نشریه علمی- پژوهشی علوم و فنون نقشه برداری، دوره سوم، شماره ۲، آبان ماه ۱۳۹۲

برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس در سری‌های زمانی مختصات GPS

مجتبی محمدزمانی*[۱]، علیرضا امیری سیمکوئی[۲]، محمدعلی شریفی[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی نقشه‌برداری- پردیس دانشکده‌های فنی- دانشگاه تهران
mojtabazamani@ut.ac.ir

[۲] استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری- دانشکده فنی مهندسی- دانشگاه اصفهان
amiri@eng.ui.ac.ir

[۳] استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری- پردیس دانشکده‌های فنی- دانشگاه تهران
shrifi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت شهریور ۱۳۹۱، تاریخ تصویب خرداد ۱۳۹۲)

چکیده

برای برآورد مجهولات در یک مدل تابعی که در آن مشاهدات تابعی خطی از مجهولات می‌باشند، استفاده از روش کمترین مربعات مرسوم است. بهترین برآورد خطی ناأریب (BLUE) وقتی حاصل می‌شود که معکوس ماتریس کواریانس مشاهدات به عنوان ماتریس وزن در نظر گرفته شود. لذا داشتن برآوردی واقع گرایانه از دقت مشاهدات کاملا ضروری است. یکی از روش‌های بدست آوردن دقت مشاهدات، استفاده از برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس است. در این روش، برآورد واریانس منفی ناممکن نیست، اما برآورد واریانس منفی از لحاظ آماری قابل قبول نمی‌باشد. لذا در این مقاله برای برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس روش‌های عددی مانند الگوریتم ژنتیک و همچنین روش‌های تکراری را بر پایه کمترین مربعات ارائه می‌دهیم. با استفاده از روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس، نه تنها برآورد واریانس نامنفی را ضمانت می‌کنیم بلکه می‌توان ترکیبات مختلفی از مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات را به صورت همزمان مورد مطالعه قرار داد، به طوری که مولفه‌های که به احتمال زیاد وجود ندارد، به طور خودکار صفر برآورد می‌گردند. در این مقاله روش‌های فوق برای ارزیابی نویز موجود در سری‌های زمانی ایستگاه‌های دائمی GPS مورد استفاده قرار گرفته شده است. مشاهدات مورد استفاده در این مقاله مختصات بیش از پنج سال (2005- 2010) ایستگاه IGS واقع در مهرآباد تهران و همچنین ایستگاه‌های دائم واقع در اهواز و مشهد است. برای این حجم داده‌ها، روش‌های تکراری بر پایه کمترین مربعات نسبت به روش‌های عددی مانند الگوریتم ژنتیک، برتری دارند. نتایج حاصل از ارزیابی نویز موجود در سری‌های زمانی ایستگاه‌های مذکور با استفاده از روش‌های برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس، نشانگر آن است که نویز موجود در این سری‌ها ترکیبی از نویز سفید به اضافه نویز رنگی فلیکر و گاها نویز random walk می‌باشد.

واژگان کلیدی: برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات (LS-VCE)، برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس، الگوریتم ژنتیک.

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

برای برآورد مجهولات در یک مدل تابعی که در آن مشاهدات تابعی خطی از مجهولات می‌باشند، استفاده از روش کمترین مربعات مرسوم است. روش کمترین مربعات روشی ناآریب (اگر مشاهدات فقط شامل خطای تصادفی باشد) و با فرض نرمال بودن مشاهدات دارای بیشترین احتمال درستی است. در این روش معمولا برای مشاهدات ماتریس وزنی در نظر گرفته می‌شود که اگر این ماتریس وزن معکوس ماتریس کواریانس مشاهدات در نظر گرفت شود، آنگاه مجهولات برآورد شده دارای کمترین واریانس می‌باشد. لذا داشتن معیاری صحیح از دقت مشاهدات کاملا نمایان است. از اینرو مطالعات زیادی در برآورد مولفه واریانس صورت گرفته است و سرانجام توسط Teunissen و امیری سیمکوئی[۱] و سپس امیری سیمکوئی [۲] روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس ارائه گردید.

نکته قابل توجه در تمام روش‌های ارائه شده این است که برآورد واریانس منفی ناممکن نیست و در بعضی از مسائل و به دلایل مختلف امکان برآورد واریانس منفی وجود دارد. به عنوان مثال انتخاب نامناسب ماتریس کواریانس اولیه (ماتریس وزن اولیه) و یا درجه آزادی کم مدل تابعی و همچنین طراحی نامناسب مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات، می‌تواند برآورد واریانس منفی را نتیجه دهند. اما به هر حال از لحاظ آماری چنین برآوردی قابل قبول نیست. معین و مثبت[۱] بودن یکی از شرایط ماتریس وزن است، که با وجود واریانس منفی ممکن است این شرط نقض گردد. لذا مطالعات زیادی برای برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس صورت گرفته است. در این زمینه می‌توان به تحقیقات Sjöberg [۳] در سال ۱۹۸۴ و همچنین در سال ۲۰۱۱ [۴] که به تشریح و تفسیر ساختار ارائه شده در مقاله قبلی خود پرداخته اشاره نمود. البته این روش تنها برای بعضی کاربردهای خاص قابل استفاده می‌باشد.

در این مقاله با تکیه بر روابط کاربردی ارائه شده توسط امیری سیمکوئی [۲]، سعی در برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس شده است. یکی از راههای برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس، استفاده از روش‌های عددی است. روش‌های عددی یکی از پر کاربردترین روش‌ها برای حل مسائل با قیدهای مختلف است و می‌توان برای مسئله شرط نامنفی جواب‌ها را با در نظر گرفتن محدوده‌ای واقع گرایانه و غیر منفی برای مجهولات، تعریف کرد. در این حالت روش‌های عددی سعی می‌کنند بهترین جواب را در محدوده‌ی مورد نظر بدست آورند. از اینرو با بکارگیری یکی از روش‌های بهینه سازی مانند روش ژنتیک سعی در حل مسئله برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس داریم. این روش‌های بهینه سازی با وجود ساختاری راحت و امکان سازگاری بالا با هر نوع مسئله و قید برای حل آن مسئله، نیاز به زمان زیادی برای بهینه کردن تابع هدف دارند. بنابراین چون در اکثر کاربردهای ژئودزی حجم داده‌ها زیاد است، زمان مورد نیاز برای حل مسئله، پارامتر مهمی برای استفاده از این روش‌ها می باشد. لذا در این مقاله با بازنویسی روابط ارائه شده توسط امیری سیمکوئی [۲] روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس ارائه گردیده که خصوصیات کمترین مربعات را دارا می‌باشد و همچنین با سرعت بیشتری می‌تواند مسئله برآورد مولفه‌های واریانس را به انجام برساند.

