

## مطالعه طول بلندشدگی ریل راه آهن در مدل وینکلر اصلاح شده

جبارعلی ذاکری\*<sup>۱</sup>، محمدمعاد مطیعان نجار<sup>۲</sup> و مراد شادفر<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی خطوط ریلی، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی ماشین‌های ریلی، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران

### چکیده

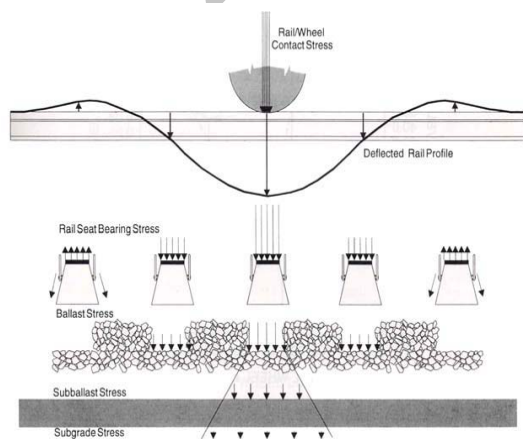
تاکنون مدل‌سازی‌های متنوعی در تحلیل و طراحی خطوط ریلی صورت گرفته است. در برخی از مدل‌ها فنرهای زیر ریل به صورت فشاری و کششی می‌باشند، که از آن جمله می‌توان به مدل تیر بر روی بستر ارتجاعی (مدل وینکلر) اشاره کرد. از آنجایی که بستر زیر ریل دارای مقاومت کششی نمی‌باشد، فنرهای به کشش افتاده در مدل وینکلر نایستی هیچ‌گونه سختی از خود نشان دهند تا یک مدل واقعی حاصل شود. با توجه به سادگی و کاربرد وسیع تئوری وینکلر در حوزه مهندسی و دارا بودن محدودیت‌ها و اشکالات وارده بر آن، سعی شده برخی از این محدودیت‌ها رفع شوند. در این مقاله با در نظر گرفتن وزن مرده ریل و تراورس با کمک مدل سای-وستمن با حذف فنرهای کششی به اصلاح مدل وینکلر پرداخته می‌شود. با فرموله کردن و تشکیل معادلات دیفرانسیل تغییر شکل تیر با شرایط مذکور، حل ریاضی آن‌ها به شکل بسته صورت گرفته است. همچنین تلاش شده با استخراج نمودارهای بدون بعد، حساسیت‌سنجی سختی بستر و نوع پروفیل ریل و بار چرخ و سائت نقلیه ریلی در مقابل طول بلند شدگی خط صورت گیرد. با توجه به شرایط خطوط ریلی کشور و بار محوری عبوری، یک مطالعه موردی و در نهایت مقایسه طول ناحیه کششی (غیر تماسی) و فشاری مدل وینکلر، سای-وستمن ارائه شده است. با حل معادلات و رسم نمودار خیز ریل در حالت اصلاح شده مشاهده می‌شود که طول ناحیه غیر تماسی و ارتفاع بلندشدگی خط ناشی از یک بار متمرکز بیش از مدل وینکلر می‌باشد.

**واژگان کلیدی:** سختی بستر، تیر بر روی بستر ارتجاعی، تئوری وینکلر، مدل سای-وستمن، خیز خطوط ریلی.

### ۱- مقدمه

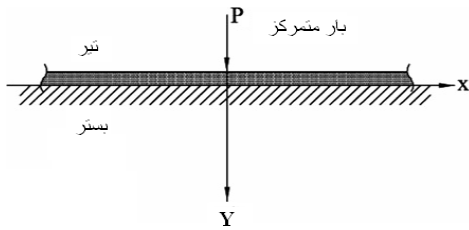
وینکلر از راحتی و سهولت در کنار دقت مکفی برای مهندسیین برخوردار است لذا به کمک این روش بهتر می‌توان به مدل‌سازی خط ریلی پرداخت. از آنجایی که در مدل‌سازی وینکلر فنرهای زیر ریل که نمایانگر سختی بستر می‌باشند هم در فشار و هم در کشش عمل می‌کنند، لذا لازم است در تحلیل تیر بر روی بستر ارتجاعی نسبت به اصلاح مدل اقدام نموده و حذف فنرهای کششی در محدوده بلندشدگی مدنظر قرار گیرد. در نتیجه به اصلاح مدل وینکلر پرداخته و معادلات جدید ارائه می‌گردند.

یکی از روش‌های تحلیل و طراحی خطوط ریلی، روسازه راه‌آهن که بر روی زیرسازه آن (بالاست، بستر خاکی) قرار دارد، به صورت تیر بر روی بستر ارتجاعی تحلیل می‌شود. تاکنون مدل‌سازی و تئوری‌های گوناگونی جهت بررسی رفتار اندرکنش تیر و صفحه بر روی بستر ارتجاعی ارائه شده است [۱]. با عنایت به این‌که در واقعیت بخشی از ریل در طرفین بار متمرکز مطابق **شکل (۱)** بلند می‌شود عملاً فنرها به کشش می‌افتند. بدین ترتیب به دلیل عدم وجود چسبندگی بین تراورس و بالاست، فنرها به کشش کار نخواهند کرد و فقط وزن ریل و تراورس به صورت بار گسترده باعث کاهش طول بلندشدگی خواهد شد. لذا در این زمینه نیز تئوری‌های متفاوتی از جمله بستر پسترناک<sup>۱</sup> [۲ و ۳]، و ریسنر [۴] و همچنین وینکلر<sup>۲</sup> [۵] معرفی شده و به روش‌های متفاوت عددی به حل مسائل مختلف از جمله تیرهای محدود و نامحدود [۶] بر روی بسترهایی که تنها تحت فشار عمل می‌نمایند پرداخته شده است. با توجه به این‌که در میان همه تئوری‌ها جهت مدل‌سازی خط ریلی و بستر زیر آن مدل



