

مدل سازی المان محدود تیر کامپوزیت لایه لایه تطبیقی هوشمند

یاسر شهبازی^{۱*}، حمیدرضا میردامادی^۲، محمد رضا چناقلو^۳

^۱ دانشیار دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

^۳ استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی سهند تبریز

دریافت: ۱۳۹۷/۸/۹، پذیرش: ۱۴۰۰/۱/۱۸، نشر آنلاین: ۱۴۰۰/۱/۱۸

چکیده

در این مقاله، فرمول نویسی الکترومکانیکی (Electro Mechanical) المان محدود یک تیر کامپوزیت لایه لایه تطبیقی هوشمند ارائه شده است. مدل تیر مرکب هوشمند ارائه شده بر اساس فرضیات الکترومکانیک و الکتروسیناماتیک (Electro Kinematics) خطی است. مدل تئوری یک تیر کامپوزیت پیزوالکتریک (Piezoelectric) سه لایه است که به صورت یک مکانیزم به کاراندازنده محوری عمل می کند. مصالح الاستیک لایه هسته ایزوتروپیک (Isotropic) بوده اما مواد پیزوالکتریک لایه های بیرونی اورتوتروپیک (Orthotropic) می باشند. دقت مدل های تحلیلی و عددی با بررسی شبیه سازی دو اصل بقای انرژی مکانیکی و الکتریکی در یک برنامه عناصر محدود و همچنین مقایسه نتایج آن با مدل عددی ANSYS نشان داده شده است. در شبیه سازی عددی در مدل المان محدود، سه مش بندی ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ المانی ایجاد شده است. شبیه سازی پارامتری شامل سه مجموعه بارگذاری استاتیکی مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی می باشد. با مقایسه نتایج مدل سازی در برنامه المان محدود نوشته شده و ANSYS و صحت سنجی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی در آن ها می توان نتیجه گرفت که مدل المان محدود ارائه شده از کارآمدی و دقت خوبی برخوردار است.

کلیدواژه ها: سازه های هوشمند، مکانیک محاسباتی، مدل المان محدود، ANSYS.

۱- مقدمه

متناسب با تغییر شکل مکانیکی است. این اثر که بعداً در کوارتز و سایر کریستال هایی بدون مرکز تقارن پیدا شد، اثر مستقیم پیزوالکتریک و یا اثر اندازه گیری، نامیده می شود. از طرف دیگر، اثر وارون پیزوالکتریک معروف به اثر به کاراندازی، توسط لیمپمن^۴ بر مبنای ملاحظات ترمودینامیکی ارائه و بعداً توسط برادران Curie به طور آزمایشگاهی تأیید شد.

با کشف اثر وارون پیزوالکتریسیته، کاربرد این مواد در محدوده ی گسترده ای برای حذف ارتعاش، نویز و کنترل شکل در سازه های عمرانی، مکانیکی، دریایی و هوافضا به چشم می خورد. در سال های ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۰، Crawley و همکارانش، یک مدل تحلیلی برای به کاراندازنده های تکه ای جداگانه با مدل تیر سازه ای ارائه نمودند (Crawley و Anderson، ۱۹۹۰؛ De Luis، ۱۹۸۷). ایشان در تحقیقات خود نشان دادند که در باربری به کاراندازنده ها، به دلیل منبع ولتاژ اعمالی، یک سختی سازه ای کوپل فعال علاوه بر سختی سازه ای غیرفعال معمولی وجود دارد.

حوزه سیستم های کنترل و سازه های هوشمند تکنولوژی ها را برای تولید سیستم های غیربیولوژیکی به نحوی گسترش داده که با استفاده از مشاهدات وسیع در سیستم های بیولوژیکی و رقابت با قابلیت تطبیقی، طراحی یکپارچه آن ها به دست آید (Vijay و همکاران، ۲۰۰۶). از جمله مواد هوشمند پر کاربرد در سازه ها می توان به آلایژ حافظه دار شکلی و کریستال پیزوالکتریک اشاره نمود. از این مواد هوشمند در شاخه های مختلف مهندسی از جمله مهندسی عمران به عنوان به کاراندازنده ها^۱ و یا اندازه گیرها^۲ استفاده می شود (هوشمند و همکاران، ۱۳۹۲؛ غفارزاده و غفاری، ۱۳۹۸).

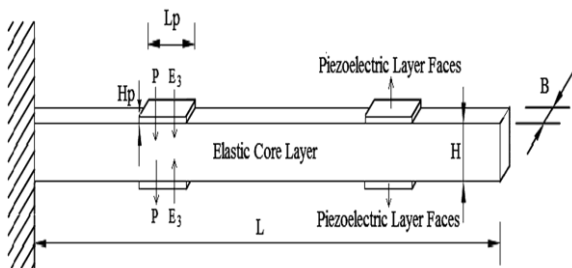
در سال ۱۸۸۰، خاصیت پیزوالکتریسیته توسط برادران Curie کشف شد (Curie و Curie، ۱۸۸۱). ایشان اثر مستقیم پیزوالکتریک را در کریستال های تورمالین^۳ کشف کردند. ایشان تشخیص دادند که تغییر شکل مکانیکی در جهت های خاص، سبب ایجاد بارهای سطحی الکتریکی در وجوه مقابل کریستال شده که

3. Tourmaline
4. Lippmann

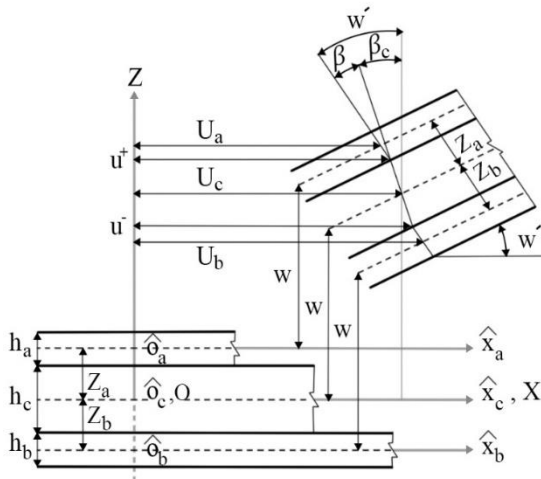
1. Actuators
2. Sensors

دستگاه مختصات محلی هر لایه با نمادهای $\hat{O}_\alpha \hat{X}_\alpha \hat{Y}_\alpha \hat{Z}_\alpha$ و با مبدأ محلی \hat{O}_α در وسط هر لایه قرار دارد که a ، b و c دلالت دارد. محور \hat{X}_α ها در راستای طولی و محور \hat{Z}_α ها در راستای جانبی لایه قرار داشته و این دو محور صفحه‌ی قائم را می‌سازند. دستگاه مختصات محلی لایه‌ها و کلی OXYZ در شکل (۲) نشان داده شده است.

\hat{u}_a ، \hat{u}_b و \hat{u}_c جابه‌جایی محوری هر نقطه دلخواه از لایه مربوطه و h_a ، h_b و h_c ضخامت لایه‌های مربوط به همان زیرنویس هستند $w(x) = w_a(\hat{x}_a) = w_b(\hat{x}_b) = w_c(\hat{x}_c)$. جابه‌جایی جانبی یا همان خیز تیر برای همه لایه‌ها برابر فرض شده است. زاویه مماس بر محور الاستیک تیر در نقطه X نسبت به هندسه آغازین محور طولی تیر طبق تئوری تغییرشکل‌های کوچک، مشتق W نسبت به محور الاستیک تیر است $(w' = \frac{\partial w}{\partial x})$.



شکل ۱- هندسه تیر کامپوزیت اورتوتروپیک هوشمند



شکل ۲- میدان تغییر مکان و سینماتیک تیر هوشمند

کمیت‌های سینماتیک جابه‌جایی‌های محوری میانگین و نسبی \bar{u} و \bar{u} به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شوند:

پس از آن، مدل‌های عددی مخصوصاً مدل المان محدود نیز مورد استفاده قرار گرفت (Trindade, ۲۰۰۷؛ Cotroni و همکاران، ۲۰۰۶؛ Kessler و همکاران، ۲۰۰۴؛ Gornandt و Gabbert، ۲۰۰۲). تمرکز اصلی ما در این تحقیق بر روی یک فرمول‌نویسی المان محدود ترکیبی اویلر- برنولی^۵ و تیموشنکو^۶ در تیر سه‌لایه کامپوزیت پیزوالکتریک/الاستیک/پیزوالکتریک بوده است. در این راستا، ابتدا فرمول‌بندی محیط الاستو-پیزوالکتریک^۷ و معادله الکترودینامیکی حاکم بر سیستم معرفی شده توسط نویسندگان بازخوانی می‌شود (شهبازی و همکاران، ۱۳۸۵). سپس، شبیه‌سازی آنالیزهای استاتیکی الکترومکانیکی مربوطه صورت گرفته و نتایج آن با مدل عددی ایجاد شده از تیر کامپوزیت مرکب هوشمند در نرم‌افزار ANSYS مقایسه و صحت‌سنجی شده است.