۲- برآورد مولفه‌های واریانس

بسیاری از مسائل نقشه‌برداری شامل برآورد تعدادی از پارامترهای مجهول است که به صورت خطی (خطی شده) با یکسری مشاهدات، بوسیله مدل تابعی، در ارتباطند. برای برآورد مجهولات با کمترین واریانس نیاز به تعریف ماتریس وزن مناسب مشاهدات است. از اینرو داشتن دقت واقع بینانه مشاهدات کاملا مشهود است. هلمرت در سال ۱۹۰۷ [۵] و Rao در سال ۱۹۷۱ [۶] تا امیری سیمکوئی در سال ۲۰۰۷ [۲] به دنبال روش‌های برآورد مولفه‌های واریانس بوده‌اند. روش کمترین مربعات برآورد مولفه‌های واریانس ارائه شده در این مقاله اولین بار توسط Teunissen در سال ۱۹۸۸ [۷] مطرح شده است و در سال ۲۰۰۷ توسط امیری سیمکوئی [۲] توسعه داده شد و کاربردهای آن در تعیین موقعیت دقیق ماهواره‌ای ارائه گردیده است.

مدل تابعی گوس-مارکوف زیر را در نظر بگیرید:

[۱] positive-definite matrix

$$\mathrm{E}\{y_{m\times1}\} = \mathrm{A}_{m\times n}\ x_{n\times1} \quad (۱)$$

که در آن ماتریس کواریانس مشاهدات برابر است با:

$$Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^{p} \sigma_k Q_k \quad (۲)$$

که در آن ماتریس $(m\times m)$ Q_0 ماتریس کواریانس اولیه و معلوم می‌باشد و همچنین ماتریس‌های کوفاکتور $(m\times m)$ Q_k نیز معلوم می‌باشند. این ترکیب خطی به واسطه اینکه کواریانس σ_k نامعلومند در حالت کلی مجهول می‌باشد. برای برآورد این مجهولات در این مقاله از روش برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات استفاده شده است.

مدل تابعی گوس-مارکوف برای برآورد مولفه‌های واریانس به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathrm{E}\{Y_{vh}\} = \mathrm{A}_{vh}\underline{\sigma} \quad (۳)$$

این مدل تابعی که از مدل تابعی اولیه، رابطه (۱)، بدست می‌آید و برای برآورد مولفه‌های کواریانس کاربرد دارد، مدل تصادفی نامیده می‌شود. بردار Y_{vh} برابر با $(m-n)(m-n+1)/2\times1$ می‌باشد (m تعداد مشاهدات و n تعداد مجهولات مدل تابعی (رابطه ۱) و همچنین ابعاد ماتریس A_{vh} برابر $(m-n)(m-n+1)/2\times p$ می‌باشد و ابعاد بردار σ برابر $p\times1$ می‌باشد. در این حالت برای محاسبه σ_k از طریق کمترین مربعات خواهیم داشت.

$$\underline{\hat{\sigma}} = (\mathrm{A}_{vh}^{\mathsf{T}} W_{vh} \mathrm{A}_{vh})^{-1} \mathrm{A}_{vh}^{\mathsf{T}} W_{vh} Y_{vh} \quad (۴)$$

که در آن W_{vh} ماتریس وزن می‌باشد و همچنین تابع هدف برابر است با:

$$\underline{\hat{e}}_{vh}^{\mathsf{T}} W_{vh}\, \underline{\hat{e}}_{vh} = \frac{b-1}{2b}(\underline{\hat{e}}^{\mathsf{T}}\, Q_y^{-1}\, \underline{\hat{e}})^2 \quad (۵)$$

که در آن

$$\underline{\hat{e}} = P_{\mathrm{A}}^{\perp}\underline{y} \quad (۶)$$

$$P_{\mathrm{A}}^{\perp} = I_n - \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathsf{T}} Q_y^{-1}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathsf{T}} Q_y^{-1} \quad (۷)$$

و همچنین $b=m-n$ است. هدف در سرشکنی کمترین مربعات مینیمم کردن رابطه (۵) می‌باشد. همچنین می‌توان با در نظر گرفتن $W_{vh} = \frac{1}{2} Q_{vh}^{-1}$ جواب بهترین (Best) برای مسئله حاصل از سرشکنی بدست آورد [۲] (Q_{vh} ماتریس کواریانس مشاهدات در مدل تصادفی است). برای چگونگی محاسبه ماتریس‌های A_{vh} و W_{vh} و بردار Y_{vh} به امیری سیمکوئی [۲] مراجعه گردد.
می‌توان رابطه (۴) را به صورت زیر نمایش داد:

$$\underline{\hat{\sigma}} = N^{-1}\underline{l} \quad (۸)$$

که در آن

$$n_{kl} = \frac{1}{2} tr\left(Q_k Q_y^{-1} P_{\mathrm{A}}^{\perp} Q_l Q_y^{-1} P_{\mathrm{A}}^{\perp}\right) \quad (۹)$$

و همچنین

$$\underline{l}_k = \frac{1}{2}\underline{\hat{e}}^{\mathsf{T}} Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1}\underline{\hat{e}} - \frac{1}{2} tr\left(Q_k Q_y^{-1} P_{\mathrm{A}}^{\perp} Q_0 Q_y^{-1} P_{\mathrm{A}}^{\perp}\right) \quad (۱۰)$$

می‌باشد. در این حالت نیازی به ماتریس A_{vh} و همچنین Y_{vh} و W_{vh} نیست و می‌توان به طور مستقیم از ماتریس طرح مدل تابعی $\mathbf{A}$ و ماتریس وزن Q_y برای بدست آوردن مقادیر مجهول استفاده کرد. باید ابتدا با در نظر گرفتن مقدار اولیه برای مجهولات σ_k، ماتریس Q_y را با استفاده از رابطه(۲) بدست آوریم و سپس بایستی با استفاده از روابط (۷) و (۸) ماتریس N و بردار l را محاسبه نمود و در نهایت با استفاده از رابطه (۶) مقادیر برآورده شده مجهولات را محاسبه کرد و سپس آنها را جایگزین مقادیر اولیه نمائیم و این کار را تا همگرا شدن مجهولات ادامه دهیم. بنابر تجربه، بعد از چند تکرار مساله همگرا می‌شود. همچنین ماتریس کواریانس مقادیر برآورد شده $\hat{\sigma}_k$ عبارتند از:

$$Q_{\hat{\sigma}} = N^{-1} \quad (۱۱)$$

الگوریتمی از این روش در رساله دکترای امیری سیمکوئی [۲] ارائه شده است.

