

مدل سازی میدان گرانی زمین بر اساس تقریب تُنک ضرایب هارمونیک‌های کروی با استفاده از الگوریتم پیگیری انطباقی قائم پایدار

سیدعبدالرضا سعادت^{۱*}، عبدالرضا صفری^۲

^۱ دانشجوی دکتری ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
rsaadat@ut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
asafari@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت شهریور ۱۳۹۴، تاریخ تصویب آذر ۱۳۹۴)

چکیده

مدل سازی میدان گرانی زمین بر اساس بازسازی ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه مشخص نیازمند داده‌هایی با تراکم و کیفیت مناسب مطابق معیار شانون - نایکوئیست در کل کره زمین بوده و این کار مستلزم صرف هزینه و زمان زیاد جهت جمع‌آوری و پردازش داده‌ها می‌باشد. بر اساس تئوری نمونه‌برداری فشرده (CS) می‌توان نرخ نمونه‌برداری را بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش داده و یک سیگنال را بصورت تُنک با تعداد کمتری از داده‌ها تنها با استفاده از ضرایبی که سهم عمده‌ای در بازسازی آن دارند، تقریب زد. معمولاً در اینگونه مسائل برای مدل سازی میدان گرانی زمین با یک مساله بدوضع مواجه بوده و علاوه بر آن سطح تُنکی سیگنال نیز بطور دقیق مشخص نیست که این امر امکان استفاده از روش‌های متداول نمونه‌برداری فشرده را مشکل می‌سازد. در این مقاله روش جدیدی به نام الگوریتم پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP) جهت مدل سازی میدان گرانی زمین با تقریب تُنک ضرایب هارمونیک‌های کروی ارائه شده که علاوه بر قابلیت انطباق با مسائل بدوضع می‌تواند سطح تُنکی مساله را نیز بدرستی مشخص نماید. نتایج عددی حاصل از تعیین ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶ نشان‌دهنده آن است که الگوریتم فوق قادر به بازسازی میدان گرانی زمین با دقت مدنظر با تعداد نمونه‌برداری ۵۰ درصد کمتر از نرخ نایکوئیست می‌باشد.

واژگان کلیدی: مدل سازی میدان گرانی، هارمونیک‌های کروی، مساله بدوضع، نمونه‌برداری فشرده و تقریب تُنک

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

یکی از مباحث مهم در ارتباط با تعیین ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه مشخص به منظور مدل سازی میدان گرانی زمین جمع‌آوری داده‌هایی با تراکم و کیفیت مناسب می‌باشد. از آنجا که این ضرایب دارای ماهیت جهانی هستند، این نمونه برداری باید به صورت یکنواخت در کل کره زمین انجام شود. طبق قضیه شانون-نایکوئیست^۱ در صورتی می‌توان یک سیگنال را بطور کامل بازیابی نمود که فرکانس نمونه برداری حداقل دو برابر بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال باشد. به عبارت دیگر بر طبق این قضیه، بزرگترین فرکانسی که از یک سری داده می‌توان بازیابی نمود، برابر نصف فرکانس نمونه برداری است. بنابراین نمونه برداری بر اساس این قضیه مستلزم صرف هزینه زیاد جهت جمع‌آوری داده با تراکم و دقت بالا بوده و در بسیاری از مواقع نمونه برداری داده با نرخ نایکوئیست^۲ دشوار، پرهزینه و غیرممکن می‌باشد. تحقیقات بسیاری در زمینه نحوه نمونه برداری در آنالیز هارمونیک‌های کروی انجام شده است [۱، ۲]. بعنوان مثال اسنیو [۲] نشان داد عدم تامین نرخ نایکوئیست در نمونه برداری باعث ایجاد خطای اعوجاج نوع دوم^۳ در مدل سازی میدان گرانی زمین خواهد شد. در این جا سوالی که مطرح می‌گردد این است که آیا می‌توان فرکانس مورد نظر در مدل سازی را با نرخ کمتر از نرخ نمونه برداری نایکوئیست بازسازی نمود؟ به عبارت دیگر آیا می‌توان یک سیگنال را بصورت فشرده با تعداد کمتری از نمونه‌ها بازیابی کرد؟ در سال‌های اخیر مفهوم نمونه برداری فشرده (CS)^۴ با توجه به اصلاح روش‌های معمول نمونه برداری در جمع‌آوری داده‌ها، مورد توجه بسیاری از علوم کاربردی قرار گرفته است. بعنوان مثال اخیراً استفاده از این ایده در پزشکی زمان اسکن و نمونه برداری تصاویر MRI^۵ را بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش داده که این امر سبب افزایش ایمنی و سلامت بیماران شده است [۳]. با استفاده از ایده CS، تنها فرکانس‌هایی که سهم عمده‌ای در بازسازی میدان گرانی زمین دارند، انتخاب شده و به

طبع آن می‌توان تعداد مشاهدات و نمونه برداری را کاهش داد. در واقع بر اساس این تئوری یک سیگنال بصورت تُنک^6 با انتخاب توابع پایه مناسب قابل بازسازی است. منظور از تُنک بودن یک سیگنال وجود برخی عناصر صفر و یا نزدیک به صفر در آن بوده به طوری که با حذف آنها ماهیت سیگنال اصلی تغییر قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد. هر چه تعداد عناصر صفر (یا نزدیک به صفر) در یک سیگنال بیشتر باشد، میزان تُنکی (یا تقریباً تُنکی) آن نیز بیشتر خواهد بود. در این صورت نُرم صفر بردار با تعریف $\|x\|_0 = \{\text{Number of index } k: x_k \neq 0, k=1, 2, \dots, n\}$ یک معیار مناسب برای نشان دادن سطح تُنکی^7 آن خواهد بود. مسائلی را که در آنها یک مقدار تُنک برای سیگنال مورد نظر تعیین می‌گردد، مساله تقریب تُنک^8 گویند. به کارگیری سیگنال تُنک در محاسبات به دلیل صفر بودن بسیاری از عناصر، نیاز به حجم کمتری برای ذخیره سازی داده‌ها داشته، از طرفی زمان محاسبات نیز کاهش چشمگیری می‌یابد. مسائل تقریب تُنک بطور کلی دارای جواب یکتا نمی‌باشند ولی با اعمال یکسری شرایط مرزی مشخص می‌توان جواب بهینه‌ای برای مساله مورد نظر بدست آورد. روش‌های مختلفی برای حل یک مساله بصورت تُنک ارائه شده که مهمترین آنها استفاده از الگوریتم‌های تکراری نظیر روش ارائه شده توسط ملات و ژانگ [۴] بر مبنای پیگیری انطباقی (MP)^۹ می‌باشد. MP در واقع روشی بر اساس جایگزینی مساله دشوار با یک مساله بهینه در طی یک فرایند تکراری است [۵]. پس از آن پتی و همکاران [۶] با اصلاح روش فوق الگوریتم پیگیری انطباقی قائم (OMP)^{۱۰} را ارائه کردند که قابلیت به کارگیری توابع پایه غیر قائم را نیز دارا می‌باشد. ضمن آنکه با استفاده از این روش سرعت همگرایی محاسبات نیز نسبت به الگوریتم MP افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد. سپس تراپ و گیلبرت [۷] با بهبود روش OMP در آن تغییری ایجاد کردند که در هر تکرار امکان تعیین توابع پایه‌ای که بیشترین انطباق را با جواب مساله مورد نظر داشته باشد، فراهم گردد. از دیگر روش‌های تعیین جواب تُنک برای یک مساله می‌توان به روش پیگیری انطباقی

^۶ Sparse

^۷ Sparsity level

^۸ Sparse approximation problem

^۹ Matching Pursuit

^{۱۰} Orthogonal Matching Pursuit

^۱ Shannon/Nyquist

^۲ Nyquist rate

^۳ Aliasing of second type

^۴ Compressive Sampling

^۵ Magnetic Resonance Imaging

تُنک پایدار برای یک مساله بدوضع بر اساس الگوریتم SOMP توضیح داده می‌شود. سپس در بخش سوم چگونگی بازسازی تُنک ضرایب هارمونیک‌های کروی مدل‌های ژئوتانسلی در یک مساله خطی معکوس بیان می‌گردد. پس از آن در بخش چهارم نتایج و محاسبات عددی برای مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین با استفاده از الگوریتم مدنظر ارائه شده و در نهایت در بخش پایانی خلاصه نتایج تحقیق حاضر بیان می‌گردد.

