ -\frac{1}{2}(c_{41}^2 y_{41} + c_{34}^2 y_{34}) & -\frac{1}{2}(s_{41}^2 y_{41} + s_{34}^2 y_{34}) & c_{41}^2 x_{41} + c_{34}^2 x_{34} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_{12}^2} \{-6 & -4l_{12} c_{12} & -4l_{12} s_{12} & 6 & -2l_{12} c_{12} & -2l_{12} s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\} \\ \frac{1}{l_{13}^2} \{-6 & -4l_{13} c_{13} & -4l_{13} s_{13} & 0 & 0 & 0 & 6 & -2l_{13} c_{13} & -2l_{13} s_{13} & 0 & 0 & 0\} \\ \frac{1}{l_{41}^2} \{-6 & 4l_{41} c_{41} & 4l_{41} s_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2l_{41} c_{41} & 2l_{41} s_{41}\} \end{Bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_{12}^2} \{6 & 2l_{12} c_{12} & 2l_{12} s_{12} & -6 & 4l_{12} c_{12} & 4l_{12} s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\} \\ \frac{1}{l_{24}^2} \{0 & 0 & 0 & -6 & -4l_{24} c_{24} & -4l_{24} s_{24} & 0 & 0 & 0 & 6 & -2l_{24} c_{24} & -2l_{24} s_{24}\} \\ \frac{1}{l_{23}^2} \{0 & 0 & 0 & -6 & -4l_{23} c_{23} & -4l_{23} s_{23} & 6 & -2l_{23} c_{23} & -2l_{23} s_{23} & 0 & 0 & 0\} \end{Bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_{23}^2} \{0 & 0 & 0 & 6 & 2l_{23} c_{23} & 2l_{23} s_{23} & -6 & 4l_{23} c_{23} & 4l_{23} s_{23} & 0 & 0 & 0\} \\ \frac{1}{l_{13}^2} \{6 & 2l_{13} c_{13} & 2l_{13} s_{13} & 0 & 0 & 0 & -6 & 4l_{13} c_{13} & 4l_{13} s_{13} & 0 & 0 & 0\} \\ \frac{1}{l_{34}^2} \{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -4l_{34} c_{34} & -4l_{34} s_{34} & 6 & 2l_{34} c_{34} & 2l_{34} s_{34}\} \end{Bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_{41}^2} \{-6 & -2l_{41} c_{41} & -2l_{41} s_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -4l_{41} c_{41} & -4l_{41} s_{41}\} \\ \frac{1}{l_{24}^2} \{0 & 0 & 0 & 6 & 2l_{24} c_{24} & 2l_{24} s_{24} & 0 & 0 & 0 & -6 & 4l_{24} c_{24} & 4l_{24} s_{24}\} \\ \frac{1}{l_{34}^2} \{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2l_{34} c_{34} & 2l_{34} s_{34} & -6 & 4l_{34} c_{34} & 4l_{34} s_{34}\} \end{Bmatrix}$$

شکل کلی قالب ۴۹ عاملی برای صفحه چهار پهلوئی خمشی:

α	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{17}	β_{18}
	β_{21}	β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}	β_{27}	β_{28}
	β_{31}	β_{32}	β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}	β_{37}	β_{38}
	β_{41}	β_{42}	β_{43}	β_{44}	β_{45}	β_{46}	β_{47}	β_{48}
	β_{51}	β_{52}	β_{53}	β_{54}	β_{55}	β_{56}	β_{57}	β_{58}
	β_{61}	β_{62}	β_{63}	β_{64}	β_{65}	β_{66}	β_{67}	β_{68}

Archive of SID