

# استفاده از مدل کوواریانس ناهمسانگرد به منظور محاسبه تغییر شکل پوسته با استفاده از کولوکیشن کمترین مربعات، مطالعه موردی: شبه جزیره کنای

بهزاد به نبیان<sup>۱\*</sup>، مسعود مشهدی حسینعلی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> مربی گروه ژئودزی و مهندسی نقشه برداری - دانشگاه تفرش

دانشجوی دکتری ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

behzadbehnbabian@gmail.com

behnbabian@tafreshu.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

hossainali@kntu.ac.com

(تاریخ دریافت آبان ۱۳۹۵، تاریخ تصویب دی ۱۳۹۵)

## چکیده

کولوکیشن کمترین مربعات یکی از روش‌های مرسوم برای درون‌یابی بردارهای جابجایی محاسبه‌شده با GPS و محاسبه‌ی میدان تغییر شکل سطحی زمین است. هدف از این تحقیق ارتقای کیفیت پیش‌بینی با کولوکیشن با استفاده از مدل کوواریانس ناهمسانگرد است که در آن کوواریانس علاوه بر فاصله به جهت نیز وابسته می‌باشد. همچنین از روش حداکثر درست‌نمایی محدودشده (REML)<sup>۱</sup> برای تعیین دقیق پارامترهای مدل کوواریانس استفاده شده است. علاوه بر این روابط ریاضی لازم برای محاسبه‌ی مستقیم هر یک از عناصر تنسور کرنش در هر نقطه‌ی دلخواه در منطقه‌ی موردنظر، استخراج و ارائه می‌گردد. با به‌کارگیری روش‌های پیشنهادشده، میدان جابجایی سطحی زمین در شبه‌جزیره کنای واقع در جنوب مرکزی آلاسکا برای یک بازه‌ی زمانی دوساله درون‌یابی می‌شود و نتایج حاصل با استفاده از معیارهای متداول ارزیابی دقت و صحت در کولوکیشن با نتایج حاصل از مدل همسانگرد مورد مقایسه قرار می‌گیرد. بر این اساس در منطقه مورد مطالعه در این تحقیق، متوسط میزان بهبود جذر متوسط مربعات خطای اعتبار سنجی متقابل در اثر استفاده از مدل ناهمسانگرد برای هر دو مؤلفه میدان جابجایی حدود ۴۵٪ می‌باشد. این در حالی است که میزان بهبود میانگین خطای استاندارد پیش‌بینی حدود ۱۰٪ برای هر دو مؤلفه است. همین‌طور میدان سرعت سالیانه بر روی شبکه‌ای منظم از نقاط قرارگرفته در حوزه‌ی مکانی داده‌ها، با به‌کارگیری روش‌های پیشنهادی مورد استفاده در کولوکیشن کمترین مربعات پیش‌بینی می‌گردد. در ادامه با استفاده از روابط ریاضی به‌دست‌آمده برای مدل کوواریانس ناهمسانگرد، تنسور کرنش برای نقاطی واقع بر روی شبکه‌ای منظم در منطقه محاسبه می‌شود. الگوی تغییر شکل به‌دست‌آمده بدین طریق با الگوی تغییر شکل حاصل از روش‌ها و داده‌های متفاوت بکار گرفته‌شده توسط سایر محققین مقایسه می‌گردد و از این طریق نیز درستی و مزیت‌های استفاده از روش‌های پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

**واژگان کلیدی:** مدل کوواریانس ناهمسانگرد، حداکثر درست‌نمایی محدودشده، کولوکیشن کمترین مربعات، تغییر شکل پوسته

\* نویسنده رابط

<sup>۱</sup> Restricted maximum likelihood

## ۱- مقدمه

کولوکیشن کمترین مربعات موسوم به LSC<sup>۱</sup>، یک روش پیش‌بینی<sup>۲</sup> بر پایه تئوری‌های آماری است که با استفاده از آن پیش‌بینی اندازه یک کمیت در حوزه‌ی مکانی داده‌ها به صورت پیوسته قابل انجام می‌باشد [۱]. کیفیت درون‌یابی<sup>۳</sup> با کولوکیشن به عوامل مختلفی بستگی دارد که از آن‌ها می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد: تراکم و توزیع مکانی داده‌های مورد استفاده، دقت اندازه‌گیری یا نویز داده‌ها، مدل کوواریانس بکار گرفته شده و دقت برآورد پارامترهای مدل کوواریانس. برای داشتن یک پیش‌بینی قابل اطمینان با LSC در بسیاری از موارد عملاً امکان افزایش تراکم داده‌ها، تغییر توزیع مکانی داده‌ها و بهبود دقت اندازه‌گیری آن‌ها وجود ندارد و مجبور به استفاده از داده‌هایی با توزیع مکانی پراکنده و تعداد محدود نقاط داده هستیم. در این موارد تنها راه بهبود دادن کیفیت پیش‌بینی، پیدا کردن یک مدل کوواریانس مناسب برای داده‌های مورد استفاده و همین‌طور به کارگیری روش‌هایی برای برآورد دقیق پارامترهای مدل کوواریانس است. یکی از کاربردهای مهم روش LSC استفاده از آن برای پیش‌بینی میدان جابجایی سطحی زمین و همین‌طور برآورد تغییر شکل پوسته است. تاکنون در این زمینه تحقیقات زیادی انجام شده و از آن جمله می‌توان به پیش‌بینی تغییر شکل در توهوکوی ژاپن توسط ال-فیکی<sup>۴</sup> و همکاران [۱۲] و همچنین تحقیقات انجام شده توسط شیمادا<sup>۵</sup> [۱۳] و گومز<sup>۶</sup> و همکاران [۱۴] اشاره نمود. این زمینه‌ی کاربردی از LSC یکی از موارد مهمی است که معمولاً در آن توزیع مکانی نقاط داده، منظم و متراکم نیست و افزودن نقاط داده جدید به داده‌های موجود نیز در آن‌هم به لحاظ عملی و هم هزینه‌ای گاهی ناممکن و در موارد دیگر با دشواری‌های زیاد همراه است. بنابراین کم‌هزینه‌ترین راه برای داشتن یک پیش‌بینی قابل اعتماد با LSC، ارتقای مدل کوواریانس و برآورد دقیق پارامترهای آن خواهد بود.

به‌طور معمول برای تعریف کوواریانس بین نقاط داده در LSC از توابع کوواریانس همسانگرد استفاده می‌شود که در آن‌ها میزان کورولیشن<sup>۷</sup> بین نقاط داده وابسته به فواصل بین آن‌هاست. بدین ترتیب که با افزایش فاصله بین دو نقطه میزان کورولیشن آن‌ها کاهش یافته و با کاهش فاصله کورولیشن مربوطه زیاد می‌شود. مدل‌های کوواریانس و ناهمسانگرد هم به فاصله و هم به جهت وابسته هستند و به همین دلیل دارای ساختاری کامل‌تر می‌باشند بنابراین انتظار می‌رود که در بیشتر موارد استفاده از این نوع مدل‌ها بتواند به ارتقای کیفیت پیش‌بینی کمک کند [۲]. در ژئودزی فیزیک در موارد خاصی از مدل‌های کوواریانس ناهمسانگرد استفاده شده است که از آن جمله می‌توان به مقالات دوکوئن<sup>۸</sup> و همکاران [۳] و همچنین در بهشتی و فیدرستون<sup>۹</sup> [۵ و ۴] اشاره نمود. در حوزه آمار مکانی و پیش‌بینی با کریجینگ<sup>۱۰</sup> نیز تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه صورت گرفته و راه‌حل‌های مختلفی برای مدل‌سازی کوواریانس با در نظر گرفتن وابستگی به جهت علاوه بر فاصله، پیشنهاد گردیده است که به‌عنوان نمونه می‌توان به سمپسون و گاتورپ<sup>۱۱</sup> [۶] و هیگدون<sup>۱۲</sup> و همکاران [۷]، روش پیشنهادی توسط فونتز<sup>۱۳</sup> [۸] و تئوری پاسیورک و شرویش<sup>۱۴</sup> [۹] اشاره نمود. در هریک از تحقیقات مورد اشاره از تئوری‌های متفاوتی برای مدل‌سازی ناهمسانگرد تابع کوواریانس استفاده می‌شود که در بین آن‌ها تئوری پاسیورک و شرویش با استقبال بیشتری مواجه گشته و توسط محققین در سال‌های اخیر دنبال گردیده است [۱۰]. در بهشتی [۱۱] نیز مروری مفصل بر این موضوع دارد و از مدل کوواریانس پیشنهادی توسط پاسیورک و شرویش برای ارتقای کیفیت پیش‌بینی میدان ثقل محلی با LSC در ناحیه پیرامونی یک گسل استفاده می‌کند.