۳- دلایل وقوع وریانس منفی

در حالی که برآورد مولفه‌های وریانس بر پایه اصل کمترین مربعات نامقید[1] و محدود نشده[2] می‌باشد، برآورد وریانس منفی ناممکن نیست. وریانس منفی ممکن است باعث غیر مثبت شدن ماتریس کواریانس Q_y گردد که البته نمی‌تواند تفسیر فیزیکی داشته باشد. رخدادن وریانس منفی هنگامی که یک برآوردگر را به همراه دقتش مقایسه کنیم، مراجعه به رابطه ۱۱، قابل توضیح است (یعنی ممکن است دقت برآورد مناسب نباشد). ممکن است به دلیل درجه آزادی نامناسب مدل تابعی، نتوان مجهولات را با دقت کافی برآورد کرد. به هر حال وجود وریانس منفی می‌تواند نشانه‌ی مهم نقص در ساختار مدل کواریانس باشد که در حالت کلی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۲]:

۳-۱- طراحی نامناسب مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات

این مشکل هنگامی اتفاق می‌افتد که مدل مولفه‌های کواریانس برای داده‌ها صحیح نباشد. در این حالت باید مدل کواریانس مناسب را جستجو کرد. این مسئله شبیه مسئله Data Snooping در مدل تابعی می‌باشد. در مدل تصادفی می‌توان نتایج بدست آمده را با آزمون‌های آماری مانند آماره w که برای کشف مشاهدات اشتباه در مدل تابعی مورد استفاده است، مقایسه کرد و صحت نتایج را مورد بررسی قرار داد [۲]. این روش ابزار قدرتمندی را برای جستجوی مدل تصادفی واقعی فراهم می‌کند.

۳-۲- درجه آزادی کم مدل تابعی

درجه آزادی کم ماتریس $\mathbf{A}$ در مدل تابعی (در نتیجه درجه آزادی کم مدل تصادفی) می‌تواند موجب برآورد منفی بعضی از مولفه‌های وریانس شود. می‌توان اینگونه بیان کرد که دقت تمام پارامترهای مورد نظر به طور مستقیم به تعداد مشاهدات موجود در مدل تابعی بستگی دارد. اگر مشاهدات بیشتری داشته باشیم، دقت بیشتری برای مولفه‌های کواریانس بدست خواهیم آورد و احتمال برآورد نامناسب (مثلا منفی) کمتر می‌شود [۲].

۳-۳- انتخاب نامناسب ماتریس کواریانس اولیه (ماتریس وزن اولیه)

برای مثال می‌توان به مقادیر اولیه مناسب از مولفه‌های کواریانس اشاره نمود (ماتریس وزن واقع گرایانه). به این معنا که سعی می‌کنیم مولفه‌های کواریانس اولیه‌ی حتی الامکان به مقادیر نهائی نزدیک باشد. استفاده از برآوردگر تقریبا نااریب[3] می‌تواند مفید باشد. از آنجایی که این برآوردگر، هنگامی که ماتریس‌های کوفاکتور Q_k نیمه معین مثبت[4] باشند، همیشه وریانس‌های غیر منفی نتیجه می‌دهد، می‌توان این از روش در تکرارهای اولیه استفاده نمود و سپس روش کمترین مربعات را اعمال کنیم. این موضوع باعث انتخاب مقادیر اولیه مناسب می‌گردد [۸].

۳-۴- ناپایداری

هرچند موارد ۳-۱ و ۳-۲ خود ممکن است موجب ناپایداری در مسئله برآورد کمترین مربعات مولفه‌های وریانس گردد، لیکن ساختار خاص مسئله نیز می‌تواند مدل ناپایدار مولفه‌های وریانس را نتیجه دهد. به عنوان مثال وجود مشاهدات با دقت بالا (مثلا مشاهده‌ی فاز) در کنار مشاهدات کم دقت (مثلا مشاهده‌ی کد) در مدل عاری از هندسه (Geometry-free) مشاهدات GPS می‌تواند موجب بدوضع شدن ماتریس نرمال در روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های وریانس گردد. در این حالت معمولا یک یا چند پارامتر مجهول (کواریانس) برآورد شده، دقت ضعیفی دارند و این حالت حتی می‌تواند موجب برآورد منفی پارامترهای مجهول گردد.

در حالت کلی برای حل مسئله برآورد نامنفی مولفه‌های وریانس به روش کمترین مربعات از دو روش عددی (الگوریتم ژنتیک) و تکراری (برآورد نامنفی کمترین مربعات) استفاده می‌کنیم.

---

[1] unconstrained
[2] unrestricted
[3] almost unbiased estimator
[4] positive semi-definite

۴- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک یکی از روش‌های هوش مصنوعی بوده که کارکرد آن بر اساس ژنتیک طبیعی استوار می‌باشد. اصول اولیه آن توسط Holland [۹] و همکارانش در دانشگاه میشیگان در سال ۱۹۶۲ پایه ریزی شد. سپس در سال ۱۹۷۵، مبانی ریاضی آن در کتابی توسط Holland [۱۰] با نام" تطابق در سیستمهای طبیعی و مصنوعی " منتشر شد.

در این الگوریتم جوابهای حاصل از یک جمعیت برای تولید جمعیت بعدی استفاده می‌شوند. انتخاب بعضی از جوابها از میان کل جوابها (والدین[۵]) به منظور ایجاد جوابهای جدید یا همان فرزندان[۶] بر اساس میزان مطلوبیت آنها می‌باشد. طبیعی است که جوابهای مناسبتر شانس بیشتری برای تولید مجدد داشته باشند.

بکار بردن الگوریتم ژنتیک نیازمند تعیین شش مرحله است. این مراحل به ترتیب عبارتند از [۱۶] [۱۷]:

i. **کدگذاری:** الگوریتم ژنتیک بجای اینکه بر روی پارامترها یا متغیرهای مساله کار کند، با شکل کدگذاری شده‌ی مناسب آنها، سروکار دارد.

ii. **تولید جمعیت اولیه:** این جمعیت می‌تواند جامع بوده و خواص مختلف مسئله را در بر داشته باشد. اما جمعیت اولیه بزرگ برای تکرارهای بعدی مشکل‌زا می‌باشد و نیازمند محاسبات و صرف زمان زیاد است.

iii. **تابع ارزیابی و مقدار برازندگی[۷]:** مناسب بودن یا نبودن جواب، با معیاری که از تابع هدف بدست می‌آید، سنجیده می‌شود. هر چه یک جواب مناسب‌تر باشد، مقدار برازندگی بزرگتری دارد. برای آنکه شانس بقای چنین جوابی بیشتر شود، احتمال بقای آن، متناسب با مقدار برازندگی آن در نظر گرفته می‌شود.

