

کاربرد صحیح کرنل در روش تک مرحله‌ای معکوس

علیرضا آزموده اردلان^۱، روح الله کریمی^۲، امیر عبادی^{۳*}

^۱ استاد گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

ardalan@ut.ac.ir

^۲ استادیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری - دانشگاه تفرش

rkarimy@ut.ac.ir

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران - کارشناس ناظر

میکروژئودزی سازمان نقشه‌برداری کشور

ebadi-a@ncc.org.ir

(تاریخ دریافت اردیبهشت ۱۳۹۲، تاریخ تصویب آذر ۱۳۹۲)

چکیده

استفاده از معادلات انتگرالی در روش‌های تعیین ژئوئید مانند وارون‌سازی تک مرحله‌ای بر مبنای مشتقات مرتبه اول انتگرال پواسن بیضوی برای انتقال شتاب گرانی در سطح زمین به پتانسیل گرانی بر روی بیضوی مرجع همواره مورد توجه ژئودزین‌ها بوده است. یکی از مشکلات عمده در حل عددی معادلات انتگرالی رزولوشن داده‌های ورودی است. در این پژوهش نشان داده شده است که رزولوشن مورد نیاز داده‌های ورودی گرانی در سطح زمین در وارون‌سازی تک مرحله‌ای به ارتفاع منطقه مورد محاسبه وابسته است، اما عکس این موضوع صادق نبوده و می‌تواند منجر به نتایج کاملاً اشتباهی شود. هم‌چنین با مطالعه رفتار کرنل انتگرال کافی بودن رزولوشن داده‌های ورودی گرانی برای وارون‌سازی تک مرحله‌ای بررسی شده و از طریق تغییر کرنل انتگرال جهت غلبه بر تاثیر ناسازگار کمبود رزولوشن داده‌های ورودی گرانی استفاده شده که نوآوری این تحقیق می‌باشد. برای بررسی عددی روش فوق، داده‌های گرانی واقعی در منطقه‌ای در غرب ایران مورد آزمایش قرار گرفته است که نتایج آن حاکی از موفقیت روش پیشنهادی در حل مشکل کمبود رزولوشن داده‌های ورودی گرانی در روش وارون‌سازی تک مرحله‌ای است.

واژگان کلیدی: وارون‌سازی تک مرحله‌ای، انتگرال آبل پواسن، رزولوشن داده‌ها، مساله معکوس، تعیین ژئوئید، کرنل اصلاح شده

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

از مهم‌ترین کاربردهای پتانسیل گرانی زمین در امور ژئودتیکی می‌توان به تعیین ژئوئید، شبه ژئوئید، یکسان‌سازی دیتوم‌های ارتفاعی و مدل‌سازی میدان گرانی اشاره نمود. از آنجا که پتانسیل گرانی به طور مستقیم قابل مشاهده نیست، یکی از روش‌های تعیین آن حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی بر مبنای مشاهدات گرانی می‌باشد. در فعالیت‌هایی چون تعیین ژئوئید که به پتانسیل گرانی بر روی بیضوی مرجع یا ژئوئید نیاز داریم حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی شامل مساله معکوس یا وارون سازی است که می‌تواند با روش‌های یک مرحله‌ای یا دو مرحله‌ای انجام شود. روش دو مرحله‌ای شامل دو قسمت جداگانه است: وارون سازی و انتقال به سمت پایین گرانی و تبدیل آن به پتانسیل گرانی، در حالی که در روش تک مرحله‌ای مراحل ذکر شده با هم ترکیب شده و در یک مرحله انجام می‌شوند. از روش‌های تک مرحله‌ای مستقیم می‌توان به Novak et al. (2001)، Novak and Heck (2002) و روش تک مرحله‌ای معکوس به Ardalan (2000) و Novak et al. (2001)، Novak and Heck (2002)، Novak (2003)، Ardalan and Alberts and Klees (2004)، Grafarend (2004)، Ardalan and Safari (2005) و Ardalan et al. (2010a)، et al. (2005) و Ardalan et al. (2010b) اشاره نمود.

معمولاً روش‌های تک مرحله‌ای و دو مرحله‌ای معکوس با معادلات انتگرالی فرمول نویسی می‌شوند که نسبت به مسائل خوش‌وضع دارای مشکلاتی چون ناپایداری، خطای برش و خطای گسسته‌سازی ناحیه انتگرال‌گیری هستند که به طور مفصل توسط Novak, Featherstone et al. (1998) و Huang (2002, et al (2001) و Alberts and Klees 2004 بررسی شده‌اند.

در مقاله حاضر در روش تک مرحله‌ای معکوس بر روی مساله جدیدی در حل عددی معادله انتگرالی مورد استفاده که تاکنون به آن پرداخته نشده است متمرکز شده‌ایم. تا کنون اردلان (۲۰۰۰) بر پایه تکنیک حذف-محاسبه-بازگشت و استفاده از حل معکوس مشتق اول انتگرال پواسن بیضوی در انتقال مقادیر گرانی روی سطح زمین به پتانسیل گرانی روی بیضوی مرجع روش تک مرحله‌ای معکوس را نشان داده است، سپس در تعیین ژئوئید ایران نیز توسط

اردلان-گرافارند (۲۰۰۴)، اردلان و صفری (۲۰۰۵) در تعیین بایاس دیتوم ارتفاعی ایران، صفری و همکاران (۲۰۰۵) در تعیین ژئوئید جدید ایران، اردلان و همکاران (۲۰۱۰) در تعیین بایاس دیتوم ارتفاعی فنلاند و اردلان و همکاران (۲۰۱۰) در تعیین شبه ژئوئید جنوب غرب فنلاند نیز به کار گرفته شده است. با بررسی روش ارائه شده توسط اردلان (۲۰۰۰)، متوجه شدیم که تغییرات کرنل انتگرال به عنوان تابعی از فاصله کروی از نقطه مورد محاسبه، وقتی ارتفاع نقطه محاسباتی به سمت مقادیر کوچک‌تر میل میکند خیلی سریع‌تر است. این موضوع وقتی کرنل انتگرال در همسایگی خیلی نزدیک نقطه محاسباتی تغییر علامت می‌دهد شرایط را حادتر می‌کند که این مشکل همان چیزی است که در کرنل انتگرال روش تک مرحله‌ای معکوس اتفاق می‌افتد. از دید نقطه انتگرال‌گیری به این معناست که با تغییر سریع تابع کرنل، ارزیابی معادله انتگرالی نیاز به نقاط نمونه‌برداری بیش‌تری در فاصله زمانی دارد. این موضوع یعنی داده گرانی متراکم‌تری در منطقه با ارتفاع کمتر برای ارزیابی صحیح معادله انتگرالی نیاز داریم، در نتیجه دو سوال مهم زیر پیش روی ما قرار می‌گیرد:

- ۱) چگونه می‌توان فهمید که در روش تک مرحله‌ای معکوس داده ورودی گرانی رزولوشن کافی را دارد؟
- ۲) وقتی رزولوشن داده ورودی کافی نیست چه باید کرد؟

سوال دوم از آن جهت اهمیت دارد که در عمل ما مجبوریم با داده ثقلی کار کنیم که هیچ نقشی در رزولوشن آن‌ها نداریم و پاسخ به سوال اول نیز راه‌کاری است که در این‌جا به آن می‌پردازیم. در بخش دوم مدل ریاضی روش تک مرحله‌ای معکوس را معرفی و فرمول‌های آن را بیان می‌کنیم. بخش سوم به پیاده سازی عددی در منطقه تست و نتایج عددی آن اختصاص دارد و در بخش آخر نیز نتیجه‌گیری خواهیم نمود.

۲- پیاده‌سازی ریاضی روش تک مرحله‌ای

معکوس

می‌دانیم آنامولی پتانسیل برابر است با تفاضل پتانسیل گرانی نرمال (U) از پتانسیل گرانی واقعی (W) که در فضای خارج زمین تابعی هارمونیک است یعنی در معادله لاپلاس صدق می‌کند. با حذف اثر جرم‌های توپوگرافی خارج

که $\eta_0 = \cosh a/\varepsilon$ نمایشی از سطح بیضوی مرجع $E_{a,b}^2$ با نیم قطر اطول a و نیم قطر اصغر b است و $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$ خروج از مرکزیت خطی است. حل BVP فوق منجر به معادله انتگرالی پواسن زیر می شود:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta) &= \frac{1}{S} \iint_{E_{a,b}^2} w(\varphi') \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0) \tilde{T}^L(\lambda', \varphi', \eta_0) dS' \quad (6) \end{aligned}$$

که در آن S مساحت بیضوی مرجع $E_{a,b}^2$ و $\mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)$ کرنل پواسن باقی مانده بیضوی و $w(\varphi')$ تابع وزن و dS' المان سطحی بیضوی است که از روابط زیر به دست می آیند (Ardalan 2000):

$$S = 4\pi a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{4a\varepsilon} \ln \frac{a+\varepsilon}{a-\varepsilon} \right) \quad (7)$$

$$dS' = a\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda \cdot d\varphi \quad (8)$$

$$\omega(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \left[\frac{1}{2} + \frac{b^2}{4a\varepsilon} \ln \frac{a+\varepsilon}{a-\varepsilon} \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0) &= \sum_{n=L+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{Q_{n|m}(i \sinh \eta)}{Q_{n|m}(i \sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda', \varphi') e_{nm}(\lambda, \varphi) \quad (10) \end{aligned}$$

$Q_{n|m}$ تابع لژاندر نوع دوم و e_{nm} هارمونیک بیضوی سطحی است. با اعمال اپراتور گرادیان به معادله ۴ بردار گرانی باقی مانده به صورت زیر به دست می آید:

$$\delta \tilde{g}^L := \nabla \tilde{T}^L = \nabla W - \nabla W_{ref} = g - g_{ref} \quad (11)$$

که در آن بردار گرانی و بردار گرانی g_{ref} بردار گرانی رفرنس است. هم چنین بردار گرانی باقی مانده را می توان از اعمال اپراتور گرادیان به انتگرال پواسن در معادله ۶ نیز به دست آورد (Ardalan 2000):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) &:= \nabla \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_{\lambda\lambda}}} \frac{\partial \tilde{T}^L}{\partial \lambda} e_{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{m_{\varphi\varphi}}} \frac{\partial \tilde{T}^L}{\partial \varphi} e_{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{m_{\eta\eta}}} \frac{\partial \tilde{T}^L}{\partial \eta} e_{\eta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_{\lambda\lambda}}} \left(\frac{1}{S} \iint_{E_{a,b}^2} w(\varphi') \frac{\partial \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \lambda} \tilde{T}^L(\lambda', \varphi', \eta_0) dS' \right) e_{\lambda} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{m_{\varphi\varphi}}} \left(\frac{1}{S} \iint_{E_{a,b}^2} w(\varphi') \frac{\partial \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \varphi} \tilde{T}^L(\lambda', \varphi', \eta_0) dS' \right) e_{\varphi} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{m_{\eta\eta}}} \left(\frac{1}{S} \iint_{E_{a,b}^2} w(\varphi') \frac{\partial \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \eta} \tilde{T}^L(\lambda', \varphi', \eta_0) dS' \right) e_{\eta} \quad (12) \end{aligned}$$

بیضوی مرجع (V^t) از آنامولی پتانسیل به آنامولی پتانسیل بدون توپوگرافی (\tilde{T}) خواهیم رسید که در بیرون بیضوی مرجع هارمونیک است.

$$\tilde{T} := W - U - V^t \quad (1)$$

برای بخش درجه پایین \tilde{T} یعنی \tilde{T}_L نیز داریم:

$$\tilde{T}_L := W_L - U - V_L^t \quad (2)$$

که در آن W_L بخش درجه پایین پتانسیل گرانی زمین تا درجه L است که از مدل ژئوپتانسیلی جهانی (GGM) به دست می آید و V_L^t بخش درجه پایین پتانسیل گرانی ناشی از جرم های توپوگرافی خارج بیضوی مرجع تا درجه L می باشد که با بسط انتگرال نیوتن به هارمونیک های کروی به دست می آید (Rummel et al 1988; Kuhn and Featherstone 2003). با حذف \tilde{T}_L از روی \tilde{T} به پتانسیل باقی مانده \tilde{T}^L می رسیم.

$$\begin{aligned} \tilde{T}^L &:= \tilde{T} - \tilde{T}_L = (W - U - V^t) \\ &\quad - (W_L - U - V_L^t) \\ &= W - (W_L + V^t - V_L^t) \quad (3) \end{aligned}$$

از آن جایی که \tilde{T} و \tilde{T}_L در خارج بیضوی مرجع هارمونیک هستند \tilde{T}^L نیز در همان فضا هارمونیک خواهد بود و در معادله لاپلاس صدق خواهد کرد. در معادله ۳، $V^t - V_L^t$ را با V^{RTM} نمایش می دهیم که اثر باقی مانده عوارض مدل RTM است. با تعریف پتانسیل گرانی رفرنس به صورت $W_{ref} := W_L + V^{RTM}$ معادله ۳ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{T}^L := W - W_{ref} \quad (4)$$