بر اساس بررسی‌های انجام شده توسط نگارندگان این مقاله، موضوع استفاده از مدل‌های کوواریانس ناهمسانگرد در

<sup>۷</sup> Correlation

<sup>۸</sup> Duquenne

<sup>۹</sup> Featherstone

<sup>۱۰</sup> Kriging

<sup>۱۱</sup> Sampson and Guttorp

<sup>۱۲</sup> Higdon

<sup>۱۳</sup> Fuentes

<sup>۱۴</sup> Paciorek and Schervish

<sup>۱</sup> Least squares collocation

<sup>۲</sup> Prediction

<sup>۳</sup> Interpolation

<sup>۴</sup> El-Fiky

<sup>۵</sup> Shimada

<sup>۶</sup> Gomez

و  $n$  بردار نویز و یا همان خطاهای اندازه‌گیری می‌باشد. به‌منظور پیش‌بینی  $y$  در هر نقطه‌ی دلخواه  $p_0$  در حوزه‌ی مشاهدات، از فرمول ذیل استفاده می‌گردد [۱].

$$\hat{y}_0 = A_0 \hat{x} + C_{s_0s} C_{yy}^{-1} (y - A\hat{x}) \quad (2)$$

که در آن  $A_0$  ماتریس ترند در موقعیت مکانی  $p_0$  است،  $C_{s_0s}$  ماتریس کراس کوواریانس بین بردار سیگنال مشاهدات و سیگنال مورد پیش‌بینی می‌باشد،  $C_{yy}$  ماتریس اتو کوواریانس بردار مشاهدات و  $\hat{x}$  بردار پارامترهای مجهول برآورد شده است که از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$\hat{x} = (A^T C_{yy}^{-1} A)^{-1} A^T C_{yy}^{-1} y \quad (3)$$

ماتریس  $C_{yy}$  نیز از این رابطه محاسبه می‌شود.

$$C_{yy} = C_{ss} + C_{nn} \quad (4)$$

که در آن  $C_{ss}$  ماتریس اتو کوواریانس سیگنال مشاهدات و  $C_{nn}$  ماتریس کوواریانس نویز مشاهدات و عموماً ماتریسی قطری است. همان‌طور که در فرمول (۲) دیده می‌شود، ماتریس‌های اتو کوواریانس<sup>۲</sup> و کراس کوواریانس<sup>۳</sup> مهم‌ترین نقش را در پیش‌بینی کمیت تصادفی یا همان سیگنال پیش‌بینی دارند. برای ساخت این ماتریس‌ها پس از انتخاب مدل کوواریانس، تابع کوواریانس موردنظر تعیین می‌گردد و پس‌از آن باید پارامترهای تابع کوواریانس برآورد شوند.

مدل کوواریانس متداول در LSC همسانگرد می‌باشد که در آن کوواریانس بین نقاط فقط تابعی از فاصله‌ی بین دونقطه است. معمولاً از دو نوع تابع کوواریانس استفاده می‌شود که یکی تابع کوواریانس هیرون<sup>۴</sup> [۱۶] و دیگری تابع کوواریانس گاوسی [۱۲] می‌باشد. در این مقاله به تبعیت از ال-فیکی و همکاران تابع کوواریانس گاوسی انتخاب‌شده است. استفاده از این نوع تابع کوواریانس برای پیش‌بینی ثقل محلی در فیزیکال ژئودزی نیز بسیار رایج می‌باشد [۱۷] و ضابطه‌ی آن به‌صورت ذیل است.

پیش‌بینی میدان‌های جابجایی و تغییر شکل پوسته تاکنون موردبررسی قرار نگرفته است. در مقاله‌ی حاضر ابتدا ایده‌ی استفاده از تابع کوواریانس ناهمسانگرد مبتنی بر تئوری پاسیورک و شرویش برای پیش‌بینی میدان جابجایی سطحی پوسته مطرح می‌گردد. همین‌طور برای برآورد دقیق پارامترهای مجهول مدل کوواریانس ناهمسانگرد استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی محدودشده، معروف به REML [۱۵] پیشنهاد می‌شود و پس‌از آن فرمول‌های لازم برای این منظور استخراج می‌گردد. همین‌طور روابط ریاضی لازم برای محاسبه مستقیم عناصر تنسور کرنش با کولوکیشن کمترین مربعات برای مدل کوواریانس ناهمسانگرد به دست می‌آید. به‌منظور پیاده‌سازی عملی ایده‌های مطرح‌شده و بکارگیری فرمول‌های به‌دست‌آمده، از داده‌های جابجایی حاصل از مشاهدات GPS در شبه‌جزیره کنای<sup>۱</sup> واقع در جنوب آلاسکا، استفاده می‌شود. یکی از ویژگی‌های داده‌های مورداستفاده کمی تعداد نقاط داده و پراکندگی مکانی نامنظم و نامتقارن آن‌هاست. در مرحله‌ی بعدی میدان جابجایی و میزان تغییر شکل سطحی با استفاده از LSC که در آن از مدل کوواریانس ناهمسانگرد استفاده‌شده، بر روی شبکه‌ای منظم از نقاط محاسبه می‌گردد. محاسبات مذکور با استفاده از تابع کوواریانس همسانگرد هم انجام می‌شود و خطاهای برآورد گردیده در هر دو روش باهم مقایسه می‌شوند. همچنین برای اعتبارسنجی کیفیت پیش‌بینی، مدل تغییر شکل به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی با مدل تغییر شکل محاسبه‌شده توسط سایر محققین مورد مقایسه و ارزیابی قرار می‌گیرد.

## ۲- بکارگیری LSC برای درون‌یابی میدان‌های جابجایی و تغییر شکل سطحی

مدل جامع کولوکیشن کمترین مربعات که اصطلاحاً مدل ترند سیگنال و نویز نیز نامیده می‌شود به‌صورت ذیل بیان می‌گردد [۱].

$$y = Ax + s + n \quad (1)$$

که در آن  $y$  بردار مشاهدات در نقاط مشخص  $p$ ،  $A$  ماتریس طرح ترند،  $x$  بردار پارامترهای مجهول ترند،  $s$  بردار سیگنال‌های تصادفی در موقعیت مکانی مشاهدات

<sup>۲</sup> Auto-covariance

<sup>۳</sup> Cross-covariance

<sup>۴</sup> Hirvonen

<sup>۱</sup> Kenai

$$C(p_i, p_j) = C(d_{ij}) = C_0 e^{-k^2 d_{ij}^2} \quad (5)$$

که در آن  $C(p_i, p_j)$  کوواریانس بین اندازه‌ی کمیت فیزیکی موردنظر در دونقطه‌ی  $p_i$  و  $p_j$ ،  $C_0$  واریانس سیگنال و  $k$  پارامتر همبستگی است که برابر با معکوس فاصله‌ی همبستگی می‌باشد.  $d_{ij}$  فاصله بین دونقطه است که در صورت استفاده از مختصات کروی یا بیضوی، فاصله بر روی سطح کره یا بیضوی محاسبه می‌گردد و در صورت کوچک بودن منطقه و استفاده از مختصات صفحه‌ای،  $d_{ij}$  فاصله اقلیدسی بین نقاط مورد اشاره خواهد بود. به‌طور معمول برای پیش‌بینی جابجایی در یک حوزه‌ی مکانی، درون‌یابی مؤلفه‌های شمالی-جنوبی  $v$  و شرقی-غربی  $u$  به‌طور جداگانه و مستقل از یکدیگر انجام می‌شود [۱۲، ۱۳ و ۱۴]. بنابراین دو تابع کوواریانس مختلف برای هر یک از این مؤلفه‌ها خواهیم داشت. روش سنتی و مرسوم تعیین پارامترهای تابع کوواریانس یعنی  $C_0$  و  $k$  برآزش کمترین مربعات تابع کوواریانس بر مقادیر کوواریانس‌های تجربی بین مشاهدات است که آن را به‌اختصار 'FECM' می‌نامیم. در این روش ابتدا به ازای فواصل مختلف نقاط داده از یکدیگر کوواریانس بین آن‌ها محاسبه می‌گردد و سپس برآزش منحنی به روش کمترین مربعات انجام می‌شود. جزئیات بیشتر این روش را برای مثال می‌توان در [۱۸] و [۱۲] دنبال نمود.