شکل ۱- بلند شدگی ریل تحت بار چرخ

1- Pasternak  
2- Winkler



شکل ۲- بار متمرکز وارد بر تیر روی بستر

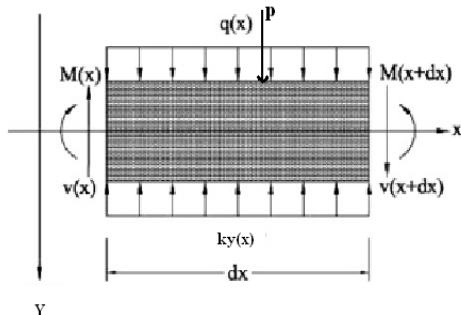
زمانی که تیر تحت یک بار تغییر شکل می‌دهد عکس‌العمل بستر متناسب با تغییر مکان در همان نقطه می‌باشد، یعنی:

$$R = k \cdot y \quad (1)$$

که  $y$  تغییر مکان تیر و جهت مثبت آن رو به پایین است و  $R$  عکس‌العمل بستر متناظر همان نقطه و  $k$  سختی بستر در واحد طول می‌باشد.

با توجه به روابط مقاومت مصالح در شکل (۳) معادله دیفرانسیلی خیز تیر را می‌توان تشکیل داد [۱۱]:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky(x) = q(x) + p \quad (2)$$



شکل ۳- نیروها در المان جزء

### ۳- تیر بدون وزن تحت بار متمرکز

معادلات حاکم بر یک تیر بدون وزن تحت بار متمرکز با حذف فنرهای کششی مطابق شکل (۴) تشکیل شده است. یعنی خط آهن هنگامی که واکنش بستر فشاری باشد [۱۲].

$$EIy^{(4)} + ky = P\delta(x) \quad |x| < X, y > 0 \quad (3)$$

$$EIy^{(4)} = q \quad |x| > X, y < 0 \quad (4)$$

$EI$  سختی خمشی تیر و  $y$  تغییر مکان تیر می‌باشد که جهت مثبت آن رو به پایین است.

لذا در این مقاله سعی شده است که معادلات ریاضی به صورت بسته و تحلیلی تبیین شود، تا بتوان با بدون بعد نمودن معادلات، نمودارهای لازم جهت تعیین طول ناحیه بلندشدگی و فشاری ناشی از بار چرخ جهت مقاصد طراحی روسازی خط ریلی مشخص گردد. تا بدین وسیله طراحی سریع‌تر و با دقت بیشتری صورت پذیرد [۷].

زمانی که یک بستر بدون کشش مورد تحلیل قرار می‌گیرد، وجود فضای خالی و فاصله<sup>۱</sup> میان روسازه و بستر مطابق شکل (۱)، مجهولات معادله و مسئله را می‌افزاید. این مجهولات محل ایجاد ناحیه کششی می‌باشند. از سوی دیگر شرایط فیزیکی و وجود ناحیه غیر تماسی (کششی) روابط بیشتری تولید می‌کنند که شامل مکان هندسی این فضای خالی نیز می‌باشند. در نتیجه برای حل مسئله بایستی تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر باشد. به کمک تابع پله که مقاومت فنر در خیز مثبت و منفی در آن دیده می‌شود و با استفاده از تابع گرین می‌توان تقریب مناسبی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر فیزیک مسئله ارائه نمود، اما اثبات کاملی برای همگرایی جواب انجام نشده است [۸]. با تشکیل ماتریس سختی تیر با توجه به شرایط حاکم، با حل عددی از روش المان محدود نیز به حل معادله دیفرانسیل پرداخته شده است [۹]. همچنین یک سری مدل‌های پیوسته و الاستیک نیز در این خصوص ارائه شده است [۱۰].

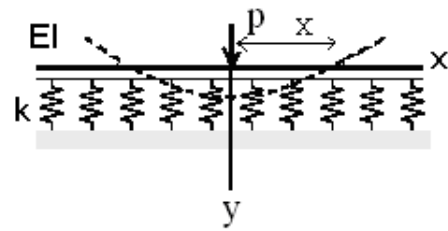
در این مقاله ابتدا حل کلاسیک شیندلر<sup>۲</sup> و سای-وستمن<sup>۳</sup> برای بستر الاستیک بدون کشش ارائه شده است. در ادامه به تحلیل تیر وزن‌دار و بدون وزن تحت یک بار متمرکز پرداخته و سپس معادلات حاکم بر مدل با حذف فنرهای کششی ارائه خواهد شد. نوآوری مقاله کاربردی کردن مدل وینکلر اصلاح شده و حل معادلات برای حالت هم‌زمانی بار گسترده ناشی از وزن ریل و تراورس و بار متمرکز ناشی از عبور بار چرخ بوده و برای تشریح کامل متدولوژی بکار رفته، مطالعه موردی نیز ارائه شده است.