۲- بیان سینماتیک^۸ و فرضیات مسئله

مدل تیر مرکب هوشمند ارائه شده در این تحقیق که هندسه آن در شکل (۱) نشان داده شده است، بر اساس فرضیات الکترومکانیک و الکتروسینماتیک خطی است. بدین معنی که متغیرهای میدان الکتریکی و مکانیکی به حدی کوچک می‌باشند که تئوری‌های الاستیسیته^۹، پیزوالکتریسیته و دی‌الکتریک خطی قابل کاربرد باشند. مصالح الاستیک (لایه هسته) ایزوتروپیک بوده اما مواد پیزوالکتریک (لایه‌های بیرونی) اورتوتروپیک می‌باشند.

جابه‌جایی عرضی همه لایه‌ها در هر سطح مقطع مشخصی از محور طولی تیر، در راستای ضخامت تیر یکسان است. لایه‌ها در وضعیت تغییرشکل مکانیکی مسطح و پتانسیل الکتریکی مسطح می‌باشند. لایه‌های بیرونی از سینماتیک تیر اویلر- برنولی و هسته الاستیک تیر از فرضیات تیر تیموشنکو پیروی می‌کنند. تنش نرمال (عمود بر وجوه بالا و پایین تیر در راستای Z) کوچک و قابل صرف نظر کردن است. در نهایت، لایه‌های پیزوالکتریک در راستای ضخامت و موازی با راستای شدت میدان الکتریکی اعمالی پلاریزه^{۱۰} شده و هر دوی آن‌ها بر محور خنثی تیر هوشمند، برای برپایی حالت مکانیسم به کاراندازی محوری، عمود هستند.

۳- فرمول‌بندی محیط الاستیک/پیزوالکتریک

در این قسمت، فرضیات ریاضی ساده شده‌ای برای سینماتیک تیر (هندسه و تغییرشکل نشان داده شده در شکل (۲))، سینتیک تیر و رفتار الکترومکانیک مصالح در اجزاء مکانیکی و الکتریکی کوپل شده مدل ارائه شده است.

8. Kinematics
 9. Elasticity
 10. Polarized

5. Euler-Bernoulli
 6. Timoshenko
 7. Elasto-Piezoelectric

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \\ e_{31}^* &= e_{31} - \frac{c_{13}}{c_{33}} e_{33} \\ \epsilon_{33}^* &= \epsilon_{33} - \frac{e_{31}^2}{c_{33}} \end{aligned}$$

توجه شود که در هم‌گیری الکترومکانیکی، فقط بین کرنش محوری و مؤلفه‌ی عرضی میدان الکتریکی موجود است. فرم مؤلفه‌ای قانون دیورژانس گاوس^{۱۲} برای مواد دی‌الکتریک (ماده عایق تهی از بارهای الکتریکی آزاد ($q = 0$) برابر است با:

$$D_{i,i} = -\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = q = 0 \quad (7)$$

برای لایه‌های بیرونی تیر a, b ، $D_{3,3}^\alpha = 0$ ، از قانون مشخصه لایه‌های بیرونی داریم؛ $D_3^\alpha = e_{31}^* \epsilon_1^\alpha + \epsilon_{33}^* E_3^\alpha$ ، با جایگذاری هر دسته از شرایط مرزی مربوط به یکی از لایه‌ها و تعریف دو کمیت اختلاف پتانسیل $\varphi^\alpha = \varphi^{\alpha+} - \varphi^{\alpha-}$ و پتانسیل میانگین $\bar{\varphi}^\alpha(x) = \frac{\varphi^{\alpha+} + \varphi^{\alpha-}}{2}$ ، می‌توان تابع پتانسیل را در هر نقطه داخلی محاسبه کرد:

$$\varphi^\alpha = \bar{\varphi}^\alpha + (z - z_\alpha) \frac{\bar{\varphi}^\alpha}{h_\alpha} + \left[1 - 4 \left(\frac{z - z_\alpha}{h_\alpha} \right)^2 \right] \frac{h_\alpha^2 e_{31}^*}{8 \epsilon_{33}^*} w'' \quad (8)$$

از روی تابع پتانسیل، می‌توان مؤلفه عرضی شدت میدان الکتریکی را روی وجوه تیر محاسبه کرد:

$$E_3^\alpha = -\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_3} = \frac{\bar{\varphi}^\alpha}{h_\alpha} + (z - z_\alpha) \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} w'' \quad (9)$$

یک محیط پیوسته پیزوالکتریک تحت اثر بردار تنش رویه از پیش مقرر شده T و بار الکتریکی رویه در واحد سطح Q ، قرار دارد. کار مجازی در واحد سطح انجام‌شده توسط بردارهای تنش به-هنگام یک جابه‌جایی مجازی کوچک برای رویه، برابر است با $T_k \delta u_k$ گزاره مشابه کار مجازی الکتریکی انجام‌شده در واحد سطح، توسط بار الکتریکی مقرر شده روی رویه، یعنی Q ، هنگام یک تغییر کوچک $\delta \varphi$ در پتانسیل الکتریکی، برابر است با $Q \delta \varphi$. توابع انرژی جنبشی KE ، الکترومکانیکی H ، کار نیروهای خارجی ناپایستار مکانیکی و الکتریکی W ، تابع لاگرانژین^{۱۳} L و اصل وردشی تعمیمی هامیلتون^{۱۴} برای این محیط پیوسته پیزوالکتریک، محصورشده در فضا به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u^+ - u^- = h_c \beta_c \\ \bar{u}(x) &= \bar{u}_c = \frac{u^+ + u^-}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

با توجه به تئوری اویلر-برنولی برای پیزوالکتریک‌ها و تئوری تیموشنکو برای هسته، جابه‌جایی محوری هر نقطه دلخواه از سطح مقطع X در مختصات محلی هر لایه را بر حسب جابه‌جایی محوری صفحه وسطی آن لایه به اضافه جمله‌ای که وابسته به Z است می‌نویسیم. میدان جابه‌جایی طولی هر نقطه از سطح مقطع به فاصله Z از مبدأ دستگاه مختصات کلی در لایه‌های a و b پیزوالکتریک و c هسته به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} u_A &= \bar{u}_A - (z - z_A) w' \\ u_B &= \bar{u}_B - (z - z_B) w' \\ u_C &= \bar{u}_C + z \beta_c \end{aligned} \quad (2)$$

در این رابطه، a و b دوران خمشی لایه هسته می‌باشد. جابه‌جایی طولی متوسط و نسبی هر یک از لایه‌های a و b پیزوالکتریک را می‌توان بر حسب جابه‌جایی طولی متوسط و نسبی لایه هسته به-صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{u}_A &= \bar{u} + \frac{\bar{u}}{2} - \frac{h_A}{2} w' \\ \bar{u}_B &= \bar{u} - \frac{\bar{u}}{2} + \frac{h_B}{2} w' \end{aligned} \quad (3)$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۲) در روابط کرنش-جابه‌جایی، کرنش‌های محوری (غشایی + خمشی) و برشی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \epsilon_1^\alpha(x, z) &= \epsilon_\alpha^m(x) + (z - z_\alpha) \epsilon_\alpha^b(x) \\ \epsilon_1^c(x, z) &= \epsilon_c^m(x) + z \epsilon_c^b(x) \\ \gamma_5^c(x, z) &= \frac{\bar{u}}{h_c} + (\lambda + 1) w' \end{aligned} \quad (4)$$