یکی از مهم‌ترین نکاتی که در ارتباط با پیش‌بینی میدان‌های جابجایی با کولوکیشن وجود دارد، تعریف ترند است. در صورت استفاده از تقریب صفحه‌ای و طبیعتاً به‌شرط کوچک بودن ابعاد منطقه، فرمول محاسبه‌ی ترند را می‌توان با استفاده از بسط تیلور خطی هر یک از مؤلفه‌های جابجایی  $u$  و  $v$  حول نقطه‌ی مرکز ثقل به‌صورت ذیل نوشت [۱۹].

$$u = U + \varepsilon_{xx}x + (\varepsilon_{xy} - \omega)y \quad (6)$$

$$v = V + (\varepsilon_{xy} + \omega)x + \varepsilon_{yy}y \quad (7)$$

که در آن  $U$  و  $V$  مؤلفه‌های بردار جابجایی مرکز ثقل منطقه و  $\varepsilon_{xx}$ ،  $\varepsilon_{xy}$  و  $\varepsilon_{yy}$  عناصر تنسور کرنش در آن

۱ Fitting empirical covariances to model

نقطه می‌باشند و  $\omega$  زاویه دوران جزئی نسبت به محور قائم بر صفحه‌ی دستگاه مختصات در جهت پادساعت‌گرد است. لازم به ذکر است که این رابطه برای یک دستگاه مختصات کارترزین دوبعدی به مبدأ مرکز ثقل منطقه نوشته شده است که جهت محور  $x$  آن به‌طرف شرق و محور  $y$  آن به‌طرف شمال است. با این حساب ماتریس طرح ترند برای هر دو مؤلفه‌یابی و به‌صورت ذیل خواهد بود.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن  $m$  تعداد نقاط داده است. اما بردار پارامترهای مجهول ترند برای مؤلفه‌ی  $u$  برابر با  $\mathbf{x}_u = [U \ \varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{xy} - \omega]^T$  و برای مؤلفه‌ی  $v$  برابر با  $\mathbf{x}_v = [V \ \varepsilon_{xy} + \omega \ \varepsilon_{yy}]^T$  می‌باشد.

یکی از ویژگی‌ها و امتیازات منحصربه‌فرد کولوکیشن کمترین مربعات در مقایسه با سایر روش‌های پیش‌بینی، امکان درون‌یابی مستقیم مؤلفه‌های گرادیان تابع موردنظر با تعریف کوواریانس متقابل بین هر یک از این مؤلفه‌ها با اندازه تابع در نقاط داده است. این ویژگی در برآورد عناصر تنسور کرنش در هر موقعیت دلخواه  $p_0$  با زوج مؤلفه‌ی  $x_0$  و  $y_0$  واقع در حوزه‌ی نقاط داده به‌صورت ذیل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۲ و ۲۰].

$$\hat{\varepsilon}_{xx}|_{x_0, y_0} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{x}} \Big|_{x_0, y_0} = \hat{\varepsilon}_{xx} + \quad (9)$$

$$2C_{0u}k_u^2 \sum_{i=1}^m (x_i - x_0) e^{-k_u^2 d_i^2} (C_{uu}^{-1} (u - A\hat{x}_u))_i$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy}|_{x_0, y_0} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{y}} \Big|_{x_0, y_0} = \hat{\varepsilon}_{yy} + \quad (10)$$

$$2C_{0v}k_v^2 \sum_{i=1}^m (y_i - y_0) e^{-k_v^2 d_i^2} (C_{vv}^{-1} (v - A\hat{x}_v))_i$$

$$\hat{\varepsilon}_{xy}|_{x_0, y_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{x}} \right) \Big|_{x_0, y_0} = \hat{\varepsilon}_{xy} + \quad (11)$$

$$C_{0u}k_u^2 \sum_{i=1}^m (y_i - y_0) e^{-k_u^2 d_i^2} (C_{uu}^{-1} (u - A\hat{x}_u))_i$$

$$+ C_{0v}k_v^2 \sum_{i=1}^m (x_i - x_0) e^{-k_v^2 d_i^2} (C_{vv}^{-1} (v - A\hat{x}_v))_i$$

در صورتی که فرآیند تصادفی ایستا<sup>۳</sup> باشد ماتریس کوواریانس برای تمامی موقعیت‌های مکانی واقع در  $D$  یکسان خواهد بود و بنابراین می‌توان آن را با  $\Sigma$  نشان داد. در مدل کوواریانس ناهمسانگرد و ایستا، کوواریانس تابعی از اختلاف مختصات بین نقاط است و این‌طور نوشته می‌شود [۵، ۱۱ و ۲۱].

$$C(p_i, p_j) = C(\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}) = C_0 e^{-Q_{ij}} \quad (15)$$

که در آن  $Q_{ij}$  مجذور فاصله ماهالانوبیس و به تعبیر دیگر نرم وزن دار بردار فاصله‌ی بین دونقطه است و با رابطه‌ی زیر بیان می‌گردد [۲۳].

$$Q_{ij} = \Delta r_{ij}^T \Sigma^{-1} \Delta r_{ij} \\ = \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} & \Delta y_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن  $\Delta r_{ij}$  بردار اختلاف مختصات بین دونقطه است. ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  را به صورت ذیل هم می‌توان نوشت [۲۲].

$$\Sigma = \begin{bmatrix} a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta & (a^2 - b^2) \cos \beta \sin \beta \\ (a^2 - b^2) \cos \beta \sin \beta & a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در آن  $a$  و  $b$  به ترتیب نیم قطر اطول و اقصر بیضی ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  و  $\beta$  زاویه نیم قطر اطول با جهت مثبت محور  $x$  در جهت پادساعت گرد می‌باشد. در مدل کوواریانس ناهمسانگرد  $a \neq b$  است درحالی‌که در مدل کوواریانس همسانگرد است. در واقع فرمول (۵) حالت خاصی از (۱۵) است که در آن  $Q_{ij} = k^2 (\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2)$  و این خودش حالت خاصی از فرمول (۱۶) است که برای ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  در (۱۷) مقدار  $a = b$  فرض می‌گردد و طبیعی است که به جای بیضی، دایره‌ای به شعاع  $a$  خواهیم داشت که  $a$  همان فاصله‌ی همبستگی می‌باشد. پس از تعیین ساختار تابع کوواریانس ناهمسانگرد موضوع برآورد عناصر تنسور کرنش برای آن مطرح می‌گردد در واقع باید معادل فرمول‌های (۹) تا (۱۱) را برای این وضعیت به دست

در این فرمول‌ها  $u$  و  $v$  بردارهای داده مربوط به هر یک از دو مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  هستند. همچنین  $\hat{x}_u$  و  $\hat{x}_v$  بردار پارامترهای مجهول برآورد شده ترند برای هر یک از دو مؤلفه می‌باشند که با استفاده از فرمول (۳) محاسبه می‌شوند.  $\hat{\epsilon}_{xx}$ ،  $\hat{\epsilon}_{xy}$  و  $\hat{\epsilon}_{yy}$  عناصر تنسور کرنش در مرکز ثقل هستند که مستقیماً از  $\hat{x}_u$  و  $\hat{x}_v$  استخراج می‌گردند.  $C_{0u}$  و  $k_u$  پارامترهای تابع کوواریانس مؤلفه‌ی  $u$  از میدان جابجایی و متقابلاً  $C_{0v}$  و  $k_v$  مربوط به مؤلفه‌ی  $v$  هستند که معمولاً از روش FECM محاسبه می‌شوند.  $d_i$  فاصله‌ی بین نقطه‌ی  $p_i$  از بردار داده‌ها ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) که در موقعیت  $x_i$  و  $y_i$  قرار گرفته، با نقطه‌ی محاسبه‌ی کرنش یعنی  $p_0$  است.

### ۳- مدل کوواریانس ناهمسانگرد

فرمول (۱) را می‌توان به صورت  $y = Ax + w$  نوشت که در آن بردار مشاهدات فاقد ترند<sup>۱</sup> و یا بردار باقیمانده‌ها نامیده می‌شود و  $E(w) = 0$  می‌باشد [۱]. از دیدگاه آماری هر یک از عناصر  $w$  حاصل تحقق‌پذیری<sup>۲</sup> یک فرآیند تصادفی مکانی گاوسی در موقعیت مکانی مربوطه است [۲۱]. این فرآیند حاصل کانولوشن فرآیند نویز سفید گاوسی  $\omega$  با هسته‌ی هموارساز  $k$  بر مبنای ضابطه‌ی ذیل است [۷، ۵ و ۲۲].

$$W(r) = \int_D k(r-u) \omega(u) du = \int_D k_r(u) \omega(u) du \quad (12)$$

که در آن  $r$  بردار موقعیت نقطه تحقق‌پذیری فرآیند و  $u$  بردار موقعیت هر یک از نقاط متعلق به  $D$  دامنه‌ی مکانی مشاهدات می‌باشد. برای یک فرآیند گاوسی ضابطه‌ی هسته‌ی انتگرال به این صورت تعریف می‌شود [۷ و ۲۲].

$$k_r(u) = \frac{1}{2\pi} |\Sigma_r|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u^T \Sigma_r^{-1} u \right\} \quad (13)$$

که در آن  $\Sigma_r$  ماتریس کوواریانس فرآیند تصادفی در موقعیت مکانی هر یک از مشاهدات است و به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (14)$$

<sup>۱</sup> Detrended observations  
<sup>۲</sup> realization

<sup>۳</sup> Stationary

مدل‌های همسانگرد توصیه نموده‌اند [۲۸]. در آمار مکانی دو روش برآورد حداکثر درست نمایی (MLE) و تخمین بی‌زی<sup>۲</sup> با استفاده از تکنیک مونت کارلو زنجیره‌ی مارکف (MCMC) برای محاسبه‌ی دقیق پارامترهای تابع کوواریانس استفاده می‌شود [۲۴ و ۹]. در اینجا از روش حداکثر درست نمایی محدود شده یا REML استفاده می‌گردد. این روش به‌نوعی تکامل‌یافته‌ی MLE و سازگار با مدل تابعی گاوس مارکف است [۲۵].

