

توسعه مدل عددی جهت شبیه‌سازی جریان‌های قائم به روش حجم محدود

ناصر سلیمان بیگی^۱ و حبیب حکیم‌زاده*^۲^۱ دانشجوی دکتری عمران- سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه صنعتی سهند^۲ دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی سهند

چکیده

فرض توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک در بسیاری از مدل‌سازی‌های عددی همچون مدل‌سازی عددی سیل در کانال‌ها، رودخانه‌ها و مخازن سدها نمی‌تواند بکار رود. بنابراین در این مقاله، جزئیات یک مدل عددی توسعه یافته دو بعدی در صفحه قائم برای شبیه‌سازی جریان‌های غیردائمی با توزیع فشار غیر هیدرواستاتیکی ارائه می‌شود. در مدل مذکور، معادلات رینولدز با شرایط مرزی مختلف و بدون فرض فشار هیدرواستاتیک با روش حجم محدود گسسته‌سازی می‌شوند. استفاده از این روش و شکل انتگرالی معادلات جریان، سهولت گسسته‌سازی میدان جریان و حل معادلات در شکل محافظه‌ای را در پی دارد. جهت تعیین فشار از روش دو مرحله‌ای و برای حل معادلات انفعال یافته حاصله از روش تکراری تخفیف استفاده شده است. برای حل معادلات و تعیین فشار و مولفه‌های سرعت در میدان جریان، برنامه رایانه‌ای به زبان فرترن تهیه شده است. مدل عددی مذکور برای شبیه‌سازی برخی از جریان‌های غیردائمی که در آنها شتاب قائم نسبتاً قابل توجه است مورد ارزیابی و سنجش قرار گرفته است. نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی و مطالعات سایر محققین مقایسه شده است. مقایسه نتایج، نشان دهنده آنست که مدل عددی توصیف شده توانایی پیش‌بینی صحیح را داشته و به آسانی در انواع مسائل جریان با توزیع فشار هیدرواستاتیک و غیر هیدرواستاتیک می‌تواند بکار برده شود.

واژگان کلیدی: مدل‌سازی عددی، فشار غیر هیدرواستاتیک، روش حجم محدود، جریان قائم.

۱- مقدمه

۱۹۶۹، Gregory و McNaughton در سال ۱۹۷۷، Hart در سال ۱۹۷۷، Vogiatzis در سال ۱۹۸۲، Falconer در سال ۱۹۸۶ و Flecture در سال ۱۹۸۷ از جمله افرادی هستند که اولین مطالعات را در زمینه شبیه‌سازی عددی در حالت تک بعدی آغاز نمودند [۱]. در حال حاضر از چنین مدل‌هایی در مهندسی برای پیش‌بینی اولیه از مسائل به دلیل سادگی و هزینه کمتر محاسبات، استفاده گسترده‌ای می‌شود. در مدل‌های مذکور معادلات تک‌بعدی سنت وئان مورد تحلیل قرار می‌گیرند. چنین مدل‌هایی بر فرضیاتی استوار می‌باشند که از جمله آنها می‌توان به یکنواخت بودن تقریبی جریان، کوچک بودن انحنای خطوط جریان و برقرار بودن فرض فشار هیدرواستاتیک و استفاده از معادلات شزی یا مانینگ برای محاسبه تنش برشی بستر نام برد [۲]. امروزه بیشتر چنین مدل‌سازی‌هایی به صورت نرم‌افزارهای رایانه‌ای متداول در دسترس محققین قرار گرفته است [۳]. به دلیل محدودیت‌های حالت تک‌بعدی، افرادی همچون Bradshaw در سال ۱۹۷۱ و ۱۹۷۶، Tennkes و Lumley در سال ۱۹۷۲ و Hinze در سال ۱۹۷۵ مطالعات گسترده‌ای را برای استفاده از معادلات رینولدز در شکل دوبعدی شروع کردند [۴]. استفاده از معادلات رینولدز در شکل دو بعدی در صورتی که تغییرات جریان در جهت عرض قابل صرف‌نظر نباشد امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. در صورت استفاده از معادلات دوبعدی

امروزه بررسی پدیده‌های جریان سیال با شبیه‌سازی‌های عددی، به صورت گسترده نظر پژوهشگران و محققین را به خود جلب نموده است. رشد سریع رایانه‌ها و قدرت پردازش آنها از طرفی و کاهش هزینه‌های مدل‌سازی و بررسی پدیده‌های مختلف جریان سیال با چنین روش‌هایی از طرف دیگر از جمله عواملی هستند که توجه بیش از پیش به مدل‌سازی عددی را در دهه‌های اخیر موجب شده است. مهمتر اینکه بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان بصورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل بیان نمود که معادلات حاصله بجز حالات خاص و همراه با فرضیات ساده کننده، حل دقیق ریاضی نداشته و قابل حل نمی‌باشند و جهت حل آنها باید از انواع روش‌های عددی استفاده نمود. از جمله چنین معادلاتی، می‌توان به معادلات ریاضی حاکم بر جریان سیال اشاره کرد. بررسی و حل معادلات جریان سیال جهت مطالعه پدیده‌های مرتبط با آنها بدلیل ضرورت نیاز بشر به ذخیره و نگهداری آب و بررسی مسائل مربوط به کیفیت آب امری کاملاً ضروری و لازم می‌نماید. بر همین اساس، انواع مدل‌سازی‌های عددی از اوایل قرن بیستم میلادی از رشد و پیشرفت قابل توجهی برخوردار شده است. اولین تلاش‌ها برای مدل‌سازی عددی جریان سیال، مدل‌سازی به صورت تک بعدی بوده است [۱]. King و Sawyer در سال