با استفاده از معادله ۴ مساله مقدار مرزی دیریکله بیضوی برای مدل سازی آنامولی پتانسیل باقیمانده در خارج بیضوی مرجع $E_{a,b}^2$ در سیستم مختصات ژاکوبی بیضوی $\{(\lambda, \varphi, \eta)\}$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta) &= 0 \quad \forall \eta > \eta_0 \quad (\text{field equation}) \\ \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta_0) & \quad (\text{boundary value}) \quad (5) \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta) &= 0 \quad (\text{regularity condition}) \end{aligned}$$

که $k^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{m_{\lambda\lambda} g_{ref}}} \frac{g_{ref}^{\lambda} \partial \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \lambda} + \frac{1}{\sqrt{m_{\varphi\varphi} g_{ref}}} \frac{g_{ref}^{\varphi} \partial \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{m_{\eta\eta} g_{ref}}} \frac{g_{ref}^{\eta} \partial \mathcal{P}^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \eta} \quad (17)$$

و در آن g_{ref}^{λ} و g_{ref}^{φ} و g_{ref}^{η} اجزا بردار گرانی رفرنس در جهت e_{λ} و e_{φ} و e_{η} هستند. با جای گذاری روابط ۷ و ۸ و ۹ در رابطه ۱۷ داریم:

$$\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \iint_{E_{a,b}^2} k^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi') \bar{T}^L(\lambda', \varphi', \eta_0) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (18)$$

رابطه ۱۸ پس از جابجایی کرنل اصلاح شده K با کرنل k^L برای کاهش خطای برش ناشی از محدودیت در انتگرال گیری و گسسته سازی روی یک شبکه منظم روی بیضوی مرجع به صورت زیر نوشته می‌شود (Ardalan: 2000):

$$\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{4\pi} \iint_{E_{a,b}^2} K(\lambda, \varphi, \eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}) \cos \varphi'_{ij} \Delta \varphi' \Delta \lambda' \bar{T}^L(\lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}, \eta_0) \quad (19)$$

که $\Delta \varphi'$ و $\Delta \lambda'$ عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی است که رزولوشن شبکه انتگرال گیری را با ابعاد $i_{max} \times j_{max}$ تعریف می‌کند. برای تعیین کرنل اصلاح شده K ، کرنل پواسن بیضوی باقیمانده k^L در رابطه ۱۷ باید اصلاح شود. Huang (2002) نشان داده است که کرنل پواسن کروی باقی مانده اصلاح شده به کرنل پواسن کروی خیلی نزدیک است. همین موضوع برای کرنل پواسن بیضوی نیز صحیح است که به بخش کروی اش خیلی نزدیک است (Ardalan: 2000). بنابراین کرنل اصلاح شده K را می‌توان از روی کرنل پواسن بیضوی به صورت زیر محاسبه نمود (Ardalan et al. 2010a):

$$K(\lambda, \varphi, \eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{m_{\lambda\lambda} g_{ref}}} \frac{g_{ref}^{\lambda} \partial \mathcal{P}(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \lambda} + \frac{1}{\sqrt{m_{\varphi\varphi} g_{ref}}} \frac{g_{ref}^{\varphi} \partial \mathcal{P}(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{m_{\eta\eta} g_{ref}}} \frac{g_{ref}^{\eta} \partial \mathcal{P}(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi', \eta_0)}{\partial \eta} \quad (20)$$

که در آن $m_{\lambda\lambda}$ و $m_{\varphi\varphi}$ و $m_{\eta\eta}$ تنسور متریک و e_{λ} و e_{φ} بردارهای پایه یک هستند. با توجه به معادله ۱۲ نرم بردار گرانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g = |g| = \langle g, g \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle g_{ref} + \delta \tilde{g}^L, g_{ref} + \delta \tilde{g}^L \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \langle g_{ref}, g_{ref} \rangle + 2 \langle g_{ref}, \delta \tilde{g}^L \rangle + \langle \delta \tilde{g}^L, \delta \tilde{g}^L \rangle \rangle^{\frac{1}{2}} = (g_{ref}^2 + 2 \langle g_{ref}, \delta \tilde{g}^L \rangle + \langle \delta \tilde{g}^L, \delta \tilde{g}^L \rangle)^{\frac{1}{2}} = g_{ref} \left(1 + 2 \frac{\langle g_{ref}, \delta \tilde{g}^L \rangle}{g_{ref}^2} + \frac{\langle \delta \tilde{g}^L, \delta \tilde{g}^L \rangle}{g_{ref}^2} \right) \quad (13)$$

که g_{ref} نرم بردار ثقل رفرنس است و $|\bullet|$ اپراتور نرم و $\langle \bullet, \bullet \rangle$ اپراتور ضرب داخلی است. با بسط سری تیلور $(1+x)^{1/2}$ برای $|x| < 1$ داریم:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2) \quad (14)$$

بنابراین معادله ۱۳ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta \tilde{g}^L = g - g_{ref} = + \frac{\langle g_{ref}, \delta \tilde{g}^L \rangle}{g_{ref}} + \frac{\langle \delta \tilde{g}^L, \delta \tilde{g}^L \rangle}{g_{ref}} + \mathcal{O} \left(\left\{ 2 \frac{\langle g_{ref}, \delta \tilde{g}^L \rangle}{g_{ref}^2} + \frac{\langle \delta \tilde{g}^L, \delta \tilde{g}^L \rangle}{g_{ref}^2} \right\} \right) \quad (15)$$

$g - g_{ref}$ را که با $\delta \tilde{g}^L$ نشان داده شده است، گرانی باقی مانده است. با جای گذاری رابطه ۱۲ در ۱۵ و نگه داشتن ترم اول و صرف نظر کردن از جملات بعد معادله انتگرال خطی برای محاسبه پتانسیل گرانی باقی مانده روی بیضوی مرجع با استفاده از گرانی باقی مانده روی زمین یا بالای آن به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_{E_{a,b}^2} w(\varphi') k^L(\lambda, \varphi, \eta; \lambda', \varphi') \bar{T}^L(\lambda', \varphi', \eta_0) dS' \quad (16)$$