$\epsilon_\alpha^m(x)$ ، $\epsilon_\alpha^b(x)$ و $\epsilon_c^m(x)$ ، $\epsilon_c^b(x)$ کرنش‌های غشایی، $\epsilon_\alpha^b(x)$ ، $\epsilon_c^b(x)$ و $\gamma_5^c(x)$ کرنش‌های خمشی لایه‌های پیزوالکتریک بیرونی و هسته الاستیک، γ_5^c کرنش برشی در لایه هسته و λ نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت هسته خواهد بود. قوانین مشخصه مواد پیزوالکتریک برای یک محیط پیوسته عبارت است با:

$$\begin{aligned} T_p &= c_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k \\ D_i &= e_{iq} S_q + \epsilon_{ik}^S E_k \end{aligned} \quad (5)$$

می‌توانیم معادلات مشخصه کاهش یافته تنش مسطح را برای ماده دوسانگرد^{۱۱} پیزوالکتریک به فرم ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & -e_{31}^* \\ e_{31}^* & \epsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

14. Generalized Hamilton's Variation

11. Orthotropic
12. Gaussian Beam Divergence
13. Lagrangian

$$H^c = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ c_{33}^c A_c (\epsilon_c^m)^2 + c_{33}^c I_c (\epsilon_c^b)^2 + c_{55}^c A_c \left[\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda + 1)w' \right]^2 \right\} dx \quad (17)$$

با استفاده از روابط کرنش-جابجایی در رابطه‌های وردش انرژی‌های مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی خواهیم داشت:

$$\delta H_m = \int_0^L \left\{ \begin{aligned} & \left[2c_{11}^{\alpha*} A_\alpha + c_{33}^{\alpha*} A_c \right] \bar{u}' \delta \bar{u}' + \\ & \left[2 \left(c_{11}^{\alpha*} A_\alpha + 2c_{33}^{\alpha*} \frac{I_c}{h_c^2} \right) \frac{\tilde{u}'}{2} + 2c_{33}^{\alpha*} I_c \frac{\lambda}{h_c} w'' \right] \frac{\delta \tilde{u}'}{2} \\ & \left[2c_{11}^{\alpha*} I_\alpha + c_{33}^{\alpha*} I_c \lambda^2 \right] w'' + c_{33}^{\alpha*} I_c \frac{\lambda}{h_c} \tilde{u}' \right\} \delta w'' \\ & + c_{55}^c A_c \left(\frac{\tilde{u}}{h_c^2} + \frac{(\lambda+1)}{h_c} w' \right) \delta \tilde{u} \\ & c_{55}^c A_c \left((\lambda+1)^2 w' + \frac{(\lambda+1)}{h_c} \tilde{u} \right) \delta w' \end{aligned} \right\} dx \quad (18)$$

وردش پاره‌ای از انرژی الکترومکانیکی ناشی از وردش در متغیرهای مکانیکی و الکتریکی به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\delta H_{me} = - \int_0^L \left\{ \epsilon_{33}^{\alpha*} \frac{A_\alpha}{h_\alpha^2} (\tilde{\varphi}^a \delta \tilde{\varphi}^a + \tilde{\varphi}^b \delta \tilde{\varphi}^b) \right\} dx \quad (19)$$

$$\delta H_{em} = - \int_0^L \left\{ e_{31}^{\alpha*} \frac{A_\alpha}{h_\alpha} \left[\bar{u}' (\delta \tilde{\varphi}^a + \delta \tilde{\varphi}^b) + \tilde{u}' (\delta \tilde{\varphi}^a - \delta \tilde{\varphi}^b) \right] \frac{\delta \tilde{u}'}{2} \right\} dx \quad (20)$$

هر لایه از سازه کامپوزیت اورتوتروپیک هوشمند می‌تواند تحت اثر نیروهای سطحی عمودی و مماسی T_N^i و T_Q^i و هم تحت اثر نیروهای حجمی در راستاهای z و x ، یعنی t_N^i و t_Q^i باشد. i نمایانگر یکی از لایه‌های a ، b یا c است. نیروهای رویه می‌توانند به رویه‌های سطوح مقاطع عرضی تیر در $x=0$ و $x=L$ اعمال شوند. نیروهای خارجی رویه عمود بر رویه و موازی با رویه را در $z = z_a + \frac{h_a}{2}$ و $z = z_a - \frac{h_b}{2}$ به ترتیب با T_f^α و T_w^α نمایش می‌دهیم. بنابراین تغییرات کل کار خارجی نیروهای رویه اعمال شده بر سطوح مقاطع عرضی دو انتهای تیر و نیروهای رویه اعمال شده بر سطوح افقی بالا و پایین تیر مطابق رابطه (۲۱) خواهد شد.

وردش‌ها بر حسب متغیرهای اصلی \bar{u} ، \tilde{u} و w نوشته می‌شوند. برای درون‌یابی میدان جابه‌جایی \bar{u} و \tilde{u} از توابع شکل خطی لاگرانژ (توابع C^0) و برای میدان جابه‌جایی w از توابع

$$\begin{aligned} KE &= \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \\ H &= \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - D_i E_i) dV \\ W &= \int_S (\bar{T}_k \delta u_k - \bar{Q} \delta \varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L &= \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_j - H_0 E_k \right] dV \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_j dV \right) - \delta \int_V H_0 (\epsilon_{ki}, E_k) dV \right. \\ & \left. + \int_S [\bar{T}_k \delta u_k - \bar{Q} \delta \varphi] dV \right\} dt \end{aligned} \quad (11)$$

بنابراین می‌توان دستوربندی وردشی یک تیر دوسانگرد پیزوالکتریک تطبیقی را به فرم زیر بیان کرد:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta KE - \delta H + \delta W) dt = 0 \quad (12)$$

در رابطه بالا δKE ، δH و δW به ترتیب وردش‌های مجازی در انرژی جنبشی، انرژی الکترومکانیکی و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی ناپایستارند. برای تیر کامپوزیت هوشمند تطبیقی، انرژی جنبشی و وردش آن به شکل زیر به دست می‌آید:

$$KE = \int_V \frac{1}{2} \rho_i (\dot{u}_i + \dot{w}_i) dV, \quad i = a, b, c \quad (13)$$

$$\delta KE = - \int_0^L \left\{ \begin{aligned} & (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c) \bar{u} \delta \ddot{u} + 2\rho_\alpha A_\alpha \frac{\ddot{u}}{2} \frac{\delta \ddot{u}}{2} \\ & + 4\rho_c \frac{I_c}{h_c^2} \frac{\ddot{u}}{2} \frac{\delta \ddot{u}}{2} + 2\rho_c \frac{I_c}{h_c^2} \lambda \dot{w}' \frac{\delta \ddot{u}}{2} \\ & + (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c) \dot{w} \delta w + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda \ddot{u} \delta w' \\ & + (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c \lambda^2) \dot{w}' \delta w' \end{aligned} \right\} dx \quad (14)$$

انرژی پتانسیل داخلی الکترومکانیکی کل یک محیط پیزوالکتریک برابر است با انتگرال آنتالپی الکتریکی روی حجم:

$$H = \int_{V_\alpha} H_0 dV = \int_{V_\alpha} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - D_i E_i) dV \quad (15)$$

انرژی الکترومکانیکی کل لایه‌های بیرونی عبارت است از:

$$H^\alpha = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \begin{aligned} & c_{11}^{\alpha*} A_\alpha (\epsilon_\alpha^m)^2 + \bar{c}_{11}^\alpha I_\alpha (\epsilon_\alpha^b)^2 \\ & + 2e_{31}^{\alpha*} A_\alpha \frac{\tilde{\varphi}^\alpha}{h_\alpha} \epsilon_\alpha^m - \epsilon_{33}^{\alpha*} A_\alpha \left(\frac{\tilde{\varphi}^\alpha}{h_\alpha} \right)^2 \end{aligned} \right\} dx \quad (16)$$

و انرژی الکترومکانیکی لایه هسته عبارت است از:

$$[M^e] = \int_0^{L_e} \left\{ \begin{array}{l} (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c) B_{txm} B_{txm}^T \\ + \frac{1}{2} \left(\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c \frac{I_c}{h_c^2} \right) B_{txd} B_{txd}^T \\ + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda B_{txd} B_r^T + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda B_r B_{txd}^T \\ + (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c) B_{tz} B_{tz}^T \\ + (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c \lambda^2) B_r B_r^T \end{array} \right\} dx \quad (24)$$

در رابطه بالا، ماتریس‌های جابه‌جایی انتقالی میانگین و جابه‌جایی انتقالی نسبی لایه‌های بیرونی در راستای محور x ها، ماتریس جابه‌جایی انتقالی در راستای محور z ها و ماتریس جابه‌جایی زاویه‌ای (دوران‌های کوچک که فقط تولید تنش می‌کنند اما مؤلفه‌های دوران جسم صلب در آن قابل اغماض است) حول محور y ها به شکل زیر تعریف می‌شوند؛

$$\begin{aligned} \bar{u}^e(x) &= B_{txm}^T(x) \{q_e\} \\ \tilde{u}^e(x) &= B_{txd}^T(x) \{q_e\} \\ w^e(x) &= B_{tz}^T(x) \{q_e\} \\ w^e(x) &= B_r^T(x) \{q_e\} \end{aligned} \quad (25)$$

در رابطه فوق، $B_{ij}, i = a, b, c, j = tx, tz, r$ به ترتیب ماتریس‌های عملگر مشتق جابه‌جایی راستاهای x و z و دوران برای سطوح بیرونی و هسته می‌باشند.