در ژئودزی معمولاً از REML برای برآورد مؤلفه‌های واریانس در سرشکنی استفاده می‌شود [۱۵ و ۲۶]. مجدداً در حوزه‌ی آمار، استین<sup>۴</sup> [۲۷] با توجه به تحقیقات و نتایج تجربی به‌دست‌آمده توسط محققین، استفاده از REML را برای برآورد پارامترهای واریوگرام در کریجینگ<sup>۵</sup> توصیه می‌کند. در ژئودزی فیزیک، یارمولوفسکی<sup>۶</sup> این روش را به‌عنوان جایگزین FECM برای برآورد دقیق پارامترهای تابع کوواریانس همسانگرد در پیش‌بینی میدان ثقل محلی بکار گرفته است [۲۸]. در روش REML تابع چگالی احتمال شرطی مشاهدات به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵ و ۲۷].

$$p(y|\theta) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}y^T R_\theta y)}{(2\pi)^{m/2} \det(C_\theta)^{1/2} \det(A^T C_\theta^{-1} A)^{1/2}} \quad (21)$$

که در آن  $\theta$  بردار پارامترهای مجهول موردنظر مشارکت‌کننده در ساختار ماتریس کوواریانس مشاهدات،  $C_\theta$  است. در اینجا با استفاده از رابطه‌ی (۱۷) برای  $\Sigma$  بردار پارامترهای مجهول به‌صورت  $\theta = [a \ b \ \beta]^T$  تعریف می‌گردد. در ادبیات آماری  $R_\theta$  را ماتریس رانژ می‌نامند و با ضابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$R_\theta = C_\theta^{-1} P_A^\perp = C_\theta^{-1} [I - A(A^T C_\theta^{-1} A)^{-1} A^T C_\theta^{-1}] \quad (22)$$

که در آن  $P_A^\perp$  ماتریس تصویرگر است. در روش REML بردار کمیت‌های مجهول موردنظر،  $\theta$  طوری برآورد می‌گردد

بیاوریم که برای این موضوع از ضابطه‌ی تابع کوواریانس ناهمسانگرد گاوسی طبق رابطه (۱۵) به‌جای (۵) استفاده می‌کنیم و درنهایت نتایج زیر حاصل می‌گردد.

$$\hat{\varepsilon}_{xx} |_{x_0, y_0} = \hat{\varepsilon}_{xx} + 2C_{0u} \sum_{i=1}^m e^{-Q_i} \Delta r_i^T \Sigma_u^{-1} e_1 (C_{uu}^{-1} (u - A\hat{x}_u))_i \quad (18)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy} |_{x_0, y_0} = \hat{\varepsilon}_{yy} + 2C_{0v} \sum_{i=1}^m e^{-Q_i} \Delta r_i^T \Sigma_v^{-1} e_2 (C_{vv}^{-1} (v - A\hat{x}_v))_i \quad (19)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xy} |_{x_0, y_0} = \hat{\varepsilon}_{xy} + C_{0u} \sum_{i=1}^m e^{-Q_i} \Delta r_i^T \Sigma_u^{-1} e_2 (C_{uu}^{-1} (u - A\hat{x}_u))_i + C_{0v} \sum_{i=1}^m e^{-Q_i} \Delta r_i^T \Sigma_v^{-1} e_1 (C_{vv}^{-1} (v - A\hat{x}_v))_i \quad (20)$$

که در آن  $Q_i$  و  $\Delta r_i$  به ترتیب فاصله‌ی ماهالانویس و بردار اختلاف مختصات بین نقطه‌ی محاسبه  $p_0$  و نقطه‌ی  $p_i$  از بردار داده‌ها می‌باشند.  $e_1$  و  $e_2$  به ترتیب بردارهای یکه‌ی مختصات بر روی محورهای  $x$  و  $y$  هستند و  $\Sigma_u$  و  $\Sigma_v$  ماتریس‌های کوواریانس هسته‌های فرآیند گاوسی مربوط به هر یک از مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  می‌باشند.

#### ۴- استفاده از روش REML برای تعیین پارامترهای مدل کوواریانس

مهم‌ترین چالشی که در ارتباط با استفاده از توابع کوواریانس ناهمسانگرد با ساختار نشان داده‌شده در فرمول‌های (۱۵) و (۱۶) وجود دارد، برآورد صحیح مؤلفه‌های ماتریس  $\Sigma$  است. همان‌طور که در بخش ۲ اشاره شد، روش معمول در ژئودزی برای تعیین پارامترهای تابع کوواریانس FECM می‌باشد. این روش اساساً برای مدل‌های کوواریانس همسانگرد طراحی شده است و پیاده‌سازی آن برای مدل‌های ناهمسانگرد به‌سادگی ممکن نیست [۳ و ۵] از طرف دیگر در این روش از کوواریانس‌های تجربی استفاده می‌شود که فرآیند دسته‌بندی و محاسبات آن‌ها نیز تا حدودی تجربی است و نتایج قطعی و یکسانی را به دست نمی‌دهد به همین دلیل برخی از محققین روش‌هایی جایگزین برای آن حتی برای

<sup>۱</sup> Maximum likelihood estimation

<sup>۲</sup> Bayesian estimation

<sup>۳</sup> Monte Carlo Markov chain

<sup>۴</sup> Stein

<sup>۵</sup> kriging

<sup>۶</sup> Jarmolowski

<sup>۷</sup> Rao matrix

استفاده کنیم. اولین معیار ارزیابی، خطای استاندارد پیش‌بینی با کولوکیشن است که خطای داخلی نیز نامیده می‌شود [۵]. این خطا برای مدلی با ضابطه‌ی (۱) از فرمول ذیل محاسبه می‌گردد [۱۸ و ۱۹].

$$\sigma_{\hat{y}_0}^2 = C_0 - c_{s_0s} C_{yy}^{-1} c_{s_0s}^T + (c_{s_0s} C_{yy}^{-1} A - a_0) C_{\hat{x}\hat{x}} (c_{s_0s} C_{yy}^{-1} A - a_0)^T \quad (26)$$

که در آن  $\sigma_{\hat{y}_0}^2$  خطای پیش‌بینی در نقطه‌ی  $C_0$ ،  $p_0$  واریانس سیگنال نقاط داده،  $c_{s_0s}$  بردار کراس کوواریانس بین هر یک از نقاط داده با  $p_0$  و بردار ترند مربوط به نقطه‌ی  $p_0$  می‌باشد. این نوع از خطا به‌عنوان معیار استاندارد ارزیابی دقت پیش‌بینی با روش LSC تلقی می‌گردد [۱۸]. تحلیل کیفیت پیش‌بینی با معیار خطای داخلی به دو صورت قابل انجام می‌باشد. اول این‌که شبکه‌ای منظم از نقاط پیش‌بینی شونده در حوزه‌ی مکانی پیرامونی داده‌ها تعریف کنیم و سپس اندازه خطا را برای این نقاط برآورد نماییم. بدین ترتیب کمیت پیش‌بینی شونده به همراه خطای پیش‌بینی آن عرضه می‌شود. در روش دیگر خطای داخلی در موقعیت مکانی خود نقاط پیش‌بینی شونده محاسبه می‌گردد و بنابراین روشی که بتواند خطای پیش‌بینی کمتری را در این نقاط ارائه کند قابلیت پیش‌بینی دقیق‌تری خواهد داشت. نوع دیگر خطا، خطای اعتبار سنجی متقابل موسوم به CVE<sup>۳</sup> است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۵].