که W_L^c پتانسیل گرانی تصحیح شده روی بیضوی مرجع است که از GGM به دست می آید و δW نیز بایاس ADC است. بایاس ADC رابطه مستقیمی با چگالی جرم توپوگرافی، ماکزیمم درجه و مرتبه و GGM(L) و ارتفاع توپوگرافی بالای جرم توپوگرافی داخل نقطه محاسباتی دارد. به طور دقیق تر می توان گفت هرگونه افزایشی در پارامترهای یاد شده باعث افزایش بایاس ADC می شود. با فرض ثابت بودن چگالی جرمی، δW را به صورت زیر می توان نوشت (Sjoberg and Bagherbandi 2011):

$$\delta W = 2\pi G\sigma \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n [(H^2)_{mn} + \frac{2(H^3)_{mn}}{3R} + \frac{n(n+1)(H^4)_{mn}}{3 \times 4 R^2} + \dots] Y_{nm} \quad (25)$$

که σ چگالی جرم های توپوگرافی، G ثابت جاذبی، R شعاع متوسط زمین، Y_{nm} هارمونیک های کروی نرمالیزه شده کامل و $(H^v)_{mn}$ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$(H^v)_{mn} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} H^v Y_{nm} d\Omega \quad (26)$$

که H^v توان v^{th} ارتفاع توپوگرافی بالای جرم توپوگرافی داخل نقطه محاسباتی و Ω دلالت بر کره یک دارد. دو ترم اول رابطه ۲۵ بایاس توپوگرافی هستند که توسط (Sjoberg, 2007, 2009) بیان شده اند. با توجه به اینکه بایاس توپوگرافی بخش غالب بایاس ADC است، بایاس ADC را می توان با تقریب برابر بایاس توپوگرافی در نظر گرفت. (Sjoberg and Bagherbandi 2011) هم چنین (Sjoberg, 2007, 2009) نشان داده است که بایاس توپوگرافی را می توان با جمع اثر مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی تقریب زد. در برخی کاربردها نیاز داریم تا حد بالای بایاس توپوگرافی را بدانیم. این حد بالا که با $L \rightarrow \infty$ اتفاق می افتد به صورت زیر می باشد (Sjoberg and Bagherbandi 2011)

$$\delta W = 2\pi G\sigma (H^2 + \frac{2H^3}{3R}) \quad (27)$$

که برای محاسبه کرنل پواسن بیضوی \mathcal{P} به Martinec and Grafarend (1997) رجوع شود. با در نظر گرفتن بردار خطا r رابطه ۱۹ به صورت ماتریسی با مدل Gauss-Markov استاندارد به صورت زیر نوشته می شود:

$$b + r = Ax \text{ with } E(r) = 0 \text{ and } D(r) = D(b) = \sigma^2 W^{-1} \quad (21)$$

که در آن:

$$x = [x_{ij}]_{u \times 1} = [\tilde{T}^L(\lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}, \eta_0)]_{u \times 1}$$

$$b = [b_k]_{n \times 1} = [\delta \tilde{g}^L(\lambda_k, \varphi_k, \eta_k)]_{n \times 1} \quad (22)$$

$$A = [A_{k,ij}]_{n \times u} = \left[\frac{1}{4\pi} K(\lambda_k, \varphi_k, \eta_k; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}) \cos \varphi'_{ij} \Delta \varphi' \Delta \lambda' \right]_n$$

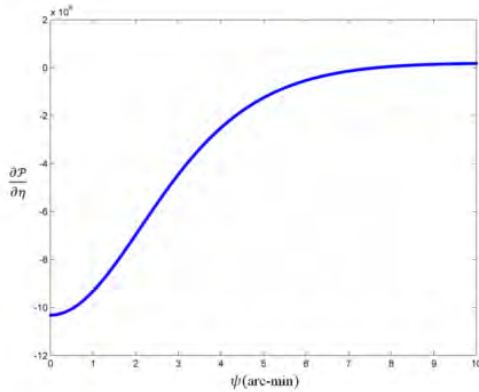
در رابطه فوق E و D اپراتورهای امید ریاضی، b بردار مشاهدات، x بردار مجهولات، W ماتریس وزن و σ^2 فاکتور واریانس اولیه هستند. در رابطه ۲۲، $i_{max} \times j_{max}$ تعداد مجهولات است و n تعداد مشاهدات گرانی است. رابطه ۲۱ مدل ریاضی مان را برای روش تک مرحله ای معکوس نشان می دهد.

با داشتن پتانسیل باقی مانده روی بیضوی مرجع با استفاده از رابطه ۱۹، پتانسیل گرانی روی بیضوی مرجع از رابطه ۴ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$W(\lambda, \varphi, \eta_0) = \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta_0) + W_L(\lambda, \varphi, \eta_0) + V^{RTM}(\lambda, \varphi, \eta_0) \quad (23)$$

همان طور که قبلا نیز اشاره شد W_L از روی GGM محاسبه می شود. اگر چه رابطه ۲۳ روی بیضوی مرجع محاسبه می شود، بخشی از آن داخل جرم های توپوگرافی است که در آن GGMS معتبر نیست. بنابراین برآورد GGM روی بیضوی مرجع باعث خطای بایاس انتقال به سمت پایین تحلیلی (ADC) می شود (Jekeli 1981; Agren 2004; Sjoberg and Bagherbandi 2011). به عنوان نتیجه این بحث می توان مقدار تصحیحی برای حذف بایاس یاد شده به $W_L(\lambda, \varphi, \eta_0)$ اعمال نمود:

$$W_L^c(\lambda, \varphi, \eta_0) = W_L(\lambda, \varphi, \eta_0) - \delta W \quad (24)$$



شکل ۲- تغییرات کرنل پواسن بیضوی $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ نسبت به فاصله کروی ψ در نقطه با مختصات بیضوی ژاکوبی $(\lambda, \varphi, \eta) = (50.5^\circ, 34.4102^\circ, 3.1963)$ در آزیموت $\alpha = 45^\circ$

فاصله کروی ψ و آزیموت α بین نقطه (λ, φ) و (λ', φ') در سیستم مختصات بیضوی ژاکوبی به صورت زیر بیان میشود (Ardalan 2000):

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \frac{\cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')}{\cos \psi} \quad (29)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \varphi' - \cos \psi \sin \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} \quad (30)$$