iv. **نحوه انتخاب طبیعی (تابع انتخاب):** انتخاب اعضا برای یک تولید موفق نسل جدید، نقش مهمی را در یک الگوریتم ژنتیک ایفا می‌کند. یک انتخاب احتمالی بطوریکه اعضای بهتر شانس بیشتری برای انتخاب شدن داشته باشند، بر پایه میزان سازگاری شکل می‌گیرد.

v. **عمل ترکیب**: اپراتورهای ژنتیک در فرآیند ترکیب، اساس مکانیزم جستجو را در الگوریتم ژنتیک فراهم می‌سازند. دو اپراتور اساسی موجود در الگوریتم ژنتیک عبارتند از: عملگر تقاطعی[۸] و عملگر جهشی[۹]. عملگر تقاطعی، دو عضو را گرفته و دو عضو جدید تولید می‌کند، در حالیکه عملگر جهشی یک عضو را برای تولید یک جواب جدید تغییر می‌دهد. دو مورد از وظایف عملگر تقاطعی عبارتند از: الف: شتاب بزرگی به الگوریتم جستجو می‌دهد. ب: منجر به ترکیب مؤثر اعضاء جمعیت می‌شود. عمل جهش یکی از اعمالی است که به منظور ایجاد اصلاح در نسل فرزندان انجام می‌شود. یکی از کاربردهای این عمل جلوگیری از افتادن الگوریتم در بهینه محلی به جای بهینه کلی[۱۰] است. احتمال جهش باید عدد مناسبی باشد زیرا احتمال بزرگ جهش می‌تواند نسل جدید را تخریب کند.

vi. **معیارهای پایان دهی:** پس از اجرای مراحل الگوریتم و تکرار، بایستی معیاری برای پایان تکرار و ارائه جواب نهایی قرار داد. چنانچه شرایط خاتمه الگوریتم فراهم باشد، الگوریتم پایان می‌پذیرد و در غیر اینصورت جمعیت موجود به عنوان جمعیت اولیه برای مرحله بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. شرایط خاتمه الگوریتم ژنتیک می‌تواند توسط مساله مشخص شود و یا شرایطی مانند زمان اجرای الگوریتم، تعداد محدود تولید اعضاء جدید در الگوریتم و یا تغییر نکردن بهترین جواب برای تعداد مشخصی از مراحل تولید باشد.

۵- برآورد نامنفی کمترین مربعات

روش‌های عددی دارای مزایای زیادی می‌باشند. اما اگر داده‌های مسئله زیاد باشد، زمان بسیار زیادی برای بهینه کردن مسئله نیاز دارند. مثلا اگر بخواهیم داده‌های روزانه یک سال مشاهدات ایستگاه دائمی GPS را مورد بررسی

---

۵ Parent
۶ Offspring
۷ Fitness Value
۸ Crossover
۹ Mutation
۱۰ global

قرار دهیم، استفاده از روش‌های عددی توصیه نمی‌شود. روش‌های تکرای دارای این قابلیت می‌باشند که بعد از چند تکرار همگرا شده و جواب بهینه را بدست می‌آورند.

روش‌های مختلفی برای برآورد نامنفی کمترین مربعات ارائه شده است که در این مقاله از روش مرسوم ارائه شده توسط مرجع [۱۱] استفاده می‌کنیم.

در این الگوریتم، شکل (۱)، مدل تابعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۲]:

$$Y_{vh} = A_{vh}\sigma \Rightarrow \underline{\hat{\sigma}} = N^{-1}\underline{l} \quad (۱۲)$$

و همچنین تابع هدف را این گونه معرفی می‌کنیم:

$$f(\sigma) = \left\| Y_{vh} - A_{vh}\sigma \right\|^2 \quad (۱۳)$$

و در نهایت هدف، مینیم کردن تابع فوق به شرط برآورد کردن مقادیر نامنفی σ یعنی $\sigma_n \geq 0$ است. دو مجموعه از اعداد به عنوان مجموعه فعال (***T***) و غیرفعال (***P***) ایجاد می‌کنیم که مجموع اعضای این دو مجموعه برابر با تعداد مجهولات باشد. اعضای مجموعه‌های فعال و غیرفعال اندیس‌هایی از مجهولات می‌باشند و در طول انجام محاسبات سعی برآن داریم که تمام ایندکس های مجموعه فعال را به مجموعه غیرفعال انتقال دهیم لذا در کل محاسبات فقط اندیس‌های فعال در فرآیند شرکت دارند. در این الگوریتم ماتریس A_{vh} را به بردارهای ستونی تبدیل کرده و سعی می‌کنیم اثر این ستون‌ها را در مجهولات مورد بررسی قرار دهیم. مقادیر اولیه برای بردار σ اعداد صفر می‌باشد و همچنین مجموعه فعال کل ایندکس‌ها را شامل می‌شود و لذا مجموعه غیرفعال در ابتدا تهی می‌باشد.

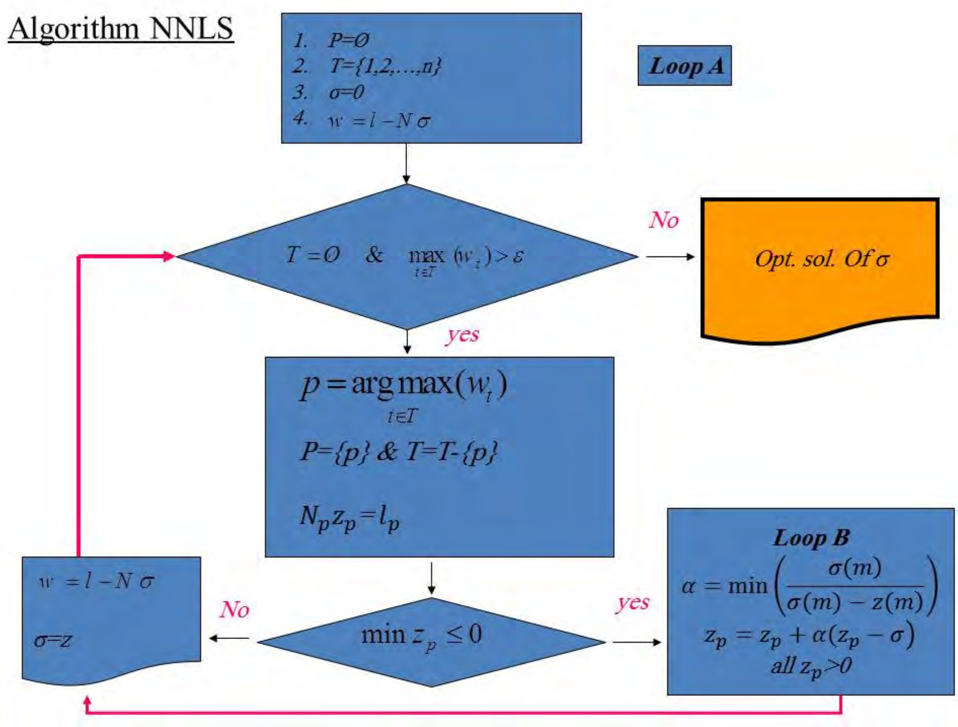
در ادامه بردار w را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$w = A_{vh}^T\left(Y_{vh} - A_{vh}\sigma\right) \quad (۱۴)$$