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_{i,-i} \quad (27)$$

که در آن  $y_i$  مشاهده‌ی  $i$ ام و  $\hat{y}_{i,-i}$  مقدار پیش‌بینی‌شده‌ی  $y_i$  توسط روش LSC می‌باشد. طوری که برای پیش‌بینی  $\hat{y}_{i,-i}$  مشاهده‌ی  $y_i$  از فهرست مشاهدات حذف گردیده است. این خطا که به آن خطای خارجی هم گفته می‌شود مختص به LSC نیست و برای سایر روش‌های پیش‌بینی نیز مورداستفاده قرار می‌گیرد. خطای CVE معیاری مطمئن برای ارزیابی کیفیت و همین‌طور صحت پیش‌بینی با هر یک از روش‌های پیش‌بینی است [۲۷]. اندازه‌ی این خطا می‌تواند مثبت یا منفی باشد

که تابع چگالی احتمالی شرطی ارائه‌شده در (۲۱) بیشینه شود و برای این منظور لازم است که تابع لگاریتمی درست نمایی ذیل موسوم به NLLF<sup>۱</sup> کمینه گردد [۲۵].

$$NLLF(\theta) = \ln \det(C_\theta) + \ln \det(A^T C_\theta^{-1} A) + y^T R_\theta y \quad (23)$$

برای برآورد مقادیری از عناصر  $\theta$  که تابع فوق را کمینه می‌کنند از روش فیشر اسکورینگ<sup>۲</sup> استفاده می‌شود [۲۶]. برای پیاده‌سازی روش مذکور نیاز به مشتق‌گیری از  $C_\theta$  نسبت به هر یک از عناصر  $\theta_k$  داریم ( $k = 1, 2, 3$ ). برای این منظور رابطه ذیل مورداستفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta_k} = \left\{ \frac{\partial C(p_i, p_j)}{\partial \theta_k} \right\}_{i,j=1}^m \quad (24)$$

که در آن  $m$  تعداد مشاهدات است و  $\{p_i\}_{i,j=1}^m$  نمادی است که برای نمایش عنصر سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام از ماتریس مربعی  $C_\theta$  مورداستفاده قرار گرفته است. بنابراین باید از تابع کوواریانس ناهمسانگرد (۱۶) نسبت به هر یک از مؤلفه‌های  $\theta$  مشتق گرفته شود که با استفاده از قانون مشتق‌گیری از معکوس یک ماتریس مثبت معین [۲۹] نتیجه ذیل حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial C(p_i, p_j)}{\partial \theta_k} = -C_0 \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_k} \exp(-Q_{ij}) = [C_0 \exp(-Q_{ij})] \Delta r_{ij}^T \left( \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_k} \Sigma^{-1} \right) \Delta r_{ij} \quad (25)$$

با استفاده از فرمول (۱۷) و مشتق‌گیری از پارامترهای سه‌گانه‌ی  $a$ ،  $b$  و  $\beta$  امکان پیاده‌سازی روش فراهم می‌گردد.

## ۵- معیارهای مقایسه پیش‌بینی با مدل‌های کوواریانس همسانگرد و ناهمسانگرد

برای مقایسه و ارزیابی نتایج حاصل از پیش‌بینی با مدل ناهمسانگرد با نتایج به‌دست‌آمده از مدل همسانگرد در اینجا می‌توانیم از دو نوع معیار داخلی و خارجی

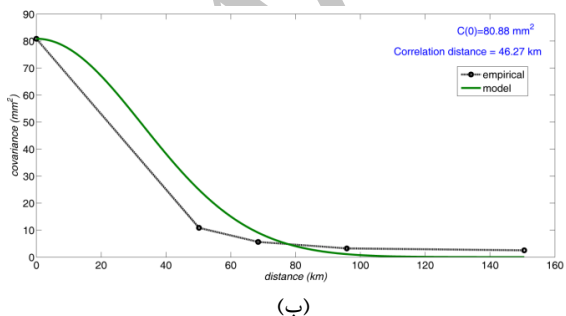
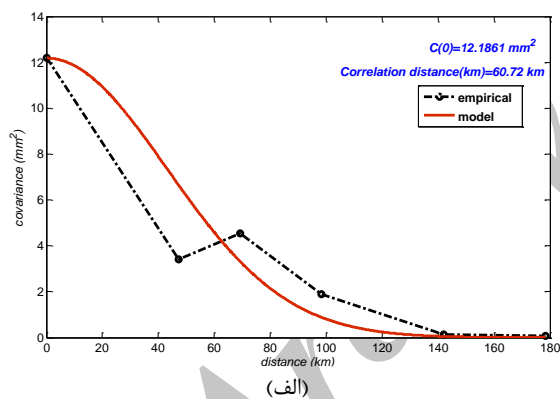
<sup>۳</sup> Cross validation error

<sup>۱</sup> Negative log likelihood function

<sup>۲</sup> Fisher Scoring

## ۶-۱- برآورد پارامترهای مدل کوواریانس همسانگرد

برای انجام محاسبات مربوط به کولوکیشن از مؤلفه‌های جابجایی سطحی  $u$  و  $v$  برای بازه زمانی دوساله‌ی ۱۹۹۶ تا ۱۹۹۸ به‌طور مستقیم استفاده گردید. ابتدا تابع کوواریانس همسانگرد گاوسی (فرمول ۵) برای درون‌یابی با LSC انتخاب گردید. در مرحله‌ی بعدی اثر ترند از روی داده‌ها برداشته شد و پس‌از آن روش FECM برای محاسبه‌ی پارامترهای تابع کوواریانس مذکور برای هریک از مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  به‌طور جداگانه بکار گرفته شد. در شکل ۲ منحنی مدل کوواریانس برازش یافته به مقادیر کوواریانس‌های تجربی محاسبه‌شده برای دو مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  را نمایش داده‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، واریانس سیگنال به‌دست‌آمده برای مؤلفه‌ی  $v$  به‌مراتب بزرگ‌تر از مؤلفه‌ی  $u$  است اما فاصله‌ی همبستگی برآورد شده برای دو مؤلفه تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.

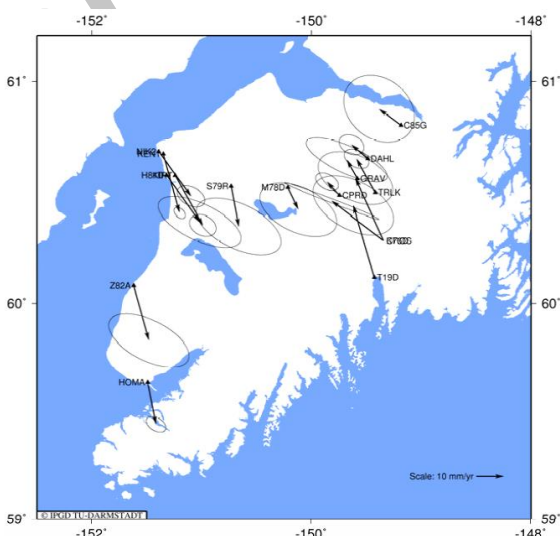


شکل ۲- تابع کوواریانس برازش یافته به مقادیر کوواریانس تجربی (الف) - مؤلفه‌ی شرقی - غربی از بردار جابجایی (ب) - مؤلفه‌ی شمالی - جنوبی

بنابراین میانگین قدر مطلق اندازه این خطا برای کلیه نقاط و همین‌طور جذر متوسط مجذورات آن نیز به‌عنوان معیار کلی مورد استناد قرار می‌گیرد.

## ۶- پیش‌بینی میدان سرعت در شبه‌جزیره کنای با LSC و مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل‌های همسانگرد و ناهمسانگرد

به‌منظور پیاده‌سازی ایده‌های مطرح‌شده در این مقاله از داده‌های مربوط به میدان جابجایی حاصل از پردازش مشاهدات GPS در ۱۶ ایستگاه واقع در شبه‌جزیره کنای در جنوب مرکزی آلاسکا استفاده شده است. اندازه‌گیری‌ها در طی دو کمپین مشاهداتی در سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۸ انجام‌شده است. جزئیات مربوط به داده‌های مورد‌استفاده از [۳۰] قابل‌دسترسی است. شکل ۱ نشان‌دهنده‌ی بردارهای میدان سرعت GPS محاسبه‌شده برای ۱۶ ایستگاه مذکور به همراه بیضی‌های خطای ۹۵٪ آن نقاط می‌باشد.



شکل ۱- میدان سرعت محاسبه‌شده برای ۱۶ ایستگاه GPS در شبه‌جزیره کنای به همراه بیضی‌های خطای مربوطه در سطح اطمینان ۹۵٪ [۳۰]

با توجه به کوچک بودن منطقه و این‌که حداکثر فاصله‌ی بین دو نقطه ۱۸۰ کیلومتر می‌باشد از یک دستگاه مختصات صفحه‌ای که مبدأ آن در مرکز ثقل نقاط قرار دارد، برای محاسبات استفاده شد.



## ۲-۶- برآورد پارامترهای مدل کوواریانس ناهمسانگرد

گردیدند. برای برآورد پارامترهای موردنظر با روش REML نیاز به مقادیر اولیه‌ای از آن‌ها داشتیم که برای این منظور از فاصله همبستگی محاسبه‌شده با FECM استفاده شد. هردوی مقادیر  $a$  و  $b$  مساوی یکدیگر و برابر با این فاصله گرفته شدند و زاویه  $\beta$  نیز صفر فرض شد. در جدول ۱ مقادیر به‌دست‌آمده برای این پارامترها که طی فرآیند تکرار محاسبه گردیده، نمایش داده شده است.