۲- تقریب تُنک سیگنال با استفاده از روش پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP)

فرض کنید سیگنال $y \in \mathbb{R}^u$ را بتوان بر حسب ترکیب خطی از یک سری توابع پایه متعامد $\{p_i\}_{i=1}^u$ بصورت زیر بسط داد:

$$y = \sum_{i=1}^u x_i p_i \quad \text{or} \quad y = Px \quad (1)$$

در این رابطه $P = [p_1 | p_2 | \dots | p_u]$ ماتریس پایه $u \times u$ بوده که ستون‌های آن بردارهای پایه $\{p_i\}$ هستند. همچنین ضرایب بسط x_i با استفاده از رابطه ضرب داخلی $x_i = \langle y, p_i \rangle = p_i^T y$ تعیین می‌گردند. در واقع y نمایش سیگنال در فضای زمان یا مکان و x نمایش سیگنال در فضای توابع پایه P است. سیگنال y را تُنک از مرتبه m گویند، هرگاه بتوان آن را تنها بر اساس m بردار پایه $\{p_i\}$ بسط داد. بعبارت دیگر m ضریب x_i در بسط رابطه (۱) غیر صفر بوده و $u-m$ ضریب دیگر صفر و یا بسیار نزدیک به صفر باشند. هر چه تعداد بیشتری از ضرایب، صفر (و یا نزدیک به صفر) باشند سطح تُنکی سیگنال هم بیشتر خواهد بود. در واقع یک سیگنال بصورت فشرده قابل نمونه‌برداری است، اگر بتوان آن را با تعداد اندکی از ضرایب غیرصفر بسط (نمایش) داد. مطالب ارائه شده اساس تئوری CS بوده که امکان نمونه‌برداری متناسب با m ضریب غیرصفر سیگنال اصلی را فراهم می‌سازد [۱۰، ۱۱]. از طرفی اگر یک سری اندازه‌گیری $b \in \mathbb{R}^n$ برای تعیین سیگنال y انجام گردد، به نحوی که داشته باشیم:

$$b = Qy \quad (2)$$

قائم منتظم (ROMP)^۱ ارائه شده توسط نیدل و ورشنین [۸] اشاره نمود. بر اساس این روش در هر تکرار به جای یک عنصر، m - عنصر غیرصفر که سهم بیشتری در بازسازی سیگنال موردنظر دارند، انتخاب می‌گردند. پس از آن نیدل و تراپ [۹] با ارتقاء الگوریتم ROMP روش پیگیری انطباقی نمونه‌برداری فشرده (CoSaMP)^۲ را ارائه کردند که قابلیت حل مسائل با نویز بالا را نیز دارا می‌باشد. در این الگوریتم محل دقیق عناصری که بیشترین انطباق را با جواب مساله دارند، همزمان با حذف عناصر غیر ضروری مشخص می‌گردد. فرض کنید هدف تعیین سیگنال $x \in \mathbb{R}^u$ در مساله خطی $Ax = b$ بوده که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ بردار مشاهدات و $b \in \mathbb{R}^n$ بردار طراحی است. در تمام الگوریتم‌های تکراری ارائه شده سعی بر آن است که با یافتن زیرماتریس $B \subseteq A$ نُرم بردار خطا $e = x - \hat{x}$ مینیمم گردد که در اینجا \hat{x} مقدار برآورد شده برای بردار مجهولات (سیگنال) با استفاده از یکی از الگوریتم‌های فوق است. همچنین این روش‌ها معمولاً برای مسائل خوش‌وضع ارائه شده و باید اطلاعات اولیه در مورد سطح تُنکی سیگنال اصلی وجود داشته باشد. ولی در بسیاری از مسائل کاربردی ژئودزی سطح تُنکی سیگنال و مقادیر اولیه آن بطور دقیق مشخص نیست. به ناچار در این گونه مسائل به جای مینیمم کردن نُرم بردار خطا باید در هر تکرار نُرم بردار باقیمانده $v = b - Ax$ مینیمم گردد. همچنین ممکن است با یک مساله بدوضع مواجه باشیم که در این صورت مینیمم کردن نُرم بردار باقیمانده‌ها لزوماً متناسب با مینیمم شدن نُرم بردار خطا نخواهد بود و حل این گونه مسائل نیازمند تعیین یک جواب بهینه پایدار با استفاده از روش‌های پایدارسازی مناسب است. لذا موارد و مشکلات اشاره شده ما را بر آن داشت تا الگوریتمی تحت عنوان پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP)^۳ جهت حل مسائل کاربردی ژئودزی معرفی نماییم که در آن سعی بر آن است با بررسی رفتار نُرم بردار باقیمانده‌ها و نُرم بردار مجهولات علاوه بر تعیین جواب پایدار در هر تکرار، سطح تُنکی سیگنال موردنظر نیز به درستی مشخص گردد. این مقاله مشتمل بر ۵ بخش اصلی است که پس از طرح مقدمه در بخش دوم روش تعیین جواب

^۱ Regularized Orthogonal Matching Pursuit

^۲ Compressive sampling Matching Pursuit

^۳ Stabilized Orthogonal Matching Pursuit

بوده به نحوی که یک جواب تُنک \hat{x} با حل مساله زیر تعیین گردد:

$$\hat{x} = \arg \min_x \left(\|b - Bx\|_2^2 \right) \quad (5)$$

در این رابطه $\arg \min_x$ نشان دهنده آن است که جواب مساله با مینیمم کردن آرگومان x بدست می آید. اگر سطح تُنکی سیگنال $x \in \mathbb{R}^u$ برابر m باشد، آنگاه برای هر ترکیب $\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix}$ از عناصر غیرصفر آن یک جواب تُنک برای مساله بدست می آید که در آن باید نمونه برداری به نحوی انجام شود که ماهیت سیگنال اصلی با وجود حذف برخی از عناصر تغییر قابل ملاحظه ای نداشته باشد [۱۰، ۱۱]. در روش های اشاره شده فوق معمولاً فرض بر این است که سطح تُنکی سیگنال (m) معلوم بوده و ماتریس طراحی نیز خوش وضع است. ولی در اکثر مسائل کاربردی ژئودزی سطح تُنکی بطور دقیق مشخص نیست از طرفی ممکن است با یک مساله بدوضع مواجه شویم که در این صورت استفاده از روش کمترین مربعات معمول (OLS)^۵ منتج به جواب های غیرصحیح خواهد شد. لذا در این تحقیق سعی بر آن شده است که با اصلاح روش های ROMP و CoSaMP روشی تحت عنوان الگوریتم پیگیری انطباقی قائم پایدار (SOMP) ارائه شده تا علاوه بر تعیین سطح تُنکی سیگنال مورد نظر، یک جواب پایدار نیز برای مساله با استفاده از روش های پایدارسازی مناسب تعیین گردد. در الگوریتم SOMP فرض می کنیم سیگنال x با ضرب ماتریس مبدل A^* (بعنوان مثال ماتریس شبه-وارون) در بردار مشاهدات b قابل بازسازی است ($\hat{x} = A^* b$). در این صورت با صفر قرار دادن مقدار اولیه مجهولات ($x_0 = 0$) در مساله خطی نسبت به پارامترهای مجهول می توان بردار $U = A^* v$ را بعنوان یک جواب تقریبی اولیه برای مساله در نظر گرفت. در نتیجه بزرگترین عناصر موجود در بردار U متناظر با عناصر غیرصفر سیگنال اصلی خواهد بود [۸]. سپس m ستون $[A_i]_{i=1}^u$ مربوط به ستون های ماتریس طراحی A متناظر با اندیس i ام از بزرگترین m عنصر اول بردار U در زیرماتریس B ذخیره شده و یک جواب تُنک برای مساله با استفاده از رابطه (۵) تعیین می گردد. معمولاً در مواقعی

در این رابطه $Q \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ماتریس اندازه گیری است. هر عنصر بردار مشاهدات با ضرب داخلی از رابطه $b_j = \langle y, q_j \rangle$ تعیین می گردد که در آن $\{q_j\}_{j=1}^n$ سطرهای ماتریس اندازه گیری Q است. بنابراین با جایگزینی رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$b = Qy = QP^T x = Ax \quad (3)$$

