

## تأثیر آنالیز نوین واقع بینانه بر معناداری پارامترهای ماتریس استرین

سیده مهدیه رازقی\*<sup>۱</sup>، علیرضا امیری سیمکوئی<sup>۲</sup>، محمدعلی شریفی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی نقشه برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران  
razeghi86@ut.ac.ir

<sup>۲</sup>دانشیار گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده فنی مهندسی - دانشگاه اصفهان  
amiri@eng.ui.ac.ir

<sup>۳</sup>استادیار گروه مهندسی نقشه برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران  
sharifi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت تیر ۱۳۹۱، تاریخ تصویب مهر ۱۳۹۲)

### چکیده

بیش از ۲۰ سال از جمع آوری داده‌های GPS می‌گذرد و در حال حاضر می‌توان ادعا کرد که سری‌های زمانی مناسبی از داده‌های GPS در اختیار است. در اغلب استفاده‌هایی که از این سری‌های زمانی می‌شود نوین سفید را به عنوان ماتریس کوریانس مناسب برای کاربردهای مختلف از سری‌های زمانی انتخاب می‌کنند و این در حالیست که با گذشت ۲۰ سال از جمع آوری این داده‌ها مدلسازی بهتری از این سیگنال‌ها ممکن است و دیگر تنها نوین سفید پاسخگوی تمامی سیگنال‌های ناخواسته در سری‌های زمانی GPS نیست. اگرچه نوین سفید بخش اجتناب ناپذیر هر سری زمانی است اما تحقیقات نشان داده که این نوین تنها بخشی از نوین واقع بینانه از یک سری زمانی است. در این تحقیق برآن هستیم تا مدل نوین مناسبی را به سری‌های زمانی GPS نسبت دهیم و تفاوت نتایج کاربردهای این سری‌ها را با مدل نوین واقع بینانه بررسی کنیم. به همین منظور آنالیز استرین را که یکی از مهمترین کاربردهای سری‌های زمانی GPS است انجام داده و دقت استرین‌های مذکور را در دو حالت نوین سفید و نوین واقع بینانه با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. همچنین کمیتی را با نام استرین نرمال شده برآورد می‌کنیم که در مقایسه فوق کمک بیشتری را به ما خواهد کرد.

شبکه کالیفرنیا با بیش از ۱۰ سال داده GPS پیوسته، با تراکم مناسب معیار خوبی است تا میزان تأثیر طول سری زمانی و عدم گسستگی داده‌ها در نتایج نهایی نشان داده شود. از طرفی شبکه آذربایجان یکی از منظم ترین و متراکم ترین شبکه‌های ایران است که مدل نوین حاصل شده برای این شبکه می‌تواند برای کل شبکه ژئودینامیک ایران در نظر گرفته شود. حال با مقایسه نتایج این دو شبکه می‌توان به منظور بهبود نتایج در آینده برای شبکه ژئودینامیک ایران پیشنهادهای مفیدی را ارائه داد.

**واژگان کلیدی:** سری زمانی، نوین سفید، نوین واقع بینانه، نوین چند متغیره، آنالیز استرین، استرین نرمال شده.

\* نویسنده رابط

## ۱- مقدمه

بار توسط امیری و همکارانش در سال ۲۰۰۷ انجام شد و مشخص گردید که مدل نوین حاصل از این روش واقع بینانه بوده و بسیار انعطاف پذیر نسبت به کاربردهای موجود است [۱۱]. در اینجا نیز ما سعی بر آن داریم تا استرین‌های حاصل از سالها جمع آوری سری‌های زمانی را توسط مدل نوین واقع بینانه حاصل از روش LS-VCE ارزیابی کنیم. از طرفی این سوال پیش می‌آید که تاثیر دستیابی به این مدل نوین بر روی آنالیز استرین چه می‌تواند باشد که به این سوال و دیگر سوالات مرتبط در طی این مقاله پاسخ داده خواهد شد و خواهیم دید چه خصوصیتی از یک شبکه می‌تواند در معنی دار بودن استرین‌های حاصله موثر باشد. مطلبی که این کار را از سایر کارهای موجود متمایز می‌سازد ارزیابی استرین‌های حاصل از آنالیز استرین توسط مدل نوین واقع بینانه حاصل از LS-VCE است. اینکه بررسی شود اگر تمامی نوین‌های موجود در سری‌های زمانی برای استرین‌های حاصل از آنها در نظر گرفته شود، معناداری استرین‌ها چه تغییری می‌کند؟ و یا اینکه چه شبکه و با چه خصوصیتی در سری‌های زمانی، استرین‌های معنادارتر و مطمئن تری را خواهد داشت؟

## ۲- تعیین مدل ریاضی

در این قسمت هدف ایجاد یک ارتباط صحیح میان مشاهدات و مجهولات است. از آنجا که هدف نهایی پروژه دستیابی به مدل نوین می‌باشد، مدل تابعی صحیح برای مشاهداتی که سری زمانی از مشاهدات GPS هستند، مجموعی از یک ترند خطی، موقعیت نقاط و هارمونیک‌هایی است که سری زمانی از آنها تبعیت می‌کند [۱۲]. برای تشکیل مدل ریاضی از برآورد کمترین مربعات هارمونیک و برای دستیابی به هارمونیک‌های مرتبط به سری زمانی از توان طیفی استفاده کرده‌ایم.

۲-۱- برآورد کمترین مربعات هارمونیک<sup>۴</sup>

زمانی که مشاهدات را در مدل تابعی قرار می‌دهیم، موارد ناشناخته‌ای که باقی می‌مانند یعنی اثرات مدله نشده،

علاوه بر خطاهایی که در پردازش داده‌های خام GPS برای آنها در نظر گرفته می‌شود، سیگنال‌های ناخواسته و تا حدودی ناشناخته در این داده‌ها باقی می‌ماند که خود را در سری‌های زمانی این مشاهدات پردازش شده بیشتر نشان می‌دهند. از آنجا که مشاهدات سری‌های زمانی در شبکه‌های ژئودینامیک کاربردهای فراوانی از جمله بررسی چرخش‌ها و کرنش‌های هر شبکه را دارد، لذا در نظر گرفتن یک مدل نوین مناسب امری ضروری به حساب می‌آید. همیشه دستیابی به استرین‌های معنی دار برای درک حرکات و دوران‌های یک شبکه یکی از دغدغه‌های اصلی تمامی ژئودین‌ها بوده است. از طرفی در سال‌های اخیر برخی از دانشمندان به آنالیز نوین سری‌های زمانی، خصوصا GPS، پرداخته و به دنبال مدلی بودند که به توان به عنوان مدل نوین واقع بینانه برای پردازش‌های بعدی به آن اعتماد کرد. از جمله این تحقیقات Zhang و همکاران در سال ۱۹۹۷ است که ۱۹ ماه داده‌های پیوسته از ۱۰ ایستگاه جنوب کالیفرنیا را توسط بیشترین احتمال محدود شده<sup>۱</sup> با شاخص‌های طیفی طبیعی پردازش کرده و یافتند که مدلی ترکیب از نوین سفید و فلیکر برای این داده‌ها بهترین مدلی است که می‌توان به عنوان مدل نوین به این داده‌ها نسبت داد [۱]. به همین طریق Calais در سال ۱۹۹۹، Mao و همکاران در سال ۱۹۹۹ و Williams و همکاران در سال ۲۰۰۴ دریافتند که مدل نوین مناسب با سری‌های زمانی GPS مدلی ترکیب از نوین سفید و نوین فلیکر است [۲][۳][۴]. حتی فرکانس‌های بالاتر سری‌های زمانی GPS (۱ - ۳۰ ثانیه) نیز از مدل نوین ترکیبی سفید و فلیکر پیروی می‌کنند [۶] و [۵]. همچنین چندین مطالعه وجود نوین رندم واک را در داده‌های ژئودتیک نشان دادند و مشخص شد که نوین رندم واک همان قدری که در اندازه گیری‌های پیوسته کرنش سنج<sup>۲</sup> یافت می‌شد به همان مقدار در داده‌های GPS جنوب کالیفرنیا دیده می‌شود [۸]. [۷]، [۹] و [۱۰]. آنالیز نوین سری‌های زمانی GPS توسط روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های وریانس<sup>۳</sup> اولین

<sup>۱</sup> Restricted Maximum Likelihood<sup>۲</sup> Strain Meter<sup>۳</sup> Least Square Variance Component Estimation<sup>۴</sup> Least Square Harmonic Estimation

که در آن، ماتریس  $A_j$  همان ساختار ماتریس  $A_k$  در معادله ۳ را دارد و  $\hat{e}_0 = P_A^\perp y$  کمترین مربعات باقیمانده‌ها در شرایطی است که پروژکتور قائم به صورت  $P_A = A(A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1}$  تعریف می‌شود.

### ۳- تعیین مدل تصادفی

از آنجا که مدل ریاضی مذکور تمامی رفتارهای قابل پیش‌بینی سری زمانی را فرموله کرده است و از آنجا که نویز، رفتار ناخواسته سیگنال‌های یک سری زمانی است، حال می‌توان ادعا کرد آنچه از مدل ریاضی در سری زمانی ما باقی می‌ماند، همان میزان نویز در سری زمانی است. اما اینکه سری‌های زمانی ما از چه مدل نویزی تبعیت می‌کنند سوالی است که از طریق LS-VCE به آن پاسخ خواهیم داد. اما قبل از آن لازم است تا با مفهوم نویز در سری‌های زمانی آشنا شده و بدانیم که چه ابزاری برای این منظور لازم داریم. در این بخش همچنین آماره ای را یادآور می‌شویم که در تایید نتایج به ما کمک خواهد کرد.