و همچنین می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$w_n = -\frac{1}{2} f'(\sigma_n) \quad (۱۵)$$

که در آن $f'(\sigma) = 2A_{vh}^T\left(Y_{vh} - A_{vh}\sigma\right)$ می‌باشد.



شکل ۱- الگوریتم برآورد نامنفی کمترین مربعات (Lawson and Hanson, 1995)

طبق این الگوریتم داریم:

$$\begin{aligned} w_n &= 0 \qquad n \in P \\ w_n &< 0 \qquad n \in T \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

باید سعی کنیم همه اندیس‌ها را به مجموعه غیر فعال(***P***) انتقال دهیم. از اینرو باید سعی کنیم w_n را برابر صفر بدست آوریم. سپس $\mathbf{z_p}$ را از طریق کمترین مربعات معمولی محاسبه می‌کنیم. $\mathbf{z_p}$ نماینده‌ی مجهولات می-باشد که اگر شرط $\min z_p \le 0$ برقرار باشد در نتیجه $\sigma=z$ آنگاه در لوپ *B*، $\mathbf{z_p}$ های منفی را به اعداد نامنفی تبدیل می‌کنیم. در لوپ B، *m* به داریه‌های منفی بردار $\mathbf{Z}$ به شرط وجود در مجموعه غیر فعال(***P***) اشاره دارد. این روند تا برقراری شرط $\max_{t \in R}(w_t) > \varepsilon$ و $T = \emptyset$ ادامه دارد.

در این روش نیز مانند اکثر روش‌های برآورد نامنفی کمترین مربعات که در آن مدل تابعی برابر $E\{Y_{vh}\} = A_{vh}\sigma$ باشد نیاز به ماتریس‌های A_{vh} و W_{vh} و بردار Y_{vh} داریم. اما نکته قابل توجه اینجاست که طول بردار Y_{vh} برابر با $(m-n)(m-n+1)/2$ می‌باشد (m تعداد مشاهدات و n تعداد مجهولات مدل تابعی)، ابعاد ماتریس A_{vh} برابر $(m-n)(m-n+1)/2\times p$ می‌باشد و ماتریس W_{vh} ابعادی برابر با $(m-n)(m-n+1)/2\times(m-n)(m-n+1)/2$ دارد. برای مثال اگر تعداد ۲۰۲۴ مشاهدات (m) داشته باشیم و ۲۴ مجهول $\mathbf{x}$ (n) و ۳ مجهول σ (p) در نتیجه ابعاد بردار Y_{vh} برابر ۲۰۰۱۰۰۰×۱، ابعاد ماتریس A_{vh} برابر ۲۰۰۱۰۰۰×۳ و ابعاد ماتریس W_{vh} برابر ۲۰۰۱۰۰۰×۲۰۰۱۰۰۰ خواهد بود. به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که کار کردن با چنین ابعاد بزرگی دشوار است و این در حالی است که اگر برای محاسبه σ_k از رابطه (۸) استفاده کنیم ابعاد ماتریس N برابر ۳×۳ و بردار l برابر ۳×۱ خواهد بود که کار کردن با آن بسیار آسان است. لذا با بازنویسی روابط ارائه شده در بخش (۲) مشکل بزرگ بودن ابعاد ماتریس‌های A_{vh}، W_{vh} و Y_{vh} در مسئله برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات را برطرف می‌کنیم.

در روش کمترین مربعات با در نظر گرفتن $Y_{vh} = A_{vh}\,\sigma$ به عنوان مدل تابعی، می‌توان با استفاده از رابطه (۸) مقادیر مجهول σ را برآورد کرد. می‌توان ماتریس N در رابطه (۸) را به صورت زیر نمایش داد:

$$N = \mathrm{A}_{vh}^{\mathsf{T}} W_{\mathrm{vh}} \mathrm{A}_{vh} \qquad (۱۷)$$

با فرض وجود ماتریس معکوس N، می‌توان ماتریس A_p با خصوصیات ماتریس N یعنی مربعی، مرتبه کامل و متقارن در نظر گرفت به طوری که:

$$N = \mathrm{A}_p \mathrm{A}_p \qquad (۱۸)$$

که به جذر(ریشه) ماتریس معروف است. در صورتی که ماتریس N یک ماتریس معین و مثبت باشد، A_p یک ماتریس حقیقی متقارن وارانپذیر خواهد بود که ابعاد آن برابر با ماتریس N و $p\times p$ می‌باشد. همچنین ماتریس l در رابطه (۸) را بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$l = \mathrm{A}_{vh}^{\mathsf{T}} W_{\mathrm{vh}} Y_{vh} \qquad (۱۹)$$

و با توجه به رابطه (۱۸) می‌توان نوشت:

$$l = \mathrm{A}_p^{\mathsf{T}}\, l_p \qquad (۲۶)$$

بدست آوردن بردار l_p از این رابطه کار آسانی است چون ماتریس A_p ماتریس وارانپذیر است و بنابراین دارای معکوسی به شکل A_p^{-1} می‌باشد. در نتیجه می‌توان رابطه (۸) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A_p\, \hat{\sigma} = l_p \qquad (۲۷)$$

اکنون A_p یک ماتریس طرح جدید و l_p بردار مشاهدات مربوط به آن با وزن یکه می‌باشد. بنابراین این بازنویسی با رابطه (۸) هم ارز است. در فرم کلی مسئله تغییری ایجاد نشده و فقط آن را بازنویسی کردیم، بنابراین این مدل پارامتریک دارای مشاهدات کمتر و هم ارز مسئله اصلی، رابطه (۸)، می‌باشد.