در این رابطه $A = QP \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ماتریس طراحی نامیده می شود و باید به نحوی تشکیل گردد که علاوه بر حفظ اطلاعات اصلی در سیگنال قابل فشرده سازی و یا با سطح تُنکی m ، کمترین سازگاری^۱ بین عناصر دو ماتریس P و Q وجود داشته باشد. به عبارت دیگر با استفاده از ماتریس اندازه گیری مناسب توابعی با کمترین ارتباط و شباهت انتخاب می گردند. معمولاً در تئوری CS از ماتریس گوسی اتفاقی^۲ برای این منظور استفاده می شود. بنابراین اگر سطح تُنکی سیگنال x برابر m باشد، در این صورت حداقل به تعداد $n \geq m$ اندازه گیری (نمونه برداری) برای بازسازی m ضریب غیرصفر سیگنال اصلی نیازمندیم. البته کاندس و تاو [۱۲] نشان دادند شرط لازم و کافی برای استفاده از تئوری CS برقراری شرطی است که تحت عنوان ویژگی تشابه محدود (RIP)^۳ شناخته می شود. بر این اساس ماتریس طراحی A از شرط RIP با پارامتر (m, δ_m) برای $\delta_m \in (0, 1)$ تبعیت می کند، اگر داشته باشیم:

$$1 - \delta_m \leq \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq 1 + \delta_m \quad (4)$$

در این رابطه $\|x\|_0 \leq m$ است. در واقع این شرط نشان می دهد که حداقل m ستون ماتریس طراحی A تشکیل یک سیستم متعامد را می دهند. در واقع شرط RIP فرم خلاصه شده اصل عدم قطعیت یکنواخت^۴ در آنالیز هامونیک ها می باشد [۱۳، ۱۴]. یکی از روش های تعیین جواب تُنک برای یک مساله با سیگنال قابل فشرده سازی استفاده از الگوریتم های تکرارشونده است. معمولاً این الگوریتم ها بر اساس یافتن زیرماتریس مناسب $B \subseteq A$

^۱ Coherence
^۲ Random Gaussian matrix
^۳ Restricted Isometry Property
^۴ Uniform Uncertainty Principle

^۵ Ordinary Least Square

- ماتریس طراحی $A \in \mathbb{R}^{n \times u}$ ، بردار مشاهدات $b \in \mathbb{R}^n$ و مقادیر اولیه بردار مجهولات x_0
- مشخص کردن مقادیر ماکزیمم تکرار K_{max} ، معیار همگرایی δ و فاکتور تطابق α

مراحل الگوریتم:

- ۱- تنظیم سطح تُنکی $m=1$ و بردار مجموعه اندیس‌ها $I_x = \emptyset$
- ۲- قرار دادن مقدار اولیه برای شمارنده $k=0$ و بردار مجهولات $x_m^{(k)} = x_0$
- ۳- محاسبه بردار باقیمانده‌ها $v_m^{(k)} = b - Ax_m^{(k)}$
- ۴- تعیین m عنصر بزرگ بردار $U = A^* v_m^{(k)}$ و ذخیره اندیس‌های متناظر با عناصر در بردار مجموعه اندیس‌های I
- ۵- مشخص کردن اندیس‌های $I_0 \subset I$ مربوط به عناصری که دارای تطابق بیشتری با هم مطابق شرط $|U_i| \leq \alpha |U_j|$ for $i, j \in I_0$ هستند.
- ۶- تغییر بردار مجموعه اندیس‌های $I_x = I_x \cup I_0$ و تعیین زیرماتریس $B_{I_x} \subseteq A$ به نحوی که ستون‌های آن متناظر با ستون‌های ماتریس طراحی A با شماره اندیس I_x باشد.
- ۷- محاسبه جواب پایدار با پارامتر پایداری λ
$$x_{I_x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(\|b - B_{I_x} x\|_2^2 + \lambda^2 \|x - x_m^{(k)}\|_2^2 \right)$$
- ۸- اصلاح عناصر بردار مجهولات با عناصر $x_m^{(k+1)} = x_{I_x}$ و محاسبه مجدد بردار باقیمانده‌ها
$$v_m^{(k+1)} = b - Ax_m^{(k+1)}$$
- ۹- افزایش شمارنده $k = k + 1$ و بازگشت به مرحله ۳ تا زمانی که $k \leq K_{max}$ و شرط معیار همگرایی $\|I_x\|_0 < 2m$ و $\|v_m^{(k+1)}\|_2 < \delta$
- ۱۰- ذخیره نُرم بردار باقیمانده $v_m^{(k+1)}$ و نُرم بردار مجهولات $x_m^{(k+1)}$ ، افزایش سطح تُنکی $m = m + 1$ و بازگشت به مرحله ۲ تا زمانی که $m \leq u$

در این الگوریتم در هر مرحله یک جواب پایدار متناسب با سطح تُنکی مدنظر تعیین می‌گردد. همچنین با مشخص کردن فاکتور تطابق در مرحله ۵ عناصری که سازگاری بیشتری با هم دارند، برای محاسبه یک جواب

که با یک مساله بدوضع مواجه هستیم، استفاده از روش‌های معمول حل مساله منتج به نتایج صحیحی نخواهد شد. بنابراین برای حل اینگونه مسائل باید از روش‌های پایداری مناسب استفاده گردد. یکی از معروف‌ترین روش‌های پایداری برای حل یک مساله بدوضع استفاده از روش تیخونوف^۱ بوده که بطور مجزا توسط تیخونوف [۱۵] و فیلیپ [۱۶] ارائه شده است. این روش بر اساس مینیمم کردن نُرم بردار باقیمانده‌ها و یک ترم جبران‌کننده متناظر با نُرم بردار جواب با استفاده از رابطه زیر می‌باشد:

$$\hat{x}_{reg} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(\|b - Bx\|_2^2 + \lambda^2 \|x - x_0\|_2^2 \right) \quad (6)$$

در این رابطه x_0 مقدار اولیه تقریبی برای بردار جواب و λ پارامتر پایداری است که با استفاده از روش‌های مختلف نظیر معیار همگرایی منحنی L (L-curve) [۱۷] و یا روش اعتبارسنجی متقابل تعمیم‌یافته (GCV) [۱۸] قابل تعیین است. در واقع پارامتر پایداری تعادلی بین نُرم بردار باقیمانده و نُرم بردار جواب ایجاد می‌نماید. در الگوریتم SOMP بر اساس مینیمم کردن تابع GCV در رابطه زیر پارامتر پایداری بهینه در هر مرحله تعیین می‌شود:

$$GCV(\lambda) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{n \|b - Bx\|_2^2}{[\operatorname{trace}(I_n - BB^*)]^2} \right) \quad (7)$$

در این رابطه B^* زیرماتریس مبدل جهت محاسبه جواب برآوردشده مساله با ضرب آن در بردار مشاهدات است $(\hat{x}_{reg} = (B^T B + \lambda^2 I) B^T b = B^* b)$. در واقع با استفاده از این روش پایداری یک جواب پایدار با سطح تُنکی m برای مساله در مرحله m ام بدست می‌آید. سپس بردار باقیمانده‌ها براساس جواب تُنک حاصل اصلاح شده $(\hat{v}_{new} = b - A \hat{x}_{reg})$ و مراحل تا دستیابی به دقت مناسب و یا رسیدن به شرط توقف مدنظر تکرار می‌گردد. بر این اساس الگوریتم SOMP برای تعیین یک جواب تُنک برای مساله به قرار زیر است:

ورودی‌های الگوریتم:

^۱ Tikhonov regularization method
^۲ Generalized Cross Validation

و در معادله لاپلاس صدق می کند، بنابراین می توان آن را به سری هارمونیک های کروی بسط داد [۱۹]:

$$W_g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{p=0}^{N_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \sum_{q=0}^p (\bar{C}_{pq} \cos q\lambda + \bar{S}_{pq} \sin q\lambda) \bar{P}_{pq}(\cos\theta) \quad (9)$$

