

آنالیز سری‌های زمانی GPS منطقه البرز

رامین تهرانچی^{۱*}، خسرو مقتصد آذر^۲، حمیدرضا نانکلی^۳

^۱ کارشناس ارشد ژئودزی - گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده مهندسی - دانشگاه زنجان
r.tehranchi67@gmail.com

^۲ استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه تبریز
moghtased@tabrizu.ac.ir

^۳ دکتری ژئودزی - سازمان نقشه برداری کشور
nankali@ncc.org.ir

(تاریخ دریافت آذر ۱۳۹۴، تاریخ تصویب دی ۱۳۹۴)

چکیده

سری‌های زمانی GPS شامل یک ترند خطی، حرکات پریودیک، آفست‌ها و یکسری رفتارهای دیگر تحت عنوان نویز می‌باشند. با توجه به کاربردهای متفاوت سری‌های زمانی مانند بررسی حرکات تکنونیک، تغییر پوسته زمین و دینامیک زلزله و غیره باید سری‌های زمانی با دقت بالایی تقریب گردند. برای این منظور لازم است که مولفه‌های سیستماتیک موجود در مدل تابعی با دقت بالایی تعیین شوند. در این تحقیق علاوه بر موارد ذکر شده، اثر زلزله نیز در سری‌های زمانی در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه لرزه خیزترین منطقه شمال ایران منطقه البرز است، ۲۵ ایستگاه دائمی این منطقه (تقریباً با پوشش زمانی بین سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۳ میلادی) برای مطالعه انتخاب گردیده است. برای کشف اثر زلزله، با توجه به نمایش هندسی رفتار سری زمانی و همچنین بررسی زمین لرزه‌های رخ داده در منطقه، به روش آزمون و خطا زمین لرزه‌های موثر در رفتار سری‌های زمانی شناسایی شده است. نتایج حاصل بیانگر رفتار شبیه به هم ایستگاه‌ها (وقوع آفست در زمان‌های مشترک و تاثیر مشابه زلزله) می‌باشد که علت آن، انتشار اثرات سیستماتیک از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر در هنگام پردازش است. همچنین در صورتیکه ماتریس کواریانس مشاهدات بصورت ترکیب سه نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی در نظر گرفته شود، آنالیز نویز سری‌های زمانی با استفاده از روش برآورد مولفه‌های واریانس (به روش کمترین مربعات)، بیانگر این مورد است که صرفنظر کردن از اثر زلزله اثر خود را بصورت حضور نویز گام تصادفی، به ترتیب در ۸۸، ۱۲ و ۶۰ درصد سری‌های زمانی مولفه‌های شمالی، شرقی و ارتفاعی نشان خواهد داد. در صورتیکه اثر زلزله نیز در نظر گرفته شود، نویز گام تصادفی، به ترتیب در ۱۲، ۱۲ و ۳۶ درصد سری‌های زمانی مولفه‌های شمالی، شرقی و ارتفاعی دارای مقدار مثبت خواهد بود. همچنین با توجه به رفتار مشابه سری‌های زمانی پیشنهاد می‌شود که یک باز پردازش برای آن‌ها انجام گیرد.

واژگان کلیدی: سری‌های زمانی GPS، آنالیز نویز، روش کمترین مربعات

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

رفتار سری‌های زمانی را می‌توان در قالب مدل تابعی و مدل آماری معرفی نمود. مدل تابعی در واقع بیانگر بخش قابل مدل‌سازی سری‌های زمانی (ترند خطی، حرکات پریودیک، آفست‌ها^۱ و اثرات لرزه‌ای احتمالی) و یکسری رفتارهای دیگر تحت عنوان نویز می‌باشد. ساختار نویز نیز در قالب مدل آماری معرفی می‌گردد. با توجه به کاربردهای متفاوت سری‌های زمانی مانند بررسی حرکات تکتونیک، تغییر پوسته زمین و دینامیک زلزله و غیره باید مدل تابعی و آماری آن‌ها با دقت بالایی تقریب گردد.

عدم تعیین دقیق مدل تابعی باعث آربب بودن نتایج حاصل از آنالیز سری زمانی خواهد بود. بعنوان مثال توماس و همکاران [۹] سرعت بالا آمدن جنوبگان^۲ شرقی را تقریباً $2/1 \text{ mm/yr}$ کمتر از آرگوس و همکاران [۳] برآورد کردند که برخی از دلایل آن به علت تفاوت در بررسی آفست بود.

طبق نتایج محققان، سری‌های زمانی حاوی نویز رنگی می‌باشند [۱، ۲، ۱۱، ۱۲]. علت ایجاد نویز رنگی در سری زمانی روزانه GPS به طور کامل شناخته نشده‌است. عواملی از جمله مدل سازی ناقص مدار ماهواره، خطاهای محیط انتقال امواج GPS، خطاهای گیرنده GPS، اغتشاشات سیگنال‌های الکتريکی، مدل‌سازی ناقص اثر جذر و مد و بارگذاری‌های اقیانوسی، فشارهای اتمسفریک و ... می‌تواند باعث ایجاد نویز رنگی در سری‌های زمانی روزانه GPS شود [۶، ۱۱].

از جمله روش‌های شناخته شده برای برآورد مولفه‌های نویز می‌توان به روش برآورد درست‌نمایی ماکزیمم [۴] و روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس اشاره کرد [۲]. ممکن است نتایج حاصل از این روش‌ها، مقادیر منفی را به مولفه‌های واریانس نسبت دهد که از لحاظ ریاضی فاقد مفهوم می‌باشد. مقتصد آذر و همکاران روش درست‌نمایی ماکزیمم را بهبود داده‌اند که مشکل منفی بودن مولفه‌های واریانس را برطرف می‌کند [۵].