بر اساس شکل های ۱ و ۲ کرنل با مقداری منفی شروع شده سپس در همسایگی نقطه محاسباتی به صفر رسیده، مقدار مثبتی پیدا می کند و به طور جانبی به سمت صفر می رود. با مقایسه شکل های ۱ و ۲ تاثیر ارتفاع بر رفتار کرنل انتگرال آشکار می شود بدین صورت که ارتفاع کمتر منجر به تغییرات سریع تر $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ نسبت به ψ در اطراف نقطه محاسباتی می شود. بنابراین اگر شبکه روی بیضوی مرجع به اندازه کافی متراکم نباشد آنگاه مقادیر منفی بزرگی که کرنل در اطراف نقطه محاسباتی دارد در برآورد عددی رابطه ۱۹ شرکت نخواهند داشت و نتایج کاملا اشتباهی به دست خواهد آمد. بنابراین ما مجبوریم برای برآورد صحیح رابطه ۱۹ در ارتفاع های کوچک تر در نقطه محاسباتی شبکه انتگرال گیری روی بیضوی مرجع را متراکم تر نماییم. متراکم ساختن شبکه انتگرال گیری روی بیضوی مرجع همراه است با افزایش تعداد مجهولات که نیازمند افزایش تعداد مشاهدات در سمت چپ رابطه ۱۹، جهت حل کمترین مربعات برای مجهولات است. با این اوصاف ما با دو سوال زیر مواجه هستیم که: (۱) چگونه متوجه شویم که رزولوشن داده های ورودی گرانی برای اجتناب از مشکل ذکر

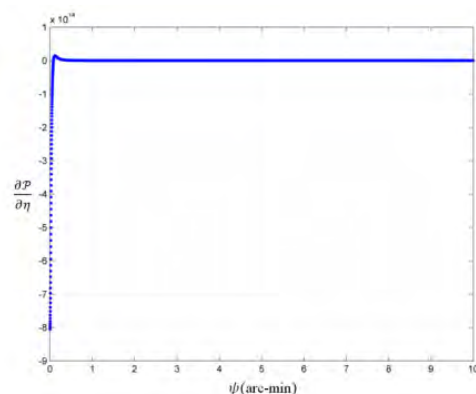
با داشتن بایاس ADC از رابطه ۲۵، $W_L^c(\lambda, \varphi, \eta_0)$ از رابطه ۲۴ محاسبه شده و پتانسیل گرانی تصحیح شده بر روی بیضوی مرجع به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$W^c(\lambda, \varphi, \eta_0) = \tilde{T}^L(\lambda, \varphi, \eta_0) + W_L^c(\lambda, \varphi, \eta_0) + V^{RTM}(\lambda, \varphi, \eta_0) \quad (28)$$

۳- کاربرد صحیح روش تک مرحله ای معکوس

با آماده ساختن مرحله ریاضی روش تک مرحله ای معکوس در بخش ۲، حالا آماده بکارگیری صحیح آن هستیم. به همین منظور بیاپید با کرنل انتگرال در رابطه ۲۰ یعنی $K(\lambda, \varphi, \eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij})$ و رفتار آن شروع کنیم. با توجه به اینکه g_{ref}^{η} (مولفه ارتفاعی بردار ثقل رفرنس) بسیار بزرگتر از دو مولفه دیگر g_{ref} است (رابطه ۲۱)، برای مطالعه رفتار کرنل کافی است $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ را بررسی نماییم. شکل های ۱ و ۲ تغییرات $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ را نسبت به فاصله کروی ψ در دو نقطه محاسباتی که هر دو دارای عرض بیضوی ژاکوبی $\lambda = 61.0391^\circ$ و $\varphi = 22.6192^\circ$ اما ارتفاع متفاوت $\eta = 3.194727$ (متناظر با ارتفاع ژئودتیک $h=100m$) و $\eta = 3.195496$ (متناظر با ارتفاع ژئودتیک $h=5000m$) هستند نشان می دهد. برای رسم شکل های ۱ و ۲، آزیموت را ثابت و برابر $\alpha = 45^\circ$ و از بیضوی مرجع $WGD200$ بر مبنای فرکانس صفر جزر و مد استفاده شده است.

$$(a=6378136.602m, b=6356751.860m, \eta_0 = 3.194711) \text{ (Grafarend and Ardalan 1999)}$$



شکل ۱- تغییرات کرنل پواسن بیضوی $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ نسبت به

فاصله کروی ψ در نقطه با مختصات بیضوی ژاکوبی

$$(\lambda, \varphi, \eta) = (50.5^\circ, 34.4102^\circ, 3.1947) \text{ در آزیموت } \alpha = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta) &= g(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta) \\ &- g_{ref}(\lambda, \varphi, \eta) \\ &+ \Delta\eta \end{aligned} \quad (32)$$

با بسط دادن $g(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta)$ به سری تیلور داریم:

$$g(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta) = g(\lambda, \varphi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g}{\partial \eta^n} \Delta\eta^n \quad (33)$$

در رابطه ۳۳، $\partial^n g / \partial \eta^n$ با تقریب برابر است با:

$$\frac{\partial^n g}{\partial \eta^n} = \frac{\partial^n g_{ref}}{\partial \eta^n} \quad (34)$$

با جایگذاری رابطه ۳۴ در رابطه ۳۳ داریم:

$$\begin{aligned} g(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta) &= g(\lambda, \varphi, \eta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_{ref}}{\partial \eta^n} \Delta\eta^n \end{aligned} \quad (35)$$

با بسط $g_{ref}(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta)$ به سری تیلور داریم:

$$\begin{aligned} g_{ref}(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta) &= g_{ref}(\lambda, \varphi, \eta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_{ref}}{\partial \eta^n} \Delta\eta^n \end{aligned} \quad (36)$$

با جایگذاری روابط ۳۶ و ۳۵ در رابطه ۳۲ داریم:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta) &= g(\lambda, \varphi, \eta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_{ref}}{\partial \eta^n} \Delta\eta^n \\ &- g_{ref}(\lambda, \varphi, \eta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_{ref}}{\partial \eta^n} \Delta\eta^n \\ &= g(\lambda, \varphi, \eta) \\ &- g_{ref}(\lambda, \varphi, \eta) \\ &= \delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) \end{aligned} \quad (37)$$

که رابطه‌ای است که می‌خواستیم اثبات کنیم. اینجا سوالی ممکن است پیش آید که "این تقریب چقدر خوب است؟" پاسخ آن است که چون رابطه ۳۷ بر مبنای رزولوشن بالای GGMS محاسبه می‌شود یک تقریب قانع‌کننده‌ای است. در پایان، این کمترین هزینه‌ای است که می‌تواند برای عبور از این وضعیت که رزولوشن داده گرانی

شده کافی است؟ (۲) چه کاری باید انجام دهیم، اگر رزولوشن داده‌های ورودی گرانی کافی نباشد و دسترسی به داده گرانی برای افزایش رزولوشن نداشته باشیم؟