در این رابطه G ثابت جاذبه، M جرم زمین، R شعاع کره برلیان، \bar{C}_{pq} و \bar{S}_{pq} ضرایب نرمالیزه شده هارمونیک های کروی وابسته به توزیع جرم زمین و $\bar{P}_{pq}(\cos\theta)$ تابع لژاندر نوع اول نرمالیزه از درجه p و مرتبه q است. همچنین آنومالی پتانسیل T در هر نقطه از سطح زمین را می توان با کم کردن پتانسیل جاذبی نرمال $U_g(r, \theta)$ حاصل از یک میدان رفرانس از پتانسیل جاذبی W_g محاسبه نمود:

$$T(r, \theta, \lambda) = W_g(r, \theta, \lambda) - U_g(r, \theta) \quad (10)$$

در واقع با معلوم بودن مقادیر ضرایب هارمونیک های کروی می توان فرکانسی متناسب با درجه و مرتبه N_{max} برای تابع پتانسیل جاذبه و مشتقات مربوطه را در هر نقطه با استفاده از مساله مستقیم اشاره شده در روابط (۹) و (۱۰) بدست آورد. بزرگترین فرکانس سیگنال $f_{N_{max}}$ استخراج شده مربوط به ماکزیمم درجه بسط (N_{max}) دارای تناسب زیر با رزلوشن زمینی نمونه برداری (برحسب درجه یا کیلومتر) است:

$$L^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{N_{max}} \quad \text{or} \quad L_{Km} \approx \frac{40000 Km}{N_{max}} \quad (11)$$

در این رابطه L طول زمینی نمونه برداری است. در حالت معکوس برای تعیین ضرایب بسط هارمونیک های کروی با توجه به ماهیت جهانی آنها باید نمونه برداری با توزیع مناسب و بطور یکنواخت در کل کره زمین انجام شود. بر اساس قضیه شانون- نایکوئیست این نمونه برداری ها معمولاً با نرخ نایکوئیست صورت می گیرد. بر طبق این قضیه بزرگترین فرکانس بازبایی $f_{N_{max}}^R$ که از یک سری داده می توان استخراج نمود، برابر نصف فرکانس نمونه برداری است $(f_{N_{max}}^R \leq \frac{f_{N_{max}}}{2} \rightarrow N_{max}^R \leq \frac{N_{max}}{2})$. بنابراین با توجه به نرخ نایکوئیست برای بازبایی فرکانس

یکنواخت برای مساله استفاده می شوند [۹]. در واقع این فاکتور میزان تطابق عناصر یک بردار به مقدار ماکزیمم را نشان داده و در مسائل مختلف با توجه به ماهیت مساله تعیین می گردد. بعنوان مثال اگر این فاکتور $\alpha = 2$ در نظر گرفته شود، بدین معنا است که تنها عناصر U_j که مقادیر آنها بیش از $1/2$ (۵۰ درصد) مقدار ماکزیمم عنصر بردار هستند، برای تعیین جواب بهینه انتخاب گردند ($|U_j| \geq |U_{max}|/2$). خروجی این الگوریتم در واقع دو بردار \mathbb{X} و \mathbb{V} بوده که به ترتیب شامل ترم بردار باقیمانده و ترم بردار مجهولات با سطح تئکی m می باشند. در نهایت سطح تئکی بهینه^۱ می تواند با بررسی رفتار این بردارها برای مساله مورد نظر تعیین گردد. بر این اساس معمولاً چند جمله اول دو بردار \mathbb{X} و \mathbb{V} با توجه به بدو وضع بودن مساله دارای نوسانات زیادی بوده ولی پس از طی چندین تکرار این بردارها همگرا خواهند شد. بنابراین می توان نقطه همگرایی این دو بردار را با اعمال شرط زیر به عنوان محل سطح تئکی بهینه m_{opt} در نظر گرفت:

$$m_{opt} = i \text{ if } \forall j > i \Rightarrow \|\mathbb{V}_i - \mathbb{V}_j\| < \varepsilon_1 \cap \|\mathbb{X}_i - \mathbb{X}_j\| < \varepsilon_2 \quad (8)$$

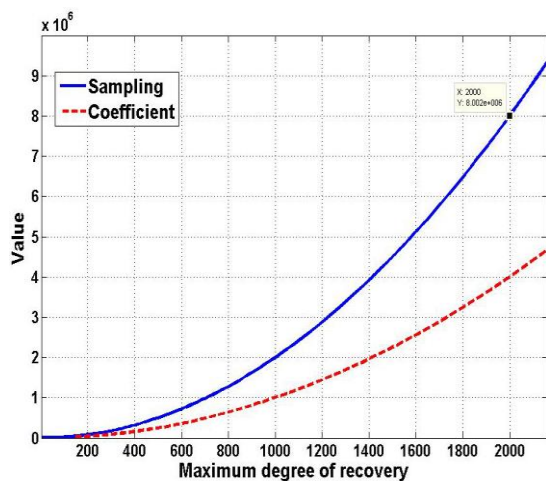
در این رابطه $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ معیار همگرایی بوده که توسط کاربر مشخص می گردند. معمولاً مسائل کاربردی با استفاده از الگوریتم فوق با چند تکرار ($K_{max} \leq 5$) همگرا شده و می توان یک جواب پایدار تئک برای مساله بدست آورد. ولی در مواقعی که سطح تئکی سیگنال کم و یا بردار مشاهدات آمیخته با نویز زیادی باشد، الگوریتم SOM ممکن است به تعداد دفعات نامعلوم تکرار گردد که در این صورت وجود شرط ماکزیمم تکرار K_{max} از تکرار به تعداد زیاد الگوریتم فوق جلوگیری می نماید.

۳- مدل سازی میدان گرانی زمین با تقریب تئک ضرایب هارمونیک های کروی

منظور از مدل سازی میدان گرانی زمین در حقیقت بیان ریاضی این کمیت فیزیکی و یا تابع های مختلف مربوط به آن با استفاده از توابع پایه مستقل می باشد. تابع پتانسیل جاذبه W_g برای یک نقطه با مختصات کروی (r, θ, λ) در خارج از سطح زمین یک تابع هارمونیک بوده

^۱ Optimal sparsity level

اساس وارون فراگیر ماتریس طراحی نظیر روش شبه-وارون مور-پنروس^۱ [۲۱، ۲۲، ۲۳] و یا روش‌های پایدارسازی مناسب اشاره شده قبل استفاده نمود. بنابراین برای بازیابی فرکانسی تا درجه و مرتبه $N_{max}^R \geq 2$ در مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین با $u' = (N_{max}^R + 1)^2 - 4$ ضریب مجهول، نیازمند نمونه‌برداری به تعداد $n = 2(N_{max}^R)^2$ در کل کره‌زمین هستیم. در شکل (۱) ارتباط بین ماکزیمم درجه بازیابی در بسط سری هارمونیک‌های کروی با ضرایب مجهول و تعداد نمونه‌برداری در کل کره‌زمین نشان داده شده است. ملاحظه می‌گردد برای مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین بر اساس بازسازی ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه 2160 نیازمند نمونه‌برداری در کل کره‌زمین بر روی گرید $5' \times 5'$ و جمع‌آوری بالغ بر 9,331,200 داده برای تعیین 4,669,917 ضریب مجهول هستیم که انجام این محاسبات مستلزم صرف زمان زیاد و استفاده از رایانه‌ای با قدرت پردازش بالا است. لذا در این مقاله سعی بر آن شده است تا با به کارگیری تئوری CS و با استفاده از الگوریتم SOMP علاوه بر مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین با دقت موردنظر بر اساس تقریب تُنک ضرایب هارمونیک کروی، در حجم محاسبات و نحوه نمونه‌برداری داده‌ها نیز کاهش قابل ملاحظه‌ای ایجاد گردد.