محاسبات در نظر گرفته شود. همچنین در سال ۲۰۰۲ Ciraolo و همکارانش [۱۰] تحقیقاتی بر روی تأثیر فرض فشار هیدرواستاتیک بر پروفیل سرعت‌های افقی انجام دادند. نتیجه حاصله نشان می‌داد که فرض توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک در برخی مدل‌سازی‌ها، خطاهایی را در پروفیل‌های سرعت ایجاد می‌نماید و این فرض اگر چه در بسیاری از مدل‌سازی‌ها به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد اما در صورت عدم دقت در کاربرد فرض مذکور، در برخی مسائل، اختلاف قابل توجهی در مقادیر مولفه‌های سرعت جریان افقی ایجاد می‌شود که نتایج آزمایشگاهی نیز موارد مذکور را تأیید می‌نمایند. با توجه به محدودیت‌های ذکر شده در بالا، لزوم بکارگیری معادلات رینولدز به صورت کامل آشکار می‌گردد. بر همین اساس در این مقاله در نظر است معادلات ناویر-استوکس در صفحه قائم و بدون فرض فشار هیدرواستاتیک جهت حل مسائل جریان سیال مورد استفاده قرار گیرند. بررسی نتایج حاصل از انواع مدل‌سازی‌های عددی نشان دهنده آن است که دقت نتایج حاصله به نحوه گسسته‌سازی میدان فیزیکی مورد مطالعه و گسسته‌سازی معادلات ریاضی حاکم بر جریان سیال بستگی دارد [۱۱]. علاوه بر خطاهای حاصل از نحوه گسسته‌سازی معادلات، خطاهای گسسته‌سازی فضای فیزیکی نیز می‌توانند تأثیر بسزایی بر دقت نتایج حاصله داشته باشند به همین دلیل باید گسسته‌سازی فضاهای فیزیکی با دقت بیشتری در مسائل صورت گیرد که از بین انواع روش‌های گسسته‌سازی، روش‌های حجم محدود و المان محدود از دقت بالایی برخوردار می‌باشند [۶]. اهمیت بکارگیری روش‌های حجم محدود و المان محدود در فضاهای پیچیده هندسی موضوعی است که در بیشتر مسائل واقعی، محققین همواره با آن روبرو بوده‌اند، امروزه با پیشرفت روش‌های عددی به موازات پیشرفت رایانه‌ها، امکان بررسی و تحلیل انواع مختلفی از مسائل در اختیار پژوهشگران قرار دارد. در این مقاله از روش حجم محدود بعنوان یکی از قویترین ابزارهای مدل‌سازی عددی جریان استفاده می‌شود [۱۲ و ۱۳]. در این مقاله گسسته‌سازی معادلات با روش مرکزی و مقادیر متغیرها در وجوه المان‌ها با استفاده از متوسط‌گیری وزنی استخراج شده است. در نهایت مدل عددی توسعه یافته با نتایج مدل‌های آزمایشگاهی مورد سنجش و ارزیابی قرار گرفته است. مدل‌های مذکور غالباً به عنوان مینا برای مقایسه در نظر گرفته می‌شوند که نتایج حاصله نشان دهنده آن است که مدل عددی ارائه شده در این مقاله در عین سادگی با دقت قابل قبولی قادر به شبیه‌سازی انواع جریان‌های سیال می‌باشد.

جریان سیال، لازم است سرعت در جهت قائم نسبت به سرعت در جهات افقی قابل صرف‌نظر باشد و توزیع فشار در میدان محاسباتی به فشار هیدرواستاتیکی نزدیک باشد. در این حالت معادله پیوستگی به معادله‌ای برای تعیین سطح آزاد آب تبدیل خواهد شد [۵]. در چنین مدل‌سازی‌هایی جهت مطالعه آشفتگی و پدیده‌های مربوط به جریان سیال، لازم است از معادلات آشفتگی انتگرال‌گیری شده در عمق و یا معادلات ساده دیگری استفاده نمود. مدل‌های ریاضی دو بعدی انتگرال‌گیری شده در دهه‌های اخیر در بسیاری از مدل‌سازی‌های ریاضی جریان سیال به کار برده شده‌اند. امروزه با افزایش قدرت پردازش رایانه‌ها، استفاده از مدل‌های سه‌بعدی جریان سیال که فرض فشار هیدرواستاتیک در آنها اعمال شده است به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند [۶]. در چنین مدل‌هایی، حل معادلات سه‌بعدی رینولدز با صرف‌نظر کردن از شتاب‌های قائم در معادله ممنتوم و در جهت قائم، به معادله تغییرات فشار با عمق تبدیل شده و به صورت مستقل می‌توان فشار را محاسبه نمود. معادله پیوستگی، مقادیر سرعت در جهت قائم را بدست خواهد داد و با استفاده از معادله سینماتیکی سطح آزاد آب، می‌توان تغییرات تراز آب را محاسبه نمود [۷]. نمونه‌ای از چنین مطالعاتی را می‌توان در کار افرادی مانند Cahyono در سال ۱۹۹۳، Rosati، در سال ۱۹۹۸ و Blumberg در سال ۱۹۹۹ و Sabbagh yazdi در سال ۲۰۰۸ دید که با فرض توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک به مدل‌سازی عددی سه‌بعدی جریان سیال پرداخته‌اند [۸]. فرض فشار هیدرواستاتیک در صورتی قابل قبول می‌باشد که شتاب قائم جریان از تغییرات فشار، بویژه شتاب جاذبه زمین بسیار کوچکتر باشد. چنین فرضی حل مدل عددی را در حالت سه‌بعدی بسیار ساده می‌نماید اما استفاده از این فرض با محدودیت‌های جدی روبرو می‌باشد و همواره نمی‌تواند فرض قابل قبولی باشد. مدل‌سازی عددی جریان‌های سیلابی، جریان‌های جزر و مدی، امواج ایجاد شده بر سطح آب و تغییرات سریع بستر آب در رودخانه‌ها، مخازن سدها و دریاچه‌ها با فرض فشار هیدرواستاتیک منجر به نتایج قابل اطمینانی نخواهد شد [۹]. Namin و همکارانش [۹] در سال ۲۰۰۱ مطالعاتی را بر روی نتایج مدل عددی حاصل از فرض توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک و غیرهیدرواستاتیک انجام دادند. مطالعه آنها نشان می‌داد که در مدل‌هایی که فرض توزیع فشار صادق نیست در صورت فرض چنین توزیع فشاری، پروفیل سرعت در جهت قائم با نتایج آزمایشگاهی اختلاف زیادی نشان خواهد داد و بنابراین لازم است در چنین مدل‌سازی‌هایی، شتاب قائم در

۲- معادلات هیدرودینامیک حاکم بر جریان سیال

در حالت عمومی معادلات حاکم بر جریان‌های آشفته غیردائمی و تراکم‌ناپذیر به صورت معادلات رینولدز بیان می‌گردند که شکل انتگرالی این معادلات، در روش حجم محدود مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حالت دوبعدی و در صفحه قائم، معادله پیوستگی عبارت است از:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

با بکاربردن قضیه گوس معادله فوق می‌تواند به شکل زیر نوشته شود [۱۴، ۱۳]:

$$\oint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

در معادله فوق \vec{V} بردار سرعت، ∇ حجمی از المان سیال مورد مطالعه و S مساحت و جبهه المان می‌باشد. معادله ممنتم نیز در شکل انتگرالی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{V} dV + \oint_S \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \\ \int_V \vec{F}_V dV - \frac{1}{\rho} \oint_S P \vec{I} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\rho} \oint_S \vec{\tau} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه فوق \vec{F}_V بردار نیروهای بدنه‌ای، P فشار، \vec{I} بردارهای یکه محوره‌های مختصات و $\vec{\tau}$ بردار تنش‌ها می‌باشند. معادله فوق برای جهات X و Y به شکل زیر نوشته خواهند شد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV + \oint_S u (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \\ \int_V f u dV - \frac{1}{\rho} \oint_S P \hat{i} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\rho} \oint_S \vec{\tau}_x \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V v dV + \oint_S v (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \\ \int_V - f u dV - \frac{1}{\rho} \oint_S P \hat{j} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\rho} \oint_S \vec{\tau}_y \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (5)$$

در روابط فوق t بیانگر زمان، ρ جرم حجمی سیال، P فشار، f شتاب کوریولیس، u و v مولفه‌های سرعت، \hat{i} و \hat{j} بردارهای یکه محوره‌های مختصات و $\vec{\tau}_x$ و $\vec{\tau}_y$ بردار تنش‌ها در امتداد مورهای مختصات می‌باشد.