### ۲- روابط ریاضی حاکم در تیر تحت بارگذاری بر روی

#### تکیه‌گاه الاستیک

یک تیر بلند به طول نامحدود بر روی یک بستر ارتجاعی تحت بار متمرکز  $P$  مطابق شکل (۲) در نظر گرفته شده است.

1- Gap  
2- Schindler  
3- Tsai-Westmann



شکل ۴- تیر بلند نامحدود روی بستر الاستیک غیر کششی

$$-4 \sinh|\xi| \cos \xi - 4\delta(\xi) + 2\delta''(\xi)$$

با جایگذاری مشتق چهارم رابطه (۷) در (۶) و با برابر قرار دادن ضرائب  $\delta(\xi), \delta''(\xi)$ :

$$-C = H = \frac{F}{2}$$

در  $x = X$  تغییر مکان و لنگر و برش با توجه به شرایط فیزیکی صفر می‌باشد [۱۳] یعنی:

$$u(\xi) = u''(\xi) = u'''(\xi) = 0$$

این سه شرایط مرزی مجهولات  $A, B, \xi$  را بدست می‌دهد. در نتیجه با کاربرد مجهولات در معادله (۷) رابطه زیر ایجاد می‌گردد.

$$\cosh \xi \cos \xi = 0 \quad (9)$$

از رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$\xi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

با توجه به اینکه  $u \geq 0$  می‌باشد. ریشه  $\frac{\pi}{2}$  در محدوده

$$|\xi| \geq \xi$$

باید توجه داشت در یک تیر بدون وزن فاصله  $\xi$  مستقل از  $F$  است. و به طبع آن این فاصله مستقل از بار اعمالی  $P$  می‌باشد. این رابطه در ناحیه فشاری صادق است و طول قسمت فشاری مستقل از مقدار بار برابر  $\pi/\beta$  می‌باشد [۱۳].

#### ۴- تیر وزن دار تحت بار متمرکز

یک تیر با طول زیاد که دارای وزن یکنواخت می‌باشد تحت یک بار متمرکز روی بستر الاستیک قرار دارد. چنین تیری در دو حالت اتصال پیوسته و غیر پیوسته با بستر مورد بررسی قرار داده می‌شود.

#### ۴-۱- اتصال تماسی به صورت پیوسته

وزن تیر را به صورت بار گسترده با پارامتر  $q$  در نظر می‌گیریم. در نتیجه معادله (۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$EIy^4 + ky = P\delta(x) + q \quad (10)$$

به کمک کمیت‌های بی‌بعد (۵) و یک کمیت بدون بعد برای وزن

$$\sigma = \frac{q}{4\beta^3 EI} \quad (11)$$

$\delta(x)$  تابع دلتای دیراک و محور  $x$  در طول تیر می‌باشد. با توجه به شکل (۴) واضح است که  $y(X) = 0$ . برای حل ساده‌تر معادلات دیفرانسیل اخیر پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شود [۱۲].

$$\xi = \beta x, \quad u = \beta y, \quad F = \frac{P}{4\beta^2 EI} \quad (5)$$

که در روابط مذکور  $\beta^4 = K/4EI$  می‌باشد و به لحاظ ابعادی  $[1/m]$  است.

در نتیجه معادله دیفرانسیل رابطه (۳) به شکل ساده‌تر زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{4}u^{(4)}(\xi) + u(\xi) = F\delta(\xi) \quad (6)$$

پس از حل معادله خواهیم داشت:

$$u(\xi) = A \sinh \xi \sin \xi + B \cosh \xi \cos \xi + C \sinh |\xi| \cos \xi + H \cosh \xi \sin |\xi|, \quad |\xi| < \xi = \beta X \quad (7)$$

با تعریف  $f$  به صورت زیر:

$$f = \cosh \xi \sin |\xi|$$

معادلات اضافی زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} f'' = 2 \sinh |\xi| \cos \xi + 2\delta(\xi) \\ f''' = -2 \sinh \xi \sin |\xi| + 2 \cosh \xi \cos \xi \operatorname{sgn} \xi + 2\delta'(\xi) \\ f^4 = -4 \cosh \xi \sin |\xi| + 4\delta(\xi) + 2\delta''(\xi) \end{cases} \quad (8)$$

مشابه روابط فوق مشتق چهارم رابطه  $\sinh|\xi| \cos \xi$  برابر است با:

ریشه‌های دیگر  $\sin \xi = 0$  به لحاظ فیزیکی قابل قبول نمی‌باشند زیرا سایر جواب‌ها ناشی از عکس‌العمل کششی در قسمت‌های دیگر تیر است [۱۴].  
در نتیجه اتصال پیوسته تیر با بستر در صورتی برقرار است که

$$-2 \leq F \leq 2e^\pi \quad (19)$$

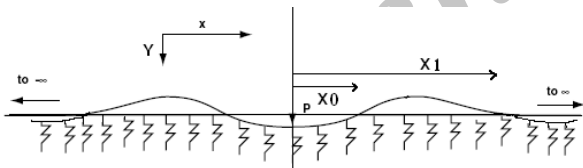
و در حالت ابعادی وقتی عکس‌العمل بستر به طور پیوسته فشاری است بایستی:

$$-2 \leq \frac{P \cdot \beta}{q} \leq 2e^\pi \quad (20)$$

باشد. عملاً زمانی که  $\frac{P \cdot \beta}{q} > 2e^\pi$  بستر دچار کشش نیز می‌شود [۱۷].