$\delta H_{me}^e = \{\delta q_e\}^T \{F_{me}^e\}$ را نیز می‌توان به فرم فشرده $\{F_{me}^e\}$ قابل استخراج است؛ نوشت.

$$[F_{me}^e] = \int_0^{L_e} \left[e_{31}^{\alpha*} \frac{A_\alpha}{h_\alpha} (\tilde{\varphi}^a B_{am} + \tilde{\varphi}^b B_{bm}) \right] dx \quad (26)$$

با انجام محاسبات مشابه برای بارگذاری مکانیکی و تفکیک $\delta W^e = \{\delta q_e\}^T \{F_m^e\}$ بردار بارگذاری مکانیکی المان محدود، قابل استخراج است؛

شکل درجه سوم هرمیتی^{۱۵} (توابع C^1) استفاده می‌شود. δH_m بر اساس درجات آزادی کل سازه، از: $q = [u_1 \quad \tilde{u}_1 \quad w_1 \quad w_1' \quad u_2 \quad \tilde{u}_2 \quad w_2 \quad w_2']^T$ عبارت است؛

$$\delta W = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} (n_a + n_b + n_c) \delta \tilde{u} + \left(\frac{n_a - n_b}{2} + \frac{m_c}{h_c} \right) \delta \ddot{\tilde{u}} \\ + (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c) \bar{u} \delta \ddot{\tilde{u}} + 2\rho_\alpha A_\alpha \frac{\ddot{\tilde{u}} \delta \tilde{u}}{2} \\ + 4\rho_c \frac{I_c}{h_c^2} \frac{\ddot{\tilde{u}} \delta \tilde{u}}{2} + 2\rho_c \frac{I_c}{h_c^2} \lambda \ddot{w}' \frac{\delta \tilde{u}}{2} + \\ (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c) \ddot{w} \delta w + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda \ddot{u}' \delta w' \\ + (2\rho_\alpha A_\alpha + \rho_c A_c \lambda^2) w' \delta w' \end{array} \right\} dx \quad (21)$$

$$\delta H_m^e = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} c_{11}^{\alpha*} A_\alpha \left(\delta q_e^T B_{am} B_{am}^T q_e + \right. \\ \left. \delta q_e^T B_{bm} B_{bm}^T q_e \right) \\ + c_{33}^c A_c \left(\delta q_e^T B_{cm} B_{cm}^T q_e \right) \\ + \bar{c}_{11}^\alpha I_a \left(\delta q_e^T B_{ab} B_{ab}^T q_e \right) + \\ \bar{c}_{11}^\alpha I_b \left(\delta q_e^T B_{bb} B_{bb}^T q_e \right) \\ + c_{33}^c I_c \left(\delta q_e^T B_{cb} B_{cb}^T q_e \right) + \\ \left. c_{55}^c A_c \left(\delta q_e^T B_{cs} B_{cs}^T q_e \right) \right\} dx \quad (22)$$

با گرفتن عامل مشترک $\{q_e\}$ و $\{\delta q_e\}^T$ از دو طرف δH_m^e ، ماتریس‌های سختی المان محدود، $[K_e]$ ، قابل استخراج است؛

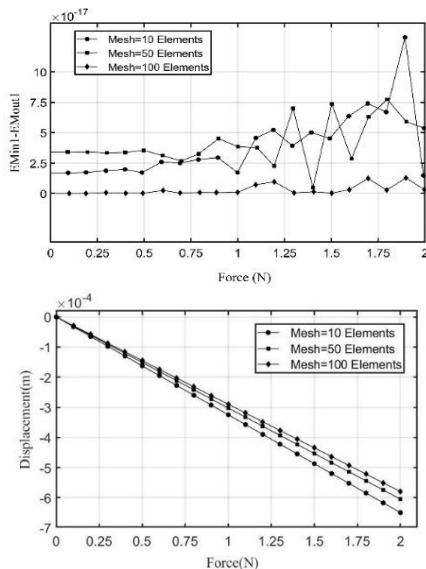
$$[K^e] = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} c_{11}^{\alpha*} A_\alpha \int_0^{L_e} (B_{am} B_{am}^T + B_{bm} B_{bm}^T) \\ + c_{33}^c A_c \int_0^{L_e} (B_{cm} B_{cm}^T) \\ \bar{c}_{11}^\alpha I_a \int_0^{L_e} (B_{ab} B_{ab}^T + B_{bb} B_{bb}^T) \\ + c_{33}^c I_c \int_0^{L_e} (B_{cb} B_{cb}^T) \\ + c_{55}^c A_c \int_0^{L_e} (B_{cs} B_{cs}^T) \end{array} \right\} dx \quad (23)$$

در روابط فوق، $B_{ij}, i = a, b, c, j = m, b, s$ به ترتیب ماتریس‌های تغییرشکل غشایی، خمشی و برشی برای لایه‌های a و b پیزوالکتریک و c هسته می‌باشند. همچنین، همان عملگر ترانزپوز ماتریس می‌باشد. با گرفتن عامل مشترک $\{q_e\}$ و $\{\delta q_e\}$ از دو طرف δKE^e ، ماتریس‌های جرم المان محدود، $[M^e]$ نیز قابل استخراج است؛

جدول ۱- مشخصات هندسی و مصالح تیر کامپوزیت هوشمند

$L = 0.2m$	طول تیر
$B = 0.02m$	عرض تیر
$H = 4 \times 10^{-3}m$	ضخامت هسته الاستیک
$H_p = 5 \times 10^{-5}m$	ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک
$\rho_e = 2710kg/m^3$	چگالی هسته الاستیک
$\rho_e = 7500kg/m^3$	چگالی پیزوالکتریک
$\begin{cases} e_{31} = -6.5c/m^2 \\ e_{33} = 23.3c/m^2 \\ \Xi_{33} = 23.3c/m^2 \end{cases}$	ضرایب پیزوالکتریک و دی‌الکتریک
$\begin{cases} c_{11} = 126 \times 10^{10} N/m^2 \\ c_{13} = 8.41 \times 10^{10} N/m^2 \\ c_{33} = 126 \times 10^{10} N/m^2 \\ c_{55} = 23 \times 10^{10} N/m^2 \end{cases}$	ضرایب ماتریس مصالح پیزوالکتریک روابط (۵) و (۶)

روابط بارگذاری- تغییر مکان و اختلاف بین انرژی‌های داخلی و خارجی برای مش‌بندی‌های ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ المانی آنالیزهای مختلف به ترتیب در شکل‌های (۳) تا (۵) نشان داده شده‌اند. نمودارهای سمت راست شکل‌ها که محور قائم در آن‌ها اختلاف بین انرژی ورودی و خروجی سیستم سازه هوشمند می‌باشد، اصل بقای انرژی الکترودینامیکی در مدل المان محدود را نمایش و صحت‌سنجی می‌نماید.