#### ۳-۱- مفهوم نویز در سری‌های زمانی

یک مدل آماری مشترک برای بسیاری از انواع سیگنال‌های ژئوفیزیکی (که ممکن است درگیر نویز باشند) می‌تواند به صورت یک پردازش power-law شرح داده شود. رفتار این فرآیند تصادفی به گونه‌ای است که توان طیفش به فرم زیر درمی‌آید:

$$P_x(f) = P_0 \left( \frac{f}{f_0} \right)^k \quad (5)$$

$f$  فرکانس مکانی یا زمانی است،  $f_0$  و  $P_0$  ثابت‌های نرمال سازی هستند و  $k$  شاخص طیفی است [۱۴]. معمولاً شاخص طیفی در محدوده  $[-3, 1]$  قرار می‌گیرد [۱۵]. پردازش‌ها با این محدوده به زیر تقسیم بندی حرکت جزئی برونی<sup>۳</sup> با رنج  $-1 < k < -3$  و نویز جزئی سفید<sup>۴</sup> با رنج  $-1 < k < 1$  [۱۶] [۱۷] درمی‌آید. موارد خاص در این مدل آماری در مقادیر طبیعی رخ می‌دهد؛ در  $k = 0$

می‌توانند به صورت همبستگی زمانی<sup>۱</sup> تفسیر شوند. در واقع LS-HE را برای تشخیص بخش‌های پرریودیک مدله نشده اثرات در مدل ریاضی استفاده خواهیم کرد. اگر معادلات مشاهدات را  $E\{y\} = Ax$  در نظر بگیریم، وقتی با سری زمانی بدین صورت سروکار داریم:  $y = \{y_1, y_2, \dots\}$  (زمانیکه مشاهده  $y$  در فضای  $R^m$  داده می‌شود؛ که  $R^m$  فضای برداری  $m$  بعدی است)؛  $y$  می‌تواند توسط جمع  $q$  بردار مثلثاتی مجزا تعریف شود یعنی:

$$y_i = \sum_{k=1}^q a_k \cos \omega_k t_k + b_k \sin \omega_k t_k \quad (1)$$

$$E(y) = Ax + \sum_{k=1}^q A_k x_k, \quad D(y) = Q_y \quad (2)$$

طوریکه ماتریس  $A_k$  شامل دو ستون مطابق با فرکانس‌های  $\omega_k$  توابع سینوسی است:

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \omega_k t_1 & \sin \omega_k t_1 \\ \cos \omega_k t_2 & \sin \omega_k t_2 \\ \dots & \dots \\ \cos \omega_k t_m & \sin \omega_k t_m \end{pmatrix}, \quad x_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

$a_k$  و  $b_k$  و  $\omega_k$  اعداد حقیقی هستند. اگر  $\omega_k$  ها معلوم باشند، مسئله کمترین مربعات خطی تخمین دامنه‌های  $a_k$  و  $b_k$  برای  $k = 1, \dots, q$  هستند. اما اگر این فرکانس‌ها مجهول باشند، مسئله به یافتن فرکانس‌های مربوطه تغییر می‌یابد که در این تحقیق نیز مسئله همین است [۱۲].

#### ۲-۲- توان طیفی<sup>۲</sup>

برای دستیابی به فرکانس‌های مربوطه کمیت زیر را تعریف می‌کنیم [۱]:

$$w_{k=i} = \arg \max_{\omega} e_0^T Q_y^{-1} A_j (A_j^T Q_y^{-1} P_A^\perp A_j)^{-1} A_j^T Q_y^{-1} \quad (4)$$

<sup>۲</sup> Fractional Brownian Motion

<sup>۴</sup> Fractional White Noise

<sup>۱</sup> Time correlation

<sup>۳</sup> Power Spectrum

$$A=[a_1, a_2, \dots, a_n] \Rightarrow \text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

و همچنین اپراتور  $vh$ ، عملگری است که تنها برای ماتریس های متقارن و به فرم زیر تعریف می شود (در تعریف زیر  $S$  یک ماتریس قطری و  $D$  ماتریس تکرار است):

$$vh(S) = D^+ \text{vec}(S) \quad (10)$$

همانطور که عنوان گردید  $vh$  اپراتوری است که روی ماتریس های متقارن کار می کند و  $B$  ماتریس  $m \times (m-n)$  است که  $(m-n)$  ستون مستقل دارد و به طور خطی فضای پوچی  $A^T$  را پوشش می دهد.  $B^T A = 0$  یا  $A^T B = 0$  برآورده کننده کمترین مربعات برای  $p$  بردار مولفه های وریانس کواریانس مجهول سپس می تواند به صورت زیر حاصل شود:

$$\hat{\sigma} = (A_{vh}^T Q_{vh}^{-1} A_{vh})^{-1} A_{vh}^T Q_{vh}^{-1} vh(tt^T - B^T Q_0 B) = N^{-1} l \quad (11)$$

جاییکه  $Q_{vh}$  ماتریس کواریانس  $vh(tt^T)$  قابل مشاهده است. می توان تمامی ماتریس های نرمال  $N_{p \times p}$  و  $p$  بردار  $l$  را به صورت زیر نوشت:

$$n_{kl} = \frac{1}{2} \text{tr}(Q_y^{-1} P_A^+ Q_k Q_y^{-1} P_A^+ Q_l), k, l = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

$$l_k = \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1} \hat{e} - \frac{1}{2} \text{tr}(Q_k Q_y^{-1} P_A^+ Q_0 Q_y^{-1} P_A^+) \quad (13)$$

از آنجاییکه برآورده گر  $\sigma$  برپایه روش کمترین مربعات است، معکوس ماتریس نرمال  $N$  به طور ذاتی ماتریس کواریانس مولفه های وریانس کواریانس های برآورد شده را می دهد  $Q_{\hat{\sigma}} = N^{-1}$ . برای به کارگیری این روش، ابتدا یک فرض اولیه برای مولفه های وریانس کواریانس در نظر

یک نویز سفید کلاسیک داریم، در  $k = -1$  نویز فلیکر داریم و در  $k = -2$  حرکت برونی را داریم (رندم واک). به غیر از نویز سفید کلاسیک، ما ترم نویز رنگی را به منظور اشاره به پردازش power-law استفاده خواهیم کرد [۱۸].

### ۳-۲- برآورد کمترین مربعات مولفه های وریانس

برآورد کمترین مربعات مولفه های وریانس ابتدا توسط Teunissen در سال ۱۹۹۸ توسعه پیدا کرد. (برای مطالعه بیشتر بخوانید [۱۹]، [۱۲] و [۱۱]). مدل خطی معادلات مشاهدات را با  $p$  تعداد مجهول مولفه های وریانس کواریانس در نظر بگیرید:

$$E(y) = Ax, D(y) = Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \quad (6)$$

طوریکه  $E$  و  $D$  اپراتورهای امید و پراکنش را نشان می دهند. در مدل ریاضی،  $m, y$  بردار مشاهداتی است و  $n, x$  بردار پارامترهایی است که می خواهیم و  $A$  ماتریس طراحی  $m \times n$  است که مرتبه کامل ستونی است. ماتریس کواریانس داده ها  $Q_y$  به صورت ترکیب خطی مجهول از ماتریس های  $m \times m$  معلوم  $Q_k$  ها و  $Q_0$  که بخش معلوم مدل آماری (اگر موجود باشد)، می باشد. در این مرحله مولفه های وریانس کواریانس مجهول  $\sigma_k, k = 1, \dots, p$  تخمین زده می شوند. به منظور به کارگیری روش کمترین مربعات برای مولفه های وریانس کواریانس می توانیم بخش دوم معادلات مشاهدات را به صورت  $E(vh(tt^T - B^T Q_0 B)) = A_{vh} \sigma$  دوباره فرموله کنیم که در این حالت داریم:

$$\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_p]^T \quad (7)$$

$$t = B^T y, A_{vh} = [vh(B^T Q_1 B), \dots, vh(B^T Q_p B)] \quad (8)$$

لازم به ذکر است که:

اپراتور  $vec$ ، عملگری است که با پشته سازی ستون های یک ماتریس، یک بردار ستونی از ماتریس تشکیل می دهد (در تعریف زیر  $A$  ماتریسی دلخواه است):

$$t = B^T y \sim N(0, Q_t) \quad (16)$$

$$Q_t = B^T Q_0 B + \sum_{k=1}^p \sigma_k B^T Q_k B \quad (17)$$

آماره زیر به ما کمک می کند تا علاوه بر یافتن بیشترین احتمال برای سه مدل آماری مورد نظر، برای هر کدام از مدل ها، اندازه دامنه را داشته باشیم [۲۱]:

$$\hat{\sigma} = \arg \max \ln L(t; \sigma) \\ = \arg \min \frac{1}{2} \ln \det(Q_t) + \frac{1}{2} t^T Q_t^{-1} t \quad (18)$$

#### ۴- آنالیز نويز چند متغیره

یک مقدار قابل توجه از نويز رنگی (بین ایستگاهها) می تواند یک اریبی فیزیکی مشترک را انعکاس دهد. Williams و همکارانش در سال ۲۰۰۴ همبستگی مکانی را به صورت تابعی از فاصله زاویه ای نشان دادند [۴]. کاهش در نويز سفید و فلیکر از بررسی های کلی به بررسی های محلی نشان داد که برخی نويزها همبستگی زمانی است [۲۲]؛ یعنی نويزهای حاصل از این بررسی ها، سیگنال ناخواسته نیست، بلکه نتیجه شده از همبستگی زمانی میان ایستگاهها است. اگرچه بررسی هر پارامتر از هر سری سبب دستیابی به تمامی مقادیر همبستگی زمانی می شود، اما از آنجا که احتمال وابستگی میان سری های زمانی مختلف وجود دارد، سبب غفلت از همبستگی مکانی می شود. همچنین در صورتی که از همبستگی زمانی صرف نظر کنیم و تنها همبستگی میان سری ها را بررسی کنیم، سبب آن می شود که نتایج برای بردارهای سرعت<sup>۱</sup> بیش از حد نامطمئن شود و بنابراین می بایست از آن اجتناب کرد ([3]; [1]; [12] [4]). اینبار معادلات مشاهدات به صورت زیر در خواهد آمد:

$$E(\text{vec}(Y)) = (I_r \otimes A) \text{vec}(X) \quad (19)$$

می گیریم  $(\sigma_k^0, k=1, \dots, p)$  با استفاده از این مقادیر خواهیم داشت:

$$Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k^0 Q_k \quad (14)$$

معادله  $\hat{\sigma} = N^{-1}l$  با معادلات ۱۲ و ۱۳ برآوردی برای  $\sigma_k$  می دهد که  $k=1, \dots, p$ ، که در تکرار بعدی همین مقادیر بهبود پیدا می کنند. این فرآیند تکرار آنقدر ادامه پیدا می کند تا مقادیر وریانس کواریانس تخمین زده شده تغییری نکنند [۱۲]. برعکس بیشترین احتمال محدود شده (RML)، LS-VCE یک برآوردگر کمترین وریانس ناریب را حاصل می دهد. خاصیت ناریبی مستقل از تابع توزیع مشاهدات است. همچنین LS-VCE سریع تر از RML است، زیرا از طرح نیوتن-رافسون استفاده می کند که سبب می شود از روش downhill simplex سریع تر باشد [۲۰]. این روش همچنین به ما اجازه می دهد تا انواع مولفه های نويز را در مدل آماری با یکدیگر ترکیب کنیم. با استفاده از آزمون های آماری می توان به سادگی قضاوت کرد که آیا مولفه های نويز حاصل شده در این سری زمانی موجود هستند یا خیر [۱۲].