#### ۴-۲- تیر وزن دار تحت بار متمرکز با وجود ناحیه کششی

زمانی که نیروی متمرکز (بار چرخ) بزرگتر از  $P > 2e^\pi q / \beta$  باشد، تیر از روی بستر بلند می‌شود، اگرچه وزن تیر تأثیر خود را بگذارد، مجدداً ناحیه غیر تماسی مانند شکل (۵) را در پی خواهیم داشت. فرض کنیم که یک بار کم بر تیر اعمال شود، یک ناحیه جدا شده در طول  $x > 0$  در نظر می‌گیریم.



شکل ۵- تیر وزن دار تحت بار متمرکز زمانی که تیر به کشش افتد [۱۳].

در قسمت‌هایی که  $|x| > X_1$  و  $|x| < X_0$  معادله (۳) حاکم است و در نواحی  $X_0 < |x| < X_1$  معادله  $EIy^{(4)} = q$  حاکم می‌باشد.

با استفاده از مقادیر بدون بعد (۵) و (۱۱) و با نشان دادن  $\xi_1 = \beta x_1$ ،  $\xi_0 = \beta x_0$  و به کمک قضیه انتقال محورها:

$$\xi = \xi - \xi_0, \quad \hat{\xi} = \xi - \xi_1$$

معادله (۱۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{1}{4}u^{(4)}(\xi) + u(\xi) = F\delta(\xi) + \sigma \quad (12)$$

با حل معادله (۱۲) داریم:

$$u = \sigma + \frac{F}{2}e^{-|\xi|}(\cos \xi + \sin |\xi|) \quad (13)$$

برای این که عکس‌العمل بستر الاستیک فقط در فشار باشد بایستی  $u$  در همه  $\xi$  ها مثبت باشد یعنی  $u \geq 0, \forall \xi$ . بدین منظور برای ارضای شرایط فوق محدودیت‌های زیر اعمال می‌شود. در مکانی که  $\hat{\xi} = \xi$  مقدار  $u(\hat{\xi}) = 0, u'(\hat{\xi}) = 0$  می‌باشد یعنی در  $\hat{\xi} = \xi$  که  $u = 0$  می‌باشد تیر تمایل به بلندشدگی دارد و در نتیجه با اعمال این شرایط سازگاری در معادله (۱۳)

$$e^{-\hat{\xi}}(\cos \hat{\xi} + \sin \hat{\xi}) = -\frac{2\sigma}{F} \quad (14)$$

و

$$\sin \hat{\xi} = 0 \quad (15)$$

بدست می‌آید.

معادله (۱۵)،  $\hat{\xi} = n\pi, n = 0, 1, \dots$  را تولید می‌کند و با جایگذاری در معادله (۱۴) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$e^{-\hat{\xi}} \cos \hat{\xi} = -\frac{2\sigma}{F} \quad (16)$$

با احتساب  $\xi = 0$  تیر تحت بارگذاری، در تراز  $u = 0$  نتیجه می‌شود:

$$F = -2\sigma \quad (17)$$

همچنین با در نظر گرفتن  $\xi = \pi$  نتیجه می‌شود:

$$F = 2e^\pi \sigma \quad (18)$$

معادلات زیر برای تغییر مکان تیر تولید می‌شوند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma + a \sinh \xi_0 \sin \xi_0 + b \cosh \xi_0 \cos \xi_0 \\ + F/2(\cosh \xi_0 \sin \xi_0 - \sinh \xi_0 \cos \xi_0) = 0 \\ \\ a(\sinh \xi_0 \cos \xi_0 + \cosh \xi_0 \sin \xi_0) \\ + b(\sinh \xi_0 \cos \xi_0 - \cosh \xi_0 \sin \xi_0) + \\ F \sinh \xi_0 \sin \xi_0 = \\ -(1/6)\sigma \zeta_0^3 - a_0 \zeta_0^2 - b_0 \zeta_0 \\ \\ a \cosh \xi_0 \cos \xi_0 - b \sinh \xi_0 \sin \xi_0 \\ + \frac{F}{2}(\sinh \xi_0 \cos \xi_0 + \cosh \xi_0 \sin \xi_0) = b_0 \\ \\ a(\sinh \xi_0 \cos \xi_0 - \cosh \xi_0 \sin \xi_0) \\ - b(\cosh \xi_0 \sin \xi_0 + \sinh \xi_0 \cos \xi_0) \\ + F \cosh \xi_0 \cos \xi_0 = 3a_0 \end{array} \right. \quad (28)$$

