

## روشی برای ارزیابی کمی درجه شایستگی جزء صفحه خمشی

محمد رضایی پژند\*<sup>۱</sup> و سیدرضا سرافرازی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند

(دریافت: ۹۶/۸/۲، پذیرش: ۹۷/۴/۲۴، نشر آنلاین: ۹۷/۴/۲۵)

### چکیده

ارزیابی جزءها برای اطمینان از دستیابی به پاسخهای درست در روش اجزای محدود ضروری می‌باشد. به طور معمول، این کار بر روی نمودار همگرایی و به صورت کیفی انجام می‌پذیرد. در این مقاله، راهکارهایی پیشنهاد خواهد شد که بتوانند سرعت، یکنوایی و حد نهایی همگرایی پاسخها را افزون بر مقدار خطا، وارد فرآیند ارزیابی کنند. بر پایه نمره‌های جزء در آزمون‌های گوناگون، روش نویسندگان درجه شایستگی جزء را به دست می‌دهد. افزون بر این‌ها، آزمون‌های سنگ نشانه صفحه خمشی دسته‌بندی خواهند شد. همچنین، جزء نوینی رابطه‌سازی می‌شود و شیوه ارزیابی پیشنهادی بر روی آن اجرا می‌گردد. نتیجه نهایی کار، پیشنهاد روش کمی درجه شایستگی به جای شیوه سنتی کیفی سنجش توانایی‌های جزءهای صفحه خمشی خواهد بود.

**واژه‌های کلیدی:** جزء محدود صفحه خمشی، درجه شایستگی، ارزیابی جزء، مسأله سنگ نشانه.

### ۱- مقدمه

دسته آزمون برای ارزیابی جزءهای صفحه، پوسته و سه‌بُعدی جمع‌آوری کردند. در این آزمون‌ها خطای جزء حساب می‌گردد. سپس، بر پایه خطای پاسخها، نمره‌ای از A تا F به جزء اختصاص می‌یابد. بهترین نمره A و پایین‌ترین نمره F است که برای خطای بیش از ۵۰ درصد در نظر گرفته می‌شود. در پژوهش MacNeal و Harder، نمره هر آزمون جداگانه گذاشته می‌شود و یک نمره کلی برای جزء در همه آزمون‌ها مشخص نمی‌گردد. افزون بر این، شبکه‌بندی‌های گوناگونی از یک سازه سنگ نشانه به کار نمی‌رود. در نتیجه، نمره جزء سرعت و یکنوایی و حد نهایی همگرایی را نشان نمی‌دهد.

در این پژوهش، شیوه‌ای نو در ارزیابی جزء محدود پیشنهاد می‌گردد که سرعت و حد نهایی همگرایی را هم وارد کار می‌کند. خاطرنشان می‌نماید، از میان مسأله‌های گوناگون، تحلیل اجزای محدودی صفحه خمشی<sup>۱</sup> پیچیدگی زیادی دارد. بدین سبب، بسیاری از روش‌ها برای رفع مشکل‌های تحلیل صفحه خمشی به وجود آمده‌اند و سپس به سایر مسایل گسترش یافته‌اند. افزون بر این، رفتارهای خطی یا ناخطی و همچنین، تحلیل‌های ایستایی یا پویایی در سازه‌ها به کار می‌روند. باید آگاه بود، دقت تحلیل ایستایی در رفتار کشسان<sup>۲</sup> خطی فقط به دقت جزء بستگی دارد. از این رو، روش ارزیابی پیشنهادی برای تحلیل ایستایی صفحه خمشی با رفتار کشسانی به کار می‌رود. با شیوه پیشنهادی، چند جزء مشهور صفحه خمشی مقایسه شده‌اند. پاسخ‌ها

روش اجزای محدود به عنوان یک روش قدرتمند در تحلیل سازه مطرح گردیده است. پایه این فن بر تقریب میدان‌های یک محیط به صورت تابعی ساده است. از این رو، نباید خطاهای به وجود آمده را از نظر دور داشت. بدون در نظر گرفتن این کار، ممکن است پاسخ‌هایی با خطای زیاد به دست آید. مسأله‌های عملی، بزرگ و پیچیده‌اند. پاسخ دقیق این مسأله‌ها نیز قابل پیش‌بینی نمی‌باشد. به طور معمول، هر جزء نو تنها با شمار محدودی مسأله کوچک آزمایش می‌شود. سازه‌هایی را که پاسخ دقیق تحلیلی یا عددی دارند، "مسأله‌های سنگ نشانه" می‌نامند. کاربران باید از پاسخ این مسأله‌ها برای ارزیابی جزء محدود در کاربردهای عملی کمک بگیرند. خاطرنشان می‌کند، پیش-بینی رفتار جزء محدود بسیار دشوار است. زیرا، به طور معمول مسأله‌های محدود همه جنبه‌های جزء را بررسی نمی‌کنند. از سوی دیگر، پژوهش‌گران فقط به عیب‌هایی می‌پردازند که آن‌ها را برطرف کرده‌اند و پاسخ‌های بد، کم‌تر مطرح و منتشر می‌گردند. خاطرنشان می‌کند، روش‌هایی برای ارزیابی خطا در تحلیل اجزای محدودی گسترش یافته‌اند (Lee و Bathe، ۲۰۱۱). با وجود این، ارزیابی جزءها تنها بر پایه مقایسه چشمی نمودارهای همگرایی انجام می‌گیرد. تا آن جا که نویسندگان آگاهی دارند، تنها شیوه نظام‌دار کمی در مقایسه جزءهای محدود از آن MacNeal و Harder (۱۹۸۵)، است. آن‌ها یک

۲. Elastic

۱. Plate bending finite element

\* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۹۱۵۳۱۳۰۳۴۰

آدرس ایمیل: rezaiee@um.ac.ir (rpajand@yahoo.com) (م. رضایی پژند)، srsarafrazi@birjand.ac.ir (س. ر. سرافرازی).

Reissner-Mindlin واداشته است. برای نمونه، Dhananjaya و همکاران (۲۰۰۹)، یک جزء چهار پهلوی هشت گرهی برای تحلیل صفحه‌های نازک و به طور نسبی ضخیم پیشنهاد کردند. آن‌ها از روش نرمی و تابع‌های تغییر مکان برای رابطه‌سازی بهره جستند. به تازگی، یک جزء نه گرهی لاگرانژی هم برای تحلیل صفحه‌های خمشی پیشنهاد شده است که از نگره Mindlin در رابطه‌سازی آن استفاده کرده‌اند تا جزء بتواند اثر تغییر شکل برشی را نیز حساب کند. این پژوهشگران دو جزء دیگر هم با روش نیرویی برای صفحه‌های خمشی پیشنهاد نموده‌اند (Dhananjaya و همکاران، ۲۰۱۰ و ۲۰۱۱).

در رابطه‌سازی این نگره، می‌توان تابع‌های مستقلی برای خیز و دوران انتخاب نمود. از این رو، به راحتی شرط یکسان بودن خیز و دوران در پهلوهایی مشترک جزءها به دست می‌آید. شرط مزبور فقط برای تابع‌های خیز و دوران و نه مشتق‌های آن‌ها وجود دارد. چنین حالتی را سازگاری  $C^0$  می‌نامند (Rezaiee-Pajand و همکاران، ۲۰۱۲). با وجود این برتری، اجزای محدود رابطه‌سازی شده با نگره Reissner-Mindlin ممکن است در محدوده صفحه‌های نازک با مشکل روبرو شوند. یادآوری می‌کند، سه عامل دوران، کرنش برشی و مشتق‌های خیز باهم رابطه دارند. هنگامی که نسبت ضخامت به بعد صفحه به سوی صفر حرکت می‌کند، کرنش برشی صفر می‌شود و دوران فقط برحسب مشتق‌های خیز به دست می‌آید و نگره Reissner-Mindlin بر آنچه کیرشهف بنا نهاده منطبق می‌گردد. به دیگر سخن، میدان خیز و دوران به هم وابسته می‌شوند. حال آن که در رابطه‌سازی اجزای محدودی میدان‌ها مستقل به کار می‌روند. از این رو، سختی برشی در محدوده صفحه‌های نازک خیلی زیاد می‌شود. به طوری که سختی خمشی قابل چشم‌پوشی است و پاسخ‌های نزدیک به صفر از حل دستگاه معادله حاکم به دست می‌آیند. پدیده مزبور را قفل برشی<sup>۵</sup> نامیده‌اند (سرافرازی، ۱۳۷۶).

### ۳- عامل‌های خطا در روش اجزای محدود

تحلیل یک جسم طبیعی با ارائه یک الگوی ساده ریاضی آغاز می‌شود. عامل‌های گوناگونی بر رفتار جسم تأثیر می‌گذارند. تأثیر این عامل‌ها ممکن است به صورت خطی، ناخطی یا یک تابع نامشخص باشند. به کار گرفتن همه این عامل‌ها و تابع تأثیر آن‌ها ناممکن است. از این رو، تنها عامل‌های مهم مورد توجه قرار می‌گیرند و رفتارهای ساده‌ای برای جسم می‌پندارند. آشکار است، حذف پاره‌ای از عوامل و ساده‌سازی رفتار، پاسخ‌های عددی را از واقعیت فیزیکی جسم دور می‌سازد و پاسخ‌های خطادار خواهند شد. چنین خطاهایی را خطای الگوسازی ریاضی می‌نامند.

در گام نخست تحلیل، یک الگوی پیوسته انتخاب می‌شود. به طور معمول، این الگو به صورت معادله‌های دیفرانسیل وجود دارد. پس از

نشان می‌دهد که می‌توان با کاربرد این فرآیند، مقایسه کیفی جزءها را به صورت کمی درآورد. افزون بر این، روش پیشنهادی در واریسی یک جزء جدید هم به کار خواهد رفت.

### ۲- تحلیل صفحه خمشی

دو نگره<sup>۳</sup> کیرشهف<sup>۴</sup> و Reissner-Mindlin در تحلیل صفحه خمشی به کار می‌روند. پنداشت‌های حاکم برای تحلیل صفحه‌های نازک را نگره کیرشهف، ارائه می‌دهد (Salari و Rezaiee-Pajand، ۲۰۰۱). در این سازه‌ها، اندازه ضخامت نسبت به طول و عرض صفحه کم است. از این رو، تغییر شکل‌های ناشی از برش نادیده گرفته می‌شود. کاربرد صفحه‌های خمشی، محدود به صفحه‌های نازک نمی‌باشد. صفحه‌های ضخیم و نیمه‌ضخیم، چند لایه و مرکب نیز کاربرد گسترده‌ای دارند (Rezaiee-Pajand و همکاران، ۲۰۱۲). اثر تغییر شکل‌های برشی را در صفحه‌های مزبور نمی‌توان نادیده گرفت. یک شیوه ساده برای وارد کردن این اثر، توسط Reissner (۱۹۴۵) و Mindlin (۱۹۵۱) ارائه شده است. نگره Reissner-Mindlin، کرنش برشی را متناسب با برش و به صورت ثابت در ضخامت صفحه می‌پندارد. به خاطر باید سپرد، هنگامی که ضخامت صفحه خیلی کم باشد، اثر برش ناچیز و نگره کیرشهف به کار می‌رود.

رابطه‌سازی اجزای محدود را نیز می‌توان برای هر دو راهکار ارائه کرد. به سبب پیچیدگی تحلیل صفحه خمشی، جزءهای گوناگونی در این زمینه ارائه شده‌اند (رضایی پزند و همکاران، ۱۳۸۹ و ۲۰۱۲). در نگره کیرشهف که تابع میدان خیز انتخاب می‌شود و معادله‌های حاکم با استفاده از مشتق‌های مرتبه دوم خیز برپا می‌گردد، برقراری شرط سازگاری  $C^1$  بسیار دشوار است و در پاره‌ای از حالت‌ها، با شرط‌های دیگری چون کامل بودن تابع درونیاب تناقض دارد. به طور معمول، در گره‌های گوشه، از درجه‌های آزادی مهندسی یا درجه‌های آزادی پایه  $(w, \theta_x, \theta_y)$  استفاده می‌کنند. می‌توان نشان داد که هیچ جزء مثلثی یا چهار پهلویی نمی‌توان یافت که در گره‌های گوشه دارای این درجه‌های آزادی باشد و تابع میدان آن هم سازگار  $C^1$  گردد (Taylor و همکاران، ۱۹۷۶). از این رو، روش‌های دیگری، هم‌چون: بهره‌جویی از مشتق‌های مرتبه دوم و بالاتر خیز برای درجه آزادی، تقسیم جزء به چند زیر جزء و کاربرد چند تابع درونیاب در هر کدام، رابطه‌سازی درهم و تنش پیوندی برای رفع این مشکل استفاده می‌شوند (Dawe، ۱۹۸۴). باید افزود، کاربرد جزءهای ناسازگار نیز مورد توجه پژوهشگران بوده است (Rezaiee-Pajand و Akhtary، ۱۹۹۸). هر کدام از شیوه‌های مزبور مشکل‌های تازه‌ای را نیز به همراه دارد. خاطر نشان می‌کند، به طور معمول، وارد کردن شرط سازگاری  $C^1$  سبب افزایش سختی غیر واقعی جزء و پاسخ‌های با دقت کم‌تر می‌گردد. در مواردی نیز سبب واگرایی یا همگرایی به پاسخ‌های نادرست می‌گردد. این مشکل‌ها، پژوهش‌گران را به استفاده بیش‌تر از نگره

۵. Shear locking

۳. Theory

۴. Kirchhoff

بزرگ دارند، ناموزن می‌باشند. کاربرد چنین ماتریس‌هایی سبب ایجاد خطاهای بزرگی ناشی از حل دستگاه معادله‌ها می‌گردند. در این مقاله، خطاهای رابطه‌سازی مورد توجه می‌باشند. هرچند، فرآیند پیشنهادی ارزیابی را می‌توان در بررسی سایر خطاها هم به کار برد.