#### ۳-۳- بیشترین احتمال محدود شده

همواره در علوم ژئوماتیک برای آنکه از نتایج بدست آمده مطمئن باشیم، از آماره های موجود با توجه به نوع مسئله برای تایید نتایج استفاده می کنیم. در اینجا از آماره RML برای تایید نتایج LS-VCE و همچنین یافتن دامنه مدل های نويز استفاده کرده ایم. روش بیشترین احتمال برآورد مولفه های وریانس کواریانس تنها زمانی به کار می رود که تابع توزیع مشاهدات معلوم باشد. در این بخش ما خود را به توزیع نرمال محدود می کنیم و روش بیشترین احتمال محدود شده را مطرح می کنیم:

$$y \sim N(Ax, Q_y), \quad Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \quad (15)$$

همانطور که در قبل مطرح شد، می توان مدل معادلات مشاهدات را به صورت مدل معادلات شرط نیز عنوان کرد:

<sup>۱</sup> Site Velocity

## ۵- آنالیز استرین

یکی از مهمترین کاربردهای شبکه‌های ژئودینامیک استفاده از سری‌های زمانی به منظور برآورد پارامترهای استرین می‌باشد. روش‌های مختلفی برای این منظور وجود دارد که در اینجا روش مورد نظر استفاده از گرادیان بردار جابجایی است. اما برای استفاده از این روش نیازمند انجام مثلث بندی و اصطلاحاً استفاده از روش المان محدود<sup>۲</sup> برای آنالیز استرین می‌باشیم.

با توجه به فصل چهارم کتاب مکانیک محیط‌های پیوسته Malvern تغییر شکل و جابجایی برای یک مولفه مختصاتی می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۲۴]:

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u + \varepsilon dx + \omega dx \quad (25)$$

$u$  بیانگر موقعیت فعلی نقطه و  $du$  بیانگر تغییرات نقطه در طول زمان مورد نظر است. این تغییرات شامل جابجایی‌ها و تغییر شکل‌ها می‌باشد که مشتقات جزئی، مولفه‌های جابجایی و کرنش و چرخش را برای ما تولید می‌کند.  $\varepsilon$  بیانگر کرنش‌های شبکه است که می‌تواند در سه بعد مختصاتی و حتی میان محوری باشد و  $\omega$  مولفه‌های چرخش در سه راستا را بیان می‌کند. بنابراین فرم کامل تر فرمول فوق برای هر مولفه مختصاتی به صورت زیر است:

$$u_x^i = u_x^0 + \varepsilon_{xx} dx_{i0} + \varepsilon_{xy} dy_{i0} + \varepsilon_{xz} dz_{i0} + \omega_{12} dy_{i0} - \omega_{13} dz_{i0} \quad (26)$$

در این فرمول  $i$  بیانگر سری زمانی و اندیس صفر بیانگر مولفه‌های مرتبط با مرکز ثقل هر المان بوجود آمده است،  $u_x^0$  بیانگر جابجایی مرکز ثقل در راستای محور  $x$  و  $dx_{i0} = x_i - x_0$  فاصله هر نقطه از مرکز ثقل المان،  $\varepsilon_{xx}$  المان کرنش نرمال در راستای محور  $x$ ،  $\varepsilon_{xy}$  کرنش برشی در صفحه افق و  $\omega$ ها مولفه‌های چرخش در راستای صفحات مختصاتی می‌باشند. به منظور راحتی، فرم ماتریسی معادلات فوق را می‌نویسیم [۲۴]:

لازم به ذکر است که معادله فوق، معادلات مشاهدات است نه اپراتور امید؛ که در آن  $I_r$  ماتریس همانی برای  $r$  سری زمانی و  $Y = [y_1 \dots y_r]$  سری زمانی از مشاهدات و  $X = [x_1 \dots x_r]$  سری زمانی از مجهولات می‌باشد و ماتریس کواریانس به شکل زیر خواهیم داشت:

$$D(\text{vec}(Y)) = \sum_{k=1}^p \Sigma \otimes Q \quad (20)$$

$$Q = \sum_{k=1}^p s_k Q_k \quad (21)$$

برای برآورد ماتریس کواریانس برآوردگرها، مجهول مورد نظر ما  $\Sigma$  می‌باشد که از آنجا که دسترسی به آن ممکن نیست، در واقع بجای آن  $\hat{\Sigma}$  را برآورد می‌کنیم. برآوردگر کمترین وریانس ماتریس مجهول  $\Sigma$  توسط LS-VCE را به صورت زیر خواهیم داشت [۲۲]، [۱۱]، [۱۹] و [۲۳]:

$$\hat{\Sigma} = \frac{\hat{E}^T Q^{-1} \hat{E}}{m-n} \text{ with } \hat{E} = P_A^T Y = [\hat{e}_1 \hat{e}_2 \dots \hat{e}_r] \quad (22)$$

برای مدل خطی چندمتغیره ما تنها احتیاج به جایگزینی ترم‌ها در معادلات ۱۲ و ۱۳ داریم. ترم‌ها در معادلات ۱۲ و ۱۳ طوری هستند که داریم:

$$\text{vec}(\hat{E}) \rightarrow \hat{e}, \Sigma \otimes Q \rightarrow Q_y$$

$$\Sigma \otimes Q_k \rightarrow Q_k, I \otimes P_A^{\perp} \rightarrow P_A^{\perp}$$

بعد از یک عملیات جبری  $\hat{s} = N^{-1} l$  ( $S$  از معادله ۲۱ بدست آمده است) را به صورت زیر خواهیم داشت [۲۲]:

$$n_{kl} = \frac{r}{2} \text{tr}(Q^{-1} P_A^{\perp} Q_k Q^{-1} P_A^{\perp} Q_l) \quad (23)$$

$$l_k = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{E}^T Q^{-1} Q_k Q^{-1} \hat{E} \Sigma^{-1}) \quad (24)$$

<sup>۲</sup> Finite Element

$$\begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^0 \\ u_y^0 \\ u_z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_{i0} \\ dy_{i0} \\ dz_{i0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_{i0} \\ dy_{i0} \\ dz_{i0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

فوق در صورتیکه مختصات سه بعدی شبکه های GPS را مثلث بندی کرده و به عبارت دیگر به المان های کوچکتر تقسیم کنیم، معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} u_{x^1}^i \\ u_{y^1}^i \\ u_{z^1}^i \\ \dots \\ u_{z^4}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_{0^1}^i & dy_{0^1}^i & dz_{0^1}^i & 0 & 0 & 0 & dy_{0^1}^i & -dz_{0^1}^i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dx_{0^1}^i & 0 & dy_{0^1}^i & dz_{0^1}^i & 0 & -dx_{0^1}^i & 0 & dz_{0^1}^i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dx_{0^1}^i & 0 & dy_{0^1}^i & dz_{0^1}^i & 0 & -dx_{0^1}^i & -dy_{0^1}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dx_{0^4}^i & 0 & dy_{0^4}^i & dz_{0^4}^i & 0 & -dx_{0^4}^i & -dy_{0^4}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^0, u_y^0, u_z^0 \\ e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} \\ e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} \\ w_{12}, w_{13}, w_{23} \end{bmatrix} \quad (28)$$

کواریانس نرخ جابجائی ها در تعیین دقت پارامترهای استرین احتیاج است. به عنوان مثال هرگاه دومین ستون ماتریس ضرایب در معادله ۲۸ مربوط به نرخ جابجائی ها باشد، ماتریس کواریانس نرخ جابجائی ها برای سری های مختلف بصورت زیر است:

$$Q_u = D(u) = \Sigma \otimes (A^T Q^{-1} A)^{-1} \quad (30)$$

به ازای هر چهار وجهی، از عناصر مشترک در ۱۲ سطر و ۱۲ ستون این ماتریس (مربوط به ۴ نقطه) استفاده می شود. برای انجام آنالیز نویز، نیازمند در نظر گرفتن مدل آماری به صورت  $Q_y = \sigma_w I + \sigma_f Q_f + \sigma_{rw} Q_{rw}$  می باشیم که ترم اول بیانگر همان نویز سفید و ترم دوم ماتریس کوفاکتور فلیکر و وریانس آن و ترم سوم ماتریس کوفاکتور رندم واک و وریانس آن می باشد (مطابق با آنچه در بخش ۳-۱ مطرح شد). ماتریس کوفاکتور فلیکر طبق فرمتی که Zhang و همکاران در سال ۱۹۹۷ تعریف کرده اند مورد استفاده قرار گرفته است [۱] و ماتریس رندم واک مطابق با فرمتی های مورد استفاده توسط Jonson و همکاران در سال ۱۹۹۴ و Mao و همکاران در سال ۱۹۹۹ و Zhang و همکاران در سال ۱۹۹۷ در نظر گرفته شد [۲۵][۱][۳].