جهت مدل‌سازی نویز سری‌های زمانی GPS سه مدل نویز سفید، ترکیبی از نویز سفید و نویز فلیکر و ترکیبی از نویز سفید و نویز گام تصادفی پیشنهاد شده‌است [۱، ۲،

۱۱]. ژانگ و همکارانش در سال ۱۹۹۷ با مطالعه ۱۹ ماه داده‌های سری زمانی روزانه GPS برای شبکه واقع در کالیفرنیا جنوبی به این نتیجه رسیدند که بهترین مدل برای توصیف نویز سری زمانی GPS به صورت ترکیبی از نویز سفید به همراه نویز فلیکر می‌باشد. این مدل نویز رنگی نشان داد که میزان عدم قطعیت سرعت ایستگاه‌ها ۳ تا ۶ برابر بیشتر از حالتی است که مدل بصورت نویز سفید خالص در نظر گرفته می‌شود [۱۱]. روحی و جمور نشان دادند که پس از آنالیز نویز تفاوت زیادی در مقدار سرعت حاصل نمی‌شود ولی عدم قطعیت سرعت ایستگاه‌های ایران ۸ برابر تغییر پیدا می‌کند [۷].

هدف از این مقاله، آنالیز سری‌های زمانی (بررسی مدل تابعی و آماری) ایستگاه‌های دائمی GPS برای منطقه البرز می‌باشد. ابتدا به معرفی منطقه مورد مطالعه و داده‌های استفاده شده در این تحقیق خواهیم پرداخت. در ادامه مدل تابعی سری‌های زمانی و همچنین کشف اثرات سیستماتیک آفست و زلزله بیان خواهد شد. در ادامه مدل آماری سری‌های زمانی و سپس نحوه برآورد مولفه‌های نویز به روش کمترین مربعات توضیح داده خواهد شد. در پایان نیز نتیجه گیری‌های بعمل آمده از این تحقیق بیان خواهد شد.

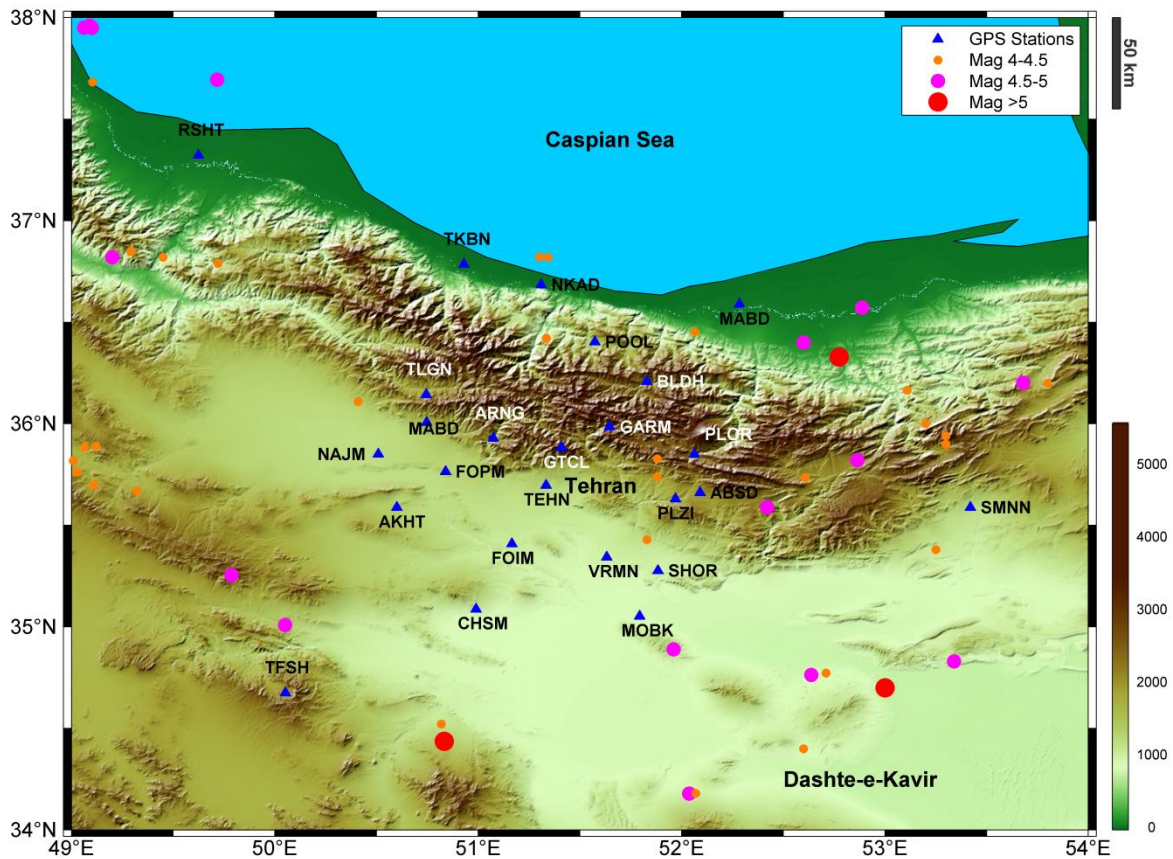
۲- منطقه مورد مطالعه

رشته کوه البرز که در شمال ایران در محدوده بین طول‌های $49^{\circ}E$ تا $53^{\circ}E$ و عرض بین $34/5^{\circ}N$ تا $37/5^{\circ}N$ واقع است، پوسته اقیانوسی خزر را از فلات مرکزی ایران جدا می‌کند. این رشته کوه با گسل امتداد لغز و معکوس، فعال‌ترین منطقه لرزه‌ای ایران می‌باشد. در شکل ۱ موقعیت ۲۵ ایستگاه و همچنین زمین لرزه‌های رخ داده بین سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۳ میلادی نشان داده شده است (اطلاعات مربوط به زمین لرزه‌ها از سایت ANSS اخذ شده‌است).