#### ۴- طرح مسأله سنگ نشانه

ساختن مسأله‌های سنگ نشانه برای ارزیابی جزءهای محدود نیاز به برنامه‌ریزی دقیق دارد. هدف از این کار، به دست آوردن آزمون‌های کوچکی است که رفتار جزء را در مسأله‌های کاربردی مشخص نمایند. عامل‌های گوناگونی بر پاسخ جزءهای محدود تأثیر می‌گذارند. عامل‌های مهمی که در مسأله انتخابی وجود دارند باید به طور کامل شناخته شوند. با وارد کردن این‌ها، می‌توان یک نتیجه منطقی از پاسخ‌های مسأله گرفت.

هر مسأله سنگ نشانه نماینده‌ای از یک دسته مسأله و اثرهای آن‌ها می‌باشد. افزون بر این، مسأله‌های سنگ نشانه باید همه عامل‌هایی را که در دقت جزء مؤثرند را بررسی کند. عامل‌های مؤثر بر دقت جزء از: بارگذاری، هندسه جزء، هندسه سازه، شرط‌های مرزی و ویژگی‌های ماده تشکیل می‌شوند. بارگذاری‌های مهم باید مطابق با حالت‌های گوناگون تغییر شکل، در آزمون‌ها وجود داشته باشد. به طور معمول، بارهای متمرکز حالت بدتری را نسبت به بارهای گسترده به وجود می‌آورند. عامل مؤثر دیگر در مقدار خطا، شکل هندسی جزء است. شکل اصلی جزءهای سه پهلوئی، مثلث قائم‌الزاویه دو پهلو برابر و برای جزءهای چهار پهلو، مربع می‌باشد. به خاطر باید سپرد، هنگامی که شکل جزء نسبت به حالت اصلی تغییر می‌کند، خطاهایی در حل به وجود می‌آید. کاهش دقت پاسخ‌ها هنگام کاربرد شکل‌های غیراصولی باید توسط آزمون‌ها بررسی شود. در کاربردهای عملی هندسه جزء شکل منظمی ندارد. به سخن دیگر، کم‌تر می‌توان از شکل اصلی در الگوسازی مسأله‌های کاربردی استفاده کرد. الگوسازی شکل‌های بزرگ به صورت خودکار ایجاد می‌شود و شکل جزءها از حالت اصلی خود خارج می‌گردد.

حالت قرارگیری جزءها در کنار هم و چگونگی شبکه‌بندی هندسه مسأله نیز پاسخ‌ها را تغییر می‌دهد. در این میان، نباید تأثیر گوشه‌های با زاویه باز و شبکه‌بندی این ناحیه را از نظر دور داشت. افزون بر این، شمار جزءهای به کار رفته در الگوسازی در دقت پاسخ‌ها مؤثر است. همچنین، امکان دارد شماره‌گذاری گوناگون برای گره‌ها پاسخ‌هایی با دقت‌های متفاوت به دست دهد. عامل‌های دیگری چون مقدار نازکی جزء، آرایش تکیه‌گاه‌ها و ویژگی مواد، به ویژه مقدارهای نزدیک به  $0/5$  برای نسبت پواسون، ماتریس سختی جزء را تغییر می‌دهند و ممکن است سبب به دست آمدن پاسخ‌های نادرست شوند. آشکار است، نمی‌توان نتیجه‌گیری کاملی از پاسخ مسأله‌های سنگ نشانه داشت. با وجود این، اگر مسأله‌های سنگ نشانه به گونه‌ای طرح شوند که اثرهای

حل معادله دیفرانسیل و واردکردن شرط‌های مرزی پاسخ مسأله به- دست می‌آید. چون حل معادله‌های دیفرانسیل در محیط‌های پیچیده مشکل است، دومین گام روش جزءهای محدود، به گسسته‌سازی محیط پیوسته می‌پردازد. در این گام، محیط فیزیکی به صورت ترکیبی از جزءهایی با هندسه مشخص الگوسازی می‌شود. اگر ترکیب جزءهای به کار رفته با شکل هندسی جسم یکسان نباشد، خطایی به وجود می‌آید. چنین خطایی به نام خطای گسسته‌سازی دامنه شناخته می‌شود. سپس، معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر رفتار جسم در درون هر جزء حل می‌گردد. برای این کار، تغییر عامل‌های مؤثر بر رفتار جسم را به صورت تابع‌های ساده‌ای در نظر می‌گیرند. با حل معادله‌های دیفرانسیل و شرط‌های مرزی رابطه‌های خطی بین عامل‌های درونی جزء و عامل‌های خارجی به دست می‌آید. برای نمونه، در روش تغییر مکان، یک دستگاه معادله‌های خطی که مجهول‌های آن تغییر مکان‌ها و معلوم‌های آن، بارهای خارجی در نقطه‌های خاصی به نام گره هستند، رفتار جزء را ارائه می‌کنند. تفاوت معادله‌های پنداشتی و پاسخ‌های واقعی معادله دیفرانسیل، خطای دیگری را در تحلیل به وجود می‌آورد. چنین خطاهایی را خطای رابطه‌سازی جزء محدود می‌نامند. ناکامل- بودن مرتبه چندجمله‌ای درونیاب، تابع‌اولیه‌گیری<sup>۶</sup> با مرتبه ناکافی، ناسازگاری جزء و مقدار دترمینان ژاکوبی در اجزای با پهلوهای خم‌دار از جمله عامل‌های مؤثر بر خطای رابطه‌سازی هستند.

از برهم نهادن دستگاه معادله‌های جزءهای گوناگون، دستگاه معادله حاکم بر کل سازه به دست می‌آید. مقدارهای معلوم این دستگاه، بارهای وارد بر سازه‌اند و مقدارهای مجهول آن از تغییر مکان‌ها، تنش‌ها یا کرنش‌های درون سازه تشکیل می‌شود. برای یافتن مجهول‌ها، دستگاه معادله‌ها با روش‌های تکراری حل می‌گردد. هنگام حل دستگاه معادله‌ها، خطاهایی به وجود خواهد آمد. مهم‌ترین خطا از گرد کردن عددها ایجاد می‌شود. هر چه شمار عمل لازم‌های ریاضی برای به دست آوردن مجهول‌ها بیشتر باشد، مقدار خطای ناشی از گرد کردن عددها افزایش می‌یابد. به طور معمول، روش‌های حذفی گوس- جردن و حذفی گوس، شمار عمل‌های جمع و ضرب کم‌تری نسبت به سایر روش‌ها دارند. از این رو، کاربرد آن‌ها بیش‌تر می‌باشد. هر چند، در سامانه‌های با شمار درجه‌های آزادی زیاد ممکن است شیوه‌های تکراری برای کاهش خطاها برتری داده شوند. بخش دیگر از خطای ناشی از حل دستگاه معادله به ناموزنی آرایه‌های دستگاه معادله وابسته می‌شود. در پاره‌ای حالت‌ها، پاسخ‌های دستگاه معادله به تغییر کوچکی در آرایه‌های ماتریس ضریب‌ها یا بردار مقدارهای ثابت حساس می‌باشند. به سخن دیگر، تغییر کوچکی در مقدار برخی از آرایه‌ها سبب به وجود آمدن تغییر بزرگی در پاسخ‌ها می‌گردد. باید دانست، تغییر کوچک ممکن است ناشی از گردکردن عددهای ماتریس ضریب‌ها باشد. برای ماتریس‌ها می‌توان عدد شرط را به صورت نسبت بیشینه به کمینه مقدار ویژه ماتریس تعریف کرد. ماتریس‌هایی که عدد شرط<sup>۷</sup>

این کار وجود دارند که در این نوشته مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. یادآوری می‌کند، مسأله‌های سنگ نشانه‌ای که برای واری رفتار جزء به کار می‌روند، برای مقایسه زمان اجرا بسیار کوچکند. ملاک‌های دیگری نیز در ارزیابی جزءها به کار می‌روند. هر جزء باید بتواند حرکت‌های جسم سخت را الگوسازی کند. در اولویت بعدی، توانایی جزء برای الگوسازی حالت تنش یا کرنش ثابت است. از سوی دیگر، مرتبه ماتریس سختی آن کامل باشد و حالت‌های حرکتی غیر واقعی نداشته باشد. سختی بیش از حد جزء در یک بارگذاری یا هندسه خاص نیز سبب خطای زیاد یا پاسخ‌های نادرست می‌گردد. این حالت به "ففل کردن" جزء مشهور است. از سازگاری جزء می‌توان به عنوان یکی دیگر از معیارهای برتری نام برد. هنگامی که میدان‌های حاکم بر رفتار جزء در پهلوهای مشترک دو جزء مجاور هم، مقدار یکسانی داشته باشند، سازگاری از نوع  $C^0$  است. در حالت سازگاری  $C^1$ ، شیب میدان در دو سوی پهلو نیز یکسان می‌باشد.

#### ۶- ارزیابی پیشنهادی MacNeal

MacNeal و Harder در سال ۱۹۸۵، روشی را برای ارزیابی جزءهای چهار پهلو و شش‌وجهی در برنامه رایانه‌ای نسترن<sup>۸</sup> بکار بردند. معیار ارزیابی در این سازه‌ها، جابجایی بیشینه و در آزمون وصله تنش‌های درون سازه می‌باشد. راهکار مزبور برای ارزیابی از پنج نمره A, B, C, D, و F استفاده می‌کند که بر پایه خطای پاسخ‌ها، e، همانند جدول (۱) تعریف می‌گردد.

با انجام هر آزمون و به دست آوردن مقدار خطا، نمره جزء مشخص می‌گردد. MacNeal، نمره‌های D و F را غیر قابل قبول می‌داند. به سخن دیگر، اگر جزء در آزمون نمره D یا F گرفت آزمون مزبور را برقرار نکرده است. با انجام همه آزمون‌ها، شمار آزمون‌هایی که برقرار نشده‌اند به دست می‌آید. این تعداد، مبنای مقایسه بین جزءهای گوناگون خواهد بود. باید دانست، شمار جزءهای الگو ثابت است. از این رو، سرعت، یکنواختی و حد نهایی همگرایی ارزیابی نخواهد شد. به خاطر باید سپرد، با وجود ارزیابی نسبی، روش MacNeal یک نمره نهایی برای جزء در حالت‌های گوناگون تعیین نمی‌کند.

جدول ۱ - امتیازهای پیشنهادی MacNeal و Harder

نمره	A	B	C	D	E
خطا	$e \leq 2\%$	$2\% < e \leq 10\%$	$10\% < e \leq 20\%$	$20\% < e \leq 50\%$	$e > 50\%$

#### ۷- ارزیابی همگرایی

واری جزءهای نو در مقاله‌های گوناگون با شبکه‌بندی‌های گوناگونی انجام می‌شود. از این رو، ارزیابی جزءها بر پایه پاسخ‌ها کار ساده‌ای نیست. از سوی دیگر، کاربرد نمودار همگرایی مقایسه دو جزء را آسان می‌نماید. هرچند این کار فقط به صورت چشمی انجام می‌گیرد

گوناگون را به صورت جداگانه بررسی کنند، می‌توان پیش‌بینی بسیار مفیدی از رفتار جزء ارائه کرد. در بیش‌تر مسأله‌ها، اثرهای گوناگون به صورت هم‌زمان دقت جزء را تغییر می‌دهند. در این حالت، باید عامل یا عواملی که بیش‌ترین اثر را دارند مشخص کرد، در غیر این صورت، نتیجه‌گیری گمراه کننده خواهد بود. برای نمونه، خطا در صفحه خمشی متوازی‌الاضلاع با تکیه‌گاه ساده به سبب ویژگی حل در گوشه باز است (Scapolla و Babuska، ۱۹۸۹). پیش از این گمان می‌رفت، مورب بودن جزءها عامل اصلی بر رفتار نامطلوب صفحه می‌باشد. جزءها یا روش‌های نوینی که ارائه می‌شوند باید در دامنه گسترده‌ای از کاربردهای عملی پاسخ‌های قابل اطمینانی ارائه دهند. این اطمینان را می‌توان با طرح یک دسته مسأله سنگ نشانه خوب به دست آورد. به آگاهی می‌رساند، یک روش یا جزء را می‌توان به گونه‌ای طرح کرد که در پاره‌ای از مسأله‌ها پاسخ‌های عالی ارائه دهد ولی فقط برای دامنه کوچکی از مسأله‌های کاربردی قابل استفاده باشد.

#### ۵- معیارهای ارزیابی

روش جزءهای محدود یک فرآیند تقریبی است و خطا به همراه دارد. مسأله‌های سنگ نشانه به پژوهشگران و کاربران جزءهای محدود این امکان را می‌دهد که دقت و یا خطای تحلیل را در کاربردهای گوناگون پیش‌بینی کنند. از این رو، مقدار دقت جزء مهم‌ترین ملاک خوبی یا نامطلوب بودن یک جزء یا یک روش است. به خاطر باید سپرد، در روش جزءهای محدود، میدان‌های حاکم بر یک مسأله با مقدارهای آن‌ها در نقطه‌های خاصی به نام گره تقریب زده می‌شود. هر یک از این مقدارهای مستقل و مجهول را درجه آزادی گویند. آشکار است، هرچه شمار درجه‌های آزادی بیش‌تر باشد، تقریب بهتری از میدان حاکم به دست خواهد آمد. از سوی دیگر، با افزایش شمار درجه‌های آزادی زمان لازم برای تحلیل و در نتیجه هزینه کار افزایش می‌یابد. به طور معمول، رابطه بین خطا و شمار درجه‌های آزادی برای جزء رسم می‌گردد. هرچه این نمودار به صورت یکنواخت و با سرعت بیش‌تری به سوی پاسخ دقیق همگرا شود، اطمینان بیش‌تری از رفتار جزء به دست می‌آید.