در این مرحله نیاز به پارامتری داریم که مقایسه میان حالت های مختلف از معناداری استرین ها را برای ما معرفی

از آنجا که مشاهدات ما سری های زمانی از مختصات نقاط یک شبکه و مجهولات ما مولفه های تانسور این شبکه می باشند، لذا فرم ماتریسی المان محدود معادلات

همانطور که انتظار می رود برای هر چهار وجهی معادله ای مستقل وجود دارد و برای هر کدام از المان ها، بنابر المان محدود، تعداد معادلات و مجهولات برابر است. با بدست آمدن مولفه های تانسور در تمامی چهاروجهی ها یک نرخ کلی از جابجایی شبکه و همچنین کرنش ها و چرخش های شبکه طی سری زمانی مربوطه بدست می آید. بنابراین برای هر المان چهاروجهی سه المان جابجایی مرکز ثقل، سه مولفه کرنش نرمال، سه مولفه کرنش برشی و سه مولفه چرخش خواهیم داشت.

## ۶- برآورد واقع بینانه پارامترهای استرین و دقت های مربوطه

همان قدر که جابجایی های شبکه های ژئودینامیک برای ژئودینامیک اهمیت دارد، دقت های این جابجایی ها نیز مهم هستند. این دقت ها علاوه بر مفهوم آماری برای استرین ها می تواند بیانگر میزان معناداری استرین های مربوطه باشد. ماتریس کواریانس مجهولات بصورت زیر محاسبه می شود [۲۲]:

$$D(\text{vec}(\hat{X})) = \Sigma \otimes (A^T Q^{-1} A)^{-1} \quad (29)$$

از میان مجهولات، بردار  $X$  تنها نرخ جابجائی ها در آنالیز استرین استفاده شده است. بنابراین ماتریس

## ۷- نتایج عددی و توضیحات

مطالعات موردی برای این پروژه، با استفاده از داده‌های آذربایجان و شبکه کالیفرنیا انجام شده است. قبل از هر چیز لازم به ذکر است که دلیل استفاده از این دو شبکه، برخی تفاوت‌های آنها می‌باشد که هدف این پروژه بررسی تاثیر این تفاوت‌ها در نتایج نهایی است. در جدول ۱ به طور خلاصه یک مقایسه کلی میان دو شبکه را داریم.

کند. برای این منظور از استرین نرمال شده در دو حالت نویز سفید و نویز واقع بینانه استفاده می‌کنیم. ممکن است این سوال پیش بیاید که چرا از آنالیز نویز واقع بینانه تک مولفه استفاده نشده است؟ به این دلیل که در آنالیز استرین با هر سه مولفه از هر سری زمانی درگیر هستیم، لذا استفاده از آنالیز چند متغیره مناسب می‌باشد. از آنجا که برای محاسبه معناداری استرین‌ها از آنالیز نویز چند متغیره واقع بینانه استفاده شده است، لذا به آن برآورد واقع بینانه پارامترهای استرین گفته می‌شود.

جدول ۱- مقایسه دو شبکه مورد بررسی در این تحقیق، آذربایجان و کالیفرنیا؛ همانطور که پیداست تفاوت عمده این دو شبکه در طول سری زمانی خام و طول سری همزمان آنهاست.

پارامتر	آذربایجان	کالیفرنیا
متوسط فاصله بین ایستگاهی	۲۰ کیلومتر	۲۰ کیلومتر
طول سری زمانی خام	۲۰۱۰ - ۲۰۰۵	۲۰۱۱ - ۱۹۹۶
طول سری زمانی همسان	۵۰۹ روز	۳۰۵۲ روز
نوع ایستگاه‌ها	پیوسته دائمی	IGS
تعداد ایستگاه‌ها	۲۵	۳۳
موقعیت جغرافیایی کلی شبکه	$mean(\varphi) = 30.3414$	$mean(\varphi) = 34.0555$
	$mean(\lambda) = 82.7423$	$mean(\lambda) = -117.9033$

بین سالهای ۲۰۰۶ تا ۲۰۰۷ چندین ماه جمع آوری دیتا انجام نشده است و لازم به ذکر است که چنین مواردی در اغلب ایستگاه‌های این شبکه دیده می‌شود. شبکه آذربایجان علاوه بر اینکه طول سری بسیار کمتری دارد در تمامی ایستگاه‌ها، گپ‌های ناشی از عدم برداشت ناگهانی دیتا دیده می‌شود و این در حالی است که شبکه کالیفرنیا علاوه بر ۳ برابر بودن طول داده‌ها شبکه‌ای بسیار منظم از لحاظ جمع آوری داده محسوب می‌شود. جدای از موارد مذکور طول سری‌های زمانی آذربایجان نزدیک به ۶ سال است و این در حالی است که شبکه کالیفرنیا بیش از ۱۵ سال جمع آوری دیتای GPS داشته است. همچنین لازم به ذکر است که مولفه قائم جدا از ضعف ارتفاعی GPS، در کالیفرنیا وضعیت بهتری را دارد.

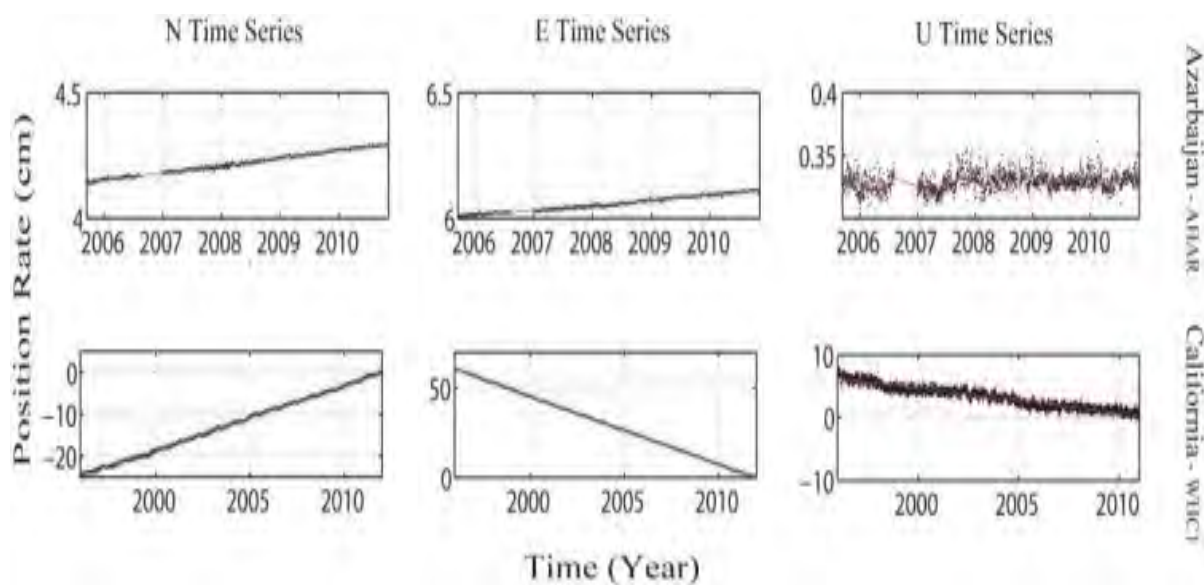
حال برای مقایسه بیشتر بخش‌های تئوری مذکور را برای هر کدام از شبکه‌ها بررسی می‌کنیم (بدیهی است که نتایج ذیل به صورت خلاصه آورده شده است).

### ۷-۱- بررسی سری‌های زمانی ایستگاه‌های GPS

اشکال زیر هر کدام یکی از ایستگاه‌های شبکه‌های مذکور را نشان می‌دهند و بیانگر وضعیت سری زمانی دو شبکه هستند.

در شکل ۱، سه سری زمانی بالا بیانگر وضعیت سری زمانی یکی از ایستگاه‌های شبکه آذربایجان در سه مولفه شمال و شرق و قائم است و سری‌های زمانی پایین مربوط به یکی از ایستگاه‌ها در شبکه کالیفرنیا است. همانطور که از اشکال پیداست در شبکه آذربایجان سری‌های زمانی نظم کمتری نسبت به شبکه کالیفرنیا دارند، به عنوان مثال در ایستگاه مورد بررسی از آذربایجان (AHAR) در



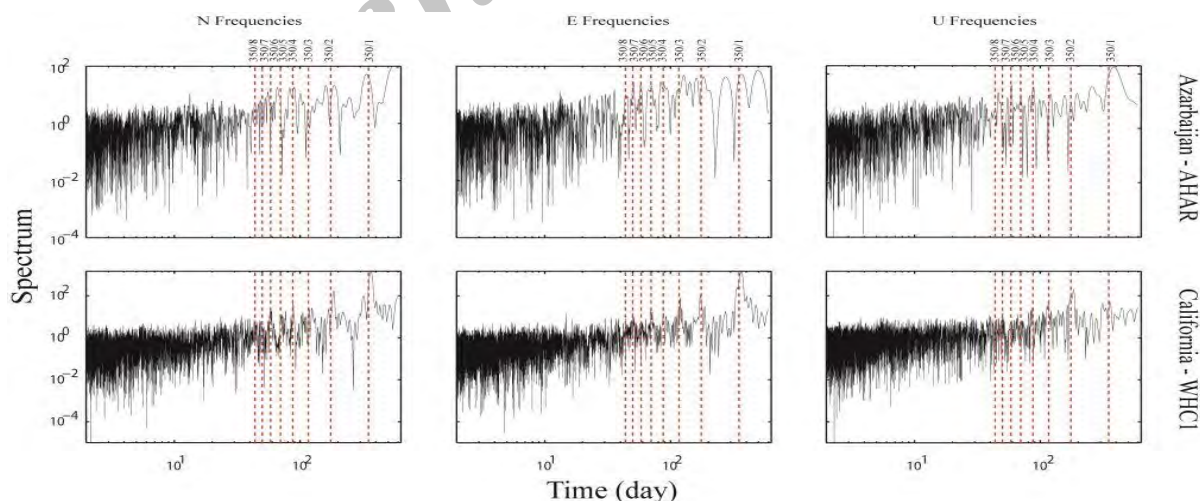


شکل ۱- بررسی سری زمانی یک ایستگاه از هر شبکه؛ سه شکل بالا ایستگاه AHAR از آذربایجان و سه شکل پایین ایستگاه WHC1 از کالیفرنیا را نشان می‌دهند. نقاط سیاه سری زمانی و خط قرمز کمترین مربعات برازش شده به این سری می‌باشند. این نتایج در سه مولفه شمال و شرق و قائم موجود است که در اینجا به ترتیب از چپ به راست قابل مشاهده است.