باتوجه به پیوستگی در شیب، لنگر، و برش در  $\zeta = \zeta_0$ ،  
(جائی که  $\zeta = 0$ ) به کمک رابطه (۲۶) خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sigma \zeta_0^2 + 2a_0 \zeta_0^2 + b_0 \zeta_0 = \sigma + b_1 \\ \sigma \zeta_0^2 + 3a_0 \zeta_0 + b_0 = -b_1 \\ 2\sigma \zeta_0 + 3a_0 = -\sigma + b_1 \end{array} \right. \quad (29)$$

معادلات (۲۸) و (۲۹) نمایندگان ارتباط هفت مجهول  $\zeta_0, \sigma, a, b, a_0, b_0, b_1$  می‌باشند. به عبارتی هفت معادله و هفت مجهول به وجود آمده است. در این معادلات مقدار  $F, \sigma$  مطابق رابطه (۱۷) می‌باشند. در نتیجه با تشکیل معادلات و ساده‌سازی آن‌ها و با ایجاد ماتریس ضرائب برای پارامترهای ثابت  $a, b, F$  به کمک سه رابطه اول معادله (۲۸) با نرم افزار Matlab این ضرائب را بر اساس  $\zeta_0$  و  $\sigma$  بدست آورده و به کمک رابطه چهارم  $\zeta_0$  برحسب  $\sigma$  با نرم‌افزار Maple بدست می‌آید [۱۵ و ۱۶]. چهار جواب برای  $\zeta_0$  به دست می‌آید. در این میان پاسخ قابل قبول به صورت زیر می‌باشد [۷]:

$$\xi_0 = -\frac{3}{2} \tan(\xi_0) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9 \tan^2(\xi_0) - 6 \tan(\xi_0) + 9}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} u^{(IV)} + u = F\delta(\xi) + \sigma \\ u = \sigma + a \sinh \xi \sin \xi + b \cosh \xi \cos \xi \\ + \frac{F}{2} (\cosh \xi \sin |\xi| - \sinh |\xi| \cos \xi) \end{array} \right\} \quad |\xi| < \xi_0 \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} u_0^{(IV)} = \sigma \\ u_0 = \frac{1}{6} \sigma \zeta^4 + a_0 \zeta^3 + b_0 \zeta^2 + c_0 \zeta + d_0 \end{array} \right\} \quad |\zeta| < \zeta_0 = \xi_1 - \xi_0 \quad (22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} u_1^{(IV)} + u_1 = \sigma \\ u_1 = \sigma + a_1 e^{-|\zeta|} \cos \zeta + b_1 e^{-|\zeta|} \sin |\zeta| \end{array} \right\} \quad |\zeta| < \infty \quad (23)$$

بافرض

$$u_1(\zeta = 0) = 0, u_0(\zeta = \zeta_0) = 0, u_0(\zeta = 0) = 0$$

این شرایط روابط زیر را تولید می‌کنند [۱۳]:

$$d_0 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{6} \sigma \zeta_0^4 + a_0 \zeta_0^3 + b_0 \zeta_0^2 + c_0 \zeta_0 \quad (25)$$

$$\sigma + a_1 = 0 \quad (26)$$

از رابطه (۲۵)

$$c_0 = -\frac{1}{6} \sigma \zeta_0^3 - a_0 \zeta_0^2 - b_0 \zeta_0 \quad (27)$$

با اعمال شرایط  $u(\xi_0) = 0$  و پیوستگی شیب و لنگر و برش در  $\xi = \xi_0$  (جائی که  $\zeta = 0$ ) به کمک رابطه (۲۷) داریم:

طبق آنچه که گفته شد مقدار بار متمرکز نایستی زیاد باشد تا در ناحیه  $|x| > X_1$  دوباره ما ناحیه کششی داشته باشیم، زیرا در حل معادلات فوق فرض بر آن بود که فقط یک قسمت از طرفین بار از خط بلند شود. با توجه به این موضوع حداکثر مقدار  $Q$  برابر است با:

$$Q = 10287e^6 \quad (32)$$

یعنی اگر مقدار بی بعد  $Q$  بیش از این باشد خط مجدداً در طرفین بار بلند می شود. همانطور که پیداست، برای کاربرد عملی  $Q$  همیشه کمتر از مقدار محاسبه شده می باشد. در شکل (۸) و (۹) نمودار نیمه لگاریتمی  $\xi_0$  و  $\zeta_0$  بر حسب  $Q$  رسم شده است تا بتوان با دقت بیشتری طول نواحی کششی و فشاری را از روی نمودار ملاحظه نمود.

با توجه به روابط  $\xi_0 = \xi_1 - \xi_0$  و  $\zeta_0 = \beta x_0$  و  $\xi_1 = \beta x_1$  می توان طول ناحیه کششی یا فشاری را بدست آورد. یعنی  $\xi_0 / \beta$  برابر طول ناحیه کششی و  $\xi_1 / \beta$  برابر نصف طول ناحیه فشاری است.