رابطه بین مقدار خطا و هزینه یا زمان انجام تحلیل نیز می‌تواند معیار ارزیابی باشد. این زمان شامل: زمان خواندن داده‌ها و ساختن شبکه، برپاسازی ماتریس سختی محلی و کلی، حل دستگاه معادله و یافتن ستاده‌ها می‌باشد. از این میان، زمان حل دستگاه معادله مقدار قابل ملاحظه‌ای است. هنگامی که شمار درجه‌های آزادی بسیار زیاد باشد، زمان‌بری سایر عامل‌ها، در برابر زمان حل دستگاه معادله‌ها، ناچیز خواهد بود (سرافرازی، ۱۳۷۶).

خاطر نشان می‌سازد، زمان تحلیل به سخت‌افزار رایانه، سیستم عامل، زبان و شیوه برنامه‌نویسی نیز بستگی دارد. پژوهش‌هایی برای کاهش زمان حل دستگاه انجام شده است. مسأله‌هایی نیز برای واری

با وجود این، در یک دامنه کاربردی می توان تصور کرد که هنگام کاربرد دو جزء سه پهلویی یا یک جزء چهار پهلوی ( $x=1$ ) خطا صد درصد باشد. اگر با ریز شدن شبکه خطا به سمت صفر حرکت کند مقدار  $A$  صفر خواهد بود، و در نتیجه،  $B=100$  به دست می آید. بنابراین، می توان نمره سرعت همگرایی را به صورت مقدار  $B$ ، بین صفر تا ۱۰۰، تعریف نمود. یکی دیگر از معیارهای ارزیابی، یکنواختی همگرایی است. ضریب همبستگی،  $R$ ، می تواند معیار مناسبی برای امتیازدهی به این معیار باشد. از این رو، مقدار  $100R$  را می توان به عنوان امتیاز یکنواختی همگرایی در نظر گرفت. بی شک، برای ارزیابی همگرایی باید ترکیبی از سه امتیاز، دقت، سرعت و یکنواختی ارائه کرد. ترکیب سه امتیاز و رسیدن به یک نمره نهایی کار ساده ای نیست. افزون بر این، در همگرایی غیر یکنواخت مقدارهای قابل استنادی برای عامل های  $A$ ،  $B$  و ضریب همبستگی به دست نمی آید. مشکل های موجود در امتیازدهی نمودار همگرایی، نویسندگان را بر آن داشت تا شماری خم مشخص همگرایی امتیازدار پیشنهاد نمایند تا بر پایه آن ها، نمره جزء محدود به دست آید.

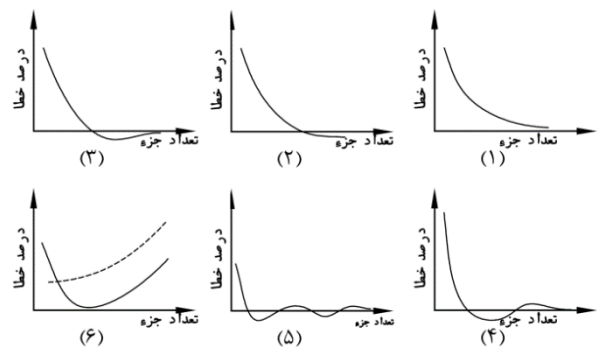
#### ۸- شیوه پیشنهادی ارزیابی مقایسه ای

با تعریف خم های مشخص، روش پیشنهادی ارزیابی همگرایی جزء محدود آغاز می شود. این خم ها بر پایه دقت، سرعت و یکنواختی همگرایی امتیاز دارند. می توان با رسم نمودار همگرایی جزء و مقایسه آن با منحنی های استاندارد نمره شایستگی جزء را مشخص کرد. برای انجام بهتر این کار، در محور افقی ناحیه های استاندارد به جای شمار جزء های چهار پهلوی سازه، از شمار جزء های چهار پهلوی به کار رفته در بُعد کوچک تر سازه ( $n$ ) استفاده گردید. چنین عاملی ریزی جزء نسبت به ابعاد سازه را نشان می دهد. به جای عامل مزبور، می توان از جذر شمار جزء های چهار پهلوی کل سازه یا جذر نصف جزء های سه پهلویی به کار رفته استفاده کرد. محور قائم نیز درصد خطای پاسخ سازه ( $E$ ) را نشان می دهد. در فضای  $n-E$  شماری نقطه شاخص انتخاب شده اند. مختصه  $E$  نقطه های مزبور مقدارهای ۳، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ درصد می گیرند. خاطرنشان می کند، مقدار خطای سه درصد، همان خطای مورد قبول در کارهای مهندسی است. دیگر مقدارها، متناسب با پژوهش MacNeal انتخاب گردیده اند. مختصه  $n$  نقطه های انتخابی در فضای  $n-E$  به صورت ۲ اختیار شده اند. نمودارهای پیشنهادی که از نقطه های شاخص می گذرند، همانند شکل (۲) می باشند. برای نمونه، بهترین خم وابسته به حالتی است که با کاربرد یک جزء چهارپهلوی یا دو جزء سه پهلوی بتوان پاسخی با خطای ۳ درصد به دست آورد. چهارمین خم در شیوه پیشنهادی، رفتار جزء را نشان می دهد که با کاربرد ۱، ۲، ۴، ۸ جزء بتوان، به ترتیب، پاسخی با دقت ۵۰، ۲۰، ۱۰ و ۳ درصد به دست آورد. اگر وارون شمار جزء های به کار رفته در یک بُعد به عنوان متغیر مستقل به کار رود، خم های شکل (۲) به صورت خط در می آیند.

و روش نظام داری وجود ندارد که با یک برنامه رایانه ای بتواند مقایسه را انجام دهد. شیوه نظام دار باید بتواند بر پایه سرعت همگرایی و یکنواختی آن و همچنین پاسخ نهایی، نمره ای را برای جزء مشخص نماید. باید دانست، چنین کاری تاکنون انجام نشده است. نخستین اندیشه ای که توسط نویسندگان برای دستیابی به این هدف پیگیری شد، کمی کردن عامل های سرعت و یکنواختی همگرایی بر پایه خطای پاسخ ها در شبکه بندی های گوناگون بود. از نمودارهای همگرایی برای این ویژگی ها می توان بهره جست. بر اساس تجربه نویسندگان، حالت های عمده رابطه درصد خطا بر حسب شمار جزء های شبکه را می توان مطابق شکل (۱) در نظر گرفت.

برای تعیین نمره همگرایی می توان تابع هایی را انتخاب نمود که خم های شکل (۱) را برازش کنند. مقدارهای ثابت تابع ها را می توان در تعیین نمره به کار برد. آشکار است، برای امکان همگرایی به سمت یک عدد حقیقی در بی نهایت نیاز به جمله های  $1/x$  در تابع همگرایی است. در این پژوهش، تابع های گوناگونی برای برازش خم همگرایی بررسی شدند. از این میان، خم  $y=A+B/x$  فرآیند ساده تری دارد. یافتن ضریب های سایر معادله ها، یک فرآیند تکراری لازم دارد که ممکن است به گندی همگرا شود، یا حتی واگرا گردد که در یک روش نظام دار، چندان قابل توجه نمی باشند.

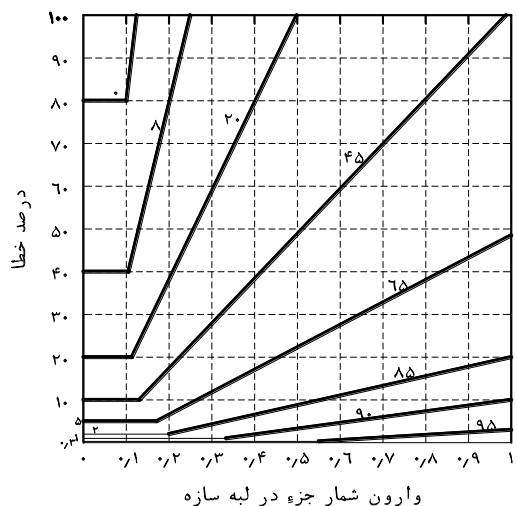
در ادامه، به بررسی عامل های خم  $y=A+B/x$  پرداخته می شود تا بتوان بر پایه آن نمره ای به نمودار همگرایی اختصاص داد. به آگاهی می رساند، مقدار  $x$  شمار جزء های چهار پهلوی یا نصف شمار جزء های مثلثی مسأله را نشان می دهد. درصد خطای پاسخ شاخص سازه نیز با  $y$  نشان داده شده است. از این رو، در نمودار مورد نظر،  $A$  مقدار نهایی خطا را نشان می دهد. مقدار عامل مزبور، مشخص می کند که هنگامی جزء ها خیلی ریز می شوند آیا جزء قادر است پاسخ های با خطای صفر ارائه کند. بر پایه مقدار  $A$  می توان نمره ای برای دقت جزء به دست آورد. عامل  $B$ ، سرعت همگرایی را مشخص می کند. کمینه مقدار  $B$  برابر با صفر است. اگر چه از دیدگاه عملی ممکن است مقدار مزبور دست یافتنی نباشد. زیرا، مقدار صفر برای  $B$  نشان می دهد که با ریز شدن جزء ها خطا تغییر نمی کند. از دیدگاه ریاضی، نمی توان مقدار حداکثری برای عامل  $B$  تعیین نمود.



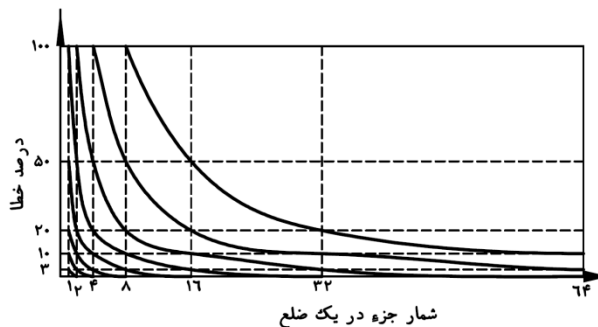
شکل ۱- چند حالت نمودار خطا

تحلیلی در دسترس نیست و تحلیل جزءهای محدودی با یک شبکه بندی ریز به جای پاسخ دقیق در محاسبه خطا به کار می رود. پاسخ مزبور ممکن است خطا دار باشد. از این رو، بر ارزیابی جزء تأثیر منفی دارد. افزون بر این، امکان همگرایی یک جزء خوب به پاسخی با خطای ناچیز وجود دارد. به سخن دیگر، اگر جزءها از یک مقدار ریزتر شوند، پاسخها تغییر نمی کنند و نمودار همگرایی بخش مزبور، خط راستی موازی محور طولی خواهد بود. اگر نمودار همگرایی این حالت در شکل (۳) رسم گردد، در ناحیه های با امتیاز پایین قرار می گیرد و نمره جزء به سرعت کاهش می یابد. در چنین حالتی، با وجود دقت خوب، جزء پایینی به دست می آورد.

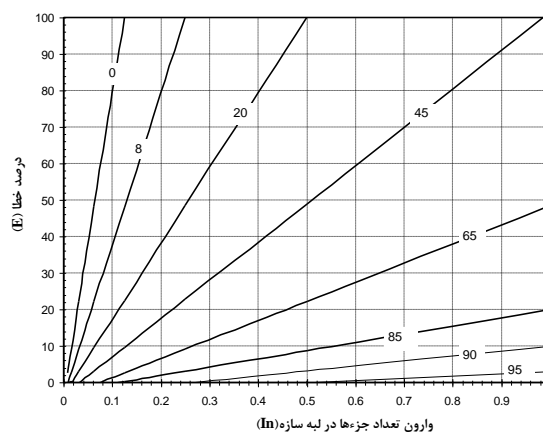
با توجه به نقص درج شده، بهبودی در شیوه ارزیابی پیشنهاد می گردد تا خطاهای کوچک و ثابتی که با ریزش شبکه باقی می ماند، تغییر قابل ملاحظه ای در نمره جزء ندهند. کوچکی مقدار خطاها را می توان به صورت درصدی از خطای موجود در شبکه درشت ارائه کرد. مقدار مزبور ده درصد خطای حالت  $In=1$  پیشنهاد می گردد. به سخن دیگر، بهبود ارزیابی با کاربرد یک ترکیب دو خطی برای نمودارهای همگرایی استاندارد به دست می آید. برای این کار، همان خطهای شکل (۳) به کار می روند. در جاهایی که خطا کم تر از ۱۰ درصد خطای شبکه درشت گردد،  $In=1$ ، از خطی موازی محور طولی بهره جویی می شود. نتیجه کار، ناحیه های امتیاز دار شکل (۴) خواهد بود. عددهای روی خمها، امتیاز پیشنهادی برای هر خم را نشان می دهند. خاطر نشان می کند، ده درصد خطای شبکه درشت، عددهای ناصحیح هستند که برای سادگی به عددهای صحیح گرد شده اند. برای تعیین امتیاز یک جزء در یک آزمون مشخص، نمودار همگرایی جزء با خمهای استاندارد مقایسه می شود. هر نقطه از نمودار همگرایی روی یکی از خمهای استاندارد یا در بین دو منحنی قرار می گیرد. در نتیجه، بر حسب مقدار فاصله ای که نقطه مورد نظر با نمودارهای استاندارد دارد، امتیاز آن نقطه به دست می آید. امتیاز جزء از میان گیری امتیازهای نقطه های منحنی همگرایی آن حساب خواهد شد.