به نتایجی رسیدیم که اشکال ذیل، از هر شبکه یک ایستگاه را به طور مثال نشان می‌دهد و می‌توان گفت سایر ایستگاه‌های دیگر شبکه‌ها نیز با تقریب خوبی به همین صورت می‌باشند.

## ۷-۲- بررسی مربوط به هارمونیک‌های سری‌های زمانی

اینکه هر سری زمانی از چه هارمونیک‌هایی در طول سری خود پیروی می‌کند مستلزم انجام آنالیز LS-HE و PS می‌باشد. در این قسمت ما با استفاده از فرمول‌های ۱ و ۴



شکل ۲- بررسی هارمونیک‌ها و طیف‌های یک ایستگاه از هر شبکه در حالت لگاریتمی؛ سه شکل بالا ایستگاه AHAR از آذربایجان و سه شکل پایین ایستگاه WHC1 از کالیفرنیا را نشان می‌دهد. اعداد روی گراف‌های حاضر هارمونیک‌های قابل انتظار از بخش ۱-۲ و ۲-۲ هستند. این نتایج در سه مولفه شمال و شرق و قائم موجود است که در اینجا به ترتیب از چپ به راست قابل مشاهده می‌باشند.

تا شبکه نشان دهد که در کدام هارمونیک‌ها دارای پیک قاطع‌تری می‌باشد. این مسئله همچنین کمک می‌کند تا اگر هارمونیکی در شبکه‌ای موجود بوده و دارای پیک کمتری باشد در حالت چند متغیره خود را بهتر نشان دهد.

در شکل ۳، شکل چپ مربوط به شبکه کالیفرنیا و سمت راست مربوط به شبکه آذربایجان است. در این اشکال برای مقایسه، اطلاعات هر هارمونیک به صورت مختصاتی در کنار می‌توان میزان طیف هر هارمونیک را از محور قائم در نظر گرفت و این در حالی است که هارمونیک‌های مهمتر با خطوط قرمز نمایش داده است. این مسئله به قیاس بیشتر کمک می‌کند، چراکه برای هارمونیک با پریودهای بلندتر میزان طیف در شبکه کالیفرنیا بسیار بیشتر از شبکه آذربایجان است و برای هارمونیک با فرکانس‌های بیشتر این تفاوت چندان بالا نیست. مانند بررسی تک متغیره، شبکه کالیفرنیا در نشان دادن هارمونیک‌ها توانایی بیشتری را نشان داده است. این امر می‌تواند معلول سری زمانی منظم‌تر و طولانی‌تر این شبکه باشد.

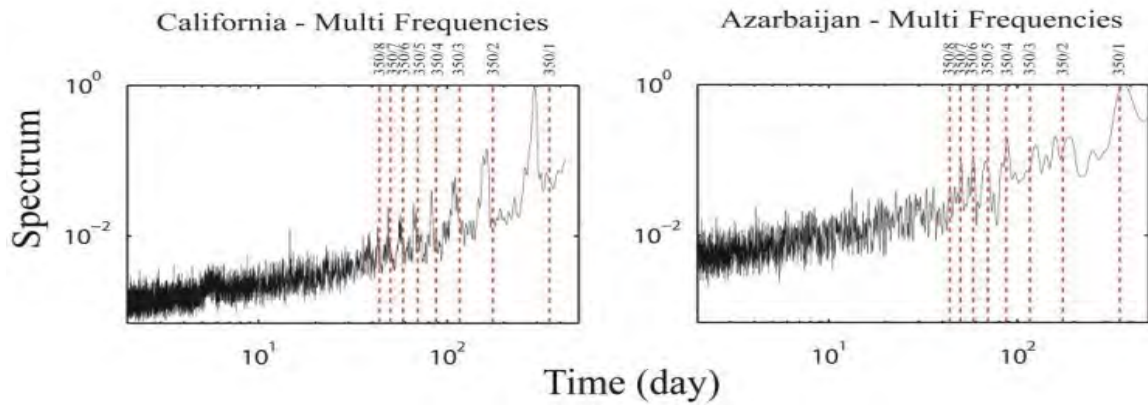
شبهه شکل ۱، در شکل ۲ نیز سه شکل بالا بیانگر وضعیت هارمونیک‌ها در سه مولفه از شبکه آذربایجان و سه شکل پایین مربوط به شبکه کالیفرنیا در حالت لگاریتمی است. فرکانس‌های قابل انتظار از سری‌های زمانی GPS طبق کارهای قبلی ([26] و [۱۲]) هشت کسر اول از ۳۵۰ می‌باشند. برای تفسیر چنین هارمونیک‌هایی می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد:

[۲۷] Agnew and Larson نشان دادند که تکرار زمانی صورت فلکی GPS<sup>۲</sup> در ایستگاه‌های دائم ۲۴۷ ثانیه کمتر از یک روز خورشیدی است، در صورتیکه برآوردهای موقعیت روزانه GPS برپایه یک روز خورشیدی است. این اختلاف خود را به صورت یک فرکانس ۰.۰۰۲۸۵۶۵ سیکل/روز یا ۱.۰۴۳۳۳ سیکل/سال (۳۵۰ روز) نشان می‌دهد. پریودهای یافت شده، مرتبط با این فرکانس و هارمونیک‌های آن است. همچنین تغییرات پریودیک دامنه باقیمانده‌ها با بیشترین مقداری که در فصول برایشان پیش می‌آید، بیانگر نقص مدلسازی مدار است [۲۸] و [۲۹]. جدای از این موارد پریودهای یافته شده مطابق با یک سال فلکی GPS نیز می‌باشند [۳۰]. در شبکه کالیفرنیا هارمونیک‌های قابل انتظار خصوصا در مولفه‌های شمال و شرق دیده می‌شوند. اما پیک قابل توجهی که در فرکانس سالانه آنها وجود دارد سبب آن می‌شود که پیک هارمونیک‌ها با پریود کمتر، کوچکتر دیده شود. در شبکه آذربایجان برخی از هارمونیک‌های قابل انتظار در سری‌های زمانی دیده نمی‌شوند و این درحالیست که هارمونیک‌های یافت شده در این شبکه نیز با پیک کمتری نسبت به شبکه کالیفرنیا ظاهر شده‌اند. اما باز در مولفه قائم ضعف GPS مجددا در بررسی هارمونیک‌ها خود را نشان می‌دهد، اگرچه اغلب هارمونیک‌ها موجود می‌باشند. به هر حال اشکال فوق، مربوط به بررسی هارمونیک تک متغیره می‌باشد و مسلما بررسی چند متغیره هارمونیک‌ها نتایج بهتری را خواهد داد.

### ۷-۳- بررسی هارمونیک چندمتغیره

در این بخش نتایج مربوط به تمامی ایستگاه‌ها و تمامی مولفه‌های هر شبکه را با یکدیگر همزمان بررسی کردیم

<sup>۲</sup> GPS Constellation



شکل ۳- بررسی هارمونیک‌ها و طیف‌های تمامی ایستگاه‌های موجود از هر شبکه در هر سه مولفه در حالت لگاریتمی؛ شکل سمت چپ شبکه کالیفرنیا و شکل سمت راست شبکه آذربایجان را در این بررسی نشان می‌دهد. اعداد روی گراف‌های حاضر هارمونیک‌های قابل انتظار از بخش ۲-۱ و ۲-۲ را به همراه طیف‌هایشان نشان می‌دهد.

عبارت دیگر پراکنش برای شبکه کالیفرنیا بیشتر از شبکه آذربایجان است.

جداول ۲ و ۳، به ترتیب مربوط آنالیز نویز دو شبکه و بیشترین احتمال مربوط به آنها است. در جدول اول وریانس مدل دوم برای هر دو شبکه بهتر از دو مدل دیگر است و می‌توان گفت تفاوت نسبتا بیشتری در بین اعداد، در نتایج مربوط به شبکه کالیفرنیا دیده می‌شود. در جدول ۲، علاوه بر اینکه آماره بیشترین احتمال برای مدل دوم در هر دو شبکه بیشتر است، بازهم می‌توان گفت تفاوت مقادیر برای شبکه کالیفرنیا بیشتر است. به هر حال همان طور که پیش بینی می‌شد ترکیبی از نویز سفید و نویز فلیکر مدل نویز مناسب برای هر دو شبکه است. با توجه به مطالب فوق حال مدل مورد نظر برای آنالیز نویز چند متغیره به صورت  $Q = \lambda_w I + \lambda_f Q_f$  تعریف می‌شود که  $Q = \sum_{k=1}^p s_k Q_k$  و  $D(\text{vec}(Y)) = \Sigma \otimes Q$  است و  $\lambda_w$  و  $\lambda_f$  توسط LS-VCE و طبق فرمول ۲۲ برآورد می‌شوند [۲۲].