شکل ۱- ارتباط بین ماکزیمم درجه بازسازی در بسط سری هارمونیک‌های کروی با تعداد ضرایب مجهول و نمونه‌برداری

تعداد نمونه‌برداری بر روی گرید منظم در کل کره‌زمین (در راستای طول جغرافیایی) $\lambda \in [-180^\circ, 180^\circ]$ و عرض جغرافیایی $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ باید برابر $n = \left(\frac{360^\circ}{L}\right)^2 = 2(N_{max}^R)^2$ باشد. از طرفی رابطه (۹) نسبت به ضرایب هارمونیک‌های کروی خطی بوده و به ازای ماکزیمم درجه بازیابی N_{max}^R دارای $u = (N_{max}^R + 1)^2$ ضریب مجهول است. بنابراین رابطه (۱۰) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$b = b_0 + Ax \quad (12)$$

که در آن $b_{n \times 1} = [T(r_i, \theta_i, \lambda_i)]_{i=1}^n$ بردار مشاهدات شامل تابع‌های میدان‌گرانی زمین، $b_{0, n \times 1} = \left[\frac{GM}{R} - U_g(r_i, \theta_i) \right]_{i=1}^n$ ترم صفر، $x_{u' \times 1} = [x_{pq}]$; بردار مجهولات شامل ضرایب هارمونیک‌های کروی به استثنای ضرایب صفر و یک ($A_{n \times u'} = \frac{GM}{R} [A_{pq}(i)]_{i=1}^n$ و $(\bar{C}_{00}, \bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11})$ ماتریس طراحی است. بطوریکه داریم:

$$x_{pq} = \begin{cases} \bar{C}_{pq} \\ \bar{S}_{pq} \end{cases} \text{ for } p = 2, 3, \dots, N_{max}^R \quad (13)$$

and $0 \leq q \leq p$ where if $q = 0$ then $\bar{S}_{pq} = \emptyset$

$$A_{pq}(i) = \left(\frac{R}{r_i} \right)^{p+1} [\cos q \lambda_i \quad \sin q \lambda_i] \bar{P}_{pq}(\cos \theta_i) \quad (14)$$

for $p = 2, 3, \dots, N_{max}^R$ and $0 \leq q \leq p$

در نهایت با حل مساله معکوس مقادیر ضرایب مجهول هارمونیک‌های کروی محاسبه می‌گردد:

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|b - b_0 - Ax\| \quad (15)$$

البته اگر در رابطه (۱۵) تعداد نمونه‌برداری کمتر از نرخ نایکوئیست باشد، با یک مساله بدوضع مواجه خواهیم شد [۲۰، ۲]. همانطور که قبلاً مطرح گردید با استفاده از روش‌های معمول محاسباتی نظیر OLS نتایج درستی برای مساله بدست نخواهد آمد. در این‌گونه موارد برای تعیین جواب بهینه برای مساله معکوس باید از الگوریتم‌هایی بر

^۱ Moore-Penrose pseudo inverse

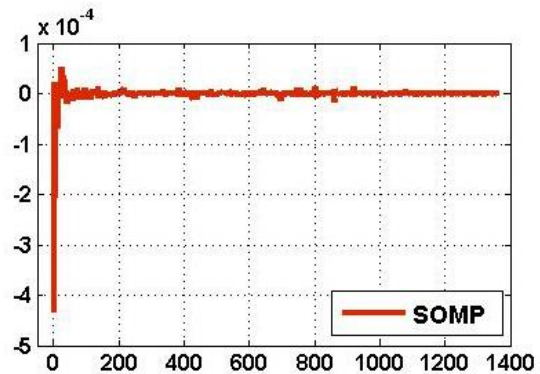
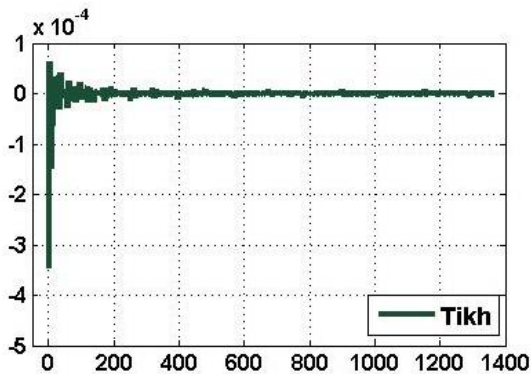
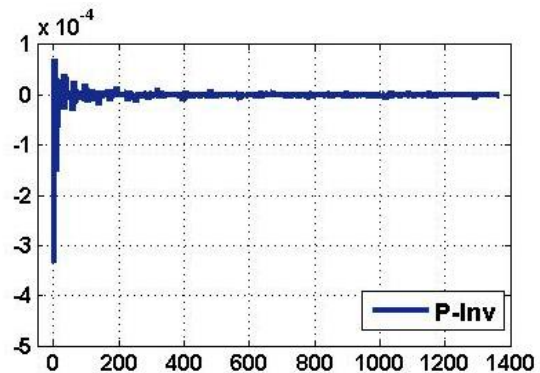
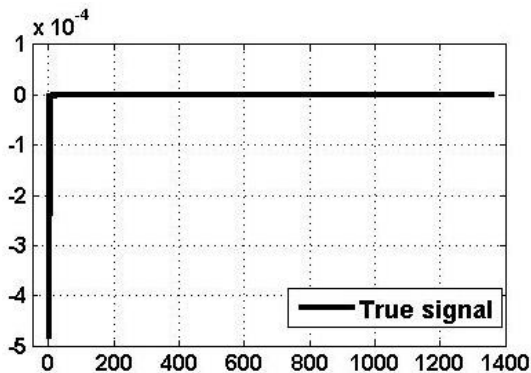
۴- محاسبات و نتایج عددی

در این بخش قابلیت و توانایی الگوریتم SOMP در تقریب تنگ ضرایب هارمونیک های کره مدل ژئوپتانسیلی جهانی (GGM) جهت مدل سازی میدان گرانی زمین با تعداد نمونه برداری کمتر از روش های معمول مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور ابتدا مقدار آنومالی پتانسیل با استفاده از مدل ژئوپتانسیلی جهانی EIGEN6C4 تا درجه و مرتبه $N_{max} = 36$ و حذف یک میدان فرانس بر روی گرید منظم $5^\circ \times 5^\circ$ محاسبه شده است. در این محاسبات تعداد داده نمونه برداری شده کمتر از نرخ نایکوئیست و برابر $n = 1,800$ نقطه برای کل کره زمین به منظور تعیین $u = 1,365$ ضریب مجهول هارمونیک های کره در نظر گرفته شده است. همچنین

450 نقطه با پراکندگی یکنواخت در سرتاسر کره زمین به عنوان نقاط کنترل نتایج محاسبات در نظر گرفته شده و آنومالی پتانسیل تا درجه و مرتبه مشخص برای این نقاط محاسبه شده است. سپس با استفاده از چهار روش ۱- کمترین مربعات معمول (OLS)، ۲- شبه-وارون (P-Inv)، ۳- پایدارسازی تیخونوف (Tikh) و ۴- الگوریتم SOMP پیشنهادی ضرایب هارمونیک های کره بعنوان مجهولات در یک مساله معکوس محاسبه شده است. در این محاسبات به منظور کنترل صحت نتایج می توان با مقایسه ضرایب برآورد شده و مقادیر اولیه حاصل از مدل ژئوپتانسیلی بردار خطا $(e = x - \hat{x})$ را برای هر یک از روش های اشاره شده بدست آورد. در جدول (۱) مقادیر عددی مربوط به بردار خطا با استفاده از چهار روش فوق ارائه شده است.

جدول ۱- نتایج آماری مربوط به بردار خطا در بازسازی ضرایب هارمونیک های کره تا درجه و مرتبه ۳۶ با استفاده از روش های مختلف

Method	Min(e)	Mean(e)	Max(e)	SD(e)	RMS(e)	Sparsity
OLS	-5.7e+34	1.5e034	7.9e+35	9.7e+34	9.8e+34	1365
P-Inv	-1.5e-04	9.4e-09	1.5e-04	7.3e-06	7.3e-06	1365
Tikh	-1.4e-04	7.9e-09	1.5e-04	7.0e-06	7.0e-06	1365
SOMP	-5.1e-05	2.5e-09	7.0e-05	4.1e-06	4.1e-06	1125