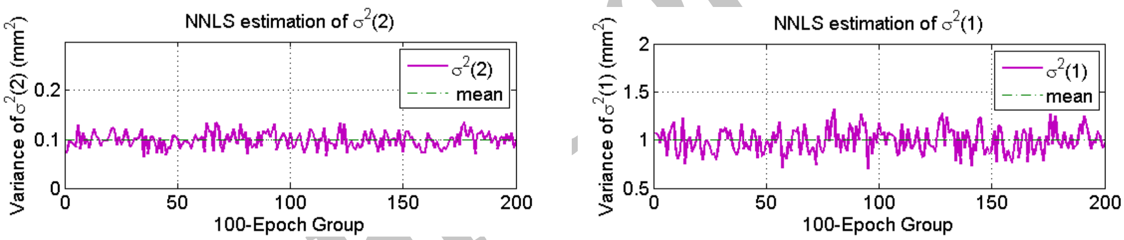
یکی دیگر از محاسن برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات امکان برآورد ماتریس کواریانس مجهولات ($Q_{\hat{\sigma}} = \left(\mathrm{A}_p^{\mathsf{T}}\mathrm{A}_p\right)^{-1}$) است، که معیار مناسبی

برای بیان خصوصیات آماری مقادیر برآورد شده است. دقت برآورد مجهولات ($Q_{\hat{x}}$) در روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس نسبت به روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس، به دلیل اضافه شدن قیود نامنفی، بهتر است. هر چند باید توجه داشت جواب روش نامنفی ، به دلیل اضافه شدن قیود نامنفی، بایاس است.

۶- کاربرد عملی و مقایسه روش‌ها

در مدل تابعی $E\{y\}=Ax$ که در آن ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$ و ابعاد آن $2n\times 1$ است و ماتریس **y** با ابعاد $2n\times 1$ و میانگین صفر که n مشاهده‌ی اول آن با واریانس $\sigma_1^2=1\,mm^2$ و n مشاهده‌ی بعدی آن با واریانس $\sigma_2^2=0.1\,mm^2$ تولید شده است را در نظر بگیرید. در این حالت ماتریس‌های کوفاکتور عبارتند از: $Q_1=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ و $Q_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}$ و ماتریس $Q_0=0$ می‌باشد. در این حالت مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات عبارت است از: $Q_y=\sigma_1^2\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\sigma_2^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}$. می‌خواهیم مقادیر σ_1^2 و σ_2^2 را از طریق روش‌های برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات و روش الگوریتم ژنتیک محاسبه کرده و مورد مقایسه قرار دهیم.

با در نظر گرفتن رابطه (۵) به عنوان هدف و سعی در مینیمم کردن آن از طریق الگوریتم ژنتیک و با در نظر گرفتن محدوده‌ی ابتدایی برای جمعیت تولید شده توسط الگوریتم، به طوری این محدوده مثبت و واقع گرایانه باشد و دیگر پارامترهای لازم به صورت تجربی، به راحتی می‌توان مقادیر بهینه مجهولات را به صورت نامنفی برآورد کرد. پارامترهای لازم جهت راه‌اندازی الگوریتم ژنتیک در جدول ۱ قرار داده شده است.



شکل ۲- برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس

(شکل سمت راست مربوط به مشاهده اول با واریانس ۱ و شکل سمت چپ مربوط به مشاهده دوم با واریانس ۰٫۱ است)

در الگوریتم ژنتیک، محدوده‌ی ابتدایی برای σ_1^2 و σ_2^2 به ترتیب بین ۰ تا ۱۰ و بین ۰ تا ۲ (واحد همگی mm^2) در نظر گرفته شده است. همچنین شکل ۲ نشان دهنده ۲۰۰ مرتبه تکرار این فرآیند و ایجاد مشاهدات جدید با میانگین صفر و با واریانس‌های $\sigma_1^2=1\,mm^2$ و $\sigma_2^2=0.1\,mm^2$ و سپس برآورد مولفه‌های واریانس آن از طریق روش‌های برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات و روش الگوریتم ژنتیک است. نتیجه حاصل از هر سه روش در هر تکرار با همدیگر برابر است که می‌تواند دلیلی بر هم ارز بودن هر سه روش و همچنین درستی آنها باشد.

در مثالی دیگر، به عنوان یک کاربرد عملی، ارزیابی نویز موجود در سری‌های زمانی ایستگاه‌های دائمی GPS با استفاده از روش برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، را در نظر بگیرید. مشاهدات ما در اینجا مختصات بیش از پنج سال (2010 - 2005) ایستگاه IGS واقع در مهرآباد تهران و همچنین ایستگاه‌های دائم واقع در اهواز و مشهد می‌باشد. این مشاهدات برای هر ایستگاه شامل سه مولفه شمالی، شرقی و ارتفاعی است.

ابتدا با استفاده از الگوریتم پاکسازی IQR[۱۱] مشاهدات را مورد بررسی قرار می‌دهیم. IQR یک برآوردگر پایدار[۱۲] از پراکندگی داده‌ها است به طوری که تغییرات در ۲۵٪ از

[۱۱] Interquartile range
[۱۲] Robust

حد بالاتر و پایین‌تر از داده‌ها تاثیری در آن نداشته باشد. اگر یک مشاهده‌ی اشتباه در داده‌ها وجود داشته باشد آنگاه IQR حساسیت بیشتری نسبت به انحراف معیار برای تشخیص آن دارد. هنگامی که داده‌ها دارای توزیع نرمال باشد آنگاه IQR کارایی کمتری نسبت به انحراف معیار در برآورد پراکندگی داده‌ها دارد[۱۲].

در مدل تابعی $E\{\underline{y}\} = Ax$ که در آن بردار m بعدی **y** مشاهدات سری زمانی، برای مثال مشاهدات روزانه یک مولفه‌ی مختصات GPS، می‌باشد که گاهی آن را با **y(t)** که t به آرگمان زمان اشاره دارد، نشان داده می‌شود. هنگامی که رفتار تغییر شکل یک روند خطی داشته باشد، مدل تابعی به صورت $E\{y(t)\} = y_0 + r\,t$ خواهد بود. هنگامی که علاوه بر ترم خطی، سیگنال‌های پریودیک q در داده‌ها وجود داشته باشد آنگاه مدل تابعی برابر است با [۲]:

$$E\{y(t)\} = y_0 + rt + \sum_{k=1}^{p} a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t \qquad (۲۹)$$

دو ترم مثلثاتی sin و cos با هم نشان دهنده‌ی موج سینوسی و در حالت کلی با فاز اولیه غیرصفر می‌باشد. ساختار معرفی شده در بالا دارای مزایای بیشتری نسبت به مدل غیر خطی آن می‌باشد. بردار مجهولات **x** شامل y_0، r و ضرایب a_k و b_k می‌باشد. با در نظر گرفتن ترم خطی به انضمام مولفه‌ی سالیانه و نیم سالیانه (q=2)، ماتریس طرح **A** دارای ابعاد $m\times 6$ می‌باشد. سطر i اُم سطر ماتریس طرح با در نظر گرفتن فاصله زمانی t_i عبارت است از:

$$a_i = [1 \;\; t_i \;\; \cos 2\pi t_i \;\; \sin 2\pi t_i \;\; \cos 4\pi t_i \;\; \sin 4\pi t_i\,] \qquad (۳۰)$$