شکل ۱- ناحیه های امتیاز دار بهبود یافته



شکل ۲- خم های استاندارد همگرایی



شکل ۳- ناحیه های امتیاز دار پیشنهادی

چنین خطهایی در شکل (۳) به نمایش در آمده اند. عامل  $In$ ، در ادامه برای وارون شمار جزءها به کار می رود. اکنون نوبت امتیازدهی به خطها یا ناحیه ها است. با بررسی حالت های گوناگون، امتیازدهی به نسبت زاویه خط مناسب تر خواهد بود. برای یکسان سازی مقیاس محورهای افقی و قائم، از یک صدم مقدرهای مختصه قائم برای یافتن زاویه خطا بهره جویی می شود. سپس، به خط  $E=0$  امتیاز ۱۰۰ و به بالاترین خط امتیاز صفر اختصاص می یابد.

باید دانست، رابطه  $E=835In-4$  بین وارون شمار جزءها و مقدار خطای بالاترین خط برقرار است. این معادله نشان می دهد که برای دستیابی به پاسخی با خطای ۱۰ درصد به حدود ۱۰۰۰۰ جزء در شبکه بندی سازه نیاز است. باید دانست، این سازه آزمون سنگ نشانه، یک سازه ساده است و کاربرد چنین شبکه ریزی برای به دست آوردن دقت نود درصد در پاسخها ضعیف بودن جزء را نشان می دهد. از این رو، امتیاز صفر به آن داده می شود. نتیجه امتیازدهی نمودارهای گوناگون در شکل (۳) ارائه شده است. امتیاز نقطه های بین نمودارهای استاندارد را می توان با درون یابی خطی به دست آورد.

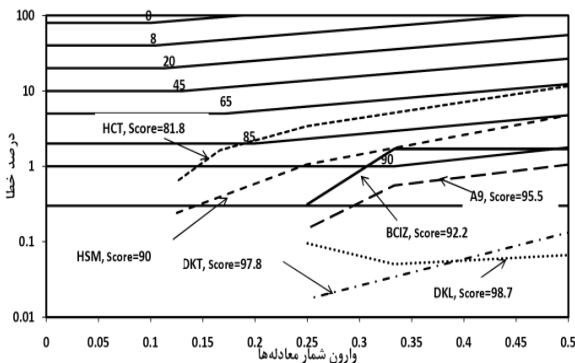
### ۹- بهبود روش ارزیابی

از خطای تغییر مکان بیشینه سازه، در روش ارزیابی پیشنهادی استفاده می شود. خطای مزبور، مقدار نسبی تفاوت پاسخهای روش جزءهای محدود و شیوه تحلیلی است. در پاره ای از موردها، پاسخ

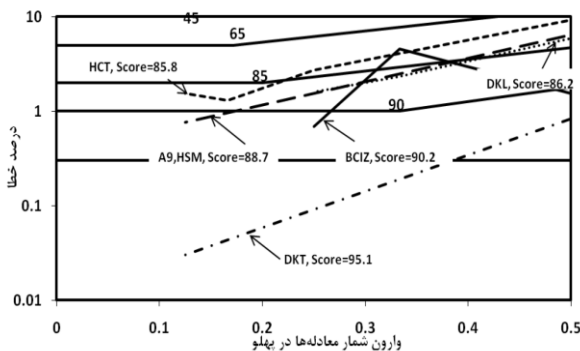
### ۱۰- ارزیابی چند جزء صفحه خمشی

در این بخش، نتیجه‌های ارائه شده چند مقاله در مورد جزء سه‌پهلویی صفحه خمشی با شیوه پیشنهادی ارزیابی می‌شود. با این کار، مقایسه کیفی نمودارهای همگرایی به مقایسه کمی بر روی امتیاز جزءها تبدیل خواهد شد. در آغاز، چند نمودار همگرایی، که توسط Meek و Tan (۱۹۸۵)، در بررسی جزء DKL ارائه شده است، مورد توجه قرار می‌گیرد. نخستین آن‌ها، تحلیل صفحه خمشی مربعی با تکیه‌گاه ساده و بار گسترده‌ی یکنواخت است. شکل (۵) نمودار همگرایی خطای خیز مرکز صفحه را بر حسب شمار معادله‌های سازه نشان می‌دهد. در شکل مزبور، پاسخ‌های چند جزء دیگر نیز به نمایش درآمده‌اند. خاطر نشان می‌کند، جزء مثلثی ناسازگار Bazeley و همکاران (۱۹۶۵) که ۹ درجه آزادی دارد با BCIZ نشان داده شده است. جزء HSM، یک جزء سه‌پهلوی تنش پیوند می‌باشد که میدان لنگر در داخل جزء به صورت خطی درونیایی می‌گردد (Batoz و همکاران، ۱۹۸۰). میدان خیز جزء HSM بر روی پهلوه‌ها با تابع درجه سه تغییر می‌کند به صورتی که دوران گرد محور عمود بر پهلو خطی تغییر نماید. در جزء سه‌پهلوی نه‌گرهی DKT، دوران‌ها با تابع درجه دو درونیایی می‌شود (Batoz، ۱۹۸۲). رابطه‌سازی جزء مزبور با نگره Reissner-Mindlin است. ولی، با صفر کردن کرنش برشی بر روی پهلوه‌ها یک جزء برای تحلیل صفحه‌های نازک به دست می‌آید. جزء مثلثی A9 توسط Razzaque (۱۹۷۲)، بر اساس جزء BCIZ و جایگزینی مشتق‌های مرتبه دوم واقعی تابع میدان با تابع‌های هموار ارائه گردید. نام HCT نیز بر نخستین جزء محدود سه‌پهلوی سازگار صفحه خمشی نهاده شده است (Clough و Tocher، ۱۹۶۵). جزء مزبور با تقسیم جزء به سه زیر ناحیه رابطه‌سازی می‌شود. شکل (۵) برتری کیفی جزءهای DKL و DKT را نسبت به سایر جزءها نشان می‌دهد. با توجه به ارائه درصد خطا بر حسب شمار معادله‌ها توسط Meek و Tan (۱۹۸۵)، رابطه شمار معادله‌ها به کار رفته در پهلوی الگوی اجزای محدودی سازه، یا همان شمار درجه‌های آزادی پهلو، با شمار جزءهای پهلو به دست آمده است تا بتوان نمودارهای امتیازدار را بر حسب وارون شمار معادله‌ها در پهلو نوشت.

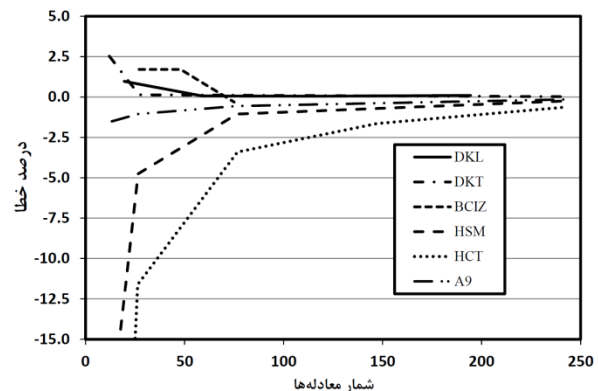
در ادامه، با انتقال داده‌های نمودارهای شکل (۵) به ناحیه‌های امتیازدار، نمره جزءها به دست می‌آیند. به آگاهی می‌رساند، نمودار همگرایی هر جزء از وصل کردن چند نقطه شاخص به دست می‌آید. نقطه‌های مزبور بین دو خط امتیازدار قرار دارند. با یک درونیایی خطی بر حسب فاصله نقطه تا خط‌های دو طرف، امتیاز جزء در آن نقطه حساب می‌گردد. سپس، با میانگین‌گیری امتیاز نقطه‌های خم همگرایی، امتیاز جزء در آن آزمون مشخص خواهد شد. شکل (۶)، نتیجه چنین کاری را به صورت امتیاز هر جزء نشان می‌دهد. برای بهتر ساختن نمودارها، مقیاس محور قائم لگاریتمی انتخاب شده است. مقایسه کمی جزءها را شکل (۶) به خوبی امکان‌پذیر می‌کند. بیش‌ترین امتیاز به جزء DKL و به فاصله کمی بعد از آن به جزء DKT اختصاص دارد. کم‌ترین امتیاز مربوط به جزء HCT می‌باشد که همانند شکل (۵) به گندی همگرا می‌شود. همچنین، خطای پاسخ‌های خیز در آزمون صفحه مربعی با تکیه‌گاه ساده نیز از پژوهش Meek و Tan (۱۹۸۵)، انتخاب می‌شود. نمودارهای امتیاز داده شده این آزمون در شکل (۷) رسم شده‌اند. به طور مشابه، فرآیند امتیازدهی پیشنهادی برای صفحه مربعی گیردار زیر اثر بارهای گسترده و متمرکز هم انجام شده است که نمودارهای حاصل در شکل‌های (۸) و (۹) می‌گردد.



شکل ۳- امتیاز نمودارهای شکل (۵)



شکل ۴- نمودار همگرایی امتیاز داده شده صفحه خمشی مربعی با تکیه‌گاه ساده و بار متمرکز

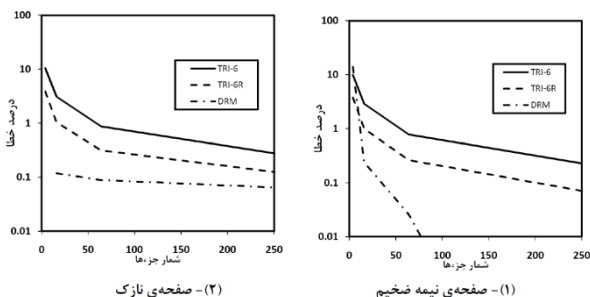


شکل ۲- نمودار همگرایی خطای خیز بیشینه صفحه خمشی مربعی با تکیه‌گاه ساده و بار گسترده

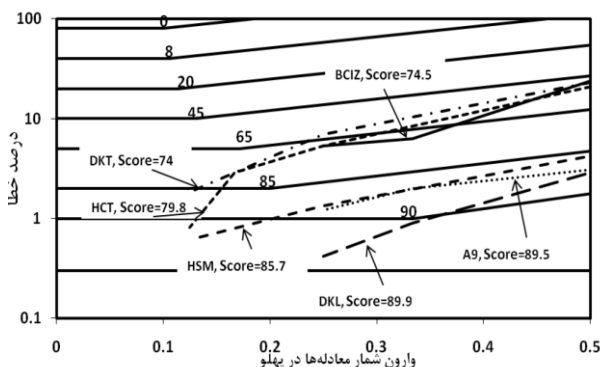
در هر دوی این سازه‌ها، بارگذاری از نوع گسترده یکنواخت است. باید دانست، شکل صفحه مورب، همانند سازه ردیف آخر جدول (۱۴) می‌باشد. جدول (۳) پاسخ‌های دو آزمون سنگ نشانه و نمره جزء DKL را بر پایه شیوه پیشنهادی نشان می‌دهد. در ادامه، آزمون‌های مرجع (Zienkiewicz و همکاران، ۱۹۹۰) مورد توجه قرار می‌گیرند. آنها در پژوهش مزبور یک جزء سه‌پهلویی شش‌گره‌ای به نام TRI-6 ارائه نمودند که کرنش برشی آن به طور خطی تغییر می‌کند. سپس، با تبدیل دو دوران گرد محورهای مختصه‌های گره‌های میان پهلو به دوران عمود بر پهلو، جزء DRM-6R را به دست آوردند. همچنین، آنها یک جزء توسعه‌یافته DKT برای صفحه خمشی Mindlin ارائه کردند و نام آن را DRM نامیدند. مقایسه جزءهای مزبور در آزمون صفحه خمشی با تکیه‌گاه ساده و بار گسترده یکنواخت برای دو حالت صفحه نازک و نیمه‌ضخیم در شکل (۱۰) آمده است. با انتقال نمودارهای همگرایی به روی دامنه‌های امتیاز داده شده، نمره هر جزء در آزمون‌های گوناگون به دست آمده است. عددهای حاصل در جدول (۴) درج شده‌اند. آشکار می‌باشد، مقدار ضخامت صفحه در امتیاز جزءهای TRI-6 و TRI-6R تأثیر چندانی نگذاشته است. جزء DRM در آزمون صفحه نیمه‌ضخیم سرعت همگرایی بیشتری دارد. با وجود این، به سبب خطای بالا در شبکه‌بندی درشت امتیاز آن کم‌تر از آزمون صفحه نازک شده است. خاطر نشان می‌سازد، نمودارهای همگرایی در این حالت برتری جزء در آزمون صفحه نیمه‌ضخیم را نشان می‌دهد. در صورتی که با بررسی مقدار خطاها می‌توان به رفتار بهتر جزء DRM در آزمون صفحه مربعی نازک پی‌برد. امتیازهای به دست آمده از روش پیشنهادی نیز با این نتیجه همخوانی دارد.