۲-۱- گسسته‌سازی معادلات هیدرودینامیک حاکم بر جریان سیال

در این پژوهش، عمل گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال، بر روی شبکه‌بندی جابجا شده انجام گرفته که در شکل (۱) موقعیت المان‌ها جهت گسسته‌سازی معادلات نمایش داده شده است. استفاده از این نوع شبکه‌بندی موجب افزایش پایداری عددی خواهد شد [۱۵]. حال با در نظر گرفتن سیستم شبکه‌بندی شکل (۱) معادلات حاکم بر جرم و اندازه حرکت، بر روی هر المانی از فضای فیزیکی مورد مطالعه گسسته‌سازی می‌شوند که شکل گسسته شده معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{surface} \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u \nabla) + \sum_{surface} u (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \\ (f v \nabla) - \frac{1}{\rho} \sum_{surface} (P \hat{i} \cdot d\vec{S}) + \frac{1}{\rho} \sum_{surface} \vec{\tau}_x \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (v \nabla) + \sum_{surface} v (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \\ (-f u \nabla) - \frac{1}{\rho} \sum_{surface} (P \hat{j} \cdot d\vec{S}) + \frac{1}{\rho} \sum_{surface} \vec{\tau}_y \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (8)$$

معادله ممنتم در جهت X (معادله (۷)) بر روی المان مستطیلی نشان داده شده در شکل (۱-ب) در نقطه $(i + \frac{1}{2}, j)$ به صورت معادله (۹) نوشته خواهد شد. بایستی در نظر داشت اگر گسسته‌سازی معادلات فوق بر روی المان‌های چهار وجهی دلخواهی انجام شود، نتیجه گسسته‌سازی با معادله (۹) متفاوت خواهد بود. در اینصورت معادله گسسته شده، پیچیده و با معادله (۹) ارائه شده در این مقاله اختلاف بسیار زیادی خواهد داشت [۱۶].

$$\begin{aligned} \frac{(u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n)}{\Delta t} \nabla_{i+1/2,j} + [u^2 \cdot \Delta y]_{i+1/2,j} + \\ [uv \cdot \Delta x]_{i+1/2,j+1/2} - [u^2 \cdot \Delta y]_{i,j} - [uv \cdot \Delta x]_{i+1/2,j-1/2} \\ = (f v \nabla)_{i+1/2,j} - \frac{1}{\rho} [(P \Delta y)_{i+1,j} - (P \Delta y)_{i,j}] + \\ \frac{1}{\rho} [(\tau_{xx} \Delta y)_{i+1,j} - (\tau_{xx} \Delta y)_{i,j} + (\tau_{xy} \Delta x)_{i+1/2,j+1/2} \\ - (\tau_{xy} \Delta x)_{i+1/2,j-1/2}] \end{aligned} \quad (9)$$

معادله ممنت درجهت قائم نیز، همانند رابطه فوق، برای شبکه‌بندی منظم مستطیلی در نقطه $(i, j + \frac{1}{2})$ مطابق شکل (۱) - (ج) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

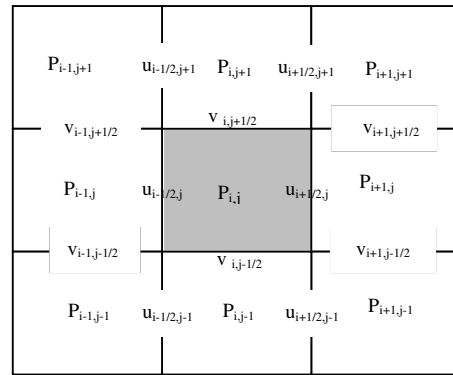
$$\begin{aligned} & \frac{(v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n)}{\Delta t} + \frac{[v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2]}{\Delta y} + \\ & \frac{[(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i-1/2,j+1/2}]}{\Delta x} = (-fu)_{i,j+1/2} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{[(P)_{i,j+1} - (P)_{i,j}]}{\Delta y} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{(\tau_{yy})_{i,j+1} - (\tau_{yy})_{i,j}}{\Delta y} \right. \\ & \left. + \frac{(\tau_{xy})_{i+1/2,j+1/2} - (\tau_{xy})_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

هر کدام از پارامترهای معادلات فوق باید در موقعیت قراردادی تعریف شده، تعیین شوند. در کار پژوهشی حاضر، برای تعیین پارامترها در نقاطی که پارامتر مورد بررسی در شبکه جابجا شده در آن نقطه قرار نگرفته است از روش میانگین وزنی به شکل زیر استفاده شده است:

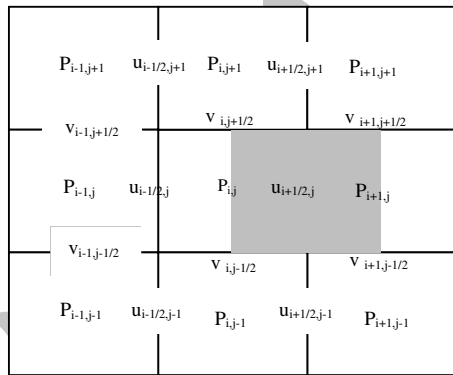
$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}) \\ u_{i+1,j} &= \frac{1}{2}(u_{i+1/2,j} + u_{i+3/2,j}) \\ (uv)_{i+1/2,j+1/2} &= \left(\frac{u_{i+1/2,j+1} \cdot \Delta y_{i+1/2,j}}{\Delta y_{i+1/2,j} + \Delta y_{i+1/2,j+1}} + \right. \\ & \left. \frac{u_{i+1/2,j} \cdot \Delta y_{i+1/2,j+1}}{\Delta y_{i+1/2,j} + \Delta y_{i+1/2,j+1}} \right) \times \left(\frac{v_{i,j+1/2} \cdot \Delta x_{i+1,j+1/2}}{\Delta x_{i,j+1/2} + \Delta x_{i+1,j+1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{v_{i+1,j+1/2} \cdot \Delta x_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i,j+1/2} + \Delta x_{i+1,j+1/2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (uv)_{i+1/2,j-1/2} &= \left(\frac{u_{i+1/2,j} \cdot \Delta y_{i+1/2,j-1}}{\Delta y_{i+1/2,j-1} + \Delta y_{i+1/2,j}} + \right. \\ & \left. \frac{u_{i+1/2,j-1} \cdot \Delta y_{i+1/2,j}}{\Delta y_{i+1/2,j-1} + \Delta y_{i+1/2,j}} \right) \times \left(\frac{v_{i+1,j-1/2} \cdot \Delta x_{i,j-1/2}}{\Delta x_{i+1,j-1/2} + \Delta x_{i,j-1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{v_{i,j-1/2} \cdot \Delta x_{i+1,j-1/2}}{\Delta x_{i+1,j-1/2} + \Delta x_{i,j-1/2}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