پاسخ ما به پرسش اول به صورت زیر است: ابتدا شبکه انتگرال‌گیری روی بیضوی مرجع را با رزولوشن بهینه $\Delta\lambda'$ و $\Delta\lambda'$ که مطابق با تعداد داده گرانی است که اجازه می‌دهد رابطه ۱۹ را بر اساس کمترین مربعات حل کرد، تعریف می‌کنیم. سپس تغییرات کرنل $\partial P / \partial \eta$ را بر اساس فاصله کروی ψ در نقطه $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\eta})$ و در آزیموت $\alpha = 45^\circ$ رسم کرده و جایی که $\partial P / \partial \eta$ صفر می‌شود (ψ_0) را پیدا می‌کنیم $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\eta})$ مختصات بیضوی ژاکوبی میانگین است. کنترل می‌کنیم ببینیم که آیا $\psi_0 \geq \sqrt{\Delta\varphi'^2 + \Delta\lambda'^2}$ است یا نه؟ در صورت مثبت بودن جواب رزولوشن داده گرانی کافی است در غیر این صورت رزولوشن کم می‌باشد. وقتی که داده گرانی در یک منطقه وسیعی با انواع مختلف توپوگرافی توزیع می‌شود، می‌توان منطقه را به بخش‌های کوچک‌تری تقسیم کرد و تست فوق را انجام داده و روش تک مرحله‌ای معکوس را بر طبق رابطه ۱۹ به‌طور patch-wise به انجام رساند. همین تکنیک را وقتی که توزیع داده گرانی در منطقه یکنواخت نباشد می‌توان استفاده نمود.

پاسخ ما به سوال دوم تغییر کرنل انتگرال رابطه ۱۹ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta) &= \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{4\pi} \iint_{E_{a,b}^2} K(\lambda, \varphi, \eta) \\ &+ \Delta\eta; \lambda'_{ij}, \varphi'_{ij} \cos \varphi'_{ij} \Delta \lambda' \tilde{T}^L(\lambda'_{ij}, \varphi'_{ij}, \eta_0) \end{aligned} \quad (31)$$

چونیکه $\Delta\eta = \eta^* - \eta_0$ است و η^* کمترین ارتفاع

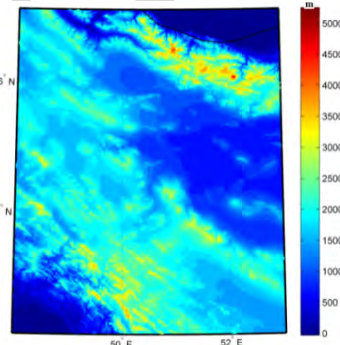
بیضوی ژاکوبی است که شرط $\psi_0 \geq \sqrt{\Delta\varphi'^2 + \Delta\lambda'^2}$ را برای تغییرات $\partial P / \partial \eta$ نسبت به ψ در نقطه $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \eta^*)$ در آزیموت $\alpha = 45^\circ$ تامین می‌کند. این جواب ما برای سوال دوم است.

حالا ممکن است این سوال پیش آید که "چرا در تغییر کرنل انتگرال در رابطه ۱۹، سمت چپ رابطه ۱۹ تغییر نمی‌یابد؟" پاسخ این است که $\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta)$ و $\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta)$ تقریباً برابرند. برای اثبات این موضوع $\delta \tilde{g}^L(\lambda, \varphi, \eta + \Delta\eta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

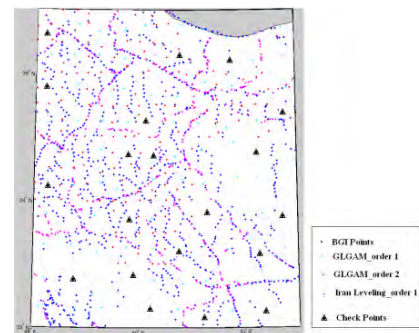
برای استفاده صحیح از روش تک مرحله‌ای معکوس کافی نیست، پرداخت شود.

۴- پیاده سازی تستهای عددی

برای برآورد عددی راه‌حل پیشنهادی برای تصحیح روش تک مرحله‌ای معکوس، یک منطقه تست در غرب ایران در محدوده $32^{\circ} \sim 37^{\circ}$ و $48^{\circ} \sim 53^{\circ}$ انتخاب نمودیم. شکل ۳ نمایشی از مدل ارتفاعی منطقه فوق است. در منطقه تست ۱۷۴۴ نقطه مشاهداتی گرانی انتخاب نمودیم که شامل ۱۰۶۶ نقطه BGI و ۴۴۰ نقطه از شبکه ترازبایی دقیق ایران و ۷۵ نقطه از شبکه درجه یک چند منظوره ایران و ۱۶۳ نقطه از شبکه درجه دو چند منظوره ایران است. پراکندگی نقاط در شکل ۴ نمایش داده شده است.