۳- مدل تابعی

در آنالیز سری زمانی موقعیت، یک مدل برای حرکت ایستگاه استفاده می‌شود که موقعیت ایستگاه $v(t)$ در هر جهت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۶]:

^۱ offset
^۲ Antarctica



شکل ۱- موقعیت ایستگاه‌های GPS منطقه البرز و زمین لرزه‌های رخ داده بین سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۳ میلادی

می‌کند که در آن H تابع پله‌ای هویساید^۱ می‌باشد. همچنین حرکات پس‌لرزه‌ای بصورت یک تغییر سرعت h_j و (یا) یک تنزل نمایی با اندازه k_j در زمان‌های زلزله T_{h_j} و T_{k_j} مدل‌بندی می‌شوند. e نیز خطاهای اندازه‌گیری مربوط به ایستگاه است. با فرض اینکه اپک آفست‌ها معلوم و شناخته شده هستند، مدل حرکت ایستگاه نسبت به ضرایب مجهول، خطی می‌باشد:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2)$$

$$= A_1 \mathbf{x}_1 + A_w \mathbf{x}_w + A_{off} \mathbf{x}_{off} + A_s \mathbf{x}_s + \mathbf{e}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} = [y(t_1) \quad y(t_2) \quad \dots \quad y(t_m)]^T \\ \mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_w^T \quad \mathbf{x}_{off}^T \quad \mathbf{x}_s^T]^T \\ \mathbf{x}_1 = [y_0 \quad r]^T \\ \mathbf{x}_w = [\mathbf{a}^T \quad \mathbf{b}^T]^T \\ \mathbf{x}_{off} = \mathbf{g} \\ \mathbf{x}_s = [\mathbf{h}^T \quad \mathbf{k}^T]^T \end{array} \right. \quad (3)$$

$$y(t_i) = y_0 + \pi_i + a_1 \sin(2\pi t_i) + b_1 \cos(2\pi t_i) + a_2 \sin(4\pi t_i) + b_2 \cos(4\pi t_i) + \sum_{j=3}^{12} (a_j \sin \omega_j t_i + b_j \cos \omega_j t_i) + \sum_{j=1}^{n_g} g_j H(t_i - T_{g_j}) + \sum_{j=1}^{n_h} h_j H(t_i - T_{h_j}) t_i + \sum_{j=1}^{n_k} k_j \exp(-(t_i - T_{k_j}) / \tau_j) H(t_i - T_{k_j}) + e_i \quad (1)$$

که t_i به ازای $i=1,2,\dots,m$ زمان هر اپک در واحدهایی از سال و t_0 مبدأ زمان می‌باشد. r و y_0 بترتیب موقعیت ایستگاه در زمان $t_i = t_0$ و سرعت ثابت ایستگاه را نشان می‌دهند. ضرایب a_1 و b_1 بیانگر حرکت دوره‌ای سالیانه می‌باشند، در حالی که a_2 و b_2 حرکت دوره‌ای نیم‌سالیانه را توصیف می‌کنند. ضرایب a_3 تا a_{10} و b_3 تا b_{10} بیانگر بیانگر حرکات دوره‌ای $350/n$ روزه ($n=1,2,\dots,8$) می‌باشند [۱]. همچنین a_{11} و b_{11} حرکت دوره‌ای $13/63$ روزه، و a_{12} و b_{12} نیز حرکت دوره‌ای $14/76$ روزه را توصیف می‌کنند [۱]. ترم بعدی اثر n_g آفست با اندازه و بزرگی‌های \mathbf{g} در اپک‌های \mathbf{T}_g را بیان

^۱ Heaviside

در صورتی آفست در اپک i ام رخ دهد، A_{off} بصورت زیر خواهد بود:

$$A_{off} = A_j = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m] \quad (8)$$

$$c_i = \begin{cases} 1; & i \geq j \\ 0; & i < j \end{cases}$$

برای یافتن زمان وقوع آفست، از حل مسئله زیر استفاده می‌شود:

$$t_{off} = \arg \max_{t_j} P(t_j) \quad (9)$$

که در آن تابع $P(t_j)$ بصورت زیر می‌باشد:

$$P(t_j) = \hat{\mathbf{e}}^T Q_y^{-1} A_j (A_j^T Q_y^{-1} P_A^+ A_j)^{-1} A_j^T Q_y^{-1} \hat{\mathbf{e}} \quad (10)$$

که در رابطه فوق $\hat{\mathbf{e}} = P_A^+ \mathbf{y}$ بردار باقیمانده‌های کمترین مربعات تحت فرض صفر، و $P_A^+ = I - A(A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1}$ تصویرگر قائم می‌باشد. در ادامه جهت معنی دار بودن آفست، از تست زیر با آماره T و تابع توزیع χ^2 دو با یک درجه آزادی در سطح اعتبار α استفاده می‌شود:

$$T_{q=1} = \max_{t_j} P(t_j), T \sim \chi_{(1,1-\alpha)}^2 \quad (11)$$

در صورتی که $T > \chi_{(1,1-\alpha)}^2$ باشد، فرض H_0 رد شده و اپک i بعنوان آفست شناخته می‌شود. در ادامه برای یافتن سایر آفست‌ها مراحل قبلی تکرار می‌شود. با انجام مراحل ذکر شده برای سری‌های زمانی مورد استفاده، زمان‌های زیر بعنوان آفست مشترک در اکثر سری‌های زمانی شناخته شده است:

جدول ۱- زمان آفست‌های مشترک

۲۰۰۶/۵۵۷۵۳	۲۰۰۶/۸۷۲۶	۲۰۰۸/۷۷۴۵۹
------------	-----------	------------

برای نمونه زمان وقوع آفست‌ها در مولفه شمالی ایستگاه AKHT در شکل ۲ ترسیم و اثر آن حذف شده است.