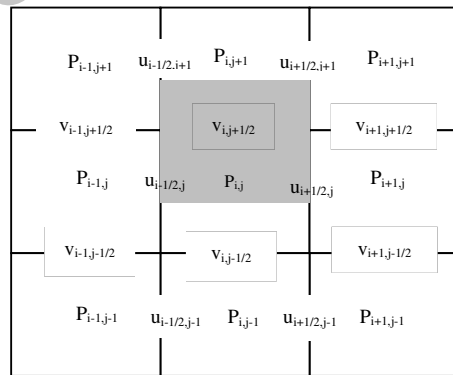
مقادیر تنش‌های رینولدز در معادلات ممنت از روی نظریه لزجت گردایی به شکل زیر بیان می‌شوند:



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱- موقعیت متغیرهای جریان سیال بر روی شبکه جابجا شده

با تقسیم معادله بالا بر حجم المان، معادله فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{(u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n)}{\Delta t} + \frac{[u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2]}{\Delta x} + \\ & \frac{[(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,j-1/2}]}{\Delta y} = (fv)_{i+1/2,j} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{[(P)_{i+1,j} - (P)_{i,j}]}{\Delta x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{(\tau_{xx})_{i+1,j} - (\tau_{xx})_{i,j}}{\Delta x} \right. \\ & \left. + \frac{(\tau_{xy})_{i+1/2,j+1/2} - (\tau_{xy})_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

جدا از هم و به صورت مجزا حل نمود. از طرفی اگر معادلات جریان سیال به صورت کامل و بدون فرض فشار هیدرواستاتیک در نظر گرفته شوند معادله دیگری جهت تعیین فشار وجود ندارد. جهت حل همزمان چنین معادلاتی لازم است از روش‌های تکراری همچون SIMPLE و یا روش دو مرحله‌ای استفاده شود [۱۸]. در عمل روش‌های مختلفی بسته به نوع گسسته‌سازی معادلات فوق استخراج می‌شود. در مطالعه حاضر جهت حل معادلات فوق از روش دو مرحله‌ای استفاده شده است. در چنین روشی در هر گام تکراری، مولفه‌های سرعت استخراج می‌شوند که بعداً اصلاح می‌شوند [۱۸].

$$\frac{\bar{v}^* - \bar{v}^n}{\Delta t} \nabla = \left[\int_{\bar{v}} \bar{F}_v d\bar{v} + \frac{1}{\rho} \oint_{\bar{s}} \bar{\tau} \cdot d\bar{S} - \oint_{\bar{s}} \bar{V} (\bar{V} \cdot d\bar{S}) \right]^n \quad (18)$$

مقادیر سرعت استخراج شده از رابطه (۱۸) در معادله پیوستگی صدق نخواهند کرد و لازم است مقادیر فوق اصلاح شوند که این اصلاح از روی معادله پیوستگی انجام می‌گیرد. در نهایت مقادیر فشار و سرعت در معادلات ناویر-استوکس و پیوستگی صدق خواهند کرد.

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} \nabla = \left[\int_{\bar{v}} \bar{F}_v d\bar{v} + \frac{1}{\rho} \oint_{\bar{s}} \bar{\tau} \cdot d\bar{S} - \oint_{\bar{s}} \bar{V} (\bar{V} \cdot d\bar{S}) \right]^n$$

$$\sum \bar{V}^{n+1} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (19)$$

در روابط فوق n و $n+1$ بیانگر گام‌های تکراری حل معادله می‌باشند. با استفاده از دو رابطه (۱۸) و (۱۹) معادلاتی برای اصلاح مقادیر سرعت و فشار استخراج می‌شوند که عبارتند از:

$$\Delta P' = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{v}^*$$

$$\bar{v}' = -\frac{\Delta t}{\rho} \bar{\nabla} P' \quad (20)$$

برای شروع فرآیند تکرار، مقادیر اولیه‌ای برای میدان فشار حدس زده شده (گام n) و همچنان که الگوریتم پیش می‌رود، مقادیر حدسی اولیه به تدریج بهبود می‌یابد و این فرآیند تا رسیدن به همگرایی میدان‌های سرعت و فشار (گام $n+1$) ادامه پیدا می‌کند. مقادیر حدسی اولیه برای فشار، می‌تواند فشار هیدرواستاتیک انتخاب شود. در حالت کلی، الگوریتم حل را می‌توان در مراحل زیر خلاصه نمود:

$$(\tau_{xx})_{i+1,j} = -\rho(\overline{u'u'})_{i+1,j} = 2\mu_{t_{i+1,j}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i+1,j} =$$

$$2\mu_{t_{i+1,j}} \frac{u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j}}{\Delta x_{i+1,j}} \quad (12)$$

$$(\tau_{xx})_{i,j} = -\rho(\overline{u'u'})_{i,j} = 2\mu_{t_{i,j}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} =$$

$$2\mu_{t_{i,j}} \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\Delta x_{i,j}} \quad (14)$$

و بدین ترتیب برای تنش برشی خواهیم داشت:

$$(\tau_{xy})_{i+1/2,j+1/2} = \mu_{t_{i+1/2,j+1/2}} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+1/2,j+1/2}$$

$$= \mu_{t_{i+1/2,j+1/2}} \left[\frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j}}{\Delta y_{i+1/2,j+1/2}} + \right.$$

$$\left. \frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2,j+1/2}} \right] \quad (15)$$

$$(\tau_{xy})_{i+1/2,j-1/2} = \mu_{t_{i+1/2,j-1/2}} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{i+1/2,j-1/2}$$

$$= \mu_{t_{i+1/2,j-1/2}} \left[\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i+1/2,j-1}}{\Delta y_{i+1/2,j-1/2}} + \right.$$

$$\left. \frac{v_{i+1,j-1/2} - v_{i,j-1/2}}{\Delta x_{i+1/2,j-1/2}} \right] \quad (16)$$

و سرانجام جهت محاسبه لزجت گردابی از روابط مدل دو لایه‌ای استفاده شده است [۱۷]:

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\kappa z < 0.1H \Rightarrow l_m = \kappa z$$

$$\kappa z \geq 0.1H \Rightarrow l_m = 0.1H \quad (17)$$

در این رابطه κ عدد ون کارمن ($\kappa \cong 0.41$) و H ارتفاع کلی جریان می‌باشد.

۲-۲- حل معادلات ممنتوم و پیوستگی

معادلات ناویر-استوکس بیانگر ارتباط بین فشار و مولفه‌های سرعت می‌باشند که کاملاً بهم مرتبط می‌باشند و نمی‌توان آنها را

بنابراین سرعت‌های عمود بر مرز بسته برابر با صفر قرار داده می‌شوند. در کار پژوهشی حاضر مرز بسته با شرط عدم لغزش به کار رفته است که در آن سرعت‌های مماس بر مرز بسته برابر با صفر در نظر گرفته شده است.