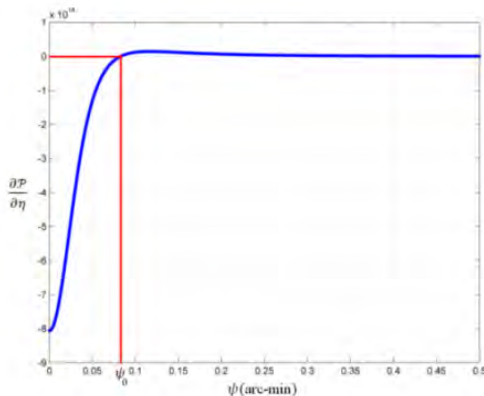


شکل ۳- ارتفاع ژئودتیک منطقه تست نسبت به بیضوی WGS84

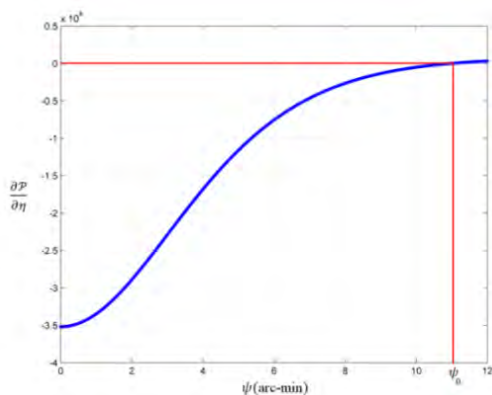


شکل ۴- پراکندگی ۱۷۴۴ نقطه ثقلی در منطقه تست

گرانی، بر اساس روش معرفی شده در بخش ۳، تغییرات $\partial P / \partial \eta$ نسبت به ψ در نقطه $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\eta}) = (50.2196^{\circ}, 34.4373^{\circ}, 3.1949)$ در آزیموت $\alpha = 45^{\circ}$ رسم شده است (شکل ۵). بر اساس شکل ۵، $\psi_0 = 1.1421'$ بدست می‌آید، و تا وقتی که $\psi_0 < \sqrt{\Delta\varphi'^2 + \Delta\lambda'^2} = 10.929'$ رزولوشن داده ورودی گرانی کافی نخواهد بود. برای پیدا کردن η^* بر اساس روش معرفی شده در بخش ۳، تغییرات $\partial P / \partial \eta$ نسبت به ψ در نقطه $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}) = (50.2196^{\circ}, 34.4373^{\circ})$ با ارتفاعهای ژاکوبی مختلف (η) در آزیموت $\alpha = 45^{\circ}$ با شرط $\psi_0 > 10.929'$ رسم شده است (شکل ۶). همانطور که شکل ۶ نشان می‌دهد، ψ_0 برابر است با $\eta^* = 3.197$ (معادل با ارتفاع ژئودتیک $h=14320m$ است). با داشتن $\Delta\eta = \eta^* - \eta_0 = 0.0023$ برای اجرای روش تک مرحله‌ای معکوس بر اساس رابطه ۱۹ به‌کار گرفته می‌شود.

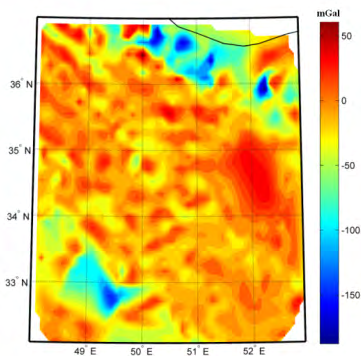


شکل ۵- تغییرات $\partial P / \partial \eta$ نسبت به ψ در نقطه $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\eta}) = (50.2196^{\circ}, 34.4373^{\circ}, 3.1949)$ در آزیموت $\alpha = 45^{\circ}$



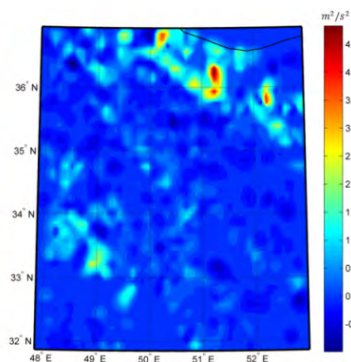
شکل ۶- تغییرات $\partial P / \partial \eta$ نسبت به ψ در نقطه $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \eta^*) = (50.2196^{\circ}, 34.4373^{\circ}, 3.197)$ در آزیموت $\alpha = 45^{\circ}$

با فرض ۱۷۴۴ نقطه ثقلی در سطح زمین، $\Delta\varphi' = 7.728'$ و $\Delta\lambda' = 7.728'$ به عنوان رزولوشن بهینه برای شبکه انتگرال‌گیری روی بیضوی رفرنس انتخاب شد. با توجه به این‌که منطقه تست در عرض‌های میانی قرار دارد رزولوشن در راستای طولی و عرضی جغرافیایی برابر گرفته شده است. برای کنترل کافی بودن رزولوشن داده ورودی

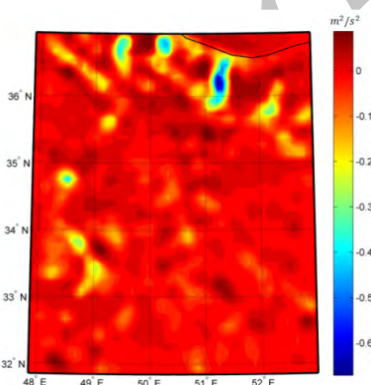


شکل ۹- شتاب گرانی باقیمانده روی سطح زمین

مقادیر آنومالی پتانسیل باقیمانده کاهش یافته روی بیضوی مرجع که از روش تک مرحله‌ای معکوس بدست آمده است، با بکارگیری کرنل اصلاح شده (شکل ۱۱) و بدون کرنل اصلاح شده (شکل ۱۰) نشان داده شده است.



شکل ۱۰- پتانسیل گرانی باقیمانده بدون استفاده از کرنل اصلاح شده

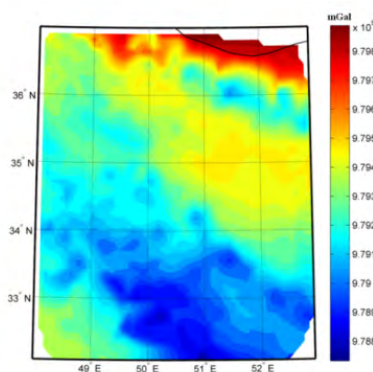


شکل ۱۱- پتانسیل گرانی باقیمانده با استفاده از کرنل اصلاح شده

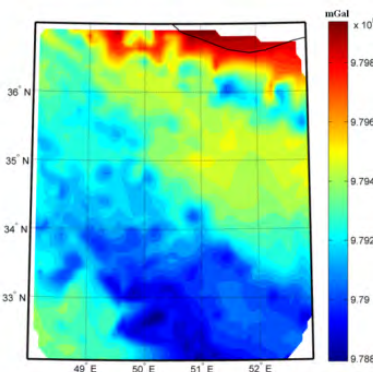
با حل رابطه ۴ به روش کمترین مربعات مقدار پتانسیل باقیمانده روی بیضوی مرجع نتیجه می‌شود. از آنجایی که روش تک مرحله‌ای معکوس بر مبنای حل معکوس انتگرال پواسن است، درحالی که یک مساله بدوضع می‌باشد، ممکن است نیاز به پایدارسازی داشته باشد. از جمله روش‌های پایدارسازی موجود، ما روش پیشنهادی Koch and Kusche(2002) را انتخاب کردیم. این روش، که یک روش تکراری است، با اختصاص مقادیر اولیه به مجهولات و ماتریس وزن آن‌ها و مشاهدات، محاسبات را آغاز می‌کند. در این‌جا مقدار مجهولات را صفر در نظر گرفتیم، چون مقدار پتانسیل باقیمانده روی بیضوی رفرنس کوچک هستند. ماتریس یکه نیز به عنوان ماتریس وزن اولیه برای مجهولات انتخاب شده است، و ماتریس وزن اولیه داده ثقلی بر مبنای دقت مشاهدات آماده شد.

۵- نتایج عددی

شکل‌های ۷، ۸ و ۹ به ترتیب مشاهدات گرانی در سطح زمین و شتاب گرانی بر اساس مدل GGM و شتاب گرانی باقیمانده را روی سطح زمین نشان می‌دهند.