شکل ۳- رابطه بار- تغییر مکان و بررسی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی

$$[F_m^e] = \int_0^L \left\{ \begin{aligned} &(n_a + n_b + n_c)B_{txm} \\ &+ \left(\frac{n_a - n_b}{2} + \frac{m_c}{h_c} \right) B_{txd} \\ &+ (m_a + m_b - \lambda m_c) B_r \\ &+ (q_a + q_b + q_c) B_{tz} \\ &+ \bar{T}_w B_{tz} + \bar{T}_f B_{txm} + \\ &\bar{T}_f (B_{txd} - h_a B_r) \end{aligned} \right\} dx \quad (27)$$

$$+ \left[\begin{aligned} &(N_a + N_b + N_c) B_{txm} \\ &+ \left(\frac{N_a - N_b}{2} + \frac{M_c}{h_c} \right) B_{txd} \\ &+ (M_a + M_b - \lambda M_c) B_r \\ &+ (Q_a + Q_b + Q_c) B_{tz} \end{aligned} \right]_{x=L}$$

با جایگذاری ورودی‌های به‌دست‌آمده بالا در رابطه (۱۲)، به یک مسئله خطی زیر دست می‌یابیم؛

$$M\ddot{q} + Kq = F_m^e - F_{me}^e \quad (28)$$

در ادامه، با نوشتن یک الگوریتم عددی در نرم‌افزار MATLAB، فرآیند گسسته‌سازی محیط با المان‌های محدود و سرانجام حل سیستم معادلات محاسباتی به‌روش حذفی گوس کامل شده است.

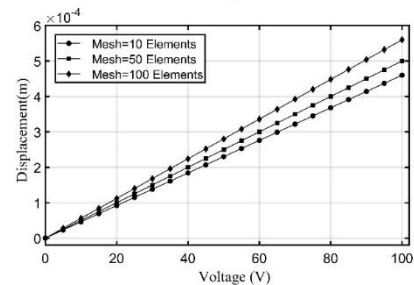
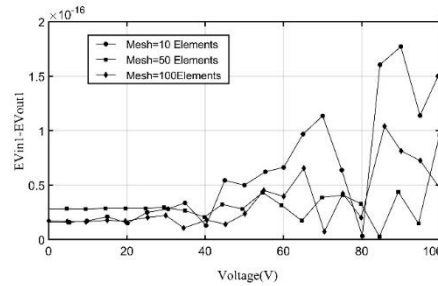
۴- بارگذاری الکترومکانیکال مدل المان محدود

در این مرحله، نتایج تحلیل‌های صورت گرفته در مدل المان محدود با مشخصات هندسی و مصالح جدول (۱)، برای بارهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی به‌عنوان ورودی و تغییر مکان-های مکانیکی به‌عنوان خروجی ارائه شده است. در آنالیزهای مکانیکی، یک بار خارجی استاتیکی نمویی از صفر تا دو نیوتن به انتهای تیر طره‌ای اعمال شده است. این در حالی است که در بارگذاری الکتریکی، اختلاف پتانسیل نمویی از صفر تا صد ولت بر روی هر یک از به‌کارانداخته‌های پیزوالکتریک ایجاد شده است.

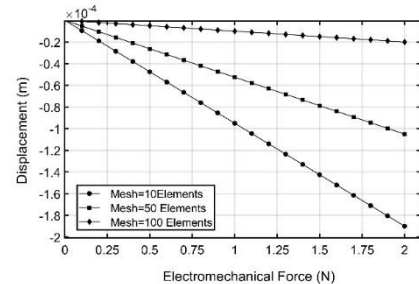
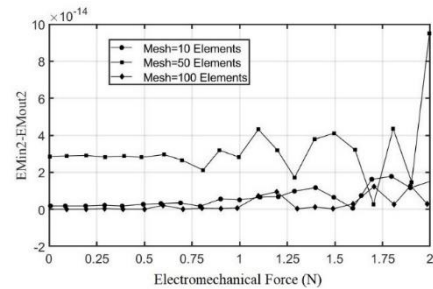
همان‌طور که در شکل‌ها و نمودارهای مربوطه در ادامه نشان داده شده است، تغییر شکل ایجاد شده تحت بار مکانیکی و بار الکتریکی برخلاف یکدیگر است. به‌عبارت‌دیگر، تغییر مکان ایجاد شده تحت اثر ولتاژ الکتریکی یک نوع پاسخ جبران‌ساز به-کارانداخته‌های پیزوالکتریک در برابر بارهای استاتیکی نامطلوب خارجی می‌باشند. در نهایت، رفتار شبیه‌سازی شده‌ای از عملکرد استاتیکی یک به‌کارانداخته پیزوالکتریک در بارگذاری الکترومکانیکی بررسی شده است. بدین ترتیب که بارهای استاتیکی همانند قبل به انتهای تیر اعمال شده و هم‌زمان اختلاف پتانسیلی برابر با صد ولت بر روی هر یک از به‌کارانداخته‌های پیزوالکتریک جهت حذف و یا کاهش تغییر مکان انتهایی تیر کامپوزیت هوشمند، اعمال شده است.

تفاوت‌های بین استاندارد IEEE و ANSYS در نحوه معرفی مشخصات ماتریس کرنش پیزوالکتریک و ضرایب الاستیک را در نظر گرفت.

در اکثر مراجع معتبر به‌ویژه استاندارد IEEE، رتبه ماتریس برای مواد پیزوالکتریک به صورت $[x, y, z, yz, xz, xy]$ می‌باشد. درحالی‌که در نرم‌افزار ANSYS، این رتبه ماتریسی به صورت $[x, y, z, xy, yz, xz]$ در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب، برای تبدیل مشخصات پیزوالکتریک در منابع استاندارد به ورودی ANSYS، تغییر مرتبه افقی برای جملات برشی الزامی است. برای این منظور، ثوابت $[e_{61}, e_{62}, e_{63}]$ و $[e_{41}, e_{42}, e_{43}]$ و $[e_{51}, e_{52}, e_{53}]$ در استاندارد IEEE باید به ترتیب به عنوان ردیف xy ، yz و xz در ANSYS معرفی شوند. برای تبدیل ضرایب الاستیک ماده پیزوالکتریک به ورودی ANSYS، ثوابت $[c_{61}, c_{62}, c_{63}, c_{66}]$ و $[c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{46}, c_{44}]$ در استاندارد IEEE باید به ترتیب به عنوان ردیف xy ، yz و xz در ANSYS معرفی شوند. بعد از معرفی مشخصات مصالح لایه‌های پیزوالکتریک دولایه خارجی و مصالح الاستیک میانی، باید هندسه تیر مطابق با شکل (۱) و مشخصات مندرج در جدول (۱) ایجاد گردد. در اختصاص المان برای لایه‌های پیزوالکتریک باید مناسب‌ترین المان سازگار با خواص مواد پیزوالکتریک در زمینه مسائل سه‌بعدی کوپل برای تولید تیر مرکب هوشمند را به کار برد. در این نرم‌افزار می‌توان از المان‌های پیزوالکتریک SOLID5 و یا SOLID226 بهره برد. مشابه با دیگر المان‌های جامد سازه‌ای، این المان‌ها دارای سه درجه آزادی حرکتی در هر گره است. علاوه بر این درجات آزادی، المان‌های پیزوالکتریک در نرم‌افزار دارای درجات آزادی پتانسیل الکتریکی موردنیاز برای مسائل اندرکنش الکترومکانیکی را نیز دارد. با توجه به کوپل بودن مسائل مدل‌سازی پیزوالکتریک، برای سازه میزبان نیز باید در محل‌های اتصال، درجات آزادی سازگار با درجات آزادی به کارانداخته‌های پیزوالکتریک وجود داشته باشد. در واقع برای لایه الاستیک میانی مجاز به استفاده از هر نوع المان SOLID در نرم‌افزار نبوده و بهترین المان برای لایه‌های الاستیک، المان SOLID45 خواهد بود با استفاده از المان SOLID45، برای مدل‌سازی قسمت هسته میانی، این امکان فراهم می‌گردد که اثر تنش‌های نرمال و برشی در قسمت میزبان سازه مرکب هوشمند منظور گردد. در این مقاله صرفاً هدف از مدل‌سازی تیر مرکب چندلایه هوشمند در نرم‌افزار ANSYS، صحت‌سنجی مدل المان محدود معرفی شده است. از این رو با در نظر گرفتن مش بندی ۵۰ المانی و انجام آنالیزهای استاتیکی مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی هم‌زمان، صحت مدل المان محدود پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نکته‌ای که می‌بایست بدان اشاره گردد آن است که در مدل المان محدود پیشنهادی، درجه آزادی پتانسیل الکتریکی وجود نداشته و اثر اعمال پتانسیل به لایه‌های



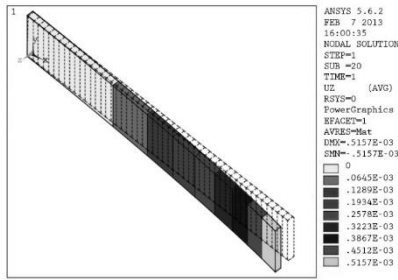
شکل ۴- رابطه ولتاژ اعمالی - تغییر مکان و بررسی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی



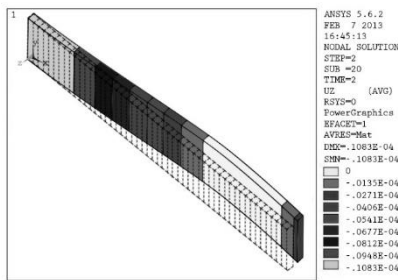
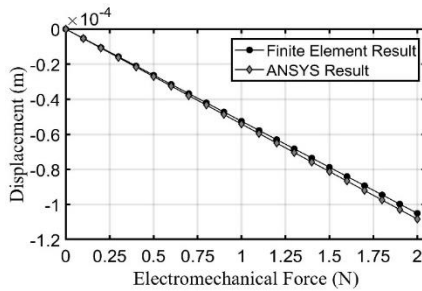
شکل ۵- رابطه نیروی الکترومکانیکی - تغییر مکان و بررسی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی

۵- مدل‌سازی ANSYS و صحت‌سنجی مدل المان محدود

در این قسمت، برای مدل‌سازی المان محدود تیر هوشمند از نرم‌افزار ANSYS استفاده شده و تحلیل‌های استاتیکی برای سیستم الکترومکانیکی مشابه با مش بندی المان محدود ۵۰ المانی صورت گرفته است. اولین مرحله در استفاده از نرم‌افزار ANSYS برای مدل‌سازی اثر پیزوالکتریسیته، تعریف سه ماتریس گذردهی (ثوابت دی‌الکتریک)، کرنش (یا تنش) پیزوالکتریک و ضرایب الاستیک (یا سختی) این ماده هوشمند می‌باشد (ANSYS 9.0 Documentation). قبل از شروع مدل‌سازی باید



شکل ۷- نتایج شبیه‌سازی مدل المان محدود پیشنهادی و ANSYS: نمودار ولتاژ- تغییر مکان



شکل ۸- مقایسه نتایج شبیه‌سازی مدل المان محدود پیشنهادی و ANSYS: نمودار بار الکترومکانیکی - تغییر مکان

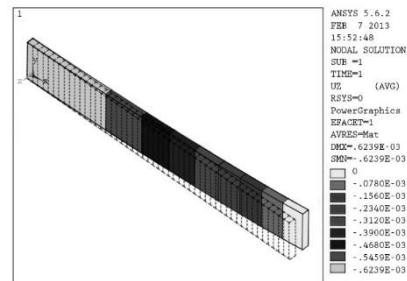
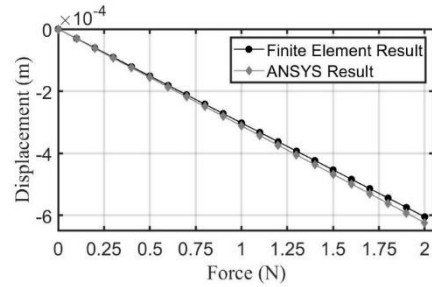
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل عددی المان محدود برای یک تیر طره‌ای اورتوتروپیک کامپوزیت هوشمند بر اساس تئوری حرکتی محیط پیوسته ساخته شده است. در این فرمول‌نویسی، سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم حرکت ارتعاشی با استفاده از مکانیک توسعه‌یافته هامیلتونی توسعه داده شد. سینماتیک لایه‌های خارجی به کاراندازنده/اندازه‌گیر (پیزوالکتریک) و لایه هسته میزبان (الاستیک) به ترتیب اولر- برنولی و تیموشنکو انتخاب شده‌اند. راستای پلاریزاسیون^{۱۶} و شدت میدان الکتریکی اعمالی به مواد فعال موازی با ضخامت تیر است. در شبیه‌سازی عددی در مدل المان محدود، سه مش‌بندی ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ المانی ایجاد شده است. سپس، در یک آنالیز پارامتری، سه مجموعه بارگذاری استاتیکی مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی صورت گرفته است. دو معیار برای صحت‌سنجی مدل المان محدود و برنامه نوشته‌شده

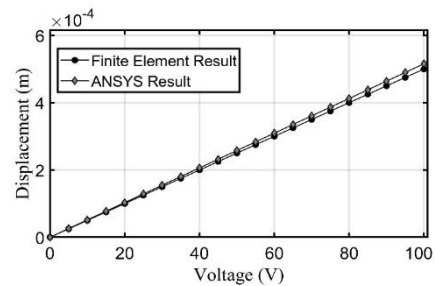
پیزوالکتریک فوقانی و تحتانی به صورت جابه‌جایی‌های تعمیم‌یافته متوسط و نسبی \bar{u} و \bar{w} معرفی شده‌اند. تحلیل‌های صورت‌گرفته در نرم‌افزار ANSYS عبارت‌اند از:

- ✓ بارگذاری مکانیکی در راستای Z به مقدار ۲ نیوتن
- ✓ بارگذاری الکتریکی اعمالی به میزان ۱۰۰ ولت
- ✓ بارگذاری الکترومکانیکی توأم

نتایج تحلیل برای بارهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی به‌عنوان ورودی و تغییر مکان‌های استاتیکی به‌عنوان خروجی برای مدل المان محدود پیاده شده در برنامه عددی نوشته‌شده در MATLAB و تحلیل‌های متناظر در نرم‌افزار ANSYS با مش‌بندی ۵۰ المانی مقایسه شده‌اند. شکل‌های (۶) تا (۸) هم‌خوانی قابل‌قبولی برای دو مدل‌سازی نشان می‌دهد.



شکل ۶- مقایسه نتایج شبیه‌سازی مدل المان محدود پیشنهادی و ANSYS: نمودار بار- تغییر مکان



- Crawley EF, Anderson EH, "Detailed models of piezoceramics actuation beams", AIAA Journal, 1990, 25, 373-385.
- Crawley EF, de Luis J, "Use of piezoelectric actuators as element of intelligent structures", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1987, 1, 4-25.
- Curie P, Curie J, "Contractions et dilations produits par des tensions ´electriques dans les cristeaux h´emie`edres `a faces incline´es", Comptes Rendus de l'Acad´emie des Sciences, 1881, 93, 1137-1140.
- Gornandt A, Gabbert U, "Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures", Springer, Acta Mechanica, 2002, 154, 129-140.
- Henrique Santos, Cristo´vaˆo M, Mota Soares, Carlos A, Mota Soares JN, Reddy, "A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators: Bending and free vibrations", Computers and Structures, 2008, 86, 940-947.
- Kessler H, Kamlah M, Balke H, "Finite element modeling of polarization rotation around an elongated elliptic cavity", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2004, 15, 539.
- Marcelo A, Trindade, "Simultaneous extension and shear piezoelectric actuation for active vibration control of sandwich beams", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2007, 17, 661.
- Vijay K, Varadan K, Vinoy J, Gopalakrishnan S, "Smart material systems and mems: design and development methodologies", © John Wiley & Sons, Ltd, 2006
- Yaman Y, alıřkan T, Nalbantođlu V, Waechter D, Prasad E, "Active vibration control of a smart beam", Canada-US Can Smart Workshop Smart Materials and Structures proceedings, Oct. 2001 Montreal Quebec, Canada.

انتخاب شد. اولین معیار، تخمین اصل بقای انرژی الکترومکانیکی بین انرژی‌های پتانسیل الکترواستاتیک و جنبشی داخلی با کارهای ناپایستار خارجی انجام شده توسط نیروهای الکترومکانیکی است. دومین معیار، مقایسه بین تغییر مکان‌های حاصله از مدل عددی و نتایج ANSYS است. نتایج نشان می‌دهد که فرمول نویسی المان محدود ارائه شده از دقت و کارآمدی خوبی برخوردار است.