ساختار مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Q_y = \sigma_w^2 I + \sigma_f^2 Q_f + \sigma_{rw}^2 Q_{rw} \qquad (۳۱)$$

که در آن I ماتریس کوفاکتور نویز سفید است و یک ماتریس همانی می‌باشد و Q_f ماتریس کوفاکتور نویز رنگی فلیکر می‌باشد و ساختار آن عبارت است از [۱۴]:

$$q_{ij}^{(f)} = \begin{cases} \dfrac{9}{8} & if \quad \tau = 0 \\ \dfrac{9}{8}(1 - \dfrac{\log\tau/\log 2 + 2}{24}) & if \quad \tau \neq 0 \end{cases} \qquad (۳۲)$$

که در آن $\tau = \left|t_j - t_i\right|$ شیفت زمانی میان مشاهدات بر حسب روز است. همچنین Q_{rw} ماتریس کوفاکتور نویز Random Walk است و در زمان مرجع صفر است. برای مشاهدات هم فاصله (شیفت زمانی هم فاصله) ماتریس کوفاکتور آن به صورت زیر است [۱۵]:

$$Q_{rw} = f_s^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix};\; f_s = \frac{m-1}{T} \qquad (۳۳)$$

که در آن f_s فرکانس نمونه برداری در یک سال و T زمان کل مشاهدات است. σ_w^2، σ_f^2 و σ_{rw}^2 مجهولات مدل تصادفی در این مسئله می‌باشند. سپس با استفاده از روابط موجود در بخش (۲) مقاله، مولفه‌های واریانس را برآورد می‌کنیم. نکته اینکه با استفاده از این روابط مشاهده می‌شود در بعضی موارد واریانس منفی برآورد شده است، که برای مقایسه می‌توان پارامترهای مجهول را از طریق الگوریتم ژنتیک و روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس ارائه شده در این مقاله، برآورد کرد و نتایج حاصل از هر کدام را مورد مقایسه قرار داد.

یکی دیگر از مزایای استفاده از روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس در هنگامی است که اطلاعات مناسبی از مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات، در دسترس نباشد. هنگامی که مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات بصورت رابطه (۳۱) باشد و یا ترکیب دیگری مانند $Q_y = \sigma_w^2 I + \sigma_f^2 Q_f$ و یا ترکیب‌های دیگر، و اطلاعات مناسبی از چگونگی ترکیب آن موجود نیست، بهتر است مدل جامع‌تر را در نظر گرفت (رابطه ۳۱). در این حالت برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، مدل صحیح را کشف می‌کند و در صورتیکه نویز مشاهدات شامل آن مولفه نباشد، مولفه‌ی برآورده شده مربوطه به آن نویز صفر برآورد می‌گردد (مانند اثر σ_{rw}^2 در بعضی از برآوردهای جدول ۲). در نتیجه استفاده از

روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، نه تنها برآورد واریانس نامنفی را ضمانت می‌کند بلکه می‌توان ترکیبات مختلفی از مدل مولفه‌های کواریانس مشاهدات را به صورت همزمان مورد مطالعه قرار داد و مدل مناسب را برای مشاهدات مورد استفاده، بدست آوریم. برای استفاده از الگوریتم ژنتیک پارامترهای کنترل کننده‌ی زیر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- پارامترهای راه اندازی الگوریتم ژنتیک

Generation	500
Population Size	20
Elite count	2
Crossover fraction	0.8
Mutation function	Uniform
Mutation rate	0.01
Crossover function	Scattered
Migration fraction	0.2

همچنین روش الگوریتم ژنتیک محدوده‌ی اولیه برای پارامترهای به گونه‌ای در نظر گرفته شده که نامنفی بوده و همچنین در محدوده مقدار برآورده شده از روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس قرار گیرد. برای مثال محدوده‌ی ابتدایی برای واریانس‌های σ_w^2، σ_f^2 و σ_{rw}^2 مولفه‌ی شرقی ایستگاه IGS واقع در مهرآباد تهران به ترتیب بین ۸ تا ۱۶ (mm^2) ، بین ۱۸ تا ۲۶ (mm^2) و بین ۰ تا ۴ ($mm^2/year$) در نظر گرفته شده است.

در حالت معمولی الگوریتم ژنتیک به مقادیر برآورد شده توسط برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات همگرا می‌شود که با توجه به جدول ۲، گاهی به مقادیر منفی همگرا می‌شود. برای برآورد نامنفی پارامترهای مجهول از طریق این الگوریتم می‌توان تابع جهش[۱۳] را یکنواخت[۱۴] در نظر گرفت که در این حالت جهش فقط در محدوده‌ی اولیه صورت می‌گیرد که با توجه به اینکه این محدوده غیرمنفی در نظر گرفته می‌شود، لذا الگوریتم به مقادیر برآورد شده به روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس همگرا می‌شود. راه حل بعدی استفاده از یک شرط در تابع هدف است که در صورت میل پارامترهای مجهول به سمت اعداد منفی، مقدار تابع هدف را عددی غیر واقعی دهد تا همگرایی به آن اعداد منفی ناممکن شود.

جدول ۲ نتایج حاصل از برآورد مولفه‌های واریانس به هر سه روش ذکر شده برای ایستگاه‌های تهران، مشهد و اهواز می‌باشد. نکته قابل توجه وجود واریانس منفی در بعضی از برآوردها هنگام استفاده از روابط برآورد مولفه-های واریانس است که این واریانس‌ها هنگام استفاده از روش های نامنفی ارائه شده به عدد صفر همگرا می‌شوند. روشهای عددی همچون روش الگوریتم ژنتیک هیچگاه بطور کامل به جواب بهینه (در این مثال به صفر مطلق یعنی مرز نامنفی) همگرا نمی‌شود. اما اگر تعداد تکرارها زیاد شود میتوان به این جواب بهینه نزدیک و نزدیکتر شد، اما ممکن است هیچ گاه صفر مطلق برآورد نگردد.

قابل توجه است که محاسبه مولفه‌های واریانس از روش‌های برآورد مولفه‌های واریانس و برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، برای این حجم داده‌ها، به چند دقیقه زمان نیاز دارد و در مقابل آن برآورد نامنفی با استفاده از الگوریتم ژنتیک چندین ساعت زمان نیاز دارد.