جواب کمترین مربعات وزندار برای بردار مجهولات و باقیمانده‌ها از طریق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} \mathbf{y}; \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - A \hat{\mathbf{x}} \quad (4)$$

۳-۱- کشف مشاهدات اشتباه

بعد از به دست آوردن جواب اولیه برای مدل، مشاهدات اشتباه در هر سری زمانی، با اعمال یک الگوریتم پایدار بر باقیمانده‌های برآورد شده، کشف شده‌اند. الگوریتم کشف مشاهدات اشتباه بر اساس آماره‌های میانه و IQR^۱ می‌باشد که به ترتیب بیانگر مقدار مرکزی و پراکندگی داده‌ها در سری زمانی می‌باشند. IQR یک نمونه از داده‌ها، اختلاف بین ۲۵ امین و ۷۵ امین صدک در داده‌ها است. در مواقعی که باقیمانده‌های برآورد شده براساس مدل اولیه مفروض از سه برابر IQR در هر جهت مختصاتی بیشتر باشد به عنوان مشاهده اشتباه تعریف می‌شود و از سری زمانی حذف می‌گردد:

$$|\hat{e}_i - \text{median}(\hat{\mathbf{e}}_{i-\omega/2, i+\omega/2})| > (3 \times \text{IQR}(\hat{\mathbf{e}}_{i-\omega/2, i+\omega/2})) \quad (5)$$

میانه و IQR بر روی باقیمانده‌ها در داخل یک پنجره لغزشی با اندازه که ۳۶۵ روز انتخاب شده‌است، اعمال می‌گردد.

۳-۲- کشف آفست‌های سری‌های زمانی

برای بهبود نتایج حاصل از آنالیز سری‌های زمانی باید تا حد امکان آفست‌های رخ داده کشف و اثر آن‌ها حذف گردد. برای کشف آفست، می‌توان آزمون آماری زیر را در نظر گرفت که در فرض صفر هیچ آفستی وجود ندارد در حالیکه در فرض مخالف آفست وجود دارد [۸]:

$$\begin{cases} H_0 = E\{\mathbf{y}\} = A \mathbf{x} \\ H_1 = E\{\mathbf{y}\} = A \mathbf{x} + A_{off} \mathbf{x}_{off} \end{cases} \quad (6)$$

با توجه به رابطه (۱) که در آن ضریب \mathbf{x}_{off} تابع هویساید است، بردار A_{off} بصورت زیر خواهد بود:

$$A_{off} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m] \quad (7)$$

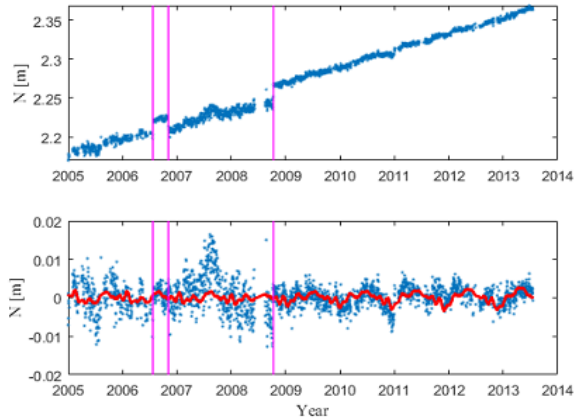
$$c_i = \begin{cases} 1; & t_i \geq t_{off} \\ 0; & t_i < t_{off} \end{cases}$$

^۱ Interquartile Range

دوم زمانی اتفاق می افتد که سرعت ثانویه پس از سپری شدن زمان میرایی نمایی، با سرعت اولیه برابر باشد که در این صورت از ترم ده سمت راست رابطه (۱) برای مدل سازی آن استفاده می شود. حالت سوم نیز زمانی اتفاق می افتد که سرعت ثانویه پس از سپری شدن زمان میرایی نمایی، با سرعت اولیه برابر نباشد که در این صورت از هر دو ترم نه و ده سمت راست رابطه (۱) برای مدل سازی آن استفاده می شود.

در این تحقیق، برای کشف اثر زلزله از یک روش سازمان یافته خودکار استفاده نمی شود، بلکه با توجه به نمایش هندسی رفتار سری زمانی و همچنین بررسی زمین لرزه های رخ داده در منطقه، به روش آزمون و خطا زمین لرزه های موثر در رفتار سری های زمانی شناسایی می گردد. برای این منظور، ابتدا تمام زلزله های رخ داده در منطقه که با پوشش زمانی ایستگاه همخوانی دارد، در نظر گرفته می شود. سپس زمین لرزه هایی که اثر آن ها (بصورت آفست یا میرایی نمایی) در رفتار سری زمانی دیده می شود، و در نظر گرفتن اثر آن ها، باعث برازش بهتر مدل تابعی به سری زمانی می گردد، به عنوان زمین لرزه های موثر انتخاب می شوند.

همچنین برای بدست آوردن زمان میرایی، یک بازه برای آن انتخاب می شود و سپس زمانی که به ازای آن ترم باقیمانده ها کمینه شود، بعنوان زمان میرایی انتخاب می گردد. برای نمونه زلزله های اثرگذار در سری زمانی مولفه شمالی ایستگاه AKHT در جدول ۲ نشان داده شده است. همچنین زمان این زلزله ها در شکل ۳ ترسیم و اثر آن در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- (بالا) سری زمانی مولفه شمالی ایستگاه AKHT که آفست در زمان های ۲۰۰۶/۵۵۷۵۳ - ۲۰۰۶/۸۷۲۶ و ۲۰۰۸/۷۷۴۵۹ رخ داده است. (پایین) مولفه ترند و اثر آفست (بکمک تابع هوساید) از سری زمانی حذف شده است. خط قرمز بیانگر برآورد کمترین مربعات سری زمانی می باشد.