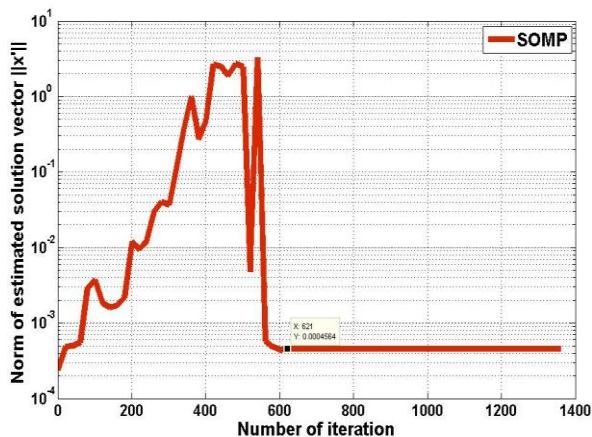


شکل ۲- ضرایب بازسازی شده با استفاده از روش های مختلف

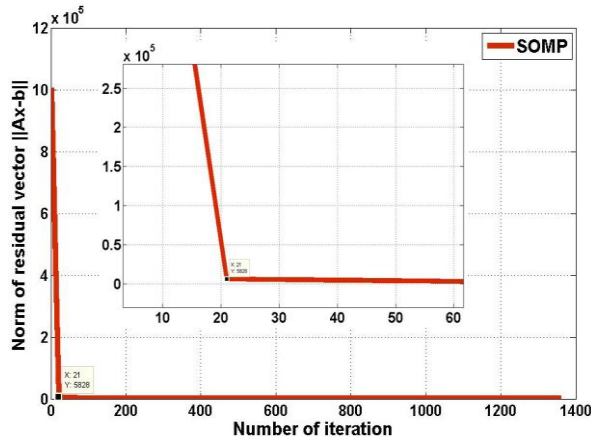
جدول ۲- نتایج آماری مربوط به بردار باقیمانده در بازسازی ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶ با استفاده از روش‌های مختلف بر روی

نقاط کنترل

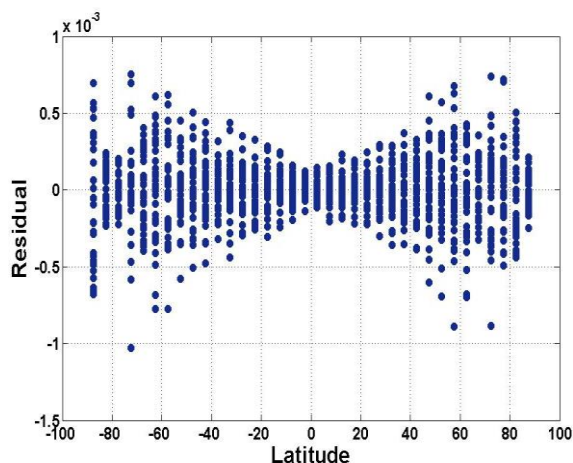
Method	Min(v)	Mean(v)	Max(v)	SD(v)	RMS(v)
OLS	-9.9e+043	3.0e+044	5.6e+045	1.1e+045	1.6e+045
P-Inv	-9.6e-001	6.7e-003	1.0e+000	3.2e-001	4.4e-001
Tikh	-4.5e-004	1.5e-011	4.7e-004	9.4e-005	1.3e-004
SOMP	-1.0e-003	1.1e-010	7.5e-004	2.1e-004	2.9e-004



شکل ۴- نرم بردار مجهولات در تکرارهای مختلف بر اساس الگوریتم SOMP - بردار مجهولات در تکرار ۶۲۱ همگرا شده است.



شکل ۳- نرم بردار باقیمانده در تکرارهای مختلف بر اساس الگوریتم SOMP - بردار باقیمانده در تکرار ۲۱ همگرا شده است



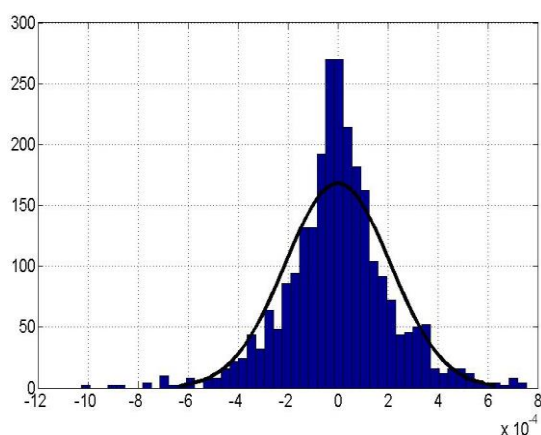
شکل ۵- پراکندگی مقادیر باقیمانده‌ها نسبت به عرض جغرافیایی (هر امتداد نشان دهنده یک مدار نمونه‌برداری است).

آنومالی پتانسیل را در نقاط کنترل محاسبه کرده و با مقادیر اولیه آن مقایسه نمود. در این صورت بجای بردار خطا، بردار باقیمانده ($\hat{v} = b - A\hat{x}$) در هر نقطه محاسبه می‌گردد. می‌دانیم که بعنوان مثال تعیین سطح مبنای ارتفاعی با دقت میلیمتر نیازمند مدلسازی تابع آنومالی پتانسیل بر روی سطح رفرانس (ژئوئید یا بیضوی) با دقت $10^{-3} m^2/s^2$ است که بر اساس نتایج محاسبات تنها با استفاده از روش‌های پایدارسازی مناسب می‌توان به دقت موردنظر دست یافت. جدول (۲) نتایج آماری محاسبات

با توجه به نتایج محاسبات همانطور که انتظار می‌رود ضرایب هارمونیک‌های کروی تعیین شده با استفاده از روش OLS بدلیل بدوضع بودن مساله کاملاً نادرست و غلط می‌باشند. ولی اختلاف ضرایب محاسبه شده با مقادیر اولیه بر اساس دو روش P-Inv و Tikh به ترتیب دارای ریشه مربعی متوسط (RMS) 7.3×10^{-6} و 7.0×10^{-6} است. ولی با اجرای الگوریتم SOMP طی یک فرایند تکراری با توجه به ماهیت تُنک بودن آن تنها ضرایبی که دارای بیشترین اثر متناسب با نمونه‌برداری انجام شده هستند، تعیین شده و RMS بردار خطا نیز برابر 4.1×10^{-6} محاسبه می‌گردد. در این محاسبات ماکزیمم تکرار $K_{max} = 5$ ، فاکتور تطابق $\alpha = 5$ و معیار همگرایی الگوریتم برابر $\delta = 10^{-12}$ در نظر گرفته شده است. همچنین شکل (۲) ضرایب بازسازی شده با استفاده از روش‌های مختلف را نشان می‌دهد. البته از آنجا که هدف اصلی این تحقیق مدلسازی میدان گرانی زمین و تعیین مشتقات تابع پتانسیل جاذبه با دقت موردنظر است، می‌توان با استفاده از ضرایب مجهول برآورد شده بر اساس روش‌های مختلف، مقدار تابع

۱ Root Mean Square

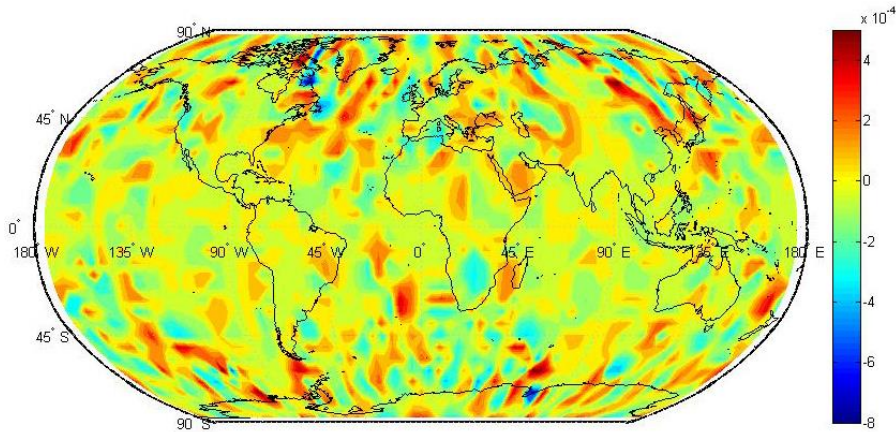
خطای باقیمانده‌ها می‌توان در نحوه نمونه‌برداری نیز تجدید نظر نمود. بعنوان مثال بجای نمونه‌برداری بر روی گرید جغرافیایی با فواصل-زاویه‌ای مساوی در راستای طول و عرض جغرافیایی با نرخ نایکوئیست می‌توان جمع‌آوری داده را بر روی گرید ریوتر^۱ [۲۴] با فواصل-طول مساوی در امتداد طول جغرافیایی انجام داد. در شکل (۸) تعداد $n=1,326$ نمونه‌برداری بر اساس تئوری CS بر روی گرید ریوتر به تعداد $n \approx u$ نسبت به نمونه‌برداری بر اساس نرخ نایکوئیست بر روی گرید جغرافیایی $5^\circ \times 5^\circ$ نشان داده شده است. با انجام محاسبات مربوطه ملاحظه می‌گردد صورت وابستگی مقادیر باقیمانده‌ها نسبت به عرض جغرافیایی از بین رفته است (شکل ۹). همچنین شکل (۱۰) پراکندگی توزیع مقادیر باقیمانده را در سطح کره‌زمین بر اساس تئوری CS و با انتخاب ماتریس طراحی مناسب نشان می‌دهد. در این محاسبات از تعداد کمتری نمونه‌برداری ($n \approx u$) برای مدل‌سازی میدان گرانی زمین به منظور تقریب تَنک ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶ استفاده شده است. نتایج محاسبات نشان‌دهنده آن است که الگوریتم SOMP حتی با توجه به بدوضعی مساله که در آن عدد شرط ماتریس ضرایب در حدود 4×10^{31} می‌باشد، قادر به بازسازی میدان گرانی زمین با دقت موردنظر با تعداد نمونه‌برداری کمتر نسبت به نرخ نایکوئیست است. جدول (۳) نتایج آماری مربوط به بازسازی میدان گرانی زمین بر اساس تئوری CS و انتخاب ماتریس طراحی مناسب را ارائه می‌دهد.