۳-۳- شرط مرزی سطح آزاد

در مطالعه حاضر سطح آزاد به صورت افقی در نظر گرفته شده و از تغییرات سطح آزاد جریان در میدان محاسباتی صرف نظر شده است. در شرط مرزی سطح آزاد و در غیاب تنش‌های ایجاد شده از باد، می‌توان گرادیان‌های سرعت‌های افقی در جهت قائم را صفر در نظر گرفت [۷]. همچنین لایه مذکور را می‌توان عاری از آشفتگی در نظر گرفت یعنی تمام تنش‌های آشفتگی در سطح آزاد برابر صفر می‌باشند و فشار در روی لایه مذکور، فشار اتمسفر می‌باشد [۱۹].

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

$$P = P_{atm}$$

وزش باد بر روی سطح آزاد موجب ایجاد تنش‌های برشی خواهد شد که با روابط مختلف قابل محاسبه می‌باشند که به عنوان نمونه می‌توان به رابطه زیر اشاره کرد که در این مطالعه استفاده شده است [۲۰]:

$$\tau_{xy} = C_d \rho_a w_x w_s \quad (23)$$

در رابطه فوق (w_s) سرعت وزش باد در ارتفاع ۱۰ متری از سطح آب، (w_x) مولفه افقی سرعت وزش باد در جهت X و ρ_a جرم حجمی هوا می‌باشد. C_d ضریب عددی می‌باشد که به شکل‌های مختلفی تعریف شده است که در این مطالعه برای این ضریب، از روابط زیر استفاده شده است [۸]:

$$w_s (m/sec) \leq 1 \Rightarrow C_d = 0.00125 \times w_s^{-0.2}$$

$$1 < w_s (m/sec) \leq 15 \Rightarrow C_d = 0.0005 \times w_s^{-0.5}$$

$$w_s (m/sec) > 15 \Rightarrow C_d = 0.0026 \quad (24)$$

۳-۴- شرط مرزی بستر

بر روی بستر، تنش‌های برشی ایجاد خواهد شد که در جهت عکس حرکت جریان سیال می‌باشد. در این مورد نیز فرمول‌های مختلفی برای تعریف تنش برشی بستر پیشنهاد شده است اما

(۱) اختصاص مقادیر اولیه فرضی برای میدان فشار.

(۲) حل معادلات ناویر- استوکس و استخراج سرعت‌های جدید (\vec{V}^*) در کل میدان مورد مطالعه.

(۳) حل معادله تصحیح فشار جهت استخراج (p').

(۴) محاسبه فشار در گام تکراری جدید (P^{n+1}) با جمع دو مقدار (P') و (P^n).

(۵) محاسبه مقادیر جدید برای سرعت در میدان جریان با حل معادله تصحیح سرعت.

(۶) تغییر مقادیر فشار میدان جریان (P^n) با (P^{n+1}) و تکرار مراحل (۲) تا (۶) و رسیدن به همگرایی مورد نظر.

۳- شرایط مرزی

بطور کلی در کناره‌های محدوده مورد حل، شرایط مرزی به چهار دسته قابل تقسیم می‌باشد:

(۱) مرز باز

(۲) مرز بسته

(۳) مرز سطح آزاد

(۴) مرز بستر

۳-۱- شرط مرزی باز

در مطالعه حاضر، سطحی که جریان از آن وارد میدان می‌شود و یا از میدان مورد بحث به بیرون منتقل می‌شود به عنوان مرز باز نامگذاری شده است. در مرز باز اگر مقادیر متغیرها معلوم باشند، مقادیر مذکور به صورت مستقیم در معادلات ناویر- استوکس به جای متغیرها قرار می‌گیرند. در صورتی که در مرز باز مقادیر متغیرها معلوم نباشند، می‌توان عدم تغییرات متغیرهای میدان را عمود بر مرز در نظر گرفت، به عبارت دیگر می‌توان گرادیان‌های متغیرهای جریان را عمود بر مرز مذکور برابر صفر در نظر گرفت یعنی از روابطی به شکل زیر برای سرعت‌ها و سایر متغیرها استفاده خواهد شد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

۳-۲- شرط مرزی بسته

سطحی که جریان سیال از آن نتواند وارد میدان شود و یا از طریق آن سطح از میدان خارج شود، مرز بسته نامیده می‌شود. چون در مرز بسته نفوذناپذیر، امکان عبور جریان وجود ندارد

۴-۱- مدل سازی عددی جریان در کانال مستقیم روباز

در ابتدا جهت ارزیابی مدل تهیه شده از نتایج یک مدل آزمایشگاهی کانال روباز استفاده شده است. نتایج مدل آزمایشگاهی مورد بحث در مقالات افرادی مانند Jobson و Sayre در سال ۱۹۷۰ و Celik و Rodi در سال ۱۹۸۸ و Hakimzadeh در سال ۱۹۹۷ مورد ارزیابی و بحث قرار گرفته است [۲۰].

مدل آزمایشگاهی مورد نظر، کانال مستقیمی به طول ۶۰/۹۶ متر، عرض ۲/۴۳۸ متر و ارتفاع ۱/۲۱۹ متر می باشد که در مطالعه حاضر از عرض کانال صرف نظر شده است. دبی حجمی جریان در کانال، مقدار ثابت ۰/۲۸۵ مترمکعب در هر ثانیه و آب با عمق ثابت ۰/۴۰۷ متر جریان داشته است. زبری معادل بستر در مقالات مذکور برابر با $K_s/h = 0.2$ انتخاب شده است. جهت مدل سازی عددی، کانال توصیف شده در جهت افقی (طول کانال) به ۱۲۵ قسمت و در جهت قائم به دلیل کوچکی عمق آب در کانال، به ۱۵ قسمت مساوی تقسیم شده است، هر چند که در مدل عددی تهیه شده امکان استفاده از شبکه های نامنظم فراهم شده است. در این مدل سطح آزاد آب در کانال آزمایشگاهی همواره به صورت افقی و عاری از تنش های ناشی از باد در نظر گرفته شده است.

در شکل (۲) توزیع پروفیل سرعت در طول قسمتی هایی از کانال نشان داده شده است. از شکل نشان داده شده مشاهده می شود که در ابتدای کانال، توزیع سرعت به صورت تقریباً یکنواخت می باشد، اما با توسعه یافتن جریان در کانال، شکل پروفیل توزیع سرعت در عمق کانال تغییر می کند و اثر تنش های برشی بستر بیشتر نمایان می شود. توسعه جریان در قسمت های مختلف کانال در شکل (۲) نشان داده شده است.