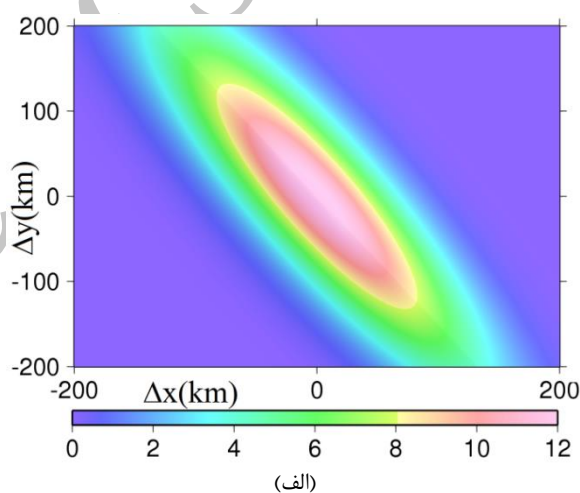
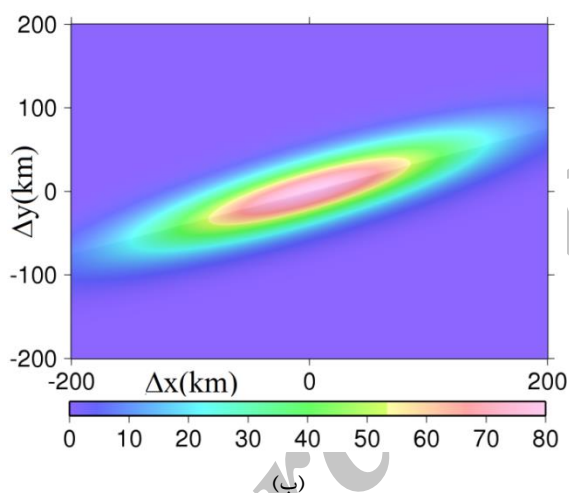
با پیاده‌سازی روش REML پارامترهای مدل ناهمسانگرد گاوسی (۱۲) برای هر دو مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  برآورد شدند. درواقع پارامترهای تشکیل‌دهنده‌ی عناصر هریک از ماتریس‌های کوواریانس  $\Sigma_u$  و  $\Sigma_v$  (سه پارامتر  $a$ ،  $b$  و  $\beta$  برای هر ماتریس) به‌طور جداگانه محاسبه

جدول ۱- مشخصات بیضی‌های مربوط به ماتریس‌های  $\Sigma_u$  و  $\Sigma_v$  برآورد شده با روش REML

مؤلفه جابجایی	نیم قطر اطول (کیلومتر)	نیم قطر اقصی (کیلومتر)	زاویه توجیه (درجه)	تعداد دفعات تکرار
$u$	231.69	51.91	120.54	3
$v$	134.76	31.69	24.36	5

تابع کوواریانس ناهمسانگرد نسبت به دو متغیر  $\Delta x$  و  $\Delta y$  برای دو مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  نشان داده شده است.

با توجه به دومتغیره بودن تابع کوواریانس ناهمسانگرد برای نمایش تغییرات کوواریانس بین نقاط از یک هیستوگرام دوبعدی استفاده می‌کنیم. در شکل ۳ تغییرات



شکل ۳- هیستوگرام دوبعدی تابع کوواریانس ناهمسانگرد به‌دست‌آمده برای مؤلفه‌ی  $u$  (الف) و مؤلفه‌ی  $v$  (ب) از میدان جابجایی، واحد کوواریانس: میلی‌متر مربع

اندازه‌ی کوواریانس به بیشینه‌ی مقدار خود می‌رسد و در جهت عمود بر این امتداد میزان کوواریانس کمینه است. در مورد مؤلفه‌ی  $v$  بیشینه‌ی کوواریانس در راستای شمال شرق به جنوب غرب است و بنابراین نقاطی که موقعیت آن‌ها نسبت به یکدیگر بر این راستا واقع باشد کوواریانس بیشتری خواهند داشت. طبیعی است که اگر ساختار داده‌ها طوری باشد که به‌جای بیضی دایره به دست بیاید در آن صورت کیفیت مدل همسانگرد تأیید می‌شود و استفاده از مدل ناهمسانگرد لزومی نخواهد داشت. اما در اینجا بر اساس شکل ۳ ضرورت استفاده از مدل ناهمسانگرد برای داده مورد استفاده در این تحقیق آشکار می‌شود زیرا

با استفاده از این شکل می‌توان میزان وابستگی کوواریانس به جهت را برای هریک از مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  موردتوجه و بررسی قرارداد. در مورد قسمت الف که به مؤلفه‌ی  $u$  مربوط می‌شود، بیشترین میزان کوواریانس در بین نقاط در راستای شمال غربی به جنوب شرقی مشاهده می‌گردد. البته با توجه به مقادیر عددی نشان داده شده در شکل ۳ و توجه به این نکته که حداکثر فاصله بین دونقطه داده در مسئله‌ی ما حدود ۱۸۰ کیلومتر می‌باشد، می‌توان گفت که بین همه نقاط میزانی از کوواریانس بین مؤلفه‌های  $u$  وجود دارد. در صورتی که نقاط در راستای شمال غربی به جنوب شرقی از یکدیگر قرار داشته باشند،

جدول ۳- مقایسه خطای داخلی برآورد شده روی شبکه‌ی منظم از نقاط برای مدل‌های کوواریانس همسانگرد و ناهمسانگرد

مدل کوواریانس	مؤلفه‌ی خارج‌جایی	مقدار کمینه	مقدار بیشینه	میانگین	انحراف معیار	جزء متوسط مخدورات
همسانگرد	$u$	1.29	11.73	5.35	2.62	5.94
ناهمسانگرد	$u$	1.82	11.62	5.32	2.24	5.76
همسانگرد	$v$	0.87	4.96	2.41	0.99	2.60
ناهمسانگرد	$v$	0.86	4.69	2.10	0.94	2.30

جدول ۴- مقایسه خطای داخلی برآورد شده در نقاط داده برای مدل‌های کوواریانس همسانگرد و ناهمسانگرد

مدل کوواریانس	مؤلفه‌ی خارج‌جایی	مقدار کمینه	مقدار بیشینه	میانگین	انحراف معیار	جزء متوسط مخدورات
همسانگرد	$u$	1.42	6.07	3.00	1.46	3.31
ناهمسانگرد	$u$	1.00	4.57	2.13	1.12	2.39
همسانگرد	$v$	0.68	2.46	1.31	0.57	1.42
ناهمسانگرد	$v$	0.74	2.16	1.21	0.44	1.28

بر اساس جداول ۳ و ۴، در مورد خطاهای داخلی تفاوت زیادی بین نتایج دو مدل همسانگرد و ناهمسانگرد مشهود نیست هرچند که نتایج حاصل از مدل ناهمسانگرد خصوصاً در خود نقاط داده (جدول ۴) دقیق‌تر از مدل همسانگرد است. در شکل ۴ مقایسه عینی بین مشاهدات پیش‌بینی‌شده توسط LSC با هریک از مدل‌های همسانگرد و ناهمسانگرد با اندازه اصلی مشاهده صورت گرفته است. باید توجه داشت که برای انجام پیش‌بینی در اینجا خود مشاهده از فهرست داده‌ها کنار گذاشته شده است. این کار را برای هر دو مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  انجام داده‌ایم و هدف از این مقایسه‌ها آزمایش کیفیت درستی نتایج حاصل از پیش‌بینی با هریک از مدل‌های کوواریانس می‌باشد.

که برآورد حداکثر درست نمایی از پارامترهای تابع کوواریانس اشکالی کاملاً بیضی‌گون را برای کوواریانس بین نقاط ارائه کرده‌اند. علت این موضوع را می‌توان به کمی تعداد نقاط داده، تُنک بودن توزیع مکانی آن‌ها و همین‌طور الگوی تغییر شکل در منطقه نسبت داد.

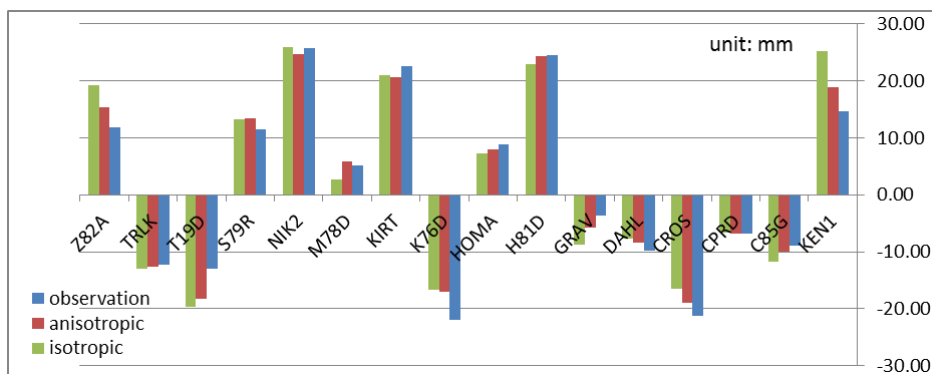
### ۳-۶- ارزیابی و مقایسه

برای ارزیابی و مقایسه‌ی کیفیت پیش‌بینی LSC با مدل‌های کوواریانس همسانگرد و ناهمسانگرد، با به‌کارگیری هرکدام از این مدل‌ها، خطاهای داخلی و خارجی (CVE) در موقعیت مکانی تک‌تک نقاط داده برای هر دو مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  محاسبه گردیدند. همین‌طور برای شبکه‌ای از نقاط با فواصل منظم ۱۵ دقیقه‌ای از یکدیگر، خطای داخلی برای هر دو مؤلفه محاسبه شد. در جداول ۲، ۳ و ۴ شاخص‌های کمینه، بیشینه، میانگین، انحراف معیار و جزء متوسط مجذورات (RMS) هریک از انواع خطاهای محاسبه‌شده به ترتیب برای مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  برای دو مدل کوواریانس مختلف با یکدیگر مقایسه گردیده‌اند.