جدول ۳- خطاها و امتیاز جزء DKL در آزمون‌های صفحه‌های مورب

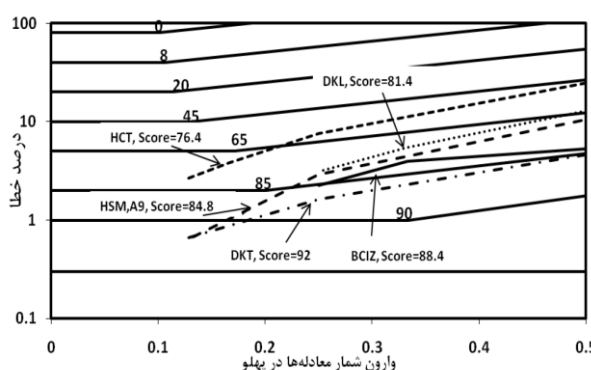
و دایره‌ای		
شبکه	سازه مورب ۳۰ درجه	سازه دایروی
۲×۲	---	۵/۴۵۸۳
۳×۳	---	۴/۸۹۵
۴×۴	۴/۴۱۱۸	---
۸×۸	۳/۴۳۱۴	---
امتیاز	۷۸	۸۶/۷



شکل ۷- نمودار همگرایی صفحه خمشی مربعی با تکیه‌گاه ساده و بار گسترده



شکل ۵- نمودار همگرایی امتیاز داده شده صفحه خمشی مربعی با تکیه‌گاه گیردار و بار گسترده



شکل ۶- نمودار همگرایی امتیاز داده شده صفحه خمشی مربعی با تکیه‌گاه گیردار و بار متمرکز

آشکار شد، اگر آزمون‌های یکسانی برای همه انجام شده باشد. مقایسه بین امتیاز جزءها هنگامی به طور کامل امکان‌پذیر است. در آزمون صفحه خمشی مرجع (Meek و Tan، ۱۹۸۵)، فقط شبکه‌بندی‌های ۲×۲ و ۴×۴ در بیش‌تر حالت‌ها مشترک می‌باشند. یادآوری می‌کند، پاسخ جزء DKT در سازه با بار متمرکز، تکیه‌گاه ساده و با شبکه ۴×۴ در دست نبود که با درونیابی بین مقادیرهای مربوط به شبکه‌های ۲×۲ و ۸×۸ تقریب زده شده است. اگر امتیازدهی فقط بر پایه پاسخ‌های شبکه‌های مزبور انجام شود، امتیازهای ارائه شده در جدول (۲) به دست خواهد آمد. Meek و Tan دو آزمون صفحه مورب با زاویه ۳۰ درجه و تکیه‌گاه ساده و همچنین صفحه دایروی گیردار را هم برای واری دقت جزء DKL به کار (Meek و Tan، ۱۹۸۵).

جدول ۲- مقایسه امتیاز جزءهای مورد استفاده شده توسط Meek و Tan (۱۹۸۵)، در آزمون صفحه مربعی

امتیاز جزءها						تکیه‌گاه	بار
HCT	BCIZ	HSM	A9	DKT	DKL		
۸۲/۴	۹۳/۸	۸۹/۲	۹۵/۶	۹۸/۸	۹۸/۷	گسترده	ساده
۸۵/۱	۹۲/۵	۸۷/۹	۸۷/۹	۹۵/۴	۶۱/۸	متمرکز	ساده
۷۲/۲	۷۰/۷	۸۹/۱	۸۹/۹	۶۲/۲	۹۲/۴	گسترده	گیردار
۶۶/۶	۸۷/۶	۸۴	۸۴	۸۸/۶	۸۱/۸	متمرکز	گیردار



جدول ۵- امتیاز جزء DRM برای نمودارهای شکل (۱۱)

ویژگی هندسی یا مرزی						سازه
Soft-A	Soft-B	Hard-A	Hard-B	Clamp-A	Clamp-B	مریعی
۸۳	۹۱	۸۶/۵	۹۴/۳	۸۶/۱	۹۳/۶	
Thick-Clamp	Thick-Hard	Thick-Soft	Thin-Clamp	Thin-Hard	Thin-Soft	دایروی
۹۲/۷	۹۴/۶	۹۴/۶	۹۲/۹	۹۴/۹	۹۴/۷	
				Hard	Soft	مورب ۳۰ درجه
				۸۵/۶	۸۵/۶	

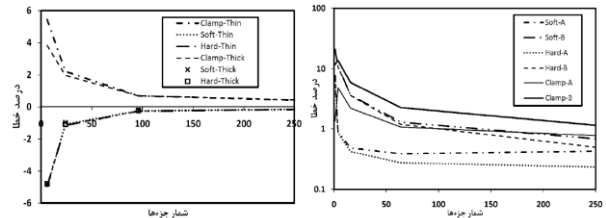
جدول ۶- امتیاز جزء مرجع (Papadopoulos و Taylor، ۱۹۹۰)

ویژگی هندسی یا مرزی						سازه
Clamp-B	Clamp-A	Hard-B	Hard-A	Soft-B	Soft-A	مریعی
۹۲/۹	۱/۱	۹۴	۹۲/۲	۸۹/۷	۷۷/۹	
Thick-Clamp		Thin-Clamp	Thick-Soft	Thin-Soft	دایروی	
۹۴/۱		۹۴	۹۳/۷	۹۳/۷		

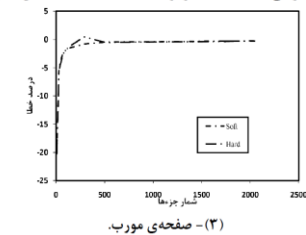
حرف‌های A و B نیز دو جهت شبکه‌بندی همانند شکل (۱۲) را نشان می‌دهد. همان‌گونه که نمودارهای همگرایی نشان می‌دهد، با کاربرد شبکه‌بندی نوع B به جای A مقدار خطا افزایش می‌یابد. جدول (۵) این کاهش شایستگی جزء را به صورت کمی نشان می‌دهد. در این جدول، اثر کم نوع تکیه‌گاه ساده در رفتار جزء DRM به صورت تغییر ناچیز امتیازها نمایان شده است. موازی با پژوهش Zienkiewicz و همکاران (۱۹۹۰)؛ Papadopoulos و Taylor (۱۹۹۰)، یک سه‌پهلوی شش‌گره‌ای ارائه کردند که تابع درون‌یاب خیز آن یک تابع درجه دو است (Papadopoulos و Taylor، ۱۹۹۰). بخش خطی تابع مزبور از خیز گره‌های گوشه استفاده می‌کند و بخش درجه دوم آن به گونه‌ای بر حسب دوران گره‌های گوشه و میان‌پهلویی نوشته می‌شود، که کرنش برشی در راستای پهلوه‌ها خطی تغییر کند. امتیاز جزء مزبور در آزمون‌های صفحه‌مربعی و دایره‌ای با بار گسترده یکنواخت، که از روی نمودارهای همگرایی آن‌ها به دست آمده، در جدول (۶) درج گردیده است. آزمون صفحه‌مورب با زاویه ۳۰ درجه، بار گسترده یکنواخت و تکیه‌گاه ساده نرم نیز برای جزء پیشنهادی Papadopoulos و Taylor (۱۹۹۰)، انجام شده است. جدول (۷) درصد خطای خیز بیشینه سازه مزبور را نشان می‌دهد. بر پایه پاسخ‌های جدول (۷)، امتیاز جزء Papadopoulos و Taylor برابر ۶۹/۹ می‌باشد. به آگاهی می‌رساند، اگر نتیجه آزمون با هشت جزء از فرآیند امتیازدهی حذف شود، امتیاز جزء به ۸۰ افزایش خواهد یافت. به سخن دیگر، به آزمون‌های یکسانی برای مقایسه جزء‌های گوناگون نیاز می‌باشد. در غیر این صورت، نتیجه نادرستی از رتبه‌بندی جزء‌های گوناگون به دست خواهد آمد. باید دانست، این نقص در شیوه سنتی مقایسه نمودارهای همگرایی نیز وجود دارد. پژوهش دیگری که آزمون‌های آن مورد توجه قرار گرفته است، به Bathe و همکارانش (۱۹۸۹)، اختصاص دارد. جزء‌های چهار-پهلوی MITC4، MITC8 و MITC9، به ترتیب، ۴، ۸ و ۹ گره دارند. جزء MITC7 هم یک جزء سه‌پهلویی می‌باشد که ۶ گره پیرامونی و یک گره میانی دارد. خیزهای بیشینه صفحه‌مربعی و دایره‌ای که نسبت به مقدارهای دقیق بهنجار شده‌اند از مرجع مزبور برداشت شده و در جدول (۸) درج گردیده‌اند.

جدول ۴- مقایسه امتیاز جزء‌های مورد استفاده توسط Zienkiewicz و همکاران (۱۹۹۰)، در آزمون صفحه‌مربعی

امتیاز جزء‌ها			نوع
DRM	TRI-6R	TRI-6	نازک
۹۸/۵	۹۳/۱	۸۸/۶	
۹۳/۳	۹۳/۵	۸۹/۲	نیمه‌ضخیم

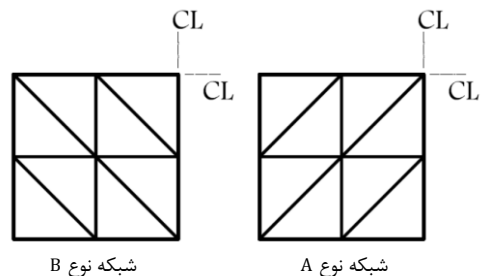


(۱) - صفحه‌ی مربعی نازک و بار متمرکز (۲) - صفحه‌ی دایره‌ای و بار گسترده



(۳) - صفحه‌ی مورب.

شکل ۱۱- نمودارهای همگرایی جزء DRM



شکل ۸- جهت‌های شبکه‌بندی A و B

افزون بر آنچه آمد، رفتار جزء DRM در آزمون‌های صفحه‌مربعی و بار متمرکز، صفحه‌دایره‌ای و بار گسترده و صفحه‌مورب با زاویه ۳۰ درجه و بار گسترده نیز واری‌گردید. در این آزمون‌ها، اثر نوع شبکه‌بندی و چگونگی تعریف تکیه‌گاه ساده بر رفتار جزء مورد بررسی قرار گرفته است. نمودارهای همگرایی مسأله‌های مزبور در شکل (۱۱) رسم شده‌اند. جدول (۵)، امتیاز جزء DRM در هر آزمون را با روش پیشنهادی نشان می‌دهد. خاطر نشان می‌نماید، عبارت‌های Soft و Hard در شکل (۱۱)، به ترتیب، تکیه‌گاه ساده نرم و سخت را نشان می‌دهد. در تکیه‌گاه ساده نرم فقط خیز پهلوی صفر می‌باشد. در نوع دیگر تکیه‌گاه ساده، دوران گرد محور عمود بر پهلوی نیز مقید است. تکیه‌گاه ساده سخت، حالت آرمانی تکیه‌گاه ساده در مرز صفحه خمشی است و هنگامی که خیز در سراسر پهلوی، بسته شده باشد، دوران گرد محور عمود بر پهلوی نیز صفر خواهد بود. با وجود این، در شیوه اجزای محدود که شرط‌های مرزی فقط در گره‌ها وارد می‌شوند، کاربرد تکیه‌گاه ساده نرم ساده‌تر می‌باشد.

کلی به جزء نسبت داد. چنین نمره‌ای درجه شایستگی جزء نام دارد. یک شیوه برای دستیابی به درجه شایستگی، میانگین‌گیری نمره‌های جزء در آزمون‌هاست.

#### جدول ۱۰- دسته‌بندی شایستگی پیشنهادی

درجه شایستگی	A	B	C	D	E	F
میانگین نمره‌ها	۱۰۰٫۹۵	۹۵٫۹۰	۹۰٫۸۵	۸۵٫۸۵	۸۰٫۸۰	۷۵٫۷۵
نمره کمینه	۱۰۰٫۹۰	۹۵٫۸۵	۹۰٫۸۰	۸۵٫۷۵	۸۰٫۷۰	۷۵٫۶۵

#### جدول ۱۱- دسته‌بندی شایستگی

درجه شایستگی	A	B	A	A	A	C
میانگین نمره‌ها	۹۶/۸۵	۹۴/۲۲	۹۶/۴۵	۹۶/۳۸	۹۶/۷۲	۸۹/۹۳
نمره کمینه	۹۳	۹۱	۹۳	۹۱/۶	۹۴/۱	۷۷/۴
درجه شایستگی <td>A <td>B <td>A <td>A <td>A <td>C </td></td></td></td></td></td>	A <td>B <td>A <td>A <td>A <td>C </td></td></td></td></td>	B <td>A <td>A <td>A <td>C </td></td></td></td>	A <td>A <td>A <td>C </td></td></td>	A <td>A <td>C </td></td>	A <td>C </td>	C
جزء <td>MITC9</td> <td>MITC7</td> <td>MITC9I</td> <td>MITC7I</td> <td>MITC8</td> <td>[P1] DRM</td>	MITC9	MITC7	MITC9I	MITC7I	MITC8	[P1] DRM
میانگین نمره‌ها	۹۶/۸۵	۹۴/۲۲	۹۶/۴۵	۹۶/۳۸	۹۶/۷۲	۸۹/۹۳
نمره کمینه	۹۳	۹۱	۹۳	۹۱/۶	۹۴/۱	۷۷/۴
درجه شایستگی <td>A <td>B <td>A <td>A <td>A <td>C </td></td></td></td></td></td>	A <td>B <td>A <td>A <td>A <td>C </td></td></td></td></td>	B <td>A <td>A <td>A <td>C </td></td></td></td>	A <td>A <td>A <td>C </td></td></td>	A <td>A <td>C </td></td>	A <td>C </td>	C
جزء <td>A9</td> <td>BCIZ</td> <td>HCT</td> <td>HSM</td> <td>DKL</td> <td>DKT</td>	A9	BCIZ	HCT	HSM	DKL	DKT
میانگین نمره‌ها	۸۶/۲	۷۶/۶	۸۷/۶	۸۷/۶	۸۷/۶	۸۷/۶
نمره کمینه	۷۰/۷	۶۶/۶	۸۴	۷۸	۱۷۶۸	۸۴
درجه شایستگی <td>C</td> <td>E</td> <td>C</td> <td>C</td> <td>C</td> <td>C</td>	C	E	C	C	C	C

باید دانست، این عدد میزان پراکندگی و همچنین مقدار نمره‌های پایین را نشان نمی‌دهد. از این رو، شیوه دیگری برای تعیین درجه شایستگی پیشنهاد می‌گردد. در این روش، به جای یک عدد برای درجه شایستگی، نمره‌ها دسته‌بندی می‌شوند و به هر دسته یک درجه شایستگی اختصاص می‌یابد. درجه‌های شایستگی از A تا F نام‌گذاری شده‌اند. هر دسته دامنه‌ای از نمره میانگین و بازه‌ای از کم‌ترین نمره را پوشش می‌دهد. مقدارهای مزبور همانند جدول (۱۰) می‌باشند. برای نمونه، اگر میانگین نمره‌های جزء در آزمون‌های گوناگون بین ۹۵ و ۱۰۰ باشد و کم‌ترین نمره بین ۹۰ تا ۱۰۰ قرار گیرد، درجه شایستگی آن A خواهد بود. به همین صورت، برای این که درجه شایستگی جزء B گردد، باید میانگین نمره‌ها بزرگ‌تر یا برابر با ۹۰ و کوچک‌تر از ۹۵ باشد و نمره کمینه هم بزرگ‌تر یا مساوی ۸۵ و کوچک‌تر از ۹۵ گردد. برای نمونه، جزءهایی که در بخش پیش امتیازدهی شدند در این بخش مورد توجه قرار می‌گیرند. بر پایه این دسته‌بندی، درجه شایستگی جزء‌های مزبور همانند جدول (۱۱) خواهد بود. باید آگاه بود، یک جزء محدود ممکن است در مسأله‌های انگشت‌شماری پاسخ خوبی ارائه نکند، ولی در بیش‌تر مسأله‌ها پاسخ خوبی داشته باشد. در این حالت، کاربرد نمره کمینه سبب کاهش شدید امتیاز جزء خواهد شد. به سخن دیگر، استفاده از معیار امتیاز کمینه کل آزمون‌ها در تعیین شایستگی که نامطلوب‌ترین رفتار جزء را نشان می‌دهد یک شرط سخت‌گیرانه می‌باشد. یک ارزیابی میانگین از همگرایی جزء را می‌توان با بررسی بخش نمره‌ها به دست آورد. آشکار است، نتیجه کار وقتی قابل اطمینان خواهد بود که شمار مسأله‌های سنگ نشانه زیاد باشد.