#### ۷-۴- بررسی آنالیز نویز سری‌های زمانی GPS

مقایسه بعدی مربوط به مولفه‌های آنالیز نویز واقع بینانه و وریانس‌های آنهاست. در این مرحله علاوه بر در نظر گرفتن مدل ریاضی مطابق بخش ۶، سه مدل تصادفی به صورت الف) مدل نویز سفید، ب) مدل نویز ترکیبی سفید و فلیکر و ج) مدل نویز ترکیبی سفید و رندم واک در نظر گرفته-ایم. نتایج بررسی‌ها برای یک مولفه از یک ایستگاه از هر شبکه طبق جداول زیر می‌باشد. در شبکه آذربایجان مولفه‌های مربوط به مدل دوم دارای وریانس بهتر و احتمال بیشتری است. بنابراین مدل نویز واقع بینانه منتسب به این شبکه مدل مذکور است. این مسئله برای شبکه کالیفرنیا نیز صادق است؛ طوریکه در تمامی ایستگاه‌ها مولفه وریانس این مدل بهتر و احتمال این مدل بیشتر است. اما به نظر می‌رسد که این مقادیر برای شبکه کالیفرنیا واقع بینانه‌تر باشد، چراکه برای برخی از ایستگاه-های شبکه آذربایجان تفاوت میان مقادیر سه مدل با یکدیگر کمتر از همین مقادیر برای ایستگاه‌های کالیفرنیا است. همچنین مقادیر آماره بیشترین احتمال برای سه مدل تصادفی مذکور برای شبکه آذربایجان مجدداً برای برخی ایستگاه‌ها تفاوت مقدار کمی دارند و برای شبکه کالیفرنیا این مقادیر واقع بینانه‌تر به نظر می‌رسد. به

جدول ۲- نتایج آنالیز نويز با سه مدل متفاوت برای ایستگاه AHAR از شبکه آذربایجانو ایستگاه WHC1 از شبکه کالیفرنیا. مدل نويز اول تنها شامل نويز سفید و مدل نويز دوم ترکیبی از نويز سفید و نويز فلیکر و مدل سوم ترکیبی از نويز سفید و رندم واک می‌باشند. همانطورکه دیده می‌شود مدل دوم، مدل نويز واقع بینانه برای این دو شبکه است.

WHC1		AHAR		ایستگاه	
دقت $\hat{\sigma}_\delta$	وریانس $\hat{\sigma}$	دقت $\hat{\sigma}_\delta$	وریانس $\hat{\sigma}$	مولفه	مدل
۰,۰۰۶۴۲۲۶	۱,۸۴۰۲	۳,۳۹۵۱e - ۰۰۶	۰,۰۳۰۹۳۵	N	مدل نويز اول: نويز سفید
۰,۰۰۶۳۲۲	۱,۸۲۷۵	۳,۷۱۱۲e - ۰۰۶	۰,۰۳۲۳۶۳	E	
۰,۰۴۰۸۳۷	۴,۶۴۳۵	۱,۲۵۰۳e - ۰۰۵	۰,۰۵۹۳۳۸	H	
۰,۰۰۶۲۲۳۳	۱,۴۹۹۹	۴,۹۱۵۸e - ۰۰۶	۰,۰۲۹۹۴۵	N	مدل نويز دوم: نويز سفید+نويز فلیکر
۰,۰۰۶۳۰۶۷	۱,۵۰۵	۳,۶۵۶۲e - ۰۰۶	۰,۰۲۵۹۱۳	E	
۰,۰۴۶۱۳۹	۴,۲۱۲۳	۲,۵۲۹۴e - ۰۰۵	۰,۰۶۷۱۳۶	H	
۰,۰۲۰۲۶۵	۱,۷۵۸	۱,۶۱۷۳e - ۰۰۵	۰,۰۳۷۰۰۵	N	مدل نويز سوم: نويز سفید+نويز رندم واک
۰,۰۲۰۵۵۲	۱,۷۸۷	۱,۲۰۲۹e - ۰۰۵	۰,۰۳۱۶۷۲	E	
۰,۱۴۸۰۷	۴,۴۶۷۹	۸,۳۰۹۷e - ۰۰۵	۰,۰۸۶۹۸۷	H	
۰,۰۰۲۹۹۲۳	۱,۱۸۵۲	۲,۰۷۱۳e - ۰۰۶	۰,۰۲۲۱۴۶	N	مدل نويز سوم: نويز سفید+نويز رندم واک
۰,۰۰۲۹۶۵۱	۱,۱۷۸	۱,۶۰۱e - ۰۰۶	۰,۰۱۹۸۵۱	E	
۰,۰۲۶۲۸	۳,۵۸۱۸	۱,۰۱۷۶e - ۰۰۵	۰,۰۴۸۸۹	H	
۰,۱۹۲۵۳	۴,۶۹۶۲	۰,۰۰۰۲۰۶۴۵	۰,۱۱۹۱۷	N	مدل نويز سوم: نويز سفید+نويز رندم واک
۰,۲۰۱۵۸	۴,۸۵۵۳	۰,۰۰۰۱۲۰۸۷	۰,۰۸۶۲۷۱	E	
۱,۰۲۳۴	۹,۹۱۸۱	۰,۰۰۱۰۵۶۷	۰,۲۷۲۰۵	H	

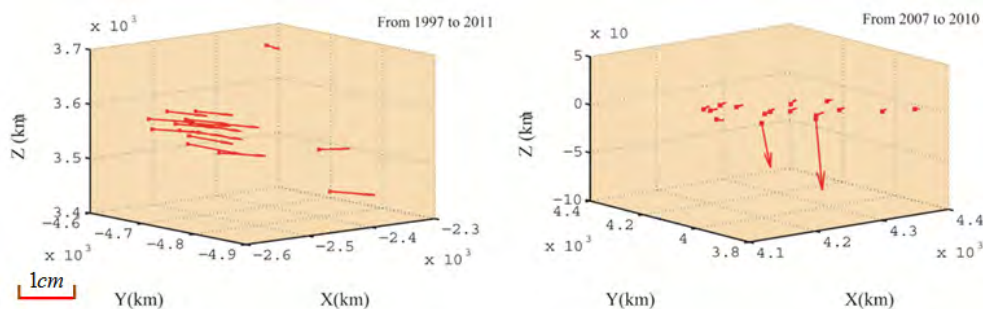
جدول ۳- نتایج آماره بیشترین احتمال برای سه مدل متفاوت از ایستگاه AHAR از شبکه آذربایجان و ایستگاه WHC1 از شبکه کالیفرنیا. مدل نويز اول تنها شامل نويز سفید و مدل نويز دوم ترکیبی از نويز سفید و نويز فلیکر و مدل سوم ترکیبی از نويز سفید و رندم واک می‌باشند. همانطورکه دیده می‌شود احتمال مدل دوم برای دو شبکه بیشتر است.

WHC1		AHAR		ایستگاه	
بیشترین احتمال		بیشترین احتمال	مولفه	مدل	
۱۵۴۰,۷۱۲۱		۷۰۴۳,۸۹۸۶	N	مدل نويز اول	
۱۵۸۵,۴۷۷۶		۶۹۸۸,۳۵۱۷	E	نويز سفید	
-۳۶۳۸,۲۴۰۹		۵۹۸۲,۱۲۲۹	H		
۳۴۷۰,۵۸۴۲		۷۳۶۳,۸۲۲۷	N	مدل نويز دوم	
۳۵۰۱,۳۳۴۶		۷۶۰۶,۲۱۹	E	نويز سفید+نويز فلیکر	
-۲۵۲۰,۱۲۰۷		۶۰۹۸,۲۰۸۴	H		
۳۴۰۸,۹۲۹		۷۳۳۹,۷۰۷۴	N	مدل نويز سوم	
۳۴۳۳,۷۶۰۳		۷۵۸۱,۷۳۷۷	E	نويز سفید+نويز رندم واک	
-۲۵۹۶,۷۱۸		۶۰۴۲,۶۴۷۶	H		

لازم به ذکر است از این بخش تا پایان تحقیق محدود به ایستگاه‌ها با داده‌هایی همسان (همزمان) شدیم که این مسئله برای آذربایجان ۱۶ ایستگاه با ۵۰۹ روز و برای کالیفرنیا ۱۷ ایستگاه با ۳۰۵۲ روز را به همراه داشت.

## ۷-۵- بررسی آنالیز استرین سری‌های زمانی GPS

با توجه به بخش ۵ و توسط فرمول ۲۸ آنالیز استرین برای دو شبکه انجام پذیرفت. در این بخش بردار سرعت مربوط به ایستگاه‌های مورد استفاده از هر شبکه مورد توجه است.



شکل ۴- بردارهای سرعت در دو شبکه کالیفرنیا (شکل سمت چپ) و آذربایجان (شکل سمت راست) در ایستگاه‌های دارای سری زمانی همزمان؛ شبکه کالیفرنیا جابجایی در راستای افق را نشان می‌دهد و شبکه آذربایجان تغییر شکل را نشان می‌دهد.

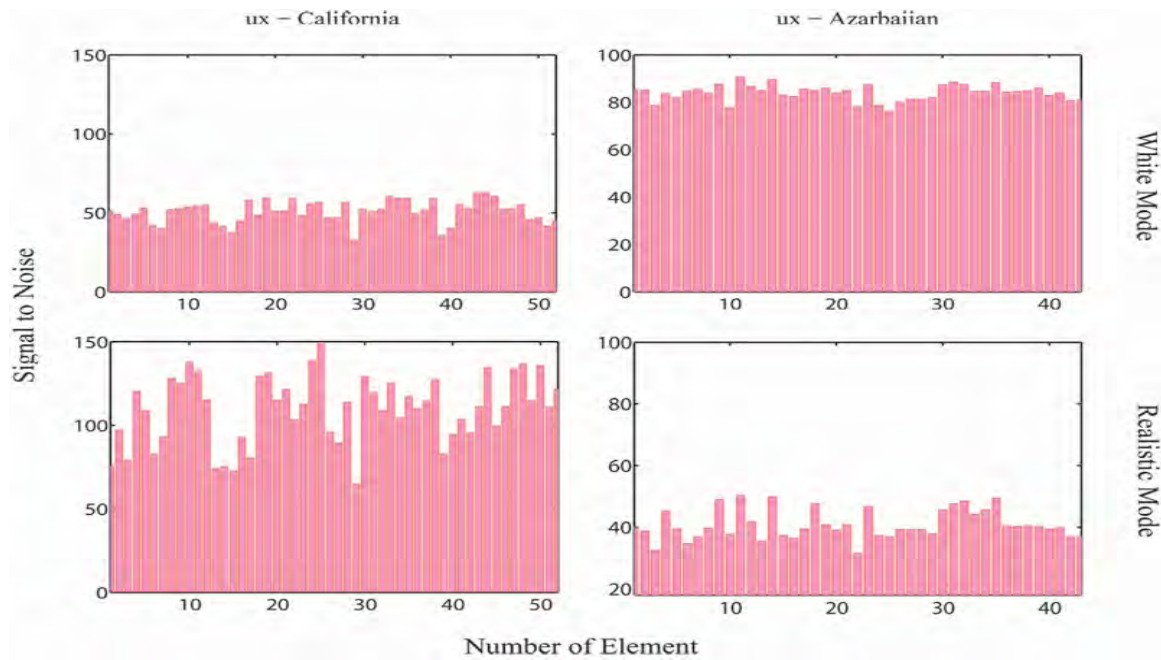
## ۷-۶- بررسی پارامترهای مولفه‌های کرنش و چرخش نرمال شده

در حقیقت هدف اصلی این تحقیق تمرکز بر روی پارامترهای استرین در حالت نرمال شده بود و دلیل این امر استفاده از مدل نوین واقع بینانه‌ای بود که برای هر شبکه بدست آمده بود. در اینجا برخی از پارامترهای مهم حاصل از بخش قبل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این بررسی مرتبط با میزان معناداری مولفه‌های بدست آمده در بخش قبل است. این معناداری در دو حالت نوین سفید و نوین واقع بینانه برای دو شبکه مورد بررسی قرار گرفته و نتایج به صورت زیر است.