[۱۳] Mutation function
[۱۴] Uniform

جدول ۲- برآورد مولفه های وریانس در ایستگاه های دائمی تهران- مشهد – اهواز

نام ایستگاه	مولفه	وریانس	برآورد مولفه‌های وریانس	برآورد نامنفی مولفه-های وریانس	الگوریتم ژنتیک
تهران	مولفه شرقی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	12.5484	12.3830	12.383
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	23.1885	22.645	22.644
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	-3.6873	0	0.0019
	مولفه شمالی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	7.1330	7.1330	7.134
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	11.7443	11.7443	11.743
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	3.73847	3.7385	3.739
	مولفه ارتفاعی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	37.2232	37.2231	37.221
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	58.9411	58.9411	58.94
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	4.4518	4.4518	4.452
مشهد	مولفه شرقی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	12.9086	12.6717	12.671
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	20.7177	19.9071	19.907
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	-4.4652	0	0.0002
	مولفه شمالی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	8.3183	8.3183	8.318
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	13.7396	13.7396	13.740
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	1.682259	1.6823	1.682
	مولفه ارتفاعی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	51.5264	51.526	51.527
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	83.459	83.459	83.459
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	14.6592	14.6592	14.66
اهواز	مولفه شرقی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	6.5126	6.5126	6.512
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	10.0319	10.0319	10.032
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	3.1944	3.1944	3.195
	مولفه شمالی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	11.5984	11.4046	11.407
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	19.8376	19.1892	19.191
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	-3.2344	0	0.0006
	مولفه ارتفاعی	$\sigma_w^2\ (mm^2)$	37.9226	37.1873	37.185
		$\sigma_f^2\ (mm^2)$	64.4777	61.9634	61.96
		$\sigma_{rw}^2\ (mm^2/year)$	-11.1371	0	0.0024

۷- نتیجه گیری

در حالت کلی برای برآورد مولفه‌های واریانس، روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات پیشنهاد می‌گردد. در صورت برآورد واریانس منفی با برآوردگر کمترین مربعات مولفه‌های واریانس، آنگاه دقت برآورد مجهولات ($Q_{\hat{\sigma}}$) در روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس نسبت به روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس، به دلیل اضافه شدن قیود نامنفی، بهتر است. هر چند باید توجه داشت جواب روش نامنفی ، به دلیل اضافه شدن قیود نامنفی، بایاس است. روش‌های تکراری بر پایه کمترین مربعات به زمان کمتری نسبت به روش‌های عددی مانند الگوریتم ژنتیک، برای حل مسئله برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، نیاز دارد. همچنین با استفاده از روش برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات، نه تنها برآورد واریانس نامنفی را ضمانت می‌کنیم بلکه می‌توان ترکیبات مختلفی از مدل مولفه‌های کوواریانس مشاهدات را به صورت همزمان مورد مطالعه قرار داد و مدل مناسب را برای مشاهدات مورد استفاده، بدست آوریم. این روش هنگامی که اطلاعات مناسبی از مدل مولفه‌های کوواریانس مشاهدات، در دسترس نباشد کاملا مفید است. نتایج حاصل از ارزیابی نویز موجود در بیش از پنج سال (2005-2010) سری‌های زمانی ایستگاه IGS واقع در مهرآباد تهران و همچنین ایستگاه‌های دائم واقع در اهواز و مشهد با استفاده از روش‌های برآورد نامنفی مولفه‌های واریانس فوق الذکر، نشانگر آن است که نویز موجود در این سری‌ها شامل نویز سفید، نویز رنگی فلیکر و گاها نویز Random Walk می‌باشد.

سپاسگزاری

از سازمان نقشه برداری کشور جهت در اختیار قرار دادن داده‌های ایستگاه‌های مذکور کمال تشکر را دارم.

مراجع

[1] Teunissen, P., and Amiri-Simkooei, A.R., (2006). “Variance component estimation by the method of least-squares” in Proc. VI Hotine-Marussi Symposium of Theoretical and Computational Geodesy: Challenge and Role of Modern Geodesy, 29 May – 2 June, Wuhan University, China, pp. 273-279

[2] Amiri-Simkooei, A. R., “Least-squares variance component estimation: theory and GPS applications,” Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 2007.

[3] Sjöberg, L., “Non-negative variance component estimation in the Gauss-Helmert adjustment model,” Manuscripta geodaetica, vol. 9, pp. 247–280, 1984.

[4] Sjöberg, L., “On the Best Quadratic Minimum Bias Non-Negative Estimator of a Two-Variance Component Model,” Journal of Geodetic Science, vol. 1, no. 3, pp. 280–285, 2011.

[5] Helmert, F. R., “Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate: Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente. BG Teubner, 1907.

[6] Rao, C. R., “Estimation of variance and covariance components–MINQUE theory,” Journal of multivariate analysis, vol. 1, no. 3, pp. 257–275, 1971.

[7] Teunissen, P., “Towards a least-squares framework for adjusting and testing of both functional and stochastic model. Internal research memo, Geodetic Computing Centre, Delft. A reprint of original 1988 report is also available in 2004, No. 26,” Delft University of Technology, the Netherlands, 1988.

[8] Förstner, W., “Ein verfahren zur schätzung von varianz-und kovarianzkomponenten,” Allgemeine Vermessungsnachrichten, vol. 86, no. 11–12, pp. 446–453, 1979.

[9] De Jong, K. A., “Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems,” PhD thesis, University of Michigan, Dissertation Abstracts International. 36 (10), 1975.

[10] Holland, J. H., “Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence”. The MIT press, 1992.

[11] Lawson C. L., and Hanson, R. J., “Solving least squares problems”, vol. 15. Society for Industrial Mathematics, 1995.

[12] Upton G., and Cook, I., “Understanding statistics”. Oxford University Press, 1996.

[13] Tiberius, C., and Kenselaar, F., “Variance component estimation and precise GPS positioning: case study,” Journal of surveying engineering, vol. 129, p. 11, 2003.

[14] Zhang, J., et al., “Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates and site velocities,” JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH-ALL SERIES-, vol. 102, pp. 18–18, 1997.

[15] Bock, Y., et al., “Southern California permanent GPS geodetic array: continuous measurements of regional crustal deformation between the 1992 Landers and 1994 Northridge earthquakes,” Journal of geophysical research, vol. 102, no. 8, pp. 18013–18, 1997.

[16] Gwiazda, T.D., "Genetic algorithms reference Volume I Crossover for single-objective numerical optimization problems" , 2006.

[17] Gwiazda, T.D., "Genetic Algorithms Reference Volume II Mutation operator for numerical optimization problems" , 2007.