۳-۳- زلزله های اثرگذار

با توجه به اینکه زلزله باعث جابجایی پوسته زمین می شود، اثر آن را می توان بصورت یک آفست و (یا) یک تغییر سرعت (تغییر شیب) در رفتار ایستگاه مشاهده نمود. این تغییر سرعت در رفتار ایستگاه می تواند به سه صورت انجام پذیرد. حالت اول اینست که بعد از وقوع زلزله، یک سرعت متفاوت در رفتار ایستگاه مشاهده شود که در این صورت از ترم نه سمت راست رابطه (۱) برای مدل سازی آن استفاده می شود.

همچنین ممکن است بعد از وقوع زلزله، مدت زمانی طول بکشد تا ایستگاه به یک سرعت ایستا برسد (که به این بازه زمانی، زمان میرایی نمایی τ می گویند). حالت

جدول ۲- زمین لرزه های موثر در رفتار ایستگاه AKHT

	زمان [yr]	عرض [°]	طول [°]	عمق [km]	بزرگی [Mw]	فاصله کانون زلزله از ایستگاه [km]
۱	۲۰۰۵/۶۸۰۲۶۵	۳۴/۱۷۹	۵۲/۰۲۷	۱۰/۰	۴/۸	۲۰۴/۳۲
۲	۲۰۰۵/۸۷۷۱۶۹	۳۴/۱۸۰	۵۲/۰۷۰	۱۰/۰	۴/۰	۲۰۶/۱۸
۳	۲۰۰۷/۴۶۵۹۸۲	۳۴/۴۳۷	۵۰/۸۲۳	۵/۰	۵/۵	۱۲۹/۴۹
۴	۲۰۰۷/۶۵۱۸۲۶	۳۴/۸۹۰	۵۱/۹۶۰	۲۲/۵	۴/۶	۱۴۷/۸۰
۵	۲۰۰۸/۲۴۰۶۳۹	۳۵/۷۰۰	۴۹/۱۱۰	۱۵/۰	۴/۰	۱۳۶/۳۶
۶	۲۰۰۸/۳۱۵۷۵۳	۳۵/۷۳۵	۵۲/۶۰۸	۴/۰	۳/۸	۱۸۲/۴۸
۷	۲۰۰۹/۶۲۱۶۸۹	۳۶/۴۵۲	۵۲/۰۶۶	۶/۲	۴/۲	۱۶۳/۲۷
۸	۲۰۱۲/۰۳۰۱۳۷	۳۶/۳۲۸	۵۲/۷۷۵	۱۵/۸	۵/۲	۲۱۳/۱۶
۹	۲۰۱۲/۳۴۷۰۴۲	۳۶/۱۶۵	۵۳/۱۰۹	۷/۰	۴/۲	۲۳۵/۴۲
۱۰	۲۰۱۲/۵۷۳۹۷۳	۳۶/۸۲۱	۵۱/۳۰۱	۶/۱	۴/۲	۱۵۰/۶۸
۱۱	۲۰۱۲/۵۹۹۷۷۲	۳۵/۹۴۰	۵۳/۳۰۰	۱۵/۰	۴/۲	۲۴۷/۶۰
۱۲	۲۰۱۳/۲۲۴۲۰۱	۳۶/۲۰۲	۵۳/۶۷۹	۱۰/۰	۴/۸	۲۸۶/۳۴

$$e(t_i) = \alpha\alpha(t_i) + b_\kappa\beta(t_i) \quad (12)$$

که در آن ثابت‌های a و b_κ به ترتیب دامنه نویز سفید و نویز رنگی می‌باشد. ماتریس کواریانس اندازه‌گیری‌های $y(t_i)$ در این حالت به صورت زیر نتیجه می‌شود [۱۰]:

$$Q_y = a_w^2 I + b_\kappa^2 J_\kappa \quad (13)$$

که در آن I ماتریس همانی و J_κ ماتریس کواریانس برای نویز رنگی می‌باشد. ماتریس J_κ را می‌توان از طریق رابطه زیر محاسبه نمود [۱۰ و ۱۲]:

$$J_\kappa = \bar{T}\bar{T}^T \quad (14)$$

ماتریس تبدیل \bar{T} در رابطه فوق، به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \psi_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1 & \psi_0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m & \psi_{m-1} & \psi_{m-2} & \dots & \psi_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

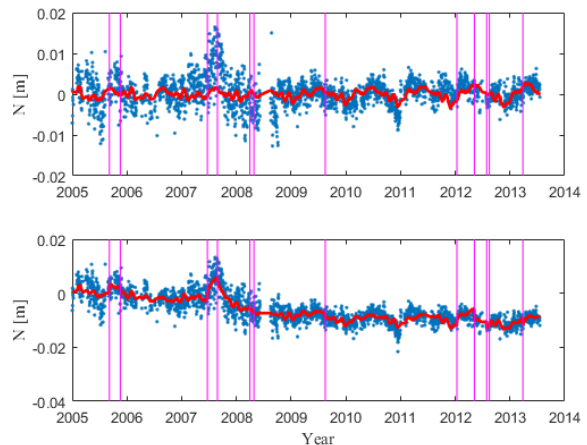
که در آن ψ_m از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi_m = \frac{-\frac{\kappa}{2}(1-\frac{\kappa}{2})\dots(m-1-\frac{\kappa}{2})}{m!} = \frac{\Gamma(m-\frac{\kappa}{2})}{m!\Gamma(-\frac{\kappa}{2})} \quad (16)$$

که در رابطه فوق، Γ تابع گاما می‌باشد. در تشکیل ماتریس J_κ برای اینکه توان طیفی نویزهای مختلف با اندیس طیفی κ و دامنه و بسامد یکسان که هم‌فاصله هستند، با هم برابر شوند، ماتریس \bar{T} در $\Delta T_j^{-\kappa/4}$ ضرب می‌شود. اگر داده‌ها هم‌فاصله نباشند، ستون j ام ماتریس \bar{T} در $\Delta T_j^{-\kappa/4} = |t_j - t_0|^{-\kappa/4}$ ضرب می‌شود.