### ۷-۶-۱- پارامتر نرمال شده جابجایی

جابجایی در راستای مولفه شمالی ( $N$ ):

شکل سمت چپ مربوط به شبکه کالیفرنیا و شکل سمت راست بردارهای سرعت در شبکه آذربایجان را نشان می‌دهد. در شبکه آذربایجان بردارهای سرعت بیانگر تغییر شکل شبکه در طی سری زمانی است. اما برای شبکه کالیفرنیا تغییر شکل در یک جهت و آن هم در راستای صفحه افق دیده می‌شود. به عبارت بهتر آنچه از بردارهای سرعت کالیفرنیا پیداست بیانگر یک جابجایی در صفحه افق است تا یک تغییر شکل. نتایج مذکور ابتدا یک پیش داوری را در آنالیز مولفه‌های کرنش و چرخش برای ما به همراه داشت و آن این است که انتظار می‌رود مولفه‌های جابجایی مرکز ثقل در شبکه کالیفرنیا نسبت به شبکه آذربایجان از مقدار بیشتری برخوردار باشند و عکس این نتایج برای مولفه‌های کرنش و چرخش نیز پیش بینی می‌شد. در نهایت دیده شد که پیش داوری مورد نظر درست بوده و پارامترهای جابجایی برای کالیفرنیا مقادیر بیشتر و مقادیر کرنش برای آذربایجان اندازه بیشتری را به خود اختصاص می‌دادند.



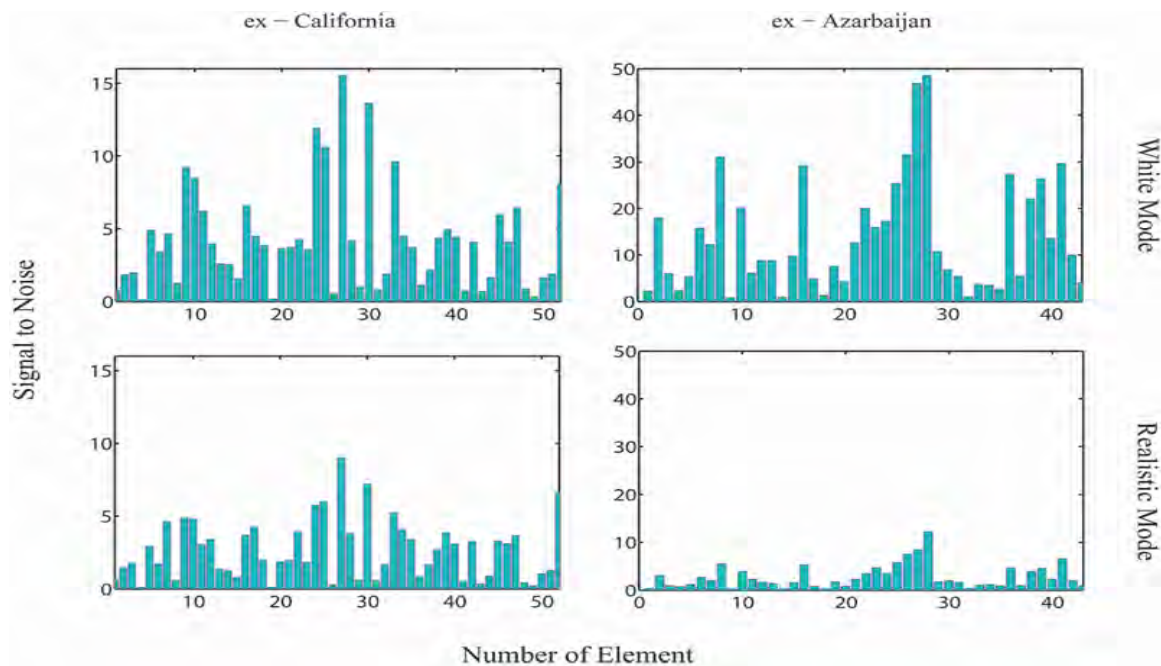
شکل ۵- بررسی پارامتر جابجایی نرمال شده با دو مدل نویز سفید و نویز واقع بینانه، اشکال مربوط به مدل نویز سفید در ردیف بالا و اشکال مربوط به نویز واقع بینانه در ردیف پایین قرار دارد. مانند قبل اشکال سمت چپ شبکه کالیفرنیا و اشکال سمت راست شبکه آذربایجان را نشان می‌دهد.

است که به ترتیب در بخش‌های ۷-۱ و ۷-۲ و ۷-۳ نتیجه شده بودند. به هر حال شبکه منظم‌تر و بلندتر می‌تواند پارامترهای مطمئن‌تری را در آنالیزهای مربوط به سری-های زمانی ارائه دهد و این در صورتی است که نویز واقع بینانه شبکه را استفاده کنیم و به نویز سفید که تنها بخشی از نویز واقع بینانه است اکتفا نکنیم.

#### ۷-۶-۲- پارامترهای نرمال شده کرنش

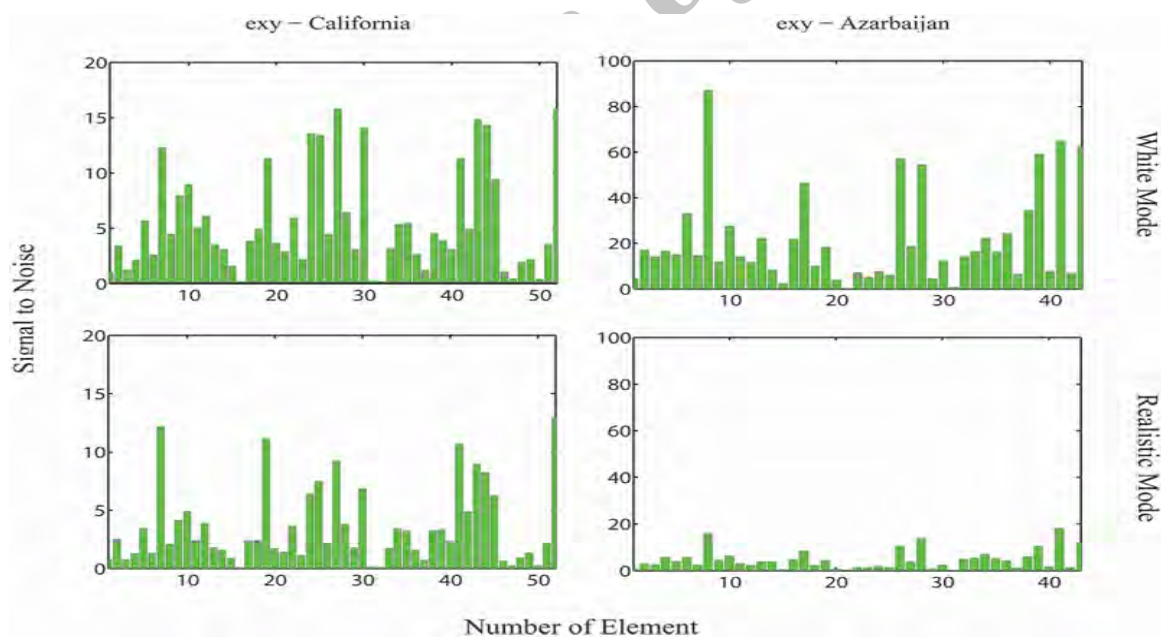
پارامتر کرنش نرمال در راستای مولفه شمالی ( $N$ ):

در شکل ۵، اشکال سمت چپ مربوط به شبکه کالیفرنیا و سمت راست برای شبکه آذربایجان است. همان‌طور که پیداست در حالت نویز سفید معناداری بیشتری را برای شبکه آذربایجان داریم ولی با تفاوت بسیار زیادی این معناداری برای حالت واقع بینانه برعکس می‌شود. با توجه به اینکه این نتایج با نتایج بخش قبل که بردارهای سرعت را نشان می‌داد هم تراز است و همچنین با توجه به اینکه مدل واقع بینانه مدلی تایید شده است، می‌توان این‌طور گفت که به نظر می‌رسد به طور کل معناداری آنالیز پارامترهای استرین در شبکه کالیفرنیا بیشتر است تا در شبکه آذربایجان و اینها همچنین نتایج یک سری زمانی بلندتر با گپ کمتر و هارمونیک‌های قابل انتظار



شکل ۶- بررسی پارامتر کرنش نرمال در راستای مولفه شمالی (N) نرمال شده با دو مدل نویز سفید و نویز واقع بینانه، اشکال مربوط به مدل نویز سفید در ردیف بالا و اشکال مربوط به نویز واقع بینانه در ردیف پایین قرار دارد. مانند قبل اشکال سمت چپ شبکه کالیفرنیا و اشکال سمت راست شبکه آذربایجان را نشان می‌دهد.