به طور عموم برای محاسبه تنش برشی بستر روابط زیر مورد استفاده قرار می گیرند [۲۱]:

$$P\left(-u'v'\right)_{-h} = P V_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \quad (25)$$

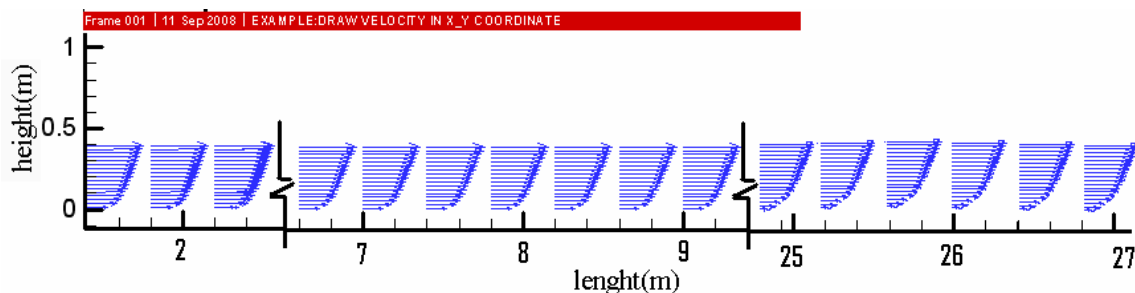
در رابطه فوق $\rho(-u'v')_{-h}$ = تنش برشی بستر و u_* = سرعت برشی بستر می باشد. با فرض پروفیل لگاریتمی سرعت، عبارت زیر برای تنش برشی بستر به دست می آید [۲۰].

$$\left(-u'v'\right)_{-h} = \bar{u}|\bar{u}| \left[2.5 \ln \left(\frac{30 d}{k_s} \right) \right]^{-2} \quad (26)$$

که در رابطه فوق d = ضخامت لایه بستر و k_s = طول معادل زبری نیکورادزه می باشد. در برخی از مطالعات جهت محاسبه تنش برشی بستر از فرض توزیع لگاریتمی سرعت استفاده شده است که در چنین حالتی جهت محاسبه ضریب اصطکاک باید از روابط کبروک- وایت، مانینگ و ... استفاده شود [۲۱].

۴- ارزیابی مدل عددی

در این بخش مدل عددی توصیف شده در بالا برای دو کانال آزمایشگاهی، مورد بحث و ارزیابی قرار می گیرد. مدل نخست جهت شبیه سازی جریان آشفته در کانال مستقیم و مدل دوم جهت شبیه سازی جریان های گردشی ناشی از وزش باد بر روی سطح آب در کانالی مستقیم مورد مطالعه قرار گرفته است. هدف از بررسی دو کانال، علاوه بر ارزیابی دقت مدل عددی تهیه شده، بررسی تأثیر شتاب جاذبه زمین بر نتایج حاصله از مدل سازی های عددی و استفاده از فرض فشار هیدرواستاتیک است.



شکل ۲- پروفیل سرعت در قسمتی از کانال روباز

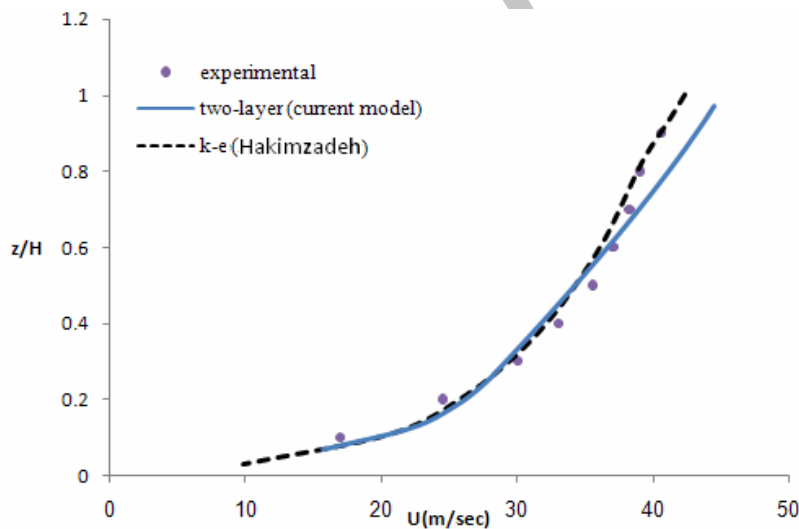
پیوستگی در ارتفاع کانال لازم است جهت حرکت جریان در قسمت بالای کانال در جهت وزش باد و در قسمت نزدیکی بستر کانال، در جهت عکس وزش باد باشد.

در شکل (۴) نمونه‌ای از نتایج عددی، برای جریان گردشی ناشی از وزش باد نمایش داده شده است. از روی شکل مشخص است که مولفه سرعت قائم در این مدل نقش مهمی ایفا می‌کند و فرض فشار هیدرواستاتیک در این نمونه آزمایشگاهی نمی‌تواند فرض کاملاً درستی باشد. Knapp و Baines در سال ۱۹۶۵ مطالعاتی بر روی کانالی که تحت تأثیر تنش‌های ناشی از وزش باد بر سطح کانال قرار گرفته بود، انجام دادند که نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی مدل مذکور در مقالات مختلف ارائه شده است [۲۲].

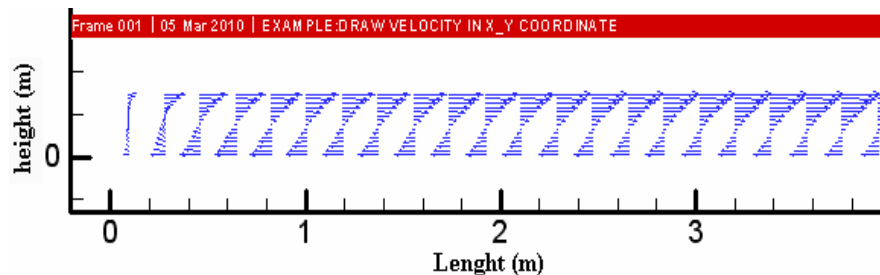
در شکل (۳) مقایسه نتایج توزیع سرعت در عمق کانال از این مطالعه با نتایج آزمایشگاهی و عددی Hakimzadeh [۲۱] نشان داده شده است. در مدل عددی Hakimzadeh [۲۱] برای مدل سازی آشفتگی از مدل دو معادله‌ای $k-\epsilon$ استفاده شده است، در حالیکه در مدل عددی حاضر از مدل صفر معادله‌ای طول اختلاط دو لایه استفاده شده است. مطابق شکل (۳) نتایج مدل عددی حاضر انطباق خوبی با نتایج مدل آزمایشگاهی و مدل عددی Hakimzadeh [۲۱] نشان می‌دهند. اختلاف در قسمت بالای نمودار، ناشی از تعریف متفاوت سطح آزاد در مدل حاضر و مدل عددی مذکور می‌باشد.