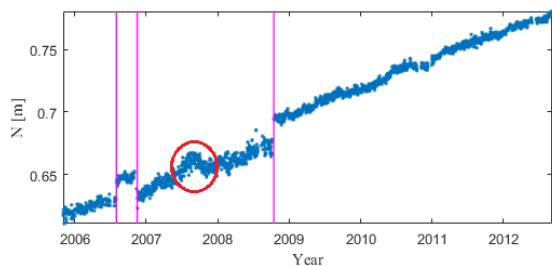
۴-۱- نویز سفید ($\kappa = 0$)

اگر $\kappa = 0$ باشد، طبق رابطه (۱۶) می‌توان نتیجه گرفت $\psi_0 = 1, \psi_m = 0 (m > 0)$. پس طبق رابطه (۱۵) خواهیم داشت $\bar{T} = I$. از طرفی چون $\Delta T_j^{-\kappa/4} = 1$ می‌باشد، پس طبق رابطه (۱۴) می‌توان نتیجه گرفت $J_0 = I$.



شکل ۳- (بالا) نمایش زمان وقوع زمین‌لرزه‌های اثرگذار بر روی سری زمانی مولفه شمالی ایستگاه AKHT که اثر ترند و آفست از آن حذف شده است. (پایین) در نظر گرفتن اثرات پس‌لرزه‌ای در سری زمانی. خط قرمز بیانگر برآورد کمترین مربعات سری زمانی می‌باشد

همچنین لازم بذکر است با توجه به شکل ۳، زلزله‌های ردیف های ۲، ۳، ۴، ۱۱ و ۱۲ بترتیب دارای زمان میرایی تقریباً ۳۰، ۶۲، ۸۴، ۳۰ و ۳۰ روزه می‌باشند. از نکات قابل ذکر در این بخش، اثر برخی از زلزله‌ها در ایستگاه‌هایی است که فاصله کانون زلزله از آن ایستگاه دور است. برای نمونه، می‌توان به اثر زلزله ردیف سوم جدول ۲ در ایستگاه RSHT اشاره کرد که فاصله کانون زلزله از ایستگاه تقریباً ۳۴۰ کیلومتر می‌باشد. شکل ۴ رفتار مولفه شمالی ایستگاه را نشان می‌دهد (همچنین مشاهده می‌شود که زمان وقوع آفست‌ها مطابق جدول ۱ است).



شکل ۴- سری زمانی مولفه شمالی ایستگاه RSHT که اثر سیستماتیک زلزله در داخل دایره قرمز کاملاً مشخص است.

۴- مدل آماری

در تحلیل نویز سری‌های زمانی فرض می‌شود که $e(t_i)$ به صورت ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت $\alpha(t_i)$ و دنباله ای از متغیرهای تصادفی وابسته $\beta(t_i)$ باشد، یعنی [۱۰ و ۱۲]:

۵- برآورد مولفه‌های واریانس به روش کمترین مربعات

در این قسمت برای محاسبه نویز سری‌های زمانی، از روش کمترین مربعات استفاده می‌کنیم. برای این منظور مدل خطی زیر را در نظر می‌گیریم [۲]:

$$E\{\mathbf{y}\} = A\mathbf{x}; D\{\mathbf{y}\} = Q_y = Q_0 + \sum_{i=1}^p \sigma_i Q_i \quad (21)$$

که در آن بردار مشاهدات، $A_{m \times n}$ ماتریس ضرایب، بردار مجهولات، Q_y ماتریس کواریانس مشاهدات، Q_0 قسمت معلوم ماتریس کواریانس، σ_i ها مولفه‌های واریانس و کواریانس، Q_i ها ماتریس‌های کوفاکتور، E و D نیز بترتیب توابع امید و انتشار می‌باشند. به منظور استفاده از روش کمترین مربعات می‌توان رابطه قبل را بفرم زیر نوشت:

$$E\{\text{vh}(\mathbf{t}\mathbf{t}^T - B^T Q_0 B)\} = A_{\text{vh}} \boldsymbol{\sigma} \quad (22)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_p]^T$ ، $\mathbf{t} = B^T \mathbf{y}$ و vh عملگر می‌باشد. $A_{\text{vh}} = [\text{vh}(B^T Q_1 B), \dots, \text{vh}(B^T Q_p B)]$ نیز بیانگر تابع vector-half بوده و ماتریس $B_{m \times (m-n)}$ نیز طوری تعریف می‌شود که $B^T A = 0$ باشد.

حال برآورد کمترین مربعات برای مولفه‌های واریانس می‌تواند به صورت زیر حاصل شود:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (A_{\text{vh}}^T Q_{\text{vh}}^{-1} A_{\text{vh}})^{-1} A_{\text{vh}}^T Q_{\text{vh}}^{-1} \text{vh}(\mathbf{t}\mathbf{t}^T - B^T Q_0 B) = N^{-1} \quad (23)$$

که در آن Q_{vh}^{-1} ماتریس کواریانس بردار $\text{vh}(\mathbf{t}\mathbf{t}^T)$ می‌باشد. می‌توان نشان داد که مولفه‌های ماتریس N و بردار $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ به صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$n_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(Q_y^{-1} P_A^+ Q_i Q_y^{-1} P_A^+ Q_j); i, j = 1, 2, \dots, p \quad (24)$$

$$l_i = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}^T Q_y^{-1} Q_i Q_y^{-1} \hat{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \text{tr}(Q_i Q_y^{-1} P_A^+ Q_0 Q_y^{-1} P_A^+); i = 1, \dots, p \quad (25)$$

که در رابطه فوق $\hat{\mathbf{e}} = P_A^+ \mathbf{y}$ بردار باقیمانده‌های کمترین مربعات و $P_A^+ = I - A(A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1}$ تصویرگر قائم می‌باشد. با توجه به اینکه در روابط (۲۴) و (۲۵) نیاز داریم که $Q_y = Q_0 + \sum_{i=1}^p \sigma_i Q_i$ را محاسبه نماییم و σ_i ها از پیش مجهول هستند، پس باید از روش تکرار استفاده کنیم.