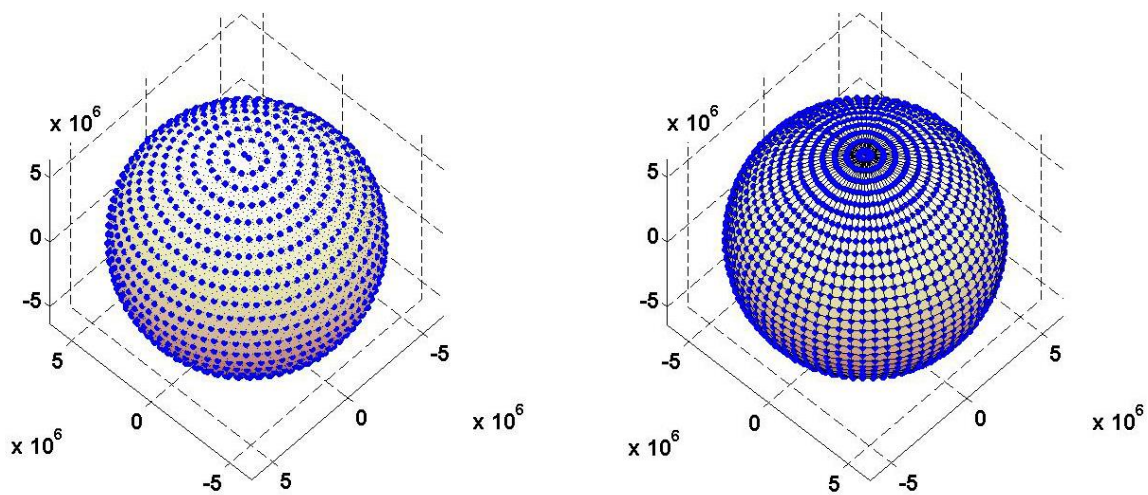
شکل ۷- هیستوگرام مقادیر باقیمانده‌ها

مربوط به بردار باقیمانده‌ها را با استفاده از روش‌های مختلف بر روی نقاط کنترل نشان می‌دهد. بر اساس نتایج بدست آمده با استفاده از روش‌های Tikh و SOMP دقت مدنظر برای محاسبه آنومالی پتانسیل تا درجه و مرتبه ۳۶ تامین شده است. همچنین در این محاسبات با اجرای الگوریتم SOMP و برقراری معیار همگرایی $\epsilon_1 = 10^{-4}$ ، نُرم بردار باقیمانده بعد از 21 تکرار همگرا شده ولی با توجه به بدوضع بودن مساله این نقطه همگرایی مطابق شکل ۴ معادل جواب بهینه در حل مساله CS نخواهد بود. بنابراین با در نظر گرفتن معیار همگرایی $\epsilon_2 = 10^{-1}$ در شرط رابطه (۸) و بررسی رفتار نُرم بردار مجهولات در تکرارهای مختلف، سطح تَنکی بهینه (m_{opt}) در تکرار 621 تعیین می‌گردد. در اشکال (۳) و (۴) به ترتیب نُرم بردار باقیمانده و نُرم بردار مجهولات در هر تکرار با استفاده از الگوریتم SOMP نشان داده شده است. در واقع با استفاده از الگوریتم SOMP با حذف $1365 - 1125 = 240$ ضریب معادل ۱۸٪ کل ضرایب مدل‌سازی میدان گرانی زمین با از دست دادن حداقل اطلاعات قابل انجام بوده و نشان دهنده آن است که در این سطح تَنکی بهینه تنها با برآورد 1125 ضریب از ضرایب مجهول هارمونیک‌های کروی می‌توان به رنج دقت موردنظر در مدل‌سازی میدان گرانی زمین دست یافت. البته بر اساس تئوری CS در الگوریتم SOMP به تعداد نمونه‌برداری متناسب با سطح تَنکی مساله که بسیار کمتر از نرخ نایکوئیست است، نیازمندیم. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده بر اساس الگوریتم پیشنهادی بیشترین مقدار خطای محاسبات در قطبین - جایی که تراکم داده‌ها و به تناسب آن شباهت عناصر ماتریس طراحی بیشتر است - می‌باشد. شکل (۵) پراکندگی مقدار باقیمانده نسبت به عرض جغرافیایی را نشان می‌دهد. جایی که در قطبین تراکم داده‌ها با توجه به نمونه‌برداری بر روی گرید جغرافیایی بیشتر است. همچنین در اشکال (۶) و (۷) به ترتیب توزیع مقدار باقیمانده‌ها در کل کره‌زمین و هیستوگرام خطا در مدل‌سازی میدان گرانی با استفاده از الگوریتم SOMP نشان داده شده است. البته همانطور که اشاره شد در تئوری CS انتخاب ماتریس طراحی مناسب با کمترین شباهت بین عناصر آن از اهمیت خاصی برخوردار بوده و معمولاً با یک سری نمونه‌برداری اختیاری $n \approx u$ (کمتر از نرخ نایکوئیست) عملیات بازسازی سیگنال انجام می‌شود. در این محاسبات نیز با توجه به پراکندگی مقادیر

^۱ Reuter grid



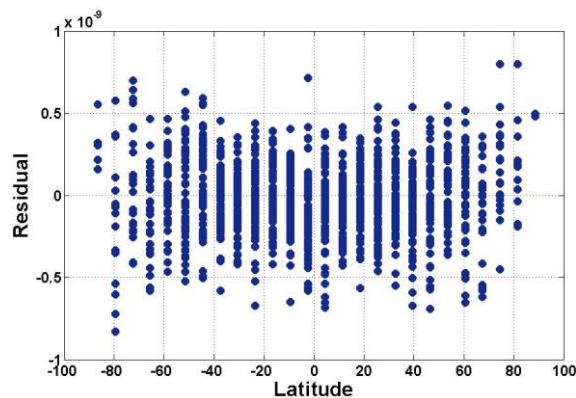
شکل ۶- نحوه پخش مقدار باقیمانده در مدل سازی میدان گرانی با استفاده از الگوریتم SOMP