پارامتر کرنش برشی در راستای افق:



شکل ۷- بررسی پارامتر کرنش برشی افقی نرمال شده با دو مدل نویز سفید و نویز واقع بینانه، اشکال مربوط به مدل نویز سفید در ردیف بالا و اشکال مربوط به نویز واقع بینانه در ردیف پایین قرار دارد. مانند قبل اشکال سمت چپ شبکه کالیفرنیا و اشکال سمت راست شبکه آذربایجان را نشان می‌دهد.

که اولی بیانگر معناداری تغییر شکل در راستای محور x و دومی مرتبط با تغییر شکل در راستای افق در دو شبکه است، داریم که معناداری برای شبکه آذربایجان با شدت زیادی برای زمانیکه از نویز واقع بینانه استفاده کرده‌ایم

بررسی معناداری پارامترهای کرنش نرمال و برشی برای دو شبکه به ترتیب در اشکال ۶ و ۷ قابل مشاهده است. مجدداً اشکال سمت چپ مربوط به شبکه کالیفرنیا و سمت راست برای شبکه آذربایجان است. در این اشکال

باشد و همچنین پریود کلی این سری‌ها خصوصا در داده‌های همزمان بیش از شش بار از کالیفرنیا کمتر است. همچنین هارمونیک سنجی این شبکه تمامی هارمونیک‌های قابل انتظار را حتی در حالت چندمتغیره نشان نمی‌داد و علاوه بر این، هارمونیک‌های موجود نیز دارای طیفی به بزرگی هارمونیک‌های کالیفرنیا نبودند. با توجه به اینکه کالیفرنیا همان طور که در شکل ۴ دیده شد بیشتر دارای جابجایی است تا تغییر شکل و آذربایجان بیشتر تغییرشکل دارد تا جابجایی، اما دیده شد که برای کالیفرنیا در پارامترهای مربوط به جابجایی، معناداری بیشتری را در حالت استفاده از نویز واقع بینانه نسبت به نویز سفید داشتیم، این انتظار می‌رفت که برای پارامترهای کرنش نیز این اتفاق برای آذربایجان حاصل شود، اما نه تنها چنین نشد بلکه معناداری در استفاده از نویز واقع بینانه کاهش پیدا کرد. بنابراین می‌توان این اطمینان را داشت که برای آنالیز استرن مطمئن شبکه کالیفرنیا شرایط مساعدی دارد و شاید اگر شبکه آذربایجان برای نظم بیشتر در سری‌های زمانی (عدم وجود گپ و پرش و آفست) بر روی سخت‌افزارها و نرم‌افزارهای هر ایستگاه تمرکز بیشتری داشته باشد و همچنین اگر با همین تمرکز حداقل پنج سال دیگر از طول این سری‌های زمانی بگذرد، این شبکه نیز شرایط مساعد تری برای آنالیز استرن پیدا کند.

کم شده است و این در حالی است که این معناداری برای شبکه کالیفرنیا تغییر چندانی نکرده است. این مسئله باز می‌تواند بیانگر این باشد که شبکه آذربایجان برای مدل نویز واقع بینانه معناداری را کم می‌کند و دلیل این امر می‌تواند همان دلایلی باشد که در بخش ۷-۶-۱ ذکر شد.

## ۸- نتیجه‌گیری

با توجه به اشکال ۵ تا ۷، به نظر می‌رسد معناداری پارامترهای ماتریس استرن برای شبکه کالیفرنیا بیشتر از آذربایجان است. چراکه در اشکال مرتبط با مولفه جابجایی معناداری بیشتری برای کالیفرنیا در حالتی که از مدل نویز واقع بینانه استفاده کردیم (نسبت به استفاده از مدل نویز سفید)، بدست آمد. اما برای آذربایجان نه تنها در هیچکدام از مولفه‌ها معناداری بیشتری در حالت استفاده از مدل نویز واقع بینانه نداشتیم، بلکه در حالت استفاده از مدل نویز واقع بینانه معناداری با شدت بسیاری کاهش پیدا کرد. همان طور که در بخش‌های ۷-۳ و ۷-۲ و ۷-۱ دیده شد، سری زمانی کالیفرنیا علاوه بر اینکه پریود بلندتری دارد، دارای نظم بیشتری نیز می‌باشد. همچنین هارمونیک‌های قابل انتظار اغلب در بررسی هارمونیک تک متغیره و همگی در بررسی هارمونیک چندمتغیره برای کالیفرنیا دیده می‌شوند. از طرفی برای آذربایجان سری زمانی در تمامی ایستگاه‌ها دارای گپ و گاهی پرش می‌-

## مراجع

- [1] J. Zhang, Y. Bock, H. Johnson, P. Fang, S. Williams, J. Genrich, S. Wdowinski, and J. Behr, "Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates and site velocities," *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH-ALL SERIES*, vol. 102, pp. 18-18, 1997.
- [2] E. Calais, "Continuous GPS measurements across the Western Alps, 1996-1998," *Geophysical Journal International*, vol. 138, no. 1, pp. 221-230, 1999.
- [3] A. Mao, C. G. A. Harrison, and T. H. Dixon, "Noise in GPS coordinate time series," *Journal of Geophysical Research*, vol. 104, no. B2, pp. 2797-2816, 1999.
- [4] S. D. P. Williams, Y. Bock, P. Fang, P. Jamason, R. M. Nikolaidis, L. Prawirodirdjo, M. Miller, and D. J. Johnson, "Error analysis of continuous GPS position time series," *Journal of Geophysical Research*, vol. 109, no. B3, p. B03412, 2004.
- [5] Y. Bock, R. M. Nikolaidis, P. J. De Jonge, and M. Bevis, "Instantaneous geodetic positioning at medium distances with the Global Positioning System," *Journal of Geophysical Research*, vol. 105, no. B12, pp. 28223-28, 2000.
- [6] J. Langbein and Y. Bock, "High-rate real-time GPS network at Parkfield: Utility for detecting fault slip and seismic displacements," *Geophys. Res. Lett*, vol. 31, no. 15, p. L15S20, 2004.



- [7] F. Wyatt, "Displacement of surface monuments: horizontal motion," *Journal of Geophysical Research*, vol. 87, no. B2, pp. 979–989, 1982.
- [8] F. WYATT, "Displacement of surface monuments- Vertical motion," *Journal of Geophysical Research*, vol. 94, pp. 1655–1664, 1989.
- [9] F. K. Wyatt, H. Bolton, S. Bralla, and D. C. Agnew, "New designs of geodetic monuments for use with GPS," *Eos Trans. AGU*, vol. 70, pp. 1054–1055, 1989.
- [10] H. Johnson, D. C. Agnew, S. D. I. of G. University of California, P. Physics, and G. S. (US), *Correlated Noise in the Geodetic Time Series*. The University, 2000.
- [11] A. Amiri-Simkooei, "Least-Squares estimation of variance components, theory and GPS applications," Doctoral dissertation, Delft University of Technology, Netherlands, 2007.
- [12] A. R. Amiri-Simkooei, C. Tiberius, and P. J. G. Teunissen, "Assessment of noise in GPS coordinate time series: Methodology and results," *Journal of Geophysical Research*, vol. 112, no. B7, p. B07413, 2007.
- [13] P. J. G. Teunissen, *Adjustment theory*. Univ. Press, 2000.
- [14] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM review*, vol. 10, no. 4, pp. 422–437, 1968.
- [15] D. C. Agnew, "TttE TIME-DOMAIN BEHAVIOR OF POWER-LAW NOISES," *Geophysical research letters*, vol. 19, no. 4, pp. 333–336, 1992.
- [16] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. Wh Freeman, 1983.
- [17] B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance and dimension*. San Francisco, CA: Freeman, 1977.
- [18] S. D. P. Williams, "The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series," *Journal of Geodesy*, vol. 76, no. 9, pp. 483–494, 2003.
- [19] P. J. G. Teunissen and A. R. Amiri-Simkooei, "Least-squares variance component estimation," *Journal of Geodesy*, vol. 82, no. 2, pp. 65–82, 2008.
- [20] W. H. Press, *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*, vol. 1. Cambridge Univ Pr, 1992.
- [21] J. Van Loon, *Functional and stochastic modelling of satellite gravity data*. Nederlandse Commissie voor Geodesie, 2008.
- [22] A. R. Amiri-Simkooei, "Noise in multivariate GPS position time-series," *Journal of Geodesy*, vol. 83, no. 2, pp. 175–187, 2009.
- [23] B. Schaffrin, "Best invariant covariance component estimators and its application to the generalize multivariate adjustment of heterogeneous deformation observations," *Journal of Geodesy*, vol. 55, no. 1, pp. 73–85, 1981.
- [24] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. 1969.
- [25] H. O. Johnson, and F. K. Wyatt, "Geodetic network design for faultmechanics studies, Manuscr.," *Geophys. Res. Lett*, vol. 19, pp. 309– 323, 1994.
- [26] J. Ray, "Systematic errors in GPS position estimates," in *Presentation at IGS 2006 workshop, Darmstadt (available electronically at nng. esoc. esa. de/ws2006/ERRO6. pdf)*, 2006.
- [27] D. C. Agnew and K. M. Larson, "Finding the repeat times of the GPS constellation," *GPS Solutions*, vol. 11, no. 1, pp. 71–76, 2007.
- [28] C. Urschl, W. Gurtner, U. Hugentobler, S. Schaer, and G. Beutler, "Validation of GNSS orbits using SLR observations," in *IGS Workshop 2006, ESOC Darmstadt, Germany, session 11, 8– 12 May.*, 2006.
- [29] C. Urschl, W. Gurtner, U. Hugentobler, S. Schaer, and G. Beutler, "Validation of GNSS orbits using SLR observations," *Advances in Space Research*, vol. 36, no. 3, pp. 412–417, 2005.
- [30] G. Beutler, "Geodetic monitoring of the Earth and the role of geodetic theory in the age of space geodesy," in *VI Hotine–Marussi Symposium of Theoretical and Computational Geodesy: Challenge and Role of Modern Geodesy, Wuhan University, China, 29 May–2 June*, 2006.