۴-۲- نویز گام تصادفی ($\kappa = -2$)

اگر $\kappa = -2$ باشد، طبق رابطه (۱۶)، $\psi_m = 1$ خواهد بود. با جایگذاری آن در رابطه (۱۵) می‌توان ماتریس \bar{T} را به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

با ضرب ستون‌های ماتریس فوق در $\Delta T^{1/2}$ مربوطه، و جایگذاری آن در رابطه (۱۴)، ماتریس J_{-2} به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$J_{-2} = \begin{bmatrix} \Delta T_1 & \Delta T_1 & \Delta T_1 & \dots & \Delta T_1 \\ \Delta T_1 & \Delta T_2 & \Delta T_2 & \dots & \Delta T_2 \\ \Delta T_1 & \Delta T_2 & \Delta T_3 & \dots & \Delta T_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta T_1 & \Delta T_2 & \Delta T_3 & \dots & \Delta T_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

همچنین برای داده‌های هم فاصله، می‌توان ماتریس فوق را بصورت زیر نتیجه گرفت [۲، ۱۲]:

$$J_{-2} = f_s^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & m \end{bmatrix}; f_s = \frac{m-1}{T} \quad (19)$$

که در آن f_s فرکانس نمونه برداری با واحد yr^{-1} و T نیز بازه کلی سری زمانی می‌باشد.

۴-۳- نویز فلیکر ($\kappa = -1$)

در صورتی که $\kappa = -1$ باشد، مولفه‌های ماتریس J_{-1} را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد [۲، ۱۲]:

$$J_{-1}(i, j) = \begin{cases} \frac{9}{8} & \text{if } \bar{\tau} = 0 \\ \frac{9}{8} \left(1 - \frac{\log \bar{\tau} + 2}{24} \right) & \text{if } \bar{\tau} \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

که در رابطه فوق $\bar{\tau} = |t_j - t_i|$ می‌باشد.

۶- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق علاوه بر اثرات ترند، هارمونیک و آفست، اثر سیستماتیک زلزله نیز در مدل تابعی در نظر گرفته شده است. نکته جالب توجه اینست که برای تقریباً تمامی سری‌های زمانی آفست‌ها در زمان‌های یکسان اتفاق می‌افتد. همچنین اثر سیستماتیک زلزله‌ها در تمامی سری‌های زمانی بسیار شبیه بهم می‌باشد (حتی برای ایستگاه‌هایی که در فاصله زیادی از کانون زلزله قرار دارند). رفتارهای شبیه بهم سری‌های زمانی بیانگر این مورد است که اثرات سیستماتیک (آفست و زلزله) در هنگام پردازش، از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر انتشار می‌یابند. همچنین در صورتی که مدل آماری بصورت ترکیب سه نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی در نظر گرفته شود، برای مولفه‌های شمالی، شرقی و جنوبی بترتیب در ۱۲، ۱۲ و ۳۶ درصد سری‌های زمانی، واریانس نویز گام تصادفی مقدار مثبت به خود اختصاص می‌دهد. بعلاوه عدم در نظر گرفتن اثر سیستماتیک زلزله در سری زمانی، تاثیر خود را بصورت حضور نویز گام تصادفی در مدل آماری (بترتیب برای ۸۸، ۱۲ و ۶۰ درصد سری‌های زمانی مولفه‌های شمالی، شرقی و ارتفاعی) نشان خواهد داد. در پایان نیز با توجه به رفتار مشابه سری‌های زمانی پیشنهاد می‌شود که یک باز پردازش برای آن‌ها انجام گیرد.

جدول ۴- علامت واریانس مولفه‌های نویز برای حالتی که مدل آماری بصورت ترکیب سه نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی انتخاب شده باشد (اثر سیستماتیک زلزله در نظر گرفته نشده است).

	N			E			U		
	σ_w^2	σ_f^2	σ_{nv}^2	σ_w^2	σ_f^2	σ_{nv}^2	σ_w^2	σ_f^2	σ_{nv}^2
ABSD	+	+	+	+	+	-	+	+	-
AKHT	+	+	+	+	+	-	+	+	-
ARNG	+	+	+	+	+	-	+	+	-
BLDH	+	+	+	+	+	-	+	+	-
CHSM	+	+	+	+	+	-	+	+	+
FOIM	+	+	+	+	+	-	+	+	+
FOPM	+	+	-	+	+	-	+	+	+
GARM	+	+	+	+	+	-	+	+	-
GTCL	+	+	+	+	+	-	+	+	-
HSGD	+	+	+	+	+	-	+	+	-
MABD	+	+	-	+	+	-	+	+	+
MOBK	+	+	+	+	+	-	+	+	+
NAJM	+	+	+	+	+	-	+	+	+
NKAD	+	+	+	+	+	-	+	+	+
PLOR	+	+	+	+	+	-	+	+	+
PLZI	+	+	-	+	+	-	+	+	+
POOL	+	+	+	+	+	-	+	+	-
RSHT	+	+	+	+	+	-	+	+	+
SHOR	+	+	+	+	+	-	+	+	+
SMNN	+	+	+	+	+	-	+	+	+
TEHN	+	+	+	+	+	+	+	+	-
TFSH	+	+	+	+	+	-	+	+	-
TKBN	+	+	+	+	+	-	+	+	-
TLGN	+	+	+	+	+	+	+	+	+
VRMN	+	+	+	+	+	+	+	+	+

ابتدا باید مقادیر اولیه برای مولفه‌های واریانس در نظر بگیریم $\sigma_i^0 (i = 1, \dots, p)$. با استفاده از این مقادیر طبق رابطه (۲۱)، Q_p را محاسبه می‌کنیم. سپس توسط روابط (۲۴) و (۲۵) ماتریس N و بردار I را محاسبه کرده و از رابطه (۲۳)، $\hat{\theta}$ را بدست می‌آوریم که می‌تواند به عنوان مقادیر اولیه در تکرار بعدی مورد استفاده قرار بگیرد.