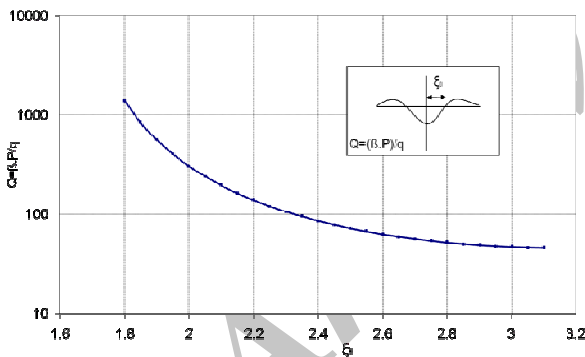
به دلیل غیر قابل حل بودن  $\xi_0$  به صورت معادلات ریاضی بسته، با در نظر گرفتن  $\xi_0$  به صورت عددی و با تغییر آن در بازه ۸/۱ تا ۱۴/۳ به یافتن مقادیر  $b_1, b_0, a_0, b, a, \xi_0, F$  نظیر آن محاسبه شده است. با تعریف پارامتری به نام  $Q$  که یک کمیت بدون بعد می باشد:

$$Q = \frac{F}{\sigma} \quad (30)$$

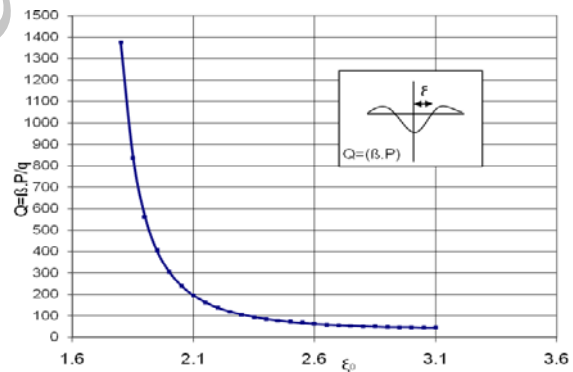
با جایگذاری مقادیر  $F = P/(4\beta^3 EI)$  و  $\sigma = q/(4\beta^3 EI)$  خواهیم داشت:

$$Q = \frac{P \cdot \beta}{q} \quad (31)$$

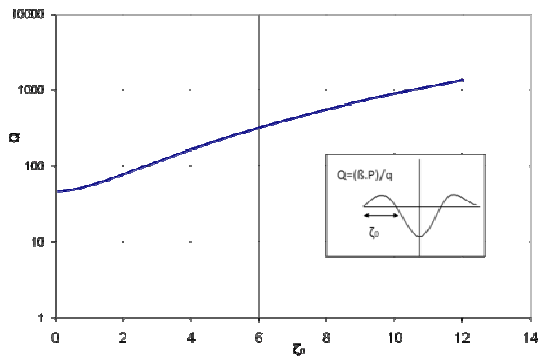
با تغییر مقادیر  $\xi_0$  به رسم دو نمودار ارزشمند بدون بعد شکل (۶) و (۷) پرداخته و می توان با داشتن شرایط خط یعنی مدول بستر زیر ریل و نوع ریل (سختی خط) و بار محوری و با اعمال بار مرده خط به صورت گسترده، طول ناحیه بلندشدگی و فشرده شده خط را بدست آورد.



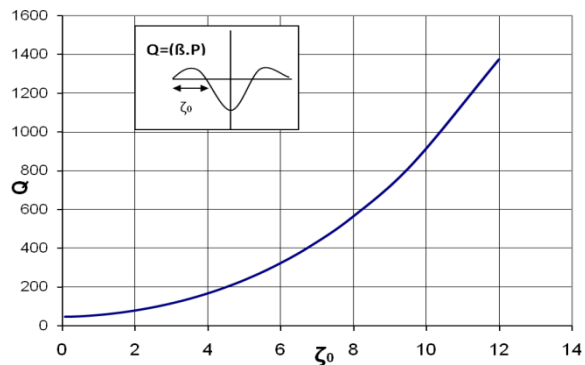
شکل ۸- نمودار نیمه لگاریتمی طول ناحیه فشاری  $\xi_0$  در مقابل کمیت بی بعد  $Q$



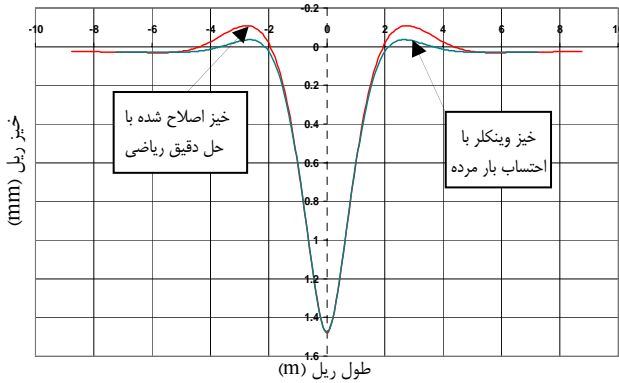
شکل ۶- نمودار طول ناحیه فشاری  $\xi_0$  در مقابل کمیت بی بعد  $Q$