شکل ۷- شتاب گرانی روی سطح زمین



شکل ۸- شتاب گرانی بر اساس مدل GGM روی سطح زمین

۶- نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر رزولوشن داده های گرانی ورودی در روش تک مرحله‌ای معکوس برای محاسبه پتانسیل گرانی بر روی بیضوی مرجع مورد بررسی قرار گرفت. تشخیص رزولوشن مناسب برای روش تک مرحله‌ای معکوس و ارائه راه حلی جهت رفع مشکل رزولوشن نامناسب داده های گرانی ورودی از جمله دستاوردهای این تحقیق می‌باشد. در این راستا، بررسی رفتار کرنل انتگرال‌گیری بسیار حائز اهمیت می‌باشد. راه‌حل پیشنهاد شده به‌طور عددی با انجام تست‌ها در منطقه غرب ایران تایید شد. تست‌های عددی به‌طور واضح نشان داد که بدون کاربرد روش پیشنهادی ما، چون رزولوشن داده ورودی ثقلی کافی نیست، هیچ بهبودی در میدان ثقل رفرنس ایجاد نمی‌شود، درحالی‌که با روش ما به‌طور واضح بهبودها قابل رویت است. تست‌های عددی انجام شده اثربخشی راه‌حل پیشنهادی و اهمیت آن در تصحیح روش تک مرحله‌ای معکوس را تصدیق می‌کنند.

تقدیر و تشکر

از اداره کل زمینی سازمان نقشه برداری کشور به‌خصوص آقای دکتر سلطانیپور که با فراهم نمودن مشاهدات موردنظر در منطقه تست ما را امر تحقیق و پژوهش این مقاله یاری نمودند تشکر و قدردانی می‌نماییم. امید است با توسعه همکاری آن سازمان با مراکز علمی کشور بستر مناسب‌تری جهت انجام تحقیقات نقشه‌برداری صورت پذیرد.

با مقایسه شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ نتایج زیر بدست خواهد آمد:

الف) ترند گرانی باقیمانده در شکل ۹ با شکل ۱۱ همخوانی دارد، در حالیکه در شکل ۱۰ این‌طور نیست. (ب) شکل ۱۰ هیچ‌گونه سیگنالی نمایش نمی‌دهد و عمده مقدار آن صفر است، چون مقادیر منفی بزرگ کرنل (به شکل‌های ۱ و ۲ رجوع شود) در حین محاسبه به علت رزولوشن کم شبکه انتگرال‌گیری که ناشی از رزولوشن ناکافی داده‌های گرانی است، از دست می‌رود. با بازگشت اثرات حذف شده به آنومالی پتانسیل باقیمانده کاهش یافته، می‌توانیم آنومالی پتانسیل روی بیضوی مرجع را محاسبه نمائیم. با محاسبه آنومالی پتانسیل روی بیضوی مرجع و استفاده از فرمول برنز می‌توانیم ارتفاع ژئوئید را در منطقه تست محاسبه نمائیم. ژئوئید محاسبه شده با و بدون استفاده از کرنل اصلاح شده با ۲۰ نقطه GNSS/Levelling مقایسه شده است. پارامترهای آماری مقایسه فوق در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- اطلاعات آماری اختلاف ژئوئید حاصل از روش تک مرحله‌ای معکوس با استفاده از کرنل اصلاح شده و بدون استفاده از کرنل اصلاح شده با ژئوئید حاصل از GPS/Levelling

method	Min (cm)	Max (cm)	Mean (cm)	Std (cm)
Without modified kernel	-۱۱۹/۲۸	۳۲/۱۸	-۳۲/۲۳	۳۸/۷۴
With modified kernel	۵۹/۰۱	۶۶/۹۹	۴/۱۹	۳۷/۳۱

همان‌طور که جدول ۲ نشان می‌دهد، در ژئوئید محاسبه شده با کرنل اصلاح شده، در انحراف معیار ۱/۴۳ سانتی‌متر و در میانگین ۳۶/۴۲ سانتی‌متر بهبود نسبت به کرنل اصلاح نشده ایجاد شده است.

جدول ۲- اطلاعات آماری اختلاف ژئوئید حاصل از روش تک مرحله‌ای معکوس با استفاده از کرنل اصلاح شده با ژئوئید حاصل از مدل EGM2008 تا درجه و مرتبه ۷۲۰

method	Min (cm)	Max (cm)	Mean (cm)	Std (cm)
With EGM2008(degree and order720)	-۱۱۵/۰۱	۲۲/۰۱	-۳۶/۶۱	۳۸/۳۴
With modified kernel	۵۹/۰۱	۶۶/۹۹	۴/۱۹	۳۷/۳۱

- [1] Ardalan A.A. (2000), High-resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functional of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, Stuttgart University, Stuttgart.
- [2] Ardalan A.A. and Grafarend E.W., 2004. High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid. *J Geodesy* 78:138-156.
- [3] Ardalan A.A., Karimi R. and Poutanen M., 2010a. A bias-free geodetic boundary-value problem approach to high datum unification. *J Geodesy* 84:123-134.
- [4] Ardalan A.A., Karimi R. and Bilker-Koivula M., 2010b. An overdetermined geodetic boundary-value problem approach to telluroid and quasi-geoid computations. *J Geodesy* 84:97-104.
- [5] Ardalan A.A. and Safari A., 2005. Global height datum unification: a new approach in gravity potential space. *J Geodesy* 79:512-523.
- [6] Koch K.R. and Kusche J., 2002. Regularization of geopotential determination from satellite data by variance component. *J Geodesy* 76:259-268.
- [7] Featherstone W.E., Evans J.D., Olliver J.G., 1998. A Meissl-modified Vaníček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. *J Geod* 72: 154–160.
- [8] Huang J., 2002. Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation on gravity and the geoid. Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, The University of New Brunswick, New Brunswick.
- [9] Kuhn M., Featherstone W.E., 2003. On the optimal spatial resolution of crustal mass distributions for forward gravity field modelling. In: *Gravity and geoid 2002, Proceedings*, pp 195–200.
- [11] Novák P. and Heck B., 2002. Downward continuation and geoid determination based on band-limited airborne gravity data. *J Geod* 76:269–278.
- [13] Safari A., Ardalan A.A. and Grafarend E.W., 2005. A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary-value problem, a case study: the geoid of Iran. *J Geodyn* 39:545–568.
- [15] Sjöberg L.E. and Bgherbandi M., 2011. The numerical study of the analytical downward continuation error in geoid computation by EGM2008. *Journal of Geodetic Science* 1:2– 8.