۵-۱- نتایج حاصل برای مولفه‌های نویز

نتایج عددی بیانگر اینست که در صورتی که مدل آماری بصورت ترکیب سه نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی در نظر گرفته شود، برای مولفه‌های شمالی، شرقی و جنوبی بترتیب در ۸۸، ۸۸ و ۶۴ درصد سری‌های زمانی واریانس نویز گام تصادفی مقدار منفی به خود اختصاص می‌دهد (جدول ۳) که بیانگر نادرست بودن مدل آماری می‌باشد. در صورتیکه از اثرات سیستماتیک زلزله در مدل تابعی صرفنظر شود، نتایج مطابق جدول ۴ خواهد بود که بیانگر وجود نویز گام تصادفی بترتیب در ۸۸، ۱۲ و ۶۰ درصد سری‌های زمانی مولفه شمالی، شرقی و ارتفاعی می‌باشد.

جدول ۳- علامت واریانس مولفه‌های نویز برای حالتی که مدل آماری بصورت ترکیب سه نویز سفید، فلیکر و گام تصادفی انتخاب شده باشد.

	N			E			U		
	σ_w^2	σ_f^2	σ_{nv}^2	σ_w^2	σ_f^2	σ_{nv}^2	σ_w^2	σ_f^2	σ_{nv}^2
ABSD	+	+	-	+	+	-	+	+	-
AKHT	+	+	-	+	+	-	+	+	-
ARNG	+	+	-	+	+	-	+	+	-
BLDH	+	+	-	+	+	-	+	+	-
CHSM	+	+	-	+	+	-	+	+	-
FOIM	+	+	-	+	+	-	+	+	-
FOPM	+	+	-	+	+	-	+	+	-
GARM	+	+	+	+	+	-	+	+	-
GTCL	+	+	+	+	+	-	+	+	-
HSGD	+	+	-	+	+	-	+	+	-
MABD	+	+	-	+	+	-	+	+	+
MOBK	+	+	-	+	+	-	+	+	+
NAJM	+	+	+	+	+	-	+	+	-
NKAD	+	+	-	+	+	-	+	+	+
PLOR	+	+	-	+	+	-	+	+	+
PLZI	+	+	-	+	+	-	+	+	+
POOL	+	+	-	+	+	-	+	+	+
RSHT	+	+	-	+	+	-	+	+	-
SHOR	+	+	-	+	+	-	+	+	+
SMNN	+	+	-	+	+	-	+	+	-
TEHN	+	+	-	+	+	+	+	+	-
TFSH	+	+	-	+	+	-	+	+	-
TKBN	+	+	-	+	+	-	+	+	-
TLGN	+	+	-	+	+	+	+	+	+
VRMN	+	+	-	+	+	-	+	+	+

- [1] Amiri-Simkoei AR, Tiberius CCJM, Teunissen PJG (2006). "Assessment of noise in GPS coordinate time series: methodology and results". *Journal of Geophysical Research*, Vol. 112, pp. B07413, doi:10.1029/2006JB004913
- [2] Amiri-Simkoei AR (2007). "Least-squares variance component estimation: theory and GPS applications". Ph. D. thesis, Delft University of Technology.
- [3] Argus, D. F., et. al. (2011), "Rise of the Ellsworth mountains and parts of the East Antarctic coast observed with GPS", *Geophys. Res. Lett.*, 38, L16,303, doi: 10.1029/2011GL048025
- [4] Koch K. R., 1986, Maximum likelihood estimate of variance components: *Bull. Geod.*, 60, 329–338. Ideas by A.J. Pope.
- [5] Moghtased-Azar K., Tehranchi R., Amiri-Simkoei AR (2014). "An alternative method for non-negative estimation of variance components", *Journal of Geodesy*, 88, pp. 427–439, doi: 10.1007/s00190-014-0693-0
- [6] Nikolaidis R (2002). "Observation of Geodetic and Seismic Deformation with the Global Positioning System". Ph. D. Thesis, University of California
- [7] Roohi S, Jamour Y (2008), "Investigation of the Crustal Deformation in Iran Using Permanent GPS Station Time Series and Application of Noise Analysis", *Geosciences Scientific Quarterly Journal*, 70: 76-83
- [8] Teunissen, P.J.G., and A. Kleusberg (eds.) (1998b), "GPS for Geodesy", chapter Quality Control and GPS, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [9] Thomas, I., et al. (2011), "Widespread low rates of Antarctic glacial isostatic adjustment revealed by GPS observations", *Geophys. Res. Lett.*, 38, L22,302, doi:10.1029/2011GL049277.
- [10] Williams SDP (2003a). The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series. *Journal of Geodesy*, 76: 483–494.
- [11] Williams SDP, Bock Y, Fang P, Jamason P, Nikolaidis RM, Prawirodirdjo L, Miller M, Johnson DJ (2004). "Error analysis of continuous GPS position time series". *Journal of Geophysical Research*, 109.
- [12] Zhang J, Bock Y, Johnson H, Fang P, Williams S, Genrich J, Wdowinski S, Behr J (1997). "Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates and site velocities". *Journal of Geophysical Research*, 102: 18035–18055.