شکل ۹- نمودار نیمه لگاریتمی طول ناحیه کششی  $\zeta_0$  در مقابل کمیت بی بعد  $Q$



شکل ۷- نمودار طول ناحیه کششی  $\zeta_0$  در مقابل کمیت بی بعد  $Q$



شکل ۱۱- مقایسه خیز ریل با احتساب بار مرده در دو مدل

ریاضی

۶- نتیجه‌گیری

حل معادلات ریاضی با حذف فنرهای کششی و مقایسه آن با مدل وینکلر نشان می‌دهد که طول ناحیه بلندشدگی خط ریلی نسبت به حالتی که فنرها هم در کشش و هم در فشار کار می‌کنند (وینکلر) بیشتر خواهد بود. همچنین مقدار خیز منفی یعنی ارتفاع بلند شده خط در حالت اصلاح شده بیشتر می‌باشد. در مطالعه موردی خیز ریل برای حالت اصلاح شده مدل وینکلر (حذف فنرهای کششی) و مدل وینکلر با احتساب بار مرده خط، حدوداً ۲/۵ برابر و طول ناحیه کششی حدوداً ۱/۵ برابر افزایش نشان می‌دهد. البته تغییر کل خیز ریل به طور مطلق مقداری اندک می‌باشد. اما حداکثر خیز ریل در دو حالت تقریباً مقداری برابر از خود نشان می‌دهند. از آنجایی که در کشورمان فاصله محور به محور تراورس‌ها از یکدیگر حدود ۶۰ سانتی‌متر می‌باشد سه تراورس در طرفین بار چرخ تحت فشار قرار می‌گیرند یعنی جمعاً هفت عدد تراورس در فشار می‌باشند. در مدل وینکلر با احتساب بار مرده ریل و تراورس حداکثر سه تراورس در یک طرف بار یک چرخ با شرایط ذکر شده دچار بلندشدگی می‌شوند، حال آن‌که در مدل اصلاح شده این تعداد به چهار عدد می‌رسد. در کل با توجه به کاربرد وسیع مدل وینکلر در حوزه مهندسی طراحی خطوط ریلی، ارائه نمودارهای بی‌بعد اصلاح شده مدل وینکلر کمک شایانی به طراحی دقیق‌تر در مهندسی راه آهن می‌نماید.

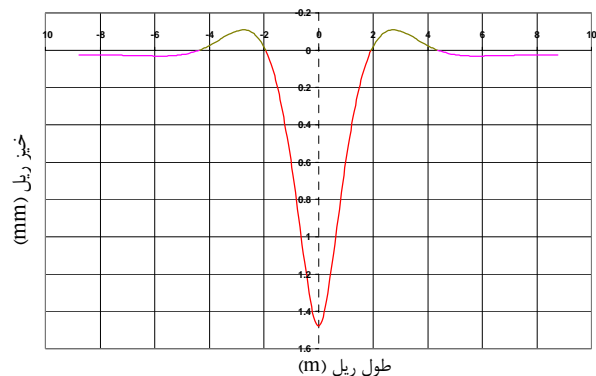
۵- مطالعه موردی

برای شرایط خط ریلی با سختی بستر ریل ۵۰ مگاپاسکال و بارگسترده و یکنواخت ۱۳۵ کیلوگرم بر متر طول به عنوان بار مرده خط (وزن ریل UIC 60 و تراورس بتنی B70) و بار چرخ ۱۲/۵ تن نتایج به صورت زیر خواهد بود. برای این منظور بایستی ضرائب ثابت معادلات اصلی (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) را برای شرایط خط فوق یافت. عملاً  $F, \zeta_0, a, b, a_0, b_0, b_1$  نظیر با کمک نرم‌افزار Matlab به صورت زیر در جدول (۱) به دست می‌آیند.

جدول ۱- پارامترهای به دست آمده خط ریلی

$\beta$ (1/mm)	EI N.mm <sup>2</sup>	q (N/mm)
0.001181462	6.4155E+12	1.3239045
$\sigma$	$\zeta_0$	F
3.12829E-05	2.2867	0.003420423
b0	b1	b
0.000242265	2.67225E-05	0.001717145
a0	a1	a
-6.11737E-05	-3.12829E-05	-0.001717145
k (N/mm <sup>2</sup> )	c0	p (N)
50	-0.00031448	122521
$\zeta_0$	d0	$\zeta_1$
2.8604	0	5.1471

در نتیجه با اعمال مقادیر فوق در معادلات (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) خیز ریل مطابق شکل (۱۰) خواهد بود.



شکل ۱۰- نمودار خیز ریل به کمک معادلات ریاضی بسته

برای مقایسه آنچه که در مدل وینکلر اتفاق می‌افتد با در نظر گرفتن شرایط فوق در معادله دیفرانسیل حل شده عیناً با در نظرگیری بار مرده در مدل وینکلر به شکل (۱۱) توجه شود.

کارشناسی، دانشگاه علم و صنعت ایران- دانشکده

مهندسی راه آهن، مهر ۱۳۸۷.

- [8] Tsai, N. C., Westmann, R. A., "Beam on Tensionless Foundation", Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1966, 93, 1-12,
- [9] Adin, M. A., Yankelevsky, D. Z., Eisenberger, M., "Analysis of Beams on Bi-Moduli Elastic Foundation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 49, 319-330.
- [10] Scott. R., "Foundation Analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1981.
- [11] Shokrieh, M., Rahmat, M., " Effects of Young's Modulus on Response of Railway Sleeper", Applied Mathematical Modelling, 2007, 31, 700-711.
- [12] Kjell Arne Skoglund, "A Study of Some Factors in Mechanistic Railway Track Design", Doctoral thesis, Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Engineering Science and Technology, ISBN: 82-471-5450-1, 2002.
- [13] Weitsman, Y., "On Foundations That React in Compression Only", Journal of Applied Mechanics, 1970, 37, No.1, 1019-1030.
- [14] Hetényi, M., "Beams on Elastic Foundation. Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering", The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1996.
- [15] MATLAB, The Language of Technical Computing, Version 7.0.4 365 (R14) Service Pack 2, 2005.
- [16] Maple 11.0, Maplesoft: a Division of Waterloo Maple Inc., 1981-2007.