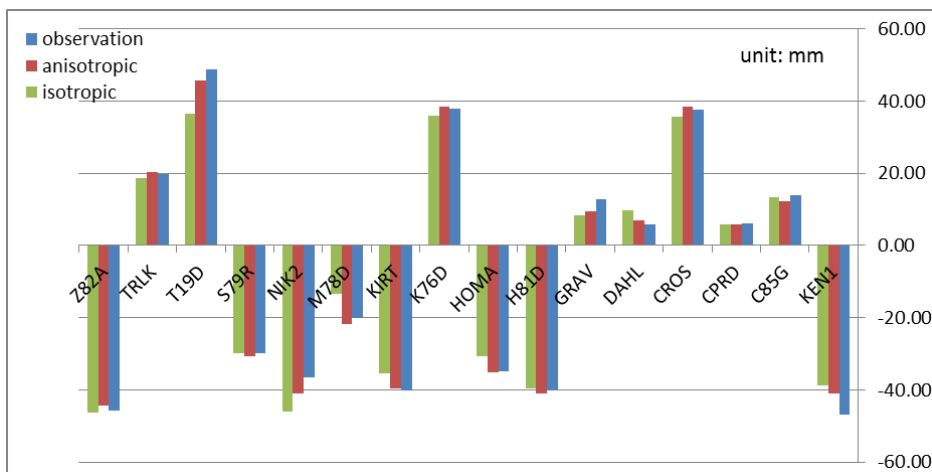
جدول ۲- مقایسه خطای اعتبار سنجی متقابل (خارجی) برآورد شده برای مدل‌های کوواریانس همسانگرد و ناهمسانگرد

مدل کوواریانس	مؤلفه‌ی خارج‌جایی	مقدار کمینه	مقدار بیشینه	میانگین	میانگین قدر مطلق	جزء متوسط مخدورات
همسانگرد	$u$	-10.70	6.71	-0.60	3.42	4.47
ناهمسانگرد	$u$	-4.85	5.41	-0.35	2.01	2.58
همسانگرد	$v$	-8.22	12.39	0.26	3.84	5.28
ناهمسانگرد	$v$	-5.97	4.41	0.33	2.04	2.86

همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌گردد، استفاده از مدل ناهمسانگرد موجب شده است که تمامی شاخص‌های مربوط به خطای CVE در مورد هر دو مؤلفه کاهش یابد. این نوع از خطا معیاری برای سنجش صحت در پیش‌بینی با کولوکیشن است و مقادیر به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که با مدل ناهمسانگردی که پارامترهای آن با REML تعیین گردیده، امکان پیش‌بینی صحیح‌تری از کمیت‌های موردنظر را خواهیم داشت.



(الف)

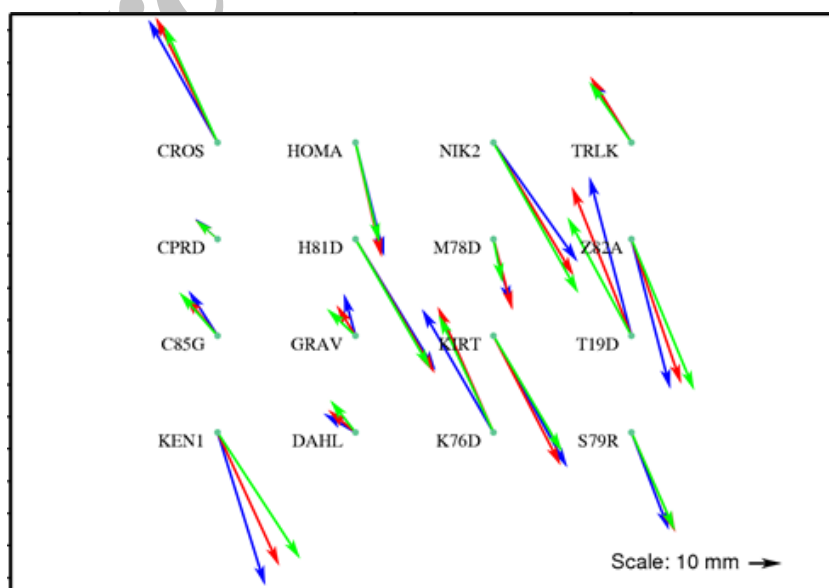


(ب)

شکل ۴- مقایسه مقادیر پیش‌بینی‌شده‌ی تک‌تک مشاهدات توسط مدل‌های همسانگرد (رنگ سبز) و ناهمسانگرد (رنگ قرمز) با مقدار مشاهده‌شده (رنگ آبی). (الف): مؤلفه‌ی  $u$ ، (ب): مؤلفه‌ی  $v$

صورت نمایش روی مختصات واقعی امکان تشخیص و تمایز بردارها عملاً به وجود نمی‌آید.

در شکل ۵ همین مقایسه به صورت برداری نمایش داده شده است. در این شکل موقعیت ۱۶ نقطه شبکه ما بر روی شبکه‌ای منظم پیاده‌سازی شده است زیرا که در

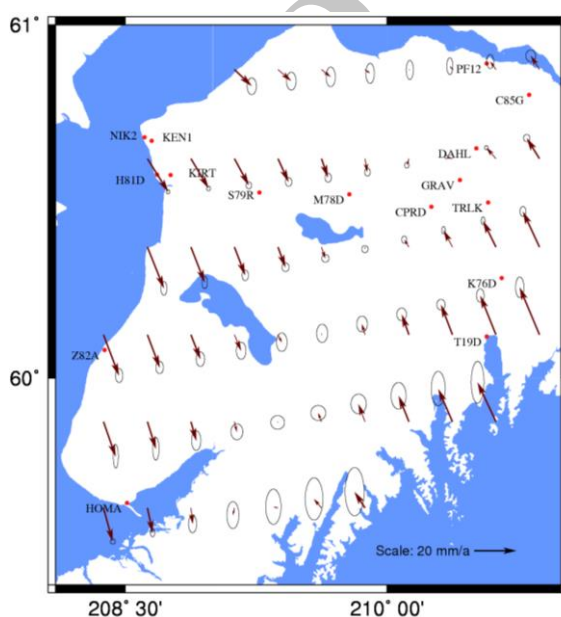


شکل ۵- مقایسه‌ی برداری مقادیر پیش‌بینی‌شده‌ی تک‌تک مشاهدات توسط مدل‌های همسانگرد (رنگ سبز) و ناهمسانگرد (رنگ قرمز) با مقدار مشاهده‌شده (رنگ آبی)، برای جلوگیری از تداخل، ایستگاه‌ها روی شبکه‌ای منظم پیاده‌سازی شده‌اند

همان‌طور که در اشکال ۴ و ۵ ملاحظه می‌شود در اکثر موارد صحت پیش‌بینی با مدل ناهمسانگرد بیشتر از صحت آن با مدل همسانگرد است.

#### ۶-۴- درون‌یابی میدان سرعت در منطقه

در شکل ۶ میدان سرعت درون‌یابی شده با مدل ناهمسانگرد را بر روی شبکه‌ای منظم از نقاط در فواصل پانزده دقیقه‌ای از یکدیگر نمایش داده‌ایم. همین‌طور در این شکل، بیضی‌های خطای پیش‌بینی سرعت در سطح اطمینان ۹۵٪ ترسیم گردیده‌اند.