۴-۲- مدل سازی عددی جریان ناشی از وزش باد

دومین مدل آزمایشگاهی مطالعه شده، کانال روبازی است که دو انتهای آن مرز بسته می‌باشد و وزش باد بر روی کانال موجب ایجاد جریان گردشی در عمق کانال می‌شود. جهت برقراری معادله



شکل ۳- سنجش سرعت در عمق کانال با نتایج آزمایشگاهی و مدل عددی با نتایج مدل حاضر



شکل ۴- بردار سرعت در کانال تحت تنش برشی ناشی از باد

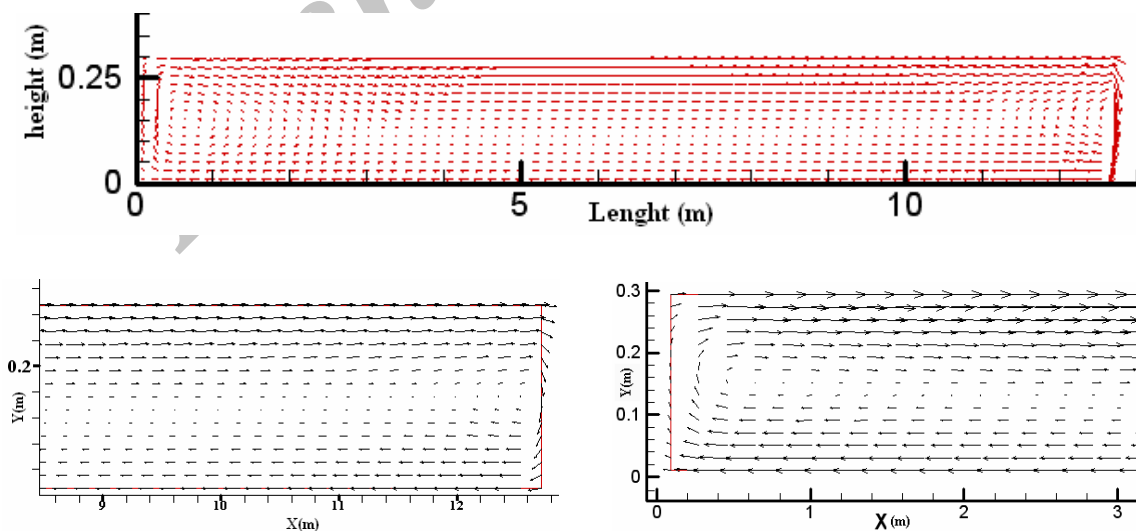
اعداد مذکور در مطالعه حاضر، کانال در جهات طول و عمق به ترتیب به ۷۰ و ۱۰ شبکه گسسته گردید. کانال توصیف شده در بالا با همان ابعاد، جهت ارزیابی دقت مدل عددی تهیه شده در پروژه تحقیقاتی حاضر، بکار رفته که نتایج زیر، حاصل مدل عددی کانال مورد بحث می‌باشد.

در شکل (۵) خطوط جریان در طول کانال رسم شده است. جهت نمایش بهتر خطوط، ابتدا و انتهای کانال به صورت بزرگ در پایین شکل مذکور نشان داده شده است. از روی شکل‌ها دیده می‌شود که خطوط جریان، تغییرات شدید اشاره شده در مرجع [۹] را از خود نشان نمی‌دهد که این بدلیل استفاده از معادلات کامل بجای فرض توزیع فشار بصورت هیدرواستاتیک می‌باشد. همچنین در شکل (۶) مدل آشفتگی دو لایه‌ای Hakimzadeh با مدل آشفتگی دو لایه‌ای بکار برده شده در پروژه تحقیقاتی حاضر مقایسه شده است [۲۰]. نتیجه حاصل از مدل مذکور بصورت خطچین و نتیجه حاصل از مدل عددی حاضر با خط پر نشان داده شده است. از روی شکل دیده می‌شود که دو مدل عددی انطباق خوبی با هم دارند و تا حدود زیادی توانسته‌اند نتایج تجربی را پیش‌بینی کنند. نکته مهمتر اینکه مدل دو بعدی مطالعه شده توانسته نتایج مدل سه‌بعدی Hakimzadeh [۲۱] را که تغییرات سطح آزاد در آنها در نظر گرفته شده با دقت قابل قبولی پیش‌بینی نماید.

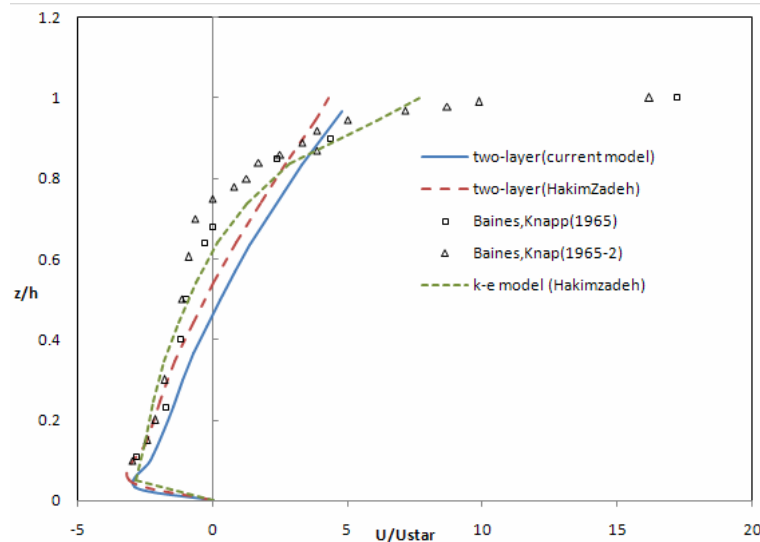
Leutheusser و Tsanis در سال ۱۹۸۸ بر روی کانال مذکور مطالعاتی انجام دادند و نتیجه گرفتند که برای حالت کاملاً توسعه یافته و تنش تک‌بعدی بدون در نظر گرفتن دوران کوریولیسی، معادله بقای جرم ایجاب می‌کند که شار عبوری جریان در جهت قائم برابر صفر و توزیع تنش برشی در جهت قائم خطی باشد [۲۳]. از آن زمان به بعد کانال مذکور بارها توسط محققین دیگری مانند Falconer و Hakimzadeh [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته است [۲۱].

در سال ۲۰۰۱، Namin و همکارانش [۹] کانال مشابهی را که تحت تأثیر تنش برشی ناشی از وزش باد قرار گرفته بود، مورد مدل‌سازی عددی قرار دادند. در این مطالعه، نتایج برای دو حالت کامل (بدون فرض فشار هیدرواستاتیک) و فرض فشار هیدرواستاتیک استخراج شده بود. نتایج حاصله، اختلاف آشکاری را بین دو حالت نشان می‌دادند. خطوط جریان و پروفیل سرعت در این دو حالت اختلاف زیادی نسبت به هم داشتند و براین اساس استفاده از معادلات در حالت کامل توصیه شده بود.