#### جدول ۷- پاسخ آزمون صفحه مورب برای جزء مرجع

(Papadopoulos و Taylor، ۱۹۹۰)

شمار جزء‌ها	۸	۳۲	۱۲۸	۵۱۲	۲۰۴۸
In	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵	۰/۰۶۲۵	۰/۰۳۱۳
درصد خطا	۸۴/۱۳	۹/۱۱	۱/۵۷	۱/۲۳	۲/۶۳

#### جدول ۸- خیز نسبی جزء‌های مرجع (Bathe و همکاران، ۱۹۸۹)

جزء	شبکه	صفحه دایروی			صفحه مربعی		
		گیردار ساده	گیردار ساده	بار گسترده	گیردار ساده	گیردار ساده	بار متمرکز
MITC4	۲×۲	۰/۷۸۶	۰/۹۸۳	۰/۹۶۳	۰/۹۸۱	۰/۸۶۷	۰/۹۹۵
	۴×۴	۰/۹۴۸	۰/۹۹۵	۰/۹۹۳	۰/۹۹۶	۰/۹۶۵	۰/۹۹۵
	۸×۸	۰/۹۸۶	۰/۹۹۸	۱/۰۰۱	۰/۹۹۹	۰/۹۹۲	۰/۹۹۸
MITC8	۲×۲	۰/۹۸۴	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰۶	۱	۱/۰۰۰۱	۰/۹۹۸
	۴×۴	۰/۹۹۷	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰۵	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱
	۸×۸	۰/۹۹۷	۰/۹۹۷	۱/۰۰۰۴	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۲	۱
MITC7I	۲×۲	۰/۹۶۵	۰/۹۶۵	۱/۰۰۰۶	۱/۰۰۰۳	۰/۹۰۷	۰/۹۸
	۴×۴	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۰۱	۰/۹۸۵	۰/۹۹۴
	۸×۸	۰/۹۹۷	۰/۹۹۷	۱	۱/۰۰۰۴	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹
MITC9I	۲×۲	۰/۹۷۳	۰/۹۹۲	۱/۰۰۲۵	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰۶	۰/۹۹۸
	۴×۴	۰/۹۹۷	۰/۹۹۸	۱/۰۰۰۵	۱	۱/۰۰۰۱	۱
	۸×۸	۱	۱	۱/۰۰۰۴	۱	۱/۰۰۰۲	۱
MITC7	۲×۲	۰/۹۸	۰/۹۸۷	۰/۹۷۷	۱/۰۰۰۳	۰/۹۱۸	۰/۹۷۹
	۴×۴	۰/۹۹۲	۰/۹۹۶	۱/۰۰۰۳	۱/۰۰۰۱	۰/۹۸۷	۰/۹۹۴
	۸×۸	۰/۹۹۸	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰۴	۱	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹
MITC9	۲×۲	۰/۹۹۱	۰/۹۹۷	۱/۰۰۲۵	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰۶	۰/۹۹۸
	۴×۴	۰/۹۹۸	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰۵	۱	۱/۰۰۰۱	۱
	۸×۸	۱	۱	۱/۰۰۰۴	۱	۱/۰۰۰۲	۱

#### جدول ۹- امتیاز جزء‌های مرجع (Bathe و همکاران، ۱۹۸۹)

جزء	صفحه مربعی			صفحه دایروی		
	متمرکز بار	گسترده بار	بار گسترده	ساده	گیردار	گیردار ساده
MITC4	۹۵	۸۴/۵	۹۵	۹۳/۴	۷۷/۴	۹۴/۳
MITC8	۹۸/۳	۹۷/۸	۹۸/۷	۹۴/۱	۹۴/۳	۹۷/۱
MITC7I	۹۸/۳	۹۷/۸	۹۸/۷	۹۴/۱	۹۱/۶	۹۷/۸
MITC9I	۹۸/۴	۹۶/۵	۹۹/۱	۹۳	۹۵	۹۶/۷
MITC7	۹۴/۴	۹۱	۹۷/۶	۹۳/۶	۹۳/۴	۹۵/۳
MITC9	۳۶۹۸	۹۶/۵	۳۹۹۸	۹۳	۹۶/۶	۹۷/۵

سپس، بر پایه شیوه پیشنهادی، درصد‌های خطا بر روی ناحیه‌های امتیاز داده شده منتقل شده است تا امتیاز جزء‌ها در هر آزمون به دست آید. جدول (۹) نتیجه این کار را نشان می‌دهد.

#### ۱۱- درجه شایستگی جزء

در بخش‌های پیشین، چگونگی ارزیابی جزء در یک آزمون خاص ارائه گردید. با انجام آزمون‌های گوناگون، می‌توان نمره جزء در هر آزمون را یافت. بر پایه نتیجه آزمون‌های گوناگون، می‌توان یک نمره

## ۱۲- آزمون‌ها

در ارزیابی جزء محدود، نوع مسأله سنگ نشانه بر نمره جزء تأثیر می‌گذارد. از این رو، می‌بایستی یک دسته آزمون مشخص را برای ارزیابی بکار برد. در این بخش، آزمون‌های سنگ نشانه صفحه خمشی دسته‌بندی می‌گردند. جداول (۱۲) تا (۱۴) شبکه‌بندی مورد استفاده در سازه‌های سنگ نشانه را نشان می‌دهد. افزون بر شکل سازه‌ها، حالت‌های گوناگون بارگذاری و تکیه‌گاهی سازه نیز دسته‌بندی شده‌اند که در جدول (۱۵) نمایش داده شده‌اند.

یکی از مهم‌ترین آزمون‌هایی که در واریسی جزء به کار می‌رود، آزمون وصله است. این آزمون را به دو شیوه می‌توان در ارزیابی وارد نمود. در راهکار نخست، آزمون وصله بر روی سازه‌ای با شبکه‌بندی مشخص انجام می‌گیرد. اگر آزمون وصله برقرار شد، نمره جزء در این آزمون ۱۰۰ است. در غیر این صورت، نمره صفر به جزء داده می‌شود. شیوه دیگر، بر پایه پنداشته‌های روش جزء محدود می‌باشد. یادآوری می‌سازد که در فرآیند جزء‌های محدود، می‌پندارند که با ریز شدن جزء‌ها، پاسخ‌های الگوی جزء محدودی با رفتار دقیق سازه یکسان می‌شود. نمره جزء در آزمون وصله را نیز می‌توان بر این پایه تعیین نمود. به سخن دیگر، آزمون وصله را برای شبکه‌هایی با ریزی متفاوت انجام داد و نمودار همگرایی پاسخ‌ها را رسم کرد.

جدول ۱۲- سازه مسأله‌های سنگ نشانه صفحه مربعی

نام سازه	درجه درشتی جزءها		
	نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳
SQ1	1	0.5	0.25
SQ2	0.5	0.25	0.125
SQ3	0.5	0.25	0.125
SQ4	0.4	0.2	0.1
SQ5	0.5	0.25	0.125
SQ6	0.4	0.2	0.1

جدول ۱۴- سازه مسأله‌های سنگ نشانه صفحه‌های دایروی و لوزی

نام سازه	درجه درشتی جزءها		
	نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳
CI1	0.58	0.29	0.145
CI2	0.25	0.125	0.06
CI3	0.4	0.2	0.1
RH1	0.45	0.22	0.11
RH2	0.45	0.22	0.11

جدول ۱۳- سازه مسأله‌های سنگ نشانه صفحه مستطیلی

نام سازه	درجه درشتی جزءها		
	نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳
RE1	1	0.5	0.25
RE2	1	0.5	0.25
RE3	1	0.5	0.25
RE4	1	0.5	0.25
RE5	1	0.71	0.35
RE6	1	0.5	0.25
RE7	0.5	0.25	0.125
RE8	0.33	0.17	0.08

سپس بر پایه نمودار همگرایی نمره جزء را تعیین نمود. آشکار است، اگر آزمون وصله در شبکه درشت برقرار گردد، نمودار همگرایی آن یک خط راست با خطای صفر خواهد بود و نمره جزء برابر ۱۰۰ به دست می‌آید. با ترکیب حالت‌های گوناگون سازه، بار و شرط‌های تکیه‌گاهی، آزمون‌های گوناگون به دست می‌آیند. برای سادگی کار، به هر آزمون نشانه‌ای به صورت  $Anm$  داده می‌شود. عامل  $A$  در این نشانه دو حرف نخستین نام انگلیسی شکل سازه می‌باشد که حرف‌های SQ، RE، CI و RH می‌تواند جایگزین آن گردد. این نشانه‌ها، به ترتیب، نمایانگر صفحه‌های مربعی، مستطیلی، دایروی و لوزی شکل هستند. شماره‌های گوناگون از هر شکل با عامل  $n$  مشخص می‌شوند. عامل‌های  $m$  و  $l$ ، به ترتیب، شماره حالت تکیه‌گاهی و حالت بارگذاری می‌باشد، که با توجه به جدول (۱۵)، اختیار می‌گردد. برای نمونه، نشانه SQ121 که با توجه به جدول (۱۲) شبکه‌بندی را نشان می‌دهد، که همانند شکل‌های ردیف نخست جدول (۱۲) شبکه‌بندی شده است. باید دانست، همگرایی پاسخ‌ها در آزمون‌های گوناگون سنگ

جزء‌های خیلی مورب، شرایط پیچیده تکیه‌گاهی و بارگذاری در این سطح آورده شده است. سطح دو، حالت‌های معمول تحلیل سازه‌ها را نشان می‌دهد. دشواری ارائه پاسخ‌های درست در آزمون‌های این سطح، به طور معمول، بین سطح‌های یک و سه قرار دارد. جدول (۱۶) آزمون‌های سنگ نشانه را در سه سطح مورد نظر نشان می‌دهد. باید افزود، ضخامت صفحه در آزمون‌های مزبور باید در دو حالت بررسی شوند تا رفتار جزء در صفحه‌های نازک و نیمه‌ضخیم واریسی گردد. به خاطر باید سپرد، آزمون وصله پیچش کیرشلف فقط در حالت صفحه نازک سبب ایجاد لنگر پیچشی ثابت می‌شود. از این رو، در حالت صفحه نیمه‌ضخیم، آزمون وصله پیچش کیرشلف را انجام نمی‌دهند. نشانه حالت بارگذاری و تکیه‌گاهی مزبور در جدول (۱۵) برابر ۹۹ می‌باشد. ضخامت صفحه‌های نازک را می‌توان  $0/01$  یا  $0/01$  بُعد کوچک سازه پنداشت. مقدار  $0/1$  بُعد کوچک‌تر سازه برای ضخامت صفحه‌های نیمه-ضخیم مناسب است.

### ۱۳- ارزیابی یک جزء نو

در این بخش، چگونگی استفاده از شیوه پیشنهادی تعیین شایستگی جزء صفحه خمشی بررسی می‌شود. برای این کار، جزء سه‌پهلویی شش‌گره‌ی Onate و همکاران (۱۹۹۲)، انتخاب شده است. با افزودن دو درجه آزادی دورانی به مرکز جزء مزبور، یک جزء نوین به دست می‌آید. خاطر نشان می‌کند، هدف اصلی از ارائه جزء نو، پیشنهاد یک جزء قدرتمند و بهبود یافته‌تر از جزء‌های موجود نیست. در واقع، استفاده از درجه شایستگی در ارزیابی یک جزء نو پیگیری می‌شود. درجه شایستگی نقطه‌های مثبت و منفی جزء جدید را نسبت به جزء نخستین نمایان خواهد ساخت. از این رو، تحلیل‌های گسترده‌ای برای دو جزء مورد بررسی انجام شده است تا خطای پاسخ‌ها و امتیاز جزء‌ها به دست آید. سرانجام، امتیازها تبدیل به یک درجه شایستگی برای هر جزء می‌گردد. بر پایه درجه شایستگی، در مورد اثر دوران‌های افزوده-شده برای دستیابی به جزء نو بحث خواهد شد.