شکل ۶- میدان سرعت پیش‌بینی شده در منطقه‌ی مورد نظر با استفاده از مدل ناهمسانگرد محاسبه شده توسط روش REML به همراه بیضی خطای پیش‌بینی سرعت نقاط در سطح اطمینان ۹۵٪

از آنجاکه مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  مستقل از یکدیگر پیش‌بینی شده‌اند، کوواریانس بین آن‌ها صفر می‌شود. به همین دلیل است که زاویه توجیه تمامی بیضی‌ها یکسان و برابر صفر است. نکته‌ی دیگر در مورد ابعاد بیضی‌ها می‌باشد که طبیعتاً با دور شدن از نقاط داده افزایش یافته و با نزدیکی به آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. مسئله‌ی قابل توجه دیگر، بزرگ‌تر بودن خطای پیش‌بینی در راستای شمالی-جنوبی در مقایسه با اندازه‌ی آن در راستای شرقی-غربی است. دلیل این موضوع، بزرگ‌تر بودن واریانس سیگنال مؤلفه‌ی  $v$  در مقایسه با مؤلفه‌ی  $u$  می‌باشد. البته در نواحی مرکزی خطای پیش‌بینی هر دو مؤلفه به شدت کم می‌شود و می‌توانیم بیشترین اعتماد را به دقت پیش‌بینی

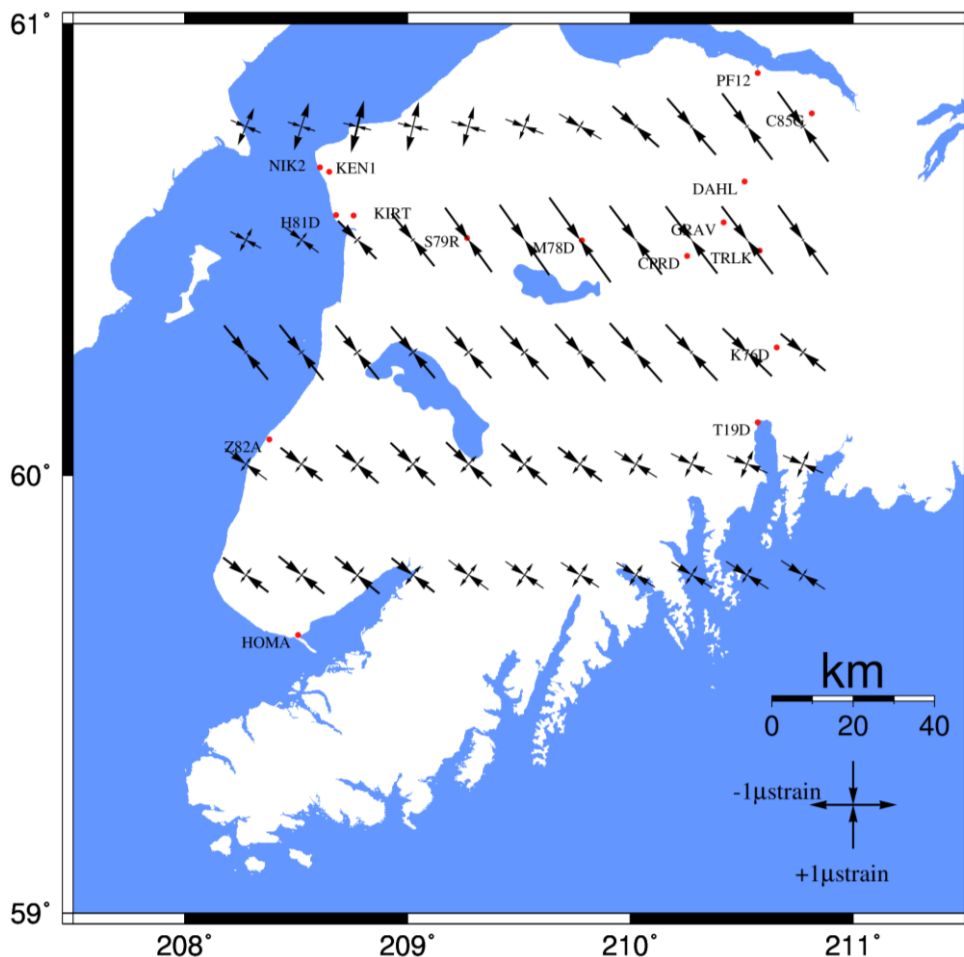
در این نواحی داشته باشیم. در این شکل به‌وضوح دیده می‌شود که منطقه تحت تأثیر دو مؤلفه‌ی بزرگ حرکتی با جهات متضاد یکدیگر، یکی از سمت جنوب شرق به طرف شمال غرب و دیگری از طرف شمال غرب به سمت جنوب شرق است. فروانش ورقه‌ی زمین ساختی اقیانوس آرام<sup>۱</sup> در زیر ورقه‌ی آمریکای شمالی القاء کننده‌ی تنش‌ی وسیع مقیاس بر روی پوسته‌ی زمین در آلاسکا می‌شود و این موجب پدید آمدن کوه‌هایی بلند در شمال آمریکا گردیده است. در این منطقه شاهد تعدادی از بالاترین نرخ‌های لغزش در طول برخی از طولانی‌ترین گسل‌های امتدادلغز واقع بر سطح زمین هستیم و این باعث لرزه‌خیزی وسیعی در منطقه شده است [۳۱]. از ۱۹۴۹ تا ۲۰۰۲ پنج زمین‌لرزه با بزرگی بیش از  $M_w = 7.6$  در منطقه روی داده است که بزرگ‌ترین آن در شبه‌جزیره کنای واقع در جنوب مرکزی آلاسکا به بزرگی  $M_w = 9.2$  در ۱۹۶۴ بوده است. شبه‌جزیره‌ی کنای در اثر این زمین‌لرزه دستخوش تغییر شکل قابل‌ملاحظه‌ای شد و عمده مناطق این شبه‌جزیره دچار فرونشست گردید و در مقابل بخشی از پوسته اقیانوسی در شرق شبه‌جزیره بالآمدگی رخ داد [۳۱]. علی و فرید<sup>۲</sup> [۳۲] در ناحیه‌ای گسترده به مرکزیت کنای جابجایی پوسته را با مدل‌سازی عددی دو و سه‌بعدی و اسکوالاستیک محاسبه نمودند. نتایج مطالعات این دو محقق نشان می‌دهد که تغییر شکل‌های میان‌لرزه‌ای و پس‌لرزه‌ای مداوم متعاقب زمین‌لرزه‌ی ۱۹۶۴، به نحو قابل‌ملاحظه‌ای با اندازه‌ی جابجایی هم‌دوره‌ی GPS خود در توافق است. بنابراین همان‌طور که انتظار می‌رود می‌توان از جابجایی محاسبه شده با GPS برای محاسبه تغییر شکل‌های میان‌لرزه‌ای در منطقه استفاده کرد. در نتایج حاصل از مطالعات این دو محقق نیز دو مؤلفه‌ی حرکتی جنوب شرق به شمال غرب در جنوب شرق شبه‌جزیره و شمال غرب به طرف جنوب شرق در شمال غرب شبه‌جزیره و در نتیجه تحت فشار بودن مرکز جزیره به خوبی مشهود است. میدان سرعت محاسبه شده در شکل ۶ که حاصل مشاهدات GPS در حدفاصل ۱۹۹۶ تا ۱۹۹۸ در طی یک دوره میان‌لرزه‌ای در منطقه است، در توافق کلی با نتایج به‌دست‌آمده در تحقیق علی و فرید می‌باشد.

<sup>۱</sup> Pacific plate  
<sup>۲</sup> Freed

## ۷- برآورد تغییر شکل سطحی در شبه جزیره کنای

در مرحله‌ی پس از محاسبه‌ی میدان جابجایی، میدان تغییر شکل منطقه در طی دوره‌ی دوساله مابین ۱۹۹۶ تا ۱۹۹۸ با استفاده از LSC به کمک مدل کوواریانس

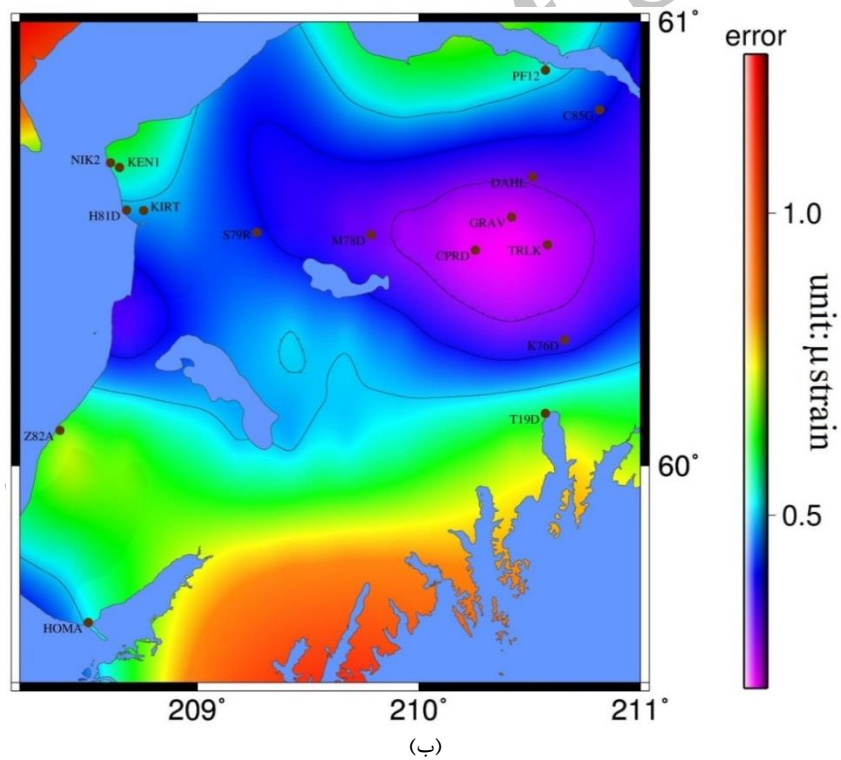