۷- علائم اختصاری

\bar{u}, \bar{u}	جابه‌جایی محوری متوسط و نسبی
u^+, u^-	جابه‌جایی محوری لبه‌های فوقانی و تحتانی لایه هسته
L, B, H	طول، عرض و ضخامت هسته الاستیک
L_p, B, H_p	طول، عرض و ضخامت لایه پیزوالکتریک
w, w', w''	تغییر شکل جانبی (خیز تیر) و مشتقات اول و دوم آن
β_c	دوران خمشی لایه هسته (تیر تیموشنکو)
β	دوران خمشی لایه‌های پیزوالکتریک (تیر اویلر-برنولی)
$\tilde{\varphi}(x)$	اختلاف پتانسیل دو سر لایه پیزوالکتریک
$\tilde{\varphi}^\alpha(x)$	پتانسیل میانگین دو سر لایه پیزوالکتریک
KE	انرژی جنبشی
W	کار نیروهای خارجی ناپایستار مکانیکی و الکتریکی
B_{ij}, i	ماتریس‌های تغییر شکل غشایی، خمشی و برشی
$= a, b, c, j$ $= m, b, s$	
B_{ij}, i	ماتریس‌های عملگر مشتق جابه‌جایی راستاهای x و z
$= a, b, c, j$ $= tx, tz, r$	و دوران

۸- مراجع

- شهبازی ی، میردامادی ح، چناقلو م، "شبیه‌سازی عددی مدل المان محدود الکترومکانیکی به کاراندازنده‌های محوری در سازه‌های کامپوزیت تطبیقی هوشمند"، سومین کنگره ملی مهندسی عمران، تبریز، ۱۳۸۶.
- شهبازی ی، میردامادی ح، "مدل المان محدود الکترومکانیکی گذار پیزوالاستیک و الاستوپیزوالکتریک در سازه‌های کامپوزیت هوشمند"، ششمین کنفرانس هوافضا، تهران، ۱۳۸۵.
- غفارزاده ح، غفاری ا ح، "کنترل سازه‌ها با استفاده از سیستم جداگر لرزه‌ای غیرخطی هوشمند"، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه تبریز، ۱۳۹۸، ۴۹ (۳)، ۷۵-۸۳.
- هوشمند م، رافظی ب، علافی ج، "بررسی رفتار لرزه‌ای سازه‌های فولادی با استفاده از مهاربندهای ترکیبی از جنس فولاد و آلیاژهای حافظه‌دار شکلی"، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه تبریز، ۱۳۹۲، ۴۳ (۳)، ۱۱-۲۲.
- Cotoni V, Masson P, Ccté F, "A finite element for Piezoelectric Multilayered Plates: Combined higher-order and piecewise linear c0 formulation", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2006, 17, 155.

EXTENDED ABSTRACT

Finite Element Modelling of Smart Adaptive Composite Beam

Yaser Shahbazi^{a,*}, Hamid Reza Mirdamadi^b, Mohammad Reza Chenaghlou^c

^a Faculty of Architecture and Urbanism, Tabriz Islamic Art University, Tabriz 5164736931, Iran

^b Mechanical Engineering Department, Isfahan University of Technology, Isfahan 8415683111, Iran

^c Civil Engineering Department, Sahand University of Technology, Tabriz 53318-11111, Iran

Received: 31 October 2018; **Accepted:** 07 April 2021

Keywords:

Smart structures, Computational mechanics, Finite element modeling, ANSYS.

1. Introduction

In the present paper, electromechanical finite element modeling of a smart adaptive composite beam is presented. The model is formulated based on linear electromechanics and electro kinematics assumptions. The proposed model is a three layers piezoelectric composite beam that acts as a transverse actuator. The elastic material of the core is isotropic whereas the outer piezoelectric layers are orthotropic. The accuracy of analytic and numerical models is demonstrated by examining the simulation of the two principles of mechanical and electrical energy conservation in a finite element program and also comparing its results with the ANSYS numerical model. In the numerical simulation of the finite element model, there are three mesh including 10, 50, and 100 elements. The parametric simulation consists of three mechanical, electrical, and electromechanical static loading sets. By comparing the results of modeling in the finite element programming and ANSYS, and verifying the principle of electromechanical energy conservation, it can be concluded that the proposed finite element model is efficient and accurate.

2. Methodology

2.1. Finite element Formulation

The smart composite beam model presented in this research is based on linear electromechanical and electro kinematic hypotheses (Cotoni et al., 2006; Gornandt A and Gabbert U, 2002). This means that the electric and mechanical field variables are so small that the theories of elasticity, piezoelectricity, and linear dielectrics can be applied. Elastic materials (core layer) are isotropic but piezoelectric materials (outer layers) are orthotropic. The transverse displacement of all layers at any given cross-sectional area of the longitudinal axis of the beam is equal to the thickness of the beam. The outer layers have assumed the Euler-Bernoulli beam and the elastic core of the beam follows Timoshenko's beam hypotheses. The normal stress (perpendicular to the upper and lower sides of the beam) is negligible. Finally, the piezoelectric layers are polarized in the direction of thickness and parallel to the direction of the applied electric field intensity, and both of them are perpendicular to the neutral axis of the smart beam, to establish the state of the axial actuation mechanism. The kinetic energy functions KE, electromechanical H, the work of mechanical and electrical external forces W, the Lagrangian function L, and the Hamilton generalized variational principle for this continuous piezoelectric environment are defined as follows:

* Corresponding Author

E-mail addresses: y.shahbazi@tabriziau.ac.ir (Yaser Shahbazi), hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir (Hamid Reza Mirdamadi), mrchenaghlou@sut.ac.ir (Mohammad Reza Chenaghlou), www.SID.ir

$$KE = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV, \quad H = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i) dV, \quad W = \int_S (\bar{T}_k \delta u_k - \bar{Q} \delta \varphi), \quad L = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - H_0 E_k \right] dV$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \right) - \delta \int_V H_0 (\varepsilon_{ki}, E_k) dV + \int_S [\bar{T}_k \delta u_k - \bar{Q} \delta \varphi] dV \right\} \quad (1)$$

Based on the degrees of freedom of the whole structure, $q = [u'_1 \quad \tilde{u}_1 \quad w_1 \quad w'_1 \quad u'_2 \quad \tilde{u}_2 \quad w_2 \quad w'_2]^T$, The linear differential equation of motion of the structure will be $M\ddot{q} + Kq = F_m^e - F_{me}^e$. Where, Finite element stiffness, $[K_e]$ and mass, $[M^e]$, matrices are obtained as below:

$$[K^e] = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} c_{11}^{\alpha*} A_{\alpha} \int_0^L (B_{am} B_{am}^T + B_{bm} B_{bm}^T) \\ + c_{33}^c A_c \int_0^L (B_{cm} B_{cm}^T) \\ \bar{c}_{11}^{\alpha} I_a \int_0^L (B_{ab} B_{ab}^T + B_{bb} B_{bb}^T) \\ + c_{33}^c I_c \int_0^L (B_{cb} B_{cb}^T) \\ + c_{55}^c A_c \int_0^L (B_{cs} B_{cs}^T) \end{array} \right\} dx$$

$$[M^e] = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} (2\rho_{\alpha} A_{\alpha} + \rho_c A_c) B_{txm} B_{txm}^T \\ + \frac{1}{2} \left(\rho_{\alpha} A_{\alpha} + \rho_c \frac{I_c}{h_c^2} \right) B_{txd} B_{txd}^T \\ + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda B_{txd} B_r^T + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda B_r B_{txd}^T \\ + (2\rho_{\alpha} A_{\alpha} + \rho_c A_c) B_{tz} B_{tz}^T \\ + (2\rho_{\alpha} A_{\alpha} + \rho_c A_c \lambda^2) B_r B_r^T \end{array} \right\} dx \quad (2)$$

Then, by writing a numerical algorithm in MATLAB software, the results of the analyzes performed in the finite element model for mechanical, electrical and electromechanical loads as input and mechanical displacement as output are presented. In mechanical analysis, a static external load of 0 to 2N is applied to the end of the beam. In electrical charge, however, a potential difference of 0 to 100V is created on each of the piezoelectric actuators. The deformation created under mechanical charge and electrical charge are opposite to each other. In other words, the displacement caused by electric voltage is a compensatory response of piezoelectric stimuli to undesirable external static loads. Finally, the simulated behavior of the static performance of a piezoelectric actuator in electromechanical loading is investigated. In this way, static loads are applied to the end of the beam as before, and at the same time, a potential difference is applied to each of the piezoelectric actuators to eliminate or reduce the displacement of the end of the smart composite beam. Load-displacement relationships and the difference between internal and external energies for the 10, 50 and 100 meshes of different analyzes are shown in Fig. 1 to 3, respectively. The diagrams show and validate the principle of electrodynamic energy conservation in the finite element model.