[۱۷] ذاکری، ج. ع.، مطیعیان، م. ع.، "حساسیت سنجی سختی بستر در مقابل بلندشدگی خطوط ریلی با مدل اصلاحی وینکلر"، همایش بین المللی راه آهن. تهران، شهریور ۱۳۸۷.

#### ۷- فهرست علائم

$EI$	سختی خمشی تیر، $Nm$
$k$	سختی بستر، $N/m$
$p$	بار چرخ، $N$
$q$	بار گسترده، $N/m$
$R$	عکس العمل بستر $N/m^2$
$y$	خیز ریل $m$
$\delta$	تابع دلتای دیراک $1/m$
$\beta$	ضریب سختی $1/m$

#### ۸- مراجع

- [1] Wang, Y. H., Tham, L. G., Cheung, Y. K., "Beams and Plates on Elastic Foundations: A Review", Wiley Inter Science, May 2005, pp. 174-182.
- [2] Coşkun, I., Engin, H., Özmutlu, A. "Response of a Finite Beam on a Tensionless Pasternak Foundation Under Symmetric and Asymmetric Loading", Structural Engineering and Mechanics, 2008, 1, 21-36.
- [3] Ma, X., Butterworth, J. W., Clifton, G. C. "Static Analysis of An Infinite Beam Resting on A Tensionless Pasternak Foundation", (2009) European Journal of Mechanics, A/Solids, 28 (4), pp. 697-703.
- [4] Zhang, Y., "Tensionless Contact of a Finite Beam Resting on Reissner Foundation", International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50 (6), 1035-1041.
- [5] HE Fa ng-she, LIU Xiao-mei, JIANG Xu, "Galerkin Method Used to Solve the Bending Problem of Beams on Tensionless Winkler Foundations", Journal of Xi'an University of Architecture and Technology 2009, 41 (3), 324-327.
- [6] Ma, X., Butterworth, J. W. Clifton, G. C. "Response of An Infinite Beam Resting on a Tensionless Elastic Foundation Subjected to Arbitrarily Complex Transverse Loads", Mechanics Research Communications, 2009, 36 (7), 818-825.
- [۷] مطیعیان نجار، م. ع.، "تدقیق تئوری وینکلر با حذف فنرهای کششی و حل معادلات آن به روش عددی (FEM) و ریاضی به شکل بسته (Closed Form Solution)", پایان نامه دوره



## Study on Lifted-up Length of Rail in Modified Winkler Model

J.A. Zakeri \*, M.E. Motieyan and M. Shadfar

School of Railway Engineering, Iran University of Science and Technology

### Abstract

Recently, various models have been widely used for analysis and design of the railway tracks. Since the rail is fixed to sleepers by fastening system and then track panel is installed directly on ballast, sub ballast and sub grade layers orderly without any bonding, so the superstructure is just embedded in the ballast and there are no adhesive or stuck layers. Many modeling for the purpose of analysis and design, railway track can be simulated by using linear or non-linear springs to represent the behavior of the rail on substructure. In the engineering society, the Beam on Elastic Foundation is the most well-known technique. Among these modelings and approaches like as Adin.et.al, Scott, Filonenko- Borodich foundation, Pasternak foundation, Reissner foundation, Vlasov and Leontiev approach, because of the simplicity of Winkler Model, this model has been considered as one of the idealized models. Railway engineers and designers are most interested in choosing this modeling. Since in reality, the soil foundation does not sustain tensile stresses, the stiffness of tensioned springs should be set equal to zero in the Winkler model. In this work, regarding the advantages of simplicity and popularity of Winkler model in various engineering applications, the model has been developed by eliminating the limitations using Tsai and West Mann theory. In the modified Winkler model, the weight of rails and sleepers (self-weight) has been involved in the formulations and the springs in tensions have been disregarded during the calculations. Consequently, new set of beam-deflection differential equations have been written for each tension and compression segment and the closed form solution have been applied. Also sensitivity analysis is performed by using normalized variables. Specifically, it is shown that (i) the contact length is a sensitive function of the beam/rail profile type; (ii) also the non-contact length is depend on the magnitude of the load and that this function may change significantly regarding wheel-set load, (iii) sub grade modulus has a noticeable influence on the contact region consequently lifting-up zone length. Regarding the railway track conditions and traffic load in Iran, a case study presented, in which the length of no contact zone and the length of contact zone in the Winkler, Tsai and West Mann models have been compared. The result of rail deflections in the modified Winkler model shows that the length of no contact zone (2.5 times) and the height of track uplift due to the concentrated load (1.5 times) are greater than those obtained from the Winkler model including self-weight.

**Keywords:** Sub-grade modulus, BOEF, Winkler's theorem, Tsai and West Mann model, Rail track deflection.

-----  
**Received:** June 2011

**Accepted:** February 2012