### ۱۳-۱- جزء TQQL

یک شیوه صریح تعریف کرنش برشی جایگزین در جزء‌های سه‌پهلویی و چهارپهلویی صفحه خمشی Mindlin توسط Onate و همکاران (۱۹۹۲)، ارائه گردیده است. جزء سه‌پهلویی شش‌گره‌ی این پژوهشگران TQQL نام دارد. تغییر مکان‌های جزء TQQL شش درجه-آزادی خیز و  $2 \times 6$  درجه آزادی دوران در گره‌های کنج و میان‌پهلویی می‌باشند. از این رو، میدان خیز و دوران آن را به صورت رابطه (۱) می‌توان درون‌یابی نمود:

$$\{w \ \theta_x \ \theta_y\} = \sum_{i=1}^6 N_i \{w \ \theta_x \ \theta_y\}_i$$

$$N_i = \xi_i (2\xi_i - 1), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$N_{i+3} = 4\xi_i \xi_j, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 2, 3, 1$$

نشانه تفاوت دارند. اگر پاسخ‌ها در یک آزمون سنگ نشانه برای جزء‌های گوناگون به سرعت به پاسخ دقیق همگرا شود، آزمون مزبور را ساده می‌نامند. سازه‌هایی با گوشه‌های  $90^\circ$  درجه، شبکه‌بندی یکنواخت و نامورب، بارگذاری یکنواخت و تکیه‌گاه‌های ساده چنین آزمون‌هایی هستند. از سوی دیگر، وجود گوشه‌هایی با زاویه نزدیک  $180^\circ$  درجه، جزء‌هایی با مورب‌ی شدید و بارگذاری متمرکز آزمون‌های سختی را به وجود می‌آورند، که همه جزء‌ها توانایی همگرایی سریع به پاسخ دقیق چنین سازه‌هایی را ندارند. بر این پایه، آزمون‌های صفحه خمشی در سه سطح دسته‌بندی شده‌اند. سطح یک شامل آزمون‌های ساده است و حداقل آزمون‌های لازم برای واریسی جزء را نشان می‌دهد. سطح سه آزمون‌هایی را در بر دارد که دستیابی به پاسخ درست در آن‌ها با روش جزء‌های محدود کار ساده‌ای نیست.

جدول ۱۵- انواع بار و شرایط تکیه‌گاهی

نشانه	نوع تکیه‌گاه	نشانه	نوع بار	نشانه	نوع‌های خاص بار- تکیه‌گاه
1	ساده گسترده در مرزها	1	بار گسترده یکنواخت	97	
2	گیردار گسترده در مرزها	2	بار متمرکز در مرکز	98	
3	گیردار	3	برش گسترده	99	
4	ساده متمرکز در کنجها	4	پیچش گسترده		
5	طره ای	5	حاش گسترده		
6	ساده در دو لبه مقابل	6	ناحیه بارگذاری شده با بار گسترده		
7	لبه گیردار				
8	لبه آزاد				

جدول ۱۶- آزمون‌های سنگ نشانه

سطح	آزمون
۱	SQ121, SQ155, SQ197, SQ198, SQ199, SQ111, SQ112, SQ421, SQ455, SQ497, SQ498, SQ499, SQ411, SQ412, RE112, RE121, RE122, RE211, RE221, RE111, RE512, RE521, RE553, RE554, RE561, RE555, RE598, RE511, RE661, RE653, RE655, RE698, CI111, CI121, RE651, SQ131, SQ141, SQ122
۲	SQ211, SQ212, SQ221, SQ222, SQ231, SQ255, SQ297, SQ298, SQ299, SQ397, SQ398, SQ399, SQ355, SQ312, SQ321, SQ322, SQ331, SQ311, SQ597, SQ598, SQ599, SQ555, SQ512, SQ521, SQ522, SQ531, SQ511, RE754, RE755, RE761, RE753, RE312, RE321, RE411, RE311, CI122, CI131, CI276, CI286, CI353, RH111, RH161, CI112, SQ698, SQ699, SQ655, SQ697, SQ631, SQ631, SQ642, SQ622, RE854, RE855, RE861, RE853, RE412, RE421, RE422, RE322, CI355, RH211, RH261, CI354
۳	

$$\begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \end{cases} = \sum_{i=1}^7 N_i \begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \end{cases}_i$$

$$\begin{cases} N_i = \xi_i (2\xi_i + 3\xi_j \xi_k - 1) & i=1,2,3 \\ N_i = 4\xi_i \xi_j (1-3\xi_k) & j=2,3,1 \\ N_{i+3} = 4\xi_i \xi_j (1-3\xi_k) & k=3,1,2 \end{cases} \quad (10)$$

$$N_7 = 27\xi_1 \xi_2 \xi_3$$

با انجام شیوه بخش پیشین، ماتریس سختی برشی جزء  $TQQL^+$  به دست می‌آید.

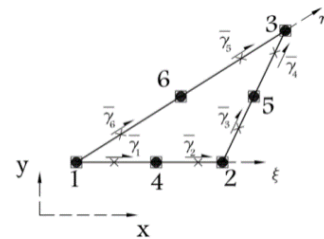
### ۱۳-۳- درجه شایستگی جزءهای $TQQL^+$ و $TQQL$

رابطه‌های بخش‌های پیشین برای دو جزء  $TQQL$  و  $TQQL^+$  برنامه‌ریزی شده‌اند تا بتوان آزمون‌های سنگ نشانه بخش‌های پیشین را اجرا نمود. سپس، نزدیک به دویست آزمون اجرا گردید. با توجه به محدودیت این نوشته، از ارائه پاسخ‌های مربوط چشم پوشی می‌شود و فقط امتیازهای دو جزء با معیار پیشنهادی بخش پیشین به درجه شایستگی، EG، تبدیل شده است. نتیجه‌ها برای جزءهای  $TQQL$  و  $TQQL^+$ ، به ترتیب، در جدول (۱۷) می‌آیند. خاطر نشان می‌کند، صفحه لوزی شکل با زاویه  $\alpha = 30^\circ$  درجه و تکیه‌گاه ساده در همه مرزها، صفحه مورلی نام دارد.

خاطر نشان می‌کند، بر پایه میانگین و کمینه کل امتیازها نیز می‌توان درجه شایستگی را تعریف نمود. این کار، درجه F را برای هر دو جزء مورد بررسی به دست خواهد داد. درجه‌ی مزبور نشان می‌دهد که رفتار دو جزء به طور تقریبی یکسان است، هرچند مقدار امتیازهای جزء  $TQQL$  اندکی بهتر از جزء  $TQQL^+$  می‌باشد. به سخن دیگر، درجه‌های آزادی دورانی افزوده شده به جزء  $TQQL$ ، جزء شایسته‌تری را در اختیار قرار نمی‌دهد. یادآوری می‌نماید، استفاده از معیار امتیاز کمینه کل آزمون‌ها در تعیین شایستگی یک معیار سخت‌گیرانه می‌باشد. چون بدترین رفتار جزء را نشان می‌دهد. برای نشان دادن این ویژگی، امتیازهای دو جزء در آزمون‌های گوناگون از جداول (۲۰) تا (۲۸) برداشت شده‌اند و شمار تکرار آن‌ها در بازه‌های [95,100]، [90,95]، [85,90]، [80,85]، [75,80]، [70,75] و [65,70] حساب شده است. به هر بازه یک درجه شایستگی طبق جدول (۱۰) اختصاص می‌یابد.

نمودار شکل (۱۴) نتیجه کار را نشان می‌دهد. همان‌گونه که این شکل آشکار می‌کند، میانگین امتیازها در محدوده درجه شایستگی D می‌باشد. درجه F کمینه درجه شایستگی دو جزء است و نزدیک به ده درصد از حالت‌ها را در بر دارد. از این رو، اگر میانگین رفتار جزء مورد نظر باشد، می‌توان به شایستگی دو جزء درجه D داد. میانگین کل امتیاز آزمون‌های گوناگون برای دو جزء  $TQQL$  و  $TQQL^+$ ، به ترتیب، ۷۶ و ۷۱/۳ می‌باشد که در محدوده درجه D قرار دارند. به سخن دیگر، بدون رسم پخش امتیازها می‌توان به همان نتیجه نمودار شکل (۱۴) رسید. نمودار توزیع امتیازها، تحلیل گر را از امتیاز داده شده مطمئن می‌سازد. آشکار است، امتیاز میانگین وقتی معنی‌دار خواهد بود که بخش عمده‌ای از امتیازها را در آن دامنه جمع نمایند.

در شیوه پیشنهادی Onate و همکارانش (۱۹۹۲)، کرنش برشی در مختصه‌های طبیعی جزء و با کاربرد شش مؤلفه آن درون‌یابی می‌شود. مقدارهای گره‌ی کرنش برشی در نقطه‌های گوس پهلوها و در جهت مماس بر پهلو انتخاب شده‌اند. شکل (۱۳) محل گره‌های جزء  $TQQL$  را نشان می‌دهد. مختصه طبیعی گره‌های درونیاب کرنش برشی هم در جدول (۱۹) درج شده‌اند.



شکل ۱۳- جزء صفحه خمشی Onate و همکاران (۱۹۹۲)

با وجود شش مؤلفه گره‌ی، تابع کرنش برشی در مختصه‌های طبیعی را به صورت خطی زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \{\alpha\}^T = A\alpha \quad (2)$$

مقدارهای کرنش برشی مماس بر هر پهلو را می‌توان با توجه به زاویه پهلو بر حسب  $\gamma_\xi$  و  $\gamma_\eta$  نوشت. سپس، با جاگذاری مختصه‌های طبیعی در رابطه‌های حاصل، دستگاه معادله‌هایی به صورت  $P\alpha = \bar{\gamma}$  را به دست آورد. مؤلفه‌های کرنش برشی در مختصه‌های دکارتی با کاربرد ماتریس ژاکوبی از رابطه  $\gamma = J^{-1}AP^{-1}\bar{\gamma}$  است. با استفاده ماتریس انتقال T و محاسبه ماتریس کرنش  $B_s$ ، می‌توان بردار کرنش برشی جایگزین را بر حسب تغییرمکان‌های جزء ارائه کرد:

$$\gamma = J^{-1}AP^{-1}TCB_s u = \bar{B}_s u \quad (8)$$

با یافتن ماتریس کرنش برشی جایگزین،  $\bar{B}_s$ ، ماتریس سختی برشی به راحتی از رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$K_s = \int \bar{B}_s^T D_s \bar{B}_s dA \quad (9)$$

### ۱۳-۲- جزء $TQQL^+$

با اندکی تغییر در درونیاب‌های دوران جزء  $TQQL$  می‌توان جزء جدیدی به دست آورد. جزء نو، که  $TQQL^+$  نام دارد، یک گره اضافی و دو درجه آزادی دورانی در مرکز سه‌پهلو دارد. از این رو، خیز با رابطه (۱) و دوران با تابع‌های رابطه (۱۰) درونیابی می‌شود:

به طور معمول، واریسی یک جزء با بررسی چشمی نمودار همگرایی انجام می‌پذیرد. در این پژوهش، تلاش گردید تا با برازش نمودار همگرایی خطا، نمره‌ای به سرعت، یکنوایی و حد نهایی همگرایی داده شود. این کار کاستی‌هایی دارد که مهم‌ترین آن‌ها دشواری یافتن ضریب‌های آشکار است، امتیاز میانگین وقتی معنی‌دار خواهد بود که بخش عمده‌ای از امتیازها را در آن دامنه جمع نمایند.

تابع درونیاب است. از سوی دیگر، کاربرد خم‌های همگرایی استاندارد امتیازدار، فرآیند نمره‌دهی را ساده می‌کند. بر پایه میانگین و کمینه نمره‌های جزء در آزمون‌های گوناگون، درجه شایستگی جزء معرفی گردید. شیوه پیشنهادی نسبت به شیوه MacNeal و Harder سرعت و حد نهایی همگرایی را هم وارد تحلیل می‌کند. به خاطر باید سپرد، کاربرد نمره کمینه، یک معیار سخت‌گیرانه است و درجه شایستگی جزءهایی را که فقط در یک آزمون نمره پایینی می‌گیرند، به شدت کاهش می‌دهد. برای ارائه یک شاخص از میانگین رفتار جزء محدود تنها باید از نمره میانگین استفاده نمود. با وجود این، بررسی پراکندگی امتیازها می‌تواند تحلیل‌گر را از درجه شایستگی تعیین شده مطمئن سازد.

#### ۱۵- سپاس‌گزاری

این پژوهش بین دانشگاهی با حمایت مالی دانشگاه فردوسی مشهد انجام پذیرفته است. نویسندگان از این کمک کمال قدردانی را دارند.

#### ۱۵- مراجع

رضایی پزند، سرافرازی س. ر، صادقی ی، "رابطه‌سازی سه جزء مثلثی برای صفحه خمشی"، مجله مدل‌سازی در مهندسی ۱۳۸۹، ۲۳، ۱-۲۷.

رضایی پزند، محمدزاده ح. ر، "قالب جزء محدود برای صفحه خمشی کیرشلف چهارپهلویی"، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست، ۱۳۸۹، ۴۰ (۲)، ۲۵ تا ۳۸.

سرافرازی س. ر، "تحلیل صفحه‌های خمشی با نگره Mindlin-Reissner"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد سازه، گروه عمران،

دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۶.

Babuska I, Scapolla T, "Bench mark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, 28, 155-179.

Bathe KJ, Lee PS, "Measuring the convergence behavior of shell analysis schemes", Computers & Structures, 2011, 89, 285-301.

Bathe KJ, Brezzi F, Cho SW, "The MITC7 and MITC9 plate bending element", Computers & Structures, 1989, 32, 797-814.

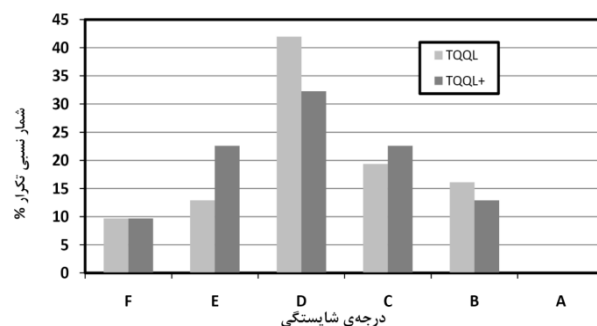
Batoz JL, "An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982, 18, 1077-1089.