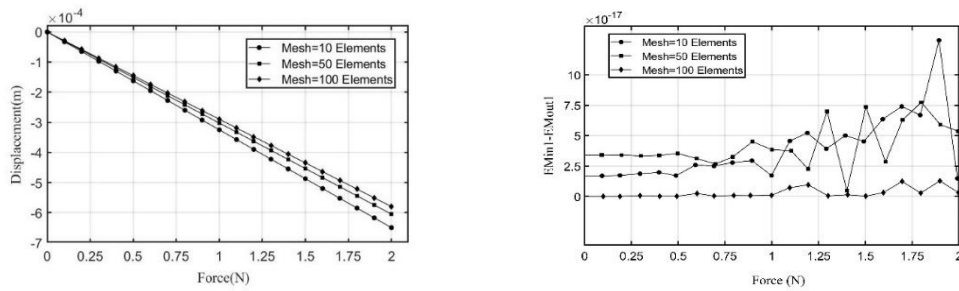


Fig. 1. Load-displacement and the principle of electromechanical energy conservation

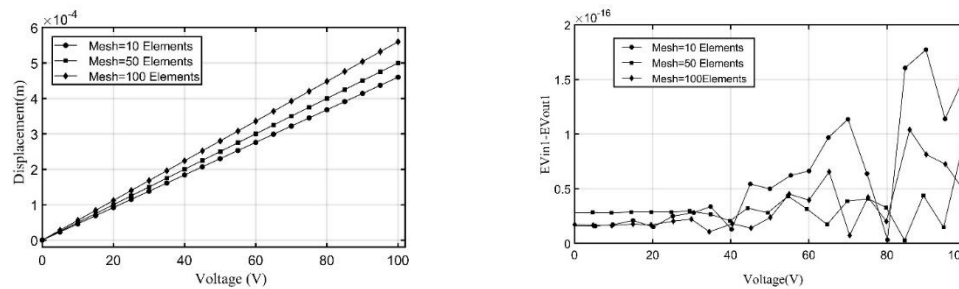


Fig. 2. Voltage-displacement and the principle of electromechanical energy conservation

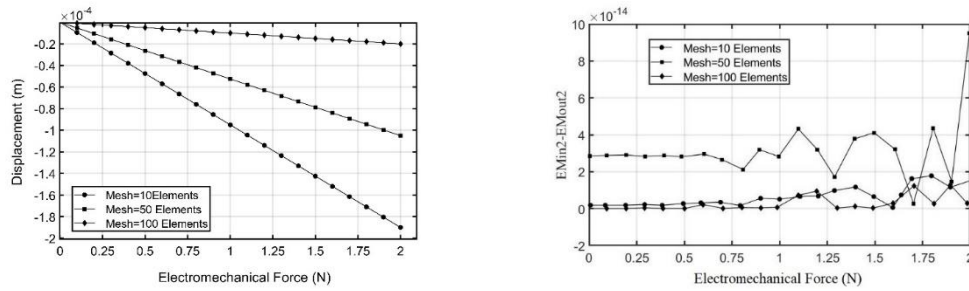


Fig. 3. Electromechanical-displacement and the principle of electromechanical energy conservation

2.2. Ansys modeling and verification

The FEM-based software package, ANSYS, was used for the numerical modeling and verification of the finite element model presented in the previous section. When assigning an element to piezoelectric layers, the most appropriate element compatible with the properties of the piezoelectric material in the field of three-dimensional coupling problems for the production of smart composite beams should be used. In this software, piezoelectric elements SOLID5 or SOLID226 can be used. In addition to movement degrees of freedom, the piezoelectric elements have degrees of freedom of electrical potential required for electromechanical interaction problems. Also, the host structure requires degrees of freedom compatible with the degrees of freedom of the piezoelectric actuators in the connection areas. The best element for the elastic layers will be the SOLID45 element. Using the SOLID45 element, to model the middle core type, it is possible that normal and shear stresses should be considered in the host part of the smart composite structure. Mechanical, Electrical, and electromechanical static analyses were done with 50 element meshes to verify the finite element formulations which are presented in the previous section (Fig. 4 to Fig. 6).

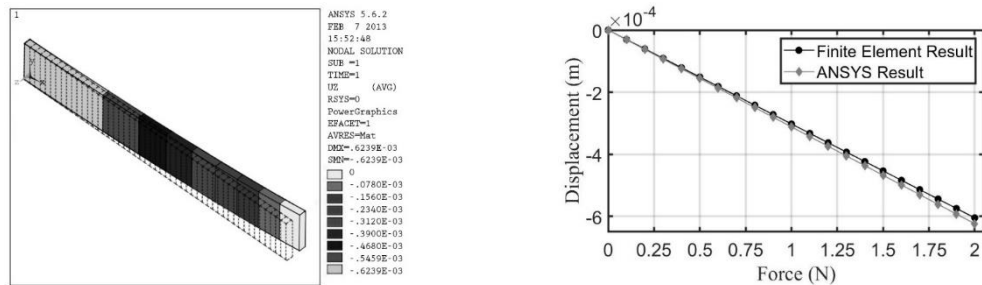


Fig. 4. Comparison of proposed finite element model and ANSYS: load-displacement

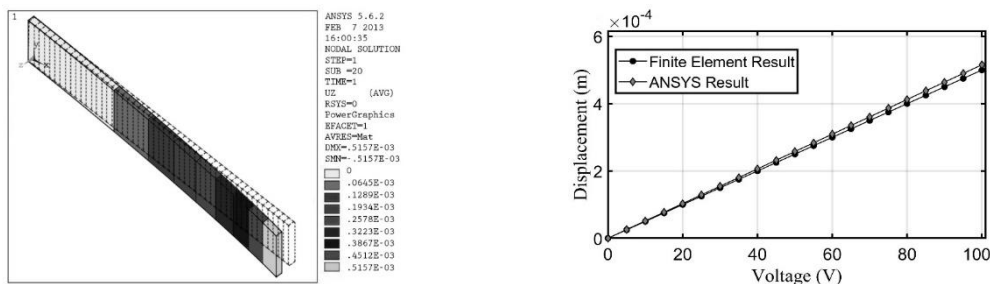


Fig. 5. Comparison of proposed finite element model and ANSYS: voltage-displacement

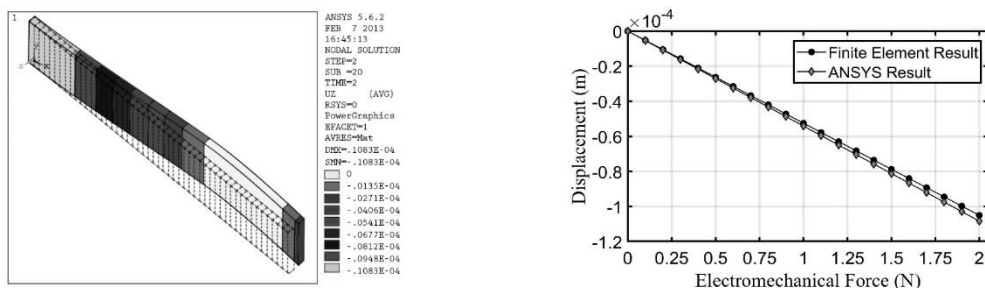


Fig. 6. Comparison of proposed finite element model and ANSYS: electromechanical-displacement

3. Conclusions

In this paper, a finite element numerical formulation of a smart composite orthotropic beam is obtained based on the theory of continuous motion kinetics. In this formulation, the second-order partial differential equation system of motion was developed using Hamiltonian's advanced mechanics. The direction of polarization and the intensity of the electric field applied to the active material are parallel to the thickness of the beam. In the numerical simulation in the finite element model, three 10, 50 and 100 elements are created. Then, in a parametric analysis, three sets of mechanical, electrical, and electromechanical static loading were performed. Two criteria were selected to validate the finite element model and the written program. The first criterion is to estimate the principle of electromechanical energy conservation between the electro elastic and internal kinetic potential energies with the external work performed by the electromechanical forces. The second criterion is the comparison between the displacements resulting from the numerical model and the ANSYS results. The results show that the finite element formulation has good accuracy and efficiency.

4. References

- Cotoni V, Masson P, Ccté F, "A Finite Element for Piezoelectric Multilayered Plates: Combined Higher-order and Piecewise Linear C0 Formulation", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2006, 17, 155.
- Gornandt A, Gabbert U, "Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures", Springer, *Acta Mechanica*, 2002, 154, 129-140.