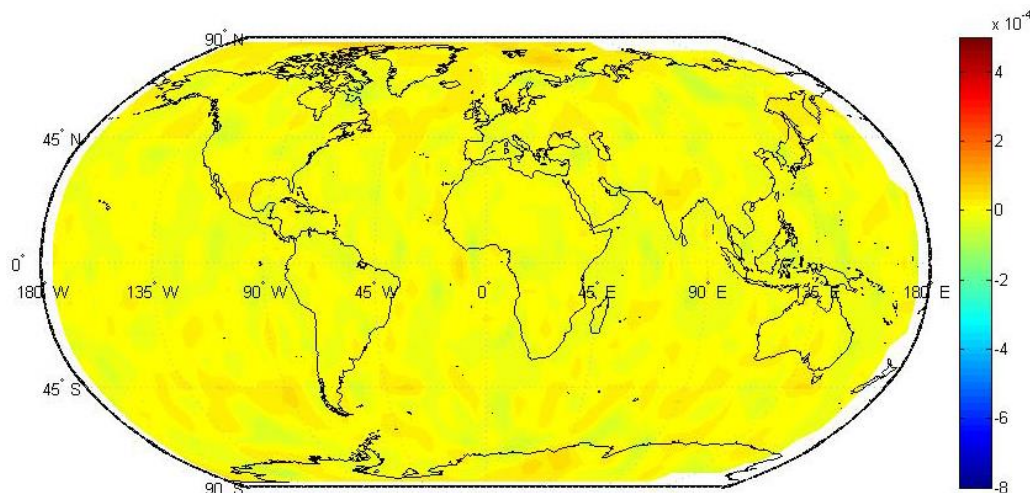
شکل ۸- تعداد ۲۵۹۲ داده نمونه برداری شده بر روی گرید جغرافیایی $5^\circ \times 5^\circ$ با توجه به نرخ ناکوئیسیت (شکل سمت راست) و تعداد ۱۳۲۶ داده نمونه برداری شده بر روی گرید ریوتر بر اساس تئوری CS (شکل سمت چپ) به منظور مدل سازی میدان گرانی زمین

جدول ۳- نتایج آماری محاسبات مربوط به بازسازی میدان گرانی زمین بر اساس تئوری CS با استفاده از الگوریتم SOMP

Parameter	Min	Mean	Max	SD	RMS
Error	-1.1e-4	2.3e-8	1.1e-4	6.3e-6	6.3e-6
Residual	-6.0e-5	-1.8e-6	1.4e-4	1.8e-5	1.7e-5



شکل ۹- پراکندگی مقادیر باقیماندهها نسبت به عرض جغرافیایی با انتخاب ماتریس طراحی مناسب بر اساس تئوری CS (هر امتداد نشان دهنده یک مدار نمونه برداری است).



شکل ۱۰- پراکندگی یکنواخت مقدار باقیمانده در مدل‌سازی میدان گرانی بر اساس تئوری CS

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در مدل‌سازی میدان گرانی زمین بر اساس تعیین ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه مشخص کیفیت و تراکم داده‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است. معمولاً نمونه‌برداری‌های انجام شده با نرخ نایکوئیست مستلزم صرف هزینه زیاد جهت جمع‌آوری داده‌ها می‌باشند. با استفاده از تئوری CS یک سیگنال را می‌توان با تعداد نمونه‌برداری کمتر از نرخ نایکوئیست بصورت تُنگ بر اساس عناصر غیرصفری که سهم عمده‌ای در بازیابی سیگنال موردنظر دارند، تقریب زد. در روش‌های متداول نمونه‌برداری فشرده فرض بر آن است که مساله خوش‌وضع بوده و اطلاعات اولیه در مورد سطح تُنگی سیگنال اصلی وجود دارد. بنابراین در یک الگوریتم تکرارشونده سعی می‌گردد جواب بهینه با مینیمم کردن نُرم بردار خطا تعیین شود. ولی در این حالت با یک مساله بدوضع مواجه هستیم و معمولاً سطح تُنگی سیگنال نیز دقیقاً مشخص نیست. در این‌گونه مسائل مینیمم کردن نُرم بردار باقیمانده متناسب با مینیمم شدن نُرم بردار خطا و تعیین جواب بهینه نخواهد بود. با استفاده از الگوریتم SOMPA ارائه شده در این مقاله می‌توان یک سیگنال را بصورت تُنگ با تعداد کمتری نمونه‌برداری با دقت موردنظر بازیابی

نمود. الگوریتم فوق به منظور تقریب تُنگ ضرایب هارمونیک‌های کروی جهت مدل‌سازی میدان گرانی زمین استفاده شده است. بر این اساس طی یک فرآیند تکرارشونده سطح تُنگی سیگنال با بررسی رفتار نُرم بردار باقیمانده‌ها و نُرم بردار مجهولات در هر تکرار تعیین می‌گردد. با مقایسه نتایج بدست آمده با استفاده از الگوریتم فوق با روش‌های دیگر حل مساله معکوس نظیر روش‌های OLS، P-Inv و روش پایدارسازی Tikh می‌توان ادعا نمود که با تعداد نمونه‌برداری ۵۰ درصد کمتر از نرخ نایکوئیست دقت مدنظر در بازیابی میدان گرانی زمین قابل دستیابی است. همچنین با بررسی توزیع مقادیر بردار باقیمانده‌ها می‌توان تراکم و نحوه پراکندگی نقاط نمونه‌برداری را نیز اصلاح نمود.

سپاسگزاری

ضرایب هارمونیک‌های کروی میدان گرانی زمین برای انجام محاسبات مربوطه از سایت GFZ آلمان (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>) دریافت شده است. همچنین از مشاوره و راهنمایی‌های تمام اشخاص بخصوص خانم دکتر دینا نیدل که در تکمیل الگوریتم مدنظر ما را یاری رساندند، تقدیر و تشکر می‌گردد.

مراجع

- [1] Sneeuw N., (1994). Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. Geophys. J. Int.

- [2] Sneeuw N., (2000). Dynamical satellite geodesy on the torus: Block-diagonality from a semi-analytical approach. In M.G. Sideris, editor, Gravity, Geoid, and Geodynamics, IAG Symp osia. IAG.
- [3] Lustig M., Donoho D. L., Santos J. M. and Pauly J. M., (2008). Compressed sensing MRI, IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, 72.
- [4] Mallat S.G. and Zhang Z., (1993). Matching pursuits with time–frequency dictionaries IEEE Trans. Signal Process. 41 3397–415.
- [5] Donoho D. L and Huo X., (2001). Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. IEEE Trans. Inform. Th., 47:2845-2862.
- [6] Pati Y.C., Rezaifar R. and Krishnaprasad P.S., (1993). Orthogonal matching pursuit, Recursive function approximation with application to wavelet decomposition, In Proc. 27th Annu. Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, vol. 1, pp. 40-44.
- [7] Tropp J. A., Gilbert A. C., (2007). Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit, IEEE Trans. Info. Theory. To appear.
- [8] Needell D., Vershynin R., (2008). Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. Found. Comput. Math., 9, 317–334.
- [9] Needell D. and Tropp J., (2009). CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 26, no. 3, pp. 301–321.
- [10] Candès E., Romberg J. and Tao T., (2006). Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489-509.
- [11] Donoho D., (2006). Compressed sensing, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306.
- [12] Candès E. J. and Tao T., (2004). Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 12, pp. 5406–5425.
- [13] Candès E. J. Romberg T., and Tao T., (2006). Robust uncertainty principle: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, IEEE Trans. Inform. Theory 52, 489-509..
- [14] Baraniuk R. G., Davenport M., DeVore R., and Wakin M. B., (2007). A simple proof of the restricted isometry principle for random matrices (aka the Johnson-Lindenstrauss lemma meets compressed sensing), Constructive Approximation.
- [15] Tikhonov A. N., (1963). Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, Soviet Math. Dokl., 4, 1035-1038.
- [16] Philips D., (1962). A technique for numerical solution of certain integral equations of the first kind, Journal of the Association for Computing machinery, 9:84-87.
- [17] Hansen P.C., (1992). Analysis of discrete ill-posed problem by means of the L-curve. SIAM review, 34(4): 561-580.
- [18] Hansen P.C., (1987). The truncated SVD as a method for regularization. BIT Computer Science and Numerical Mathematics, 27:534-553.
- [19] Heiskanen WA, Moritz H, (1967). Physical Geodesy. WH Freeman and Co., San Francisco.
- [20] Hadamard J., 1923. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, Haven.
- [21] Moore E. H., (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix. Bulletin of the American Mathematical Society 26 (9): 394–395. doi:10.1090/S0002-9904-1920-03322-7.
- [22] Bjerhammar A., (1951). Application of calculus of matrices to method of least squares; with special references to geodetic calculations, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 49.
- [23] Penrose R., (1955). A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51: 406–413. doi:10.1017/S0305004100030401.
- [24] Reuter R., (1982). Über Inegralformeln der Einheitskugel und harmonische Splinefunktionen, Veröffentlichungen des Geodatischen Instituts, RWTH Aachen, 33.