Batoz JL, Bathe KJ, Ho LW, "A study of three-node triangular plate bending elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, 15, 1771-

#### جدول ۱۷- درجه شایستگی جزء TQQL و TQQL+

آزمون	بارگذاری	تکیه‌گاه	TQQL		TQQL+	
			میانگین	کمینه	میانگین	کمینه
SQ	بار گسترده	ساده	۸۶/۳	۸۰/۹	۸۵/۱	۷۸
		گیردار	۷۶/۳	۶۰/۴	۶۹/۵	۴۹
		ساده	۸۶/۱	۸۳/۳	۸۲/۹	۷۹
CI	بار متمرکز	گیردار	۷۹/۱	۷۱/۴	۷۰/۲	۶۱
		ساده	۶۰/۵	۶۰/۵	۵۰/۵	۵۱
		گیردار	۷۶/۶	۷۶/۶	۷۰/۵	۷۰
RE1	بار گسترده	ساده	۷۵	۷۵	۶۴/۷	۶۵
		گیردار	۷۷/۸	۷۷/۸	۷۸/۲	۷۸
		ساده	۳۶/۱	۳۶/۱	۳۲/۷	۳۳
RE7	بار متمرکز	گیردار	۱۷/۸	۱۷/۸	۹/۴	۹/۴
		ساده	۵۵/۴	۵۵/۴	۴۷/۷	۴۸
		گیردار	۳۸/۸	۳۸/۸	۳۲/۸	۳۳
RE1	گسترده	کنسولی	۹۰/۲	۸۸/۷	۹۰/۹	۸۹
		کنسولی	۹۱	۸۹/۸	۹۱/۴	۹۰
		کنسولی	۹۳	۹۱/۹	۸۸/۸	۸۹
مورلی			۵۷/۸	۵۷/۸	۵۲/۱	۵۲

باید افزود، بر پایه معیار شایستگی می‌توان به حساسیت جزءها نسبت به شرط‌های گوناگون تکیه‌گاهی یا بارگذاری هم پی برد. برای نمونه، جزء TQQL به شرط‌های تکیه‌گاهی حساس‌تر از حالت‌های بارگذاری است. نکته دیگری که باید به آن اشاره کرد اثر موربی در درجه شایستگی است. نتیجه آزمون‌ها نشان می‌دهد که با افزوده شدن موربی، درجه شایستگی بهبود می‌یابد. این حالت از آن‌جا ناشی می‌شود که خیز بیشینه تنها معیار امتیازدهی می‌باشد. در آزمون‌های مورد استفاده، افزایش موربی سبب ریزشیدن شبکه جزءها در پیرامون گره شاخص سازه شده است. از این رو، پاسخ بهبودیافته‌تری به دست می‌آید. در صورتی که پاسخ‌های عددی نشان می‌دهد که خطای گره‌های دیگر سازه افزایش یافته است. به سخن دیگر، اگر از میانگین خطای گره‌های سازه استفاده شود، اثر افزایش موربی در کاهش درجه شایستگی نمایان خواهد شد.



شکل ۹- توزیع درجه‌های شایستگی

#### ۱۴- نتیجه‌گیری

ارزیابی همگرایی جزء محدود در این مقاله مورد توجه قرار گرفت.

- Rezaiee-Pajand M, Salari MR, "Shape optimization of plate bending structures", IUST International Journal of Engineering Science, 2001, 12 (3), 165-188.
- Rezaiee-Pajand M, F. Shahabian, and F. H. Tavakoli, "A new higher-order triangular plate bending element for the analysis of laminated composite and sandwich plates", Structural Engineering and Mechanics, 2012, 43 (2), 253-271.
- Rezaiee-Pajand M, Yaghoobi M, Karkon M, "Hybrid Trefftz formulation for thin plates analysis", International Journal of Computational Methods, 2012, 9 (4), 1250053-1-29.
- Taylor RL, Beresford PJ, Wilson EL, "A non-conforming element for stress analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, 10, 1211-1220.
- Zienkiewicz OC, Taylor RL, Papadopoulos PG, Onate E, "Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements", Computers & Structures, 1990, 35, 505-522.
- 1812.
- Bazeley GP, Cheung YK, Irons BM, Zienkiewicz OC, "Triangular elements in plate bending conforming and non-conforming solutions", in Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods Structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965, 547-577.
- Clough RW, Tocher JL, "Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending", in Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods Structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965, 515-545.
- Dawe DJ, "Matrix and finite element displacement analysis of structures", New York, USA: Oxford University Press, 1984.
- Dhananjaya HR, Nagabhushanam J, Pandey PC, Jumaat MZ, "New twelve node serendipity quadrilateral plate bending element based on Mindlin-Reissner theory using Integrated Force Method", Structural Engineering and Mechanics, 2010, 36 (5), 625-642.
- Dhananjaya HR, Pandey PC, Nagabhushanam J, "New eight node serendipity quadrilateral plate bending element for thin and moderately thick plates using integrated force method", Structural Engineering and Mechanics, 2009, 33 (4), 485-502.
- Dhananjaya HR, Pandey PC, Nagabhushanam J, Ibrahim Z, "New nine-node Lagrangian quadrilateral plate element based on Mindlin-Reissner theory using IFM", Structural Engineering and Mechanics, 2012, 41 (2), 205-229.
- Dhananjaya HR, Pandey PC, Nagabhushanam J, Othamon I, "Closed form solutions for element equilibrium and flexibility matrices of eight node rectangular plate bending element using integrated force method", Structural Engineering and Mechanics, 2011, 40 (1), 121-148.
- MacNeal RH, Harder RL, "A proposed standard set of problems to set finite element accuracy", Finite Elements in Analysis and Design, 1985, 225 (1), 3-20.
- Meek JL, Tan HS, "A discrete Kirchhoff plate bending element with loof nodes", Computers & Structures, 1985, 21, 1197-1212.
- Mindlin RD, "Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates", Journal of Applied Mechanics, 1951, 18, 31-81.
- Onate E, Zienkiewicz OC, Suarez B, Taylor RL, "A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33 (2), 345-367.
- Papadopoulos P, Taylor RL, "A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30, 1029-1049.
- Razzaque A, "Finite element analysis of plates and shells", PH.D. Thesis, University of wales, Swansea, 1972.
- Reissner E, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics, 1945, 12, 69-76.
- Rezaiee-Pajand M, Akhtary MR, "A family of 13-node plate bending triangular elements", Communications in Numerical Methods in Engineering, 1998, 14, 529-537.
- Rezaiee-Pajand M, Karkon M, "Two efficient hybrid-Trefftz elements for plate bending analysis", Latin American Journal of Solids and Structures, 2012, 9, 43-67.



**EXTENDED ABSTRACT**

# A Method for Quantifying the Efficiency Degree of Plate Bending Element

Mohammad Rezaee-Pajand <sup>a,\*</sup>, Seyyed Reza Sarafrazi <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

<sup>b</sup> Faculty of Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

Received: 24 October 2017; Accepted: 15 July 2018

**Keywords:**

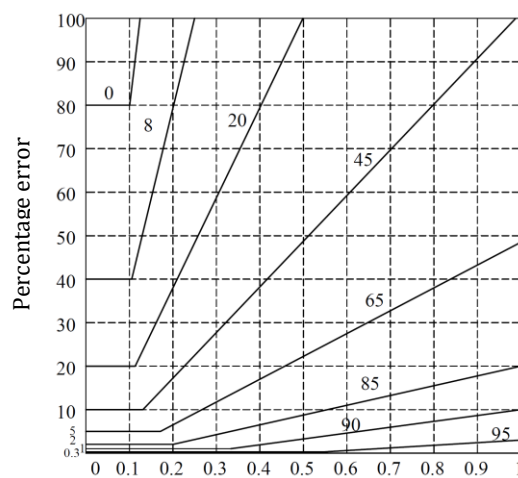
Plate bending element, Efficiency degree, Element evaluation, Benchmark problems.

## 1. Introduction

It is essential to evaluate the element accuracy in the finite element method. In the common qualitative tactic, the convergence curves are usually utilized. An algorithm is proposed in this paper that grades the element using the rate, monotony, and ultimate error in addition to inaccuracy. Based on the element scores in the different tests, the authors' technique can evaluate the degree of element efficiency.

## 2. Methodology

An overview of researches has been done in the field of plate bending elements. The types of convergence curves of finite elements of these papers have been classified. Then, a set of standard curves are proposed. The suggested standard curves are similar to Fig. 1, if the percentage errors of results are plotted versus the inverse number of elements, which are used along an edge of structures. Fig. 1. also shows the suggested grades for standard curves.



The inverse number of elements to use along an edge

**Fig. 1.** Proposed graded lines of convergence

\* Corresponding Author

E-mail addresses: rezaee@um.ac.ir (Mohammad Rezaee-Pajand), srsarafrazi@birjand.ac.ir (Seyyed Reza Sarafrazi).



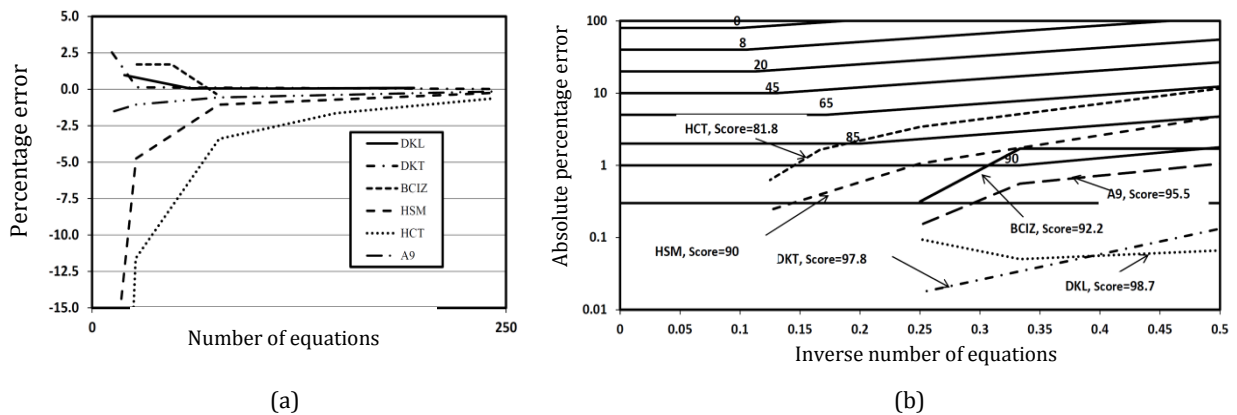
The convergence curve of an element in a specific benchmark problem can be plotted on a standard graph. Based on the distance between points of convergence curve and the standard lines, one can score the points. Averaging the calculated numbers, the score of the element is obtained. In the present study, the benchmark problems of the plate bending elements are also classified. Performing the aforementioned process for all benchmark problems, the average and minimum values of tests scores are obtained. Based on the range of average and minimum values, the efficiency degrees are defined as Table 1.

**Table 1.** Degree of efficiency

Efficiency degree	A	B	C	D	E	F
The range of average scores	[95,100]	[90,95]	[85,90]	[65,85]	[45,65]	[0,45]
The range of Minimum scores	[90,100]	[85,95]	[65,90]	[45,85]	[20,65]	[0,40]

### 3. Results and discussion

In order to investigate the proposed method, a square plate bending structure with uniform loading and simply supported edges is considered as an example of benchmark problems. The convergence curves of maximum deflection of some triangular elements are adopted from research of Meek and Tan (1985) and plotted at Fig 2-a. BCIZ is 9-DOF element of Bazeley et. al. (1965). The Hybrid stress element of Batoz et. al. (1980) is shown by HSM. DKT and DKL are discrete Kirchhoff elements of Batoz et. al. (1980, 1982). Razzaque (1972) and Clough and Tocher (1965) are also presented A9 and HCT elements, respectively. Aforementioned elements are graded by using the proposed method, as shown in Fig. 2-b. In other words, the qualitative comparison of element's behavior from Fig. 1-a can be converted to quantitative comparison of element's scores of Fig 2-b. It should be noted, the number of elements to use along an edge is converted to the number of the equation in Fig. 2-b.



**Fig. 2.** (a) Convergence curves of some elements, (b) Comparing Convergence curves of some whit graded lines

It is obvious, that an element should be evaluated in several tests. Accordingly, a new element is formulated based on the development of TQQL element of Onate et. al. (1992) and the suggested evaluation strategy is performed on it and also TQQL. These two elements are graded by performing more than 200 tests.

### 4. Conclusions

The results of this work show that utilizing proposed efficiency degree instead of the traditional qualitative process for comparing the abilities of plate bending elements is more reliable. In addition, the suggested process is systematic, and it can be done by using a computer.

### 5. References

Meek JL, Tan HS, "A discrete Kirchhoff plate bending element with loof nodes", Computers & Structures, 1985, 21, 1197-1212.

- Batoz JL, "An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1982, 18, 1077-1089.
- Batoz JL, Bathe KJ, Ho LW, "A study of three-node triangular plate bending elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, 15, 1771-1812.
- Bazeley GP, Cheung YK, Irons BM, Zienkiewicz OC, "Triangular elements in plate bending conforming and non-conforming solutions", in *Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965, 547-577.
- Clough RW, Tocher JL, "Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending", in *Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965, 515-545.
- Onate E, Zienkiewicz OC, Suarez B, Taylor RL, "A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 33 (2), 345-367.
- Razzaque A, "Finite element analysis of plates and shells", PH.D. Thesis, University of wales, Swansea, 1972.