در این مقاله آزمایش انجام شده توسط Knapp و Baines [۲۲]، که کانال روباز مستقیم مستطیلی شکلی بوده، مورد مطالعه قرار گرفته است. عمق آب در این کانال برابر با 0.3048 متر و زبری بستر کانال برابر با 0.3521 میلی‌متر اندازه‌گیری شده و کانال تحت تأثیر وزش باد با سرعت $3/901$ متر بر ثانیه قرار گرفته بود. در مطالعه Hakimzadeh [۲۱] کانال مذکور با ضریب مقاومت ناشی از باد (γ) برابر با $2/1 \times 10^{-3}$ و اندازه شبکه‌ها در جهات افقی و عرضی برابر با $0/183$ متر مدل‌سازی عددی شده بود. با انتخاب



شکل ۵- بردار سرعت در کانال تحت تنش برشی ناشی از باد



شکل ۶- مقایسه نتایج مدل عددی Hakimzadeh [۲۱] با مدل عددی حاضر

۵- نتیجه گیری

در این مقاله جزئیات مدل عددی دوبعدی جریان کامل (بدون فرض فشار هیدرواستاتیک) ارائه شد. با استفاده از مدل عددی حاضر، محاسبه فشار و سرعت‌ها همزمان با هم مقدور می‌باشند. در این مدل، افزودن روابط مورد نظر کاربر و یا استفاده از انواع شبکه بندی‌ها به راحتی امکان پذیر می‌باشد. بر همین اساس در مدل عددی حاضر، روش حجم محدود برای گسسته سازی معادلات رینولدز بکار رفته است که مدل سازی فضاهای پیچیده هندسی را به راحتی ممکن می‌سازد. در این مطالعه، جهت گسسته سازی معادلات از روش مرکزی و جهت یافتن مقادیر متغیرها در وجوه شبکه‌ها از متوسط گیری وزنی استفاده شده است که در عین سادگی به نتایج قابل قبولی منتهی شده است. در مطالعات بسیاری از پژوهشگران، استفاده از مدل‌هایی که در آنها توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک در نظر گرفته نشده است، توصیه شده است. بر همین اساس در این مقاله جهت ارزیابی مدل عددی ارائه شده، جریان گردشی ناشی از وزش باد بر روی سطح آب مورد توجه قرار گرفت.

بر اساس نتایج استخراج شده از مدل عددی حاضر در جریان‌های بدون فرض فشار هیدرواستاتیک و با فرض فشار هیدرواستاتیک و مقایسه آنها با نتایج آزمایشگاهی، مدل عددی حاضر را می‌توان در انواع مدل سازی‌های عددی به راحتی بکار گرفت که علاوه بر سادگی از سرعت و دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

مقایسه نتایج مدل عددی حاضر با نتایج آزمایشگاهی و مدل‌های عددی دیگر که در حالت سه بعدی و بدون فرض سطح افقی انجام شده است، نشان دهنده آنست که مدل حاضر، قادر به پیش بینی نتایج در حد قابل قبولی می‌باشد. اگر چه این مدل به صورت دوبعدی در این مطالعه به کار گرفته شده است اما با دقت قابل قبولی می‌تواند برای شبیه سازی عددی جریان‌های سیال مورد استفاده قرار گیرد که انطباق نتایج مدل عددی حاضر در حالت دوبعدی با نتایج حاصل از مدل‌های عددی سه بعدی سایر پژوهشگران نشان دهنده همین موضوع می‌باشد. در نتیجه از مدل حاضر که از سرعت بالایی برخوردار است می‌توان در بررسی انواع جریان‌های سیال استفاده نمود.

۶- مراجع

- [1] ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, "Turbulence modeling of surface water flow and transport: part: 1", Journal of Hydraulic Engineering, 1988, 114(9), 970-991.
- [۲] حسن زاده، ی.، علمی، م.ت.، " مدل رسوب گذاری در مخازن سدها"، مجله دانشکده فنی دانشگاه تبریز، ۱۳۸۱، شماره ۳۰، صفحه ۴۹-۶۰.
- [۳] حسن زاده، ی.، حنیفی خانکندی، م.، "پیش بینی روند رسوب گذاری در مخزن سد علویان با استفاده از مدل

- [13] Hirsch, C., "Numerical computation of internal and external flows", Second Edition, Jon Wiley & Sons, LTD, Vol. 1, 2007.
- [14] Graedel, W.P., "Advanced fluid mechanics", Elsevier Inc, Second Edition, Vol. 1, 2007.
- [15] Zhao, D.H., Shen, H.W., Tabios, G.Q., Lai, J.S., "Finite-volume two dimensional unsteady-flow model for river basins", Journal of Hydraulic Engineering, 1994, 120(7), 863-883.
- [16] Jessee, J.P., Fiveland, W.A., "A cell vertex algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations on non-orthogonal grids", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1996, 23(2), 271-293.
- [17] Thomas, B.G., Yousuff, M.H., Lumley L.J., "Simulation and modeling of turbulent flows", Oxford University Press, Second Edition, 2004.
- [18] Anderson, J.D., "Computational fluid dynamics the basics with applications", Second Edition, Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [۱۹] خالقی، ح.، ریاحی، م.، "شبیه‌سازی عددی تغییر شکل نیمرخ بستر دریا در مقابل دیوار ساحلی"، رساله دوره دکتری مهندسی عمران، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی عمران، ۱۳۸۴.
- [20] Ferziger, J.H., Peric, M., "Computational methods for fluid dynamics", Second Edition, McGraw-Hill, 1997.
- [21] Hakimzadeh, H., "Turbulence modeling of tidal currents in rectangular harbors", Ph.D. Thesis, University of Bradford, Bradford, UK, 1997.
- [22] Baines, W.D., Knapp, D.J., "Wind driven water currents", International Journal for Hydraulic Division, ASCE, 1965, Vol 91, 205-221.
- [22] Tsanis, I.K., "Simulation of wind induced water currents", International Journal for Hydraulic Engineering, ASCE, 1989, 115(8), 1113-1134.
- Gstar3.0، چهارمین کنگره مهندسی عمران، دانشگاه تهران، اردیبهشت ماه ۱۳۸۷.
- [4] ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, "Turbulence modeling of surface water flow and transport: part: 2 ", Journal of Hydraulic Engineering, 1988, 114(9), 1021-1040.
- [5] Falconer. R.A., "An introduction to nearly horizontal flows", Coastal, Estuarial and Harbor Engineer's Reference Book., Abbott and Price, E and F Spon LTD, London, 27-36, 1993.
- [6] Campos, R., "Three dimensional reservoir sedimentation model", Ph.D. Thesis, Newcastle-Upon-Tyne, 2001.
- [7] Ghiassi, R., "An Introduction to Nearly-Horizontal Flows", Coastal, Estuarial and Harbor Engineer's Reference Book. Edited by M.B. Abbott and W.A.Price. Chapman & Hall, UK, 1993.
- [8] Sabbagh yazdi, S.R., Mastorakis, N.E., Saeedifae, A.B., "A cell center finite volume depth average flow solver for simulation of erosion, transport and deposition of fine non-cohesive sediments". Journal of Computers, 2008, 2(1), 47-57.
- [9] Namin, M.M., Lin, B., Falconer, R.A., "An implicit numerical algorithm for solving non hydrostatic free surface flow problems", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2001, 35(1), 341-356.
- [10] Ciruolo, G., Jozsa, J., Kramer, T., Lipar, G., Napoli. E., "Comparison between hydrostatic and non-hydrostatic 3-d modeling of wind – driven turbulent flow field in a shallow lake", Proceeding of congress of Hydraulic Engineering, Genoa, Italy, September 2000.
- [11] Flectcher, C.A. J., "Computational techniques for fluid dynamics", Volume 1, Second Edition, Springer-Verlag, London, November, 1990.
- [12] Deville, M.O., Fischer, P.F., Mund, H.E., "Fluid mechanics and computation: An introduction in methods for incompressible fluid flow", Cambridge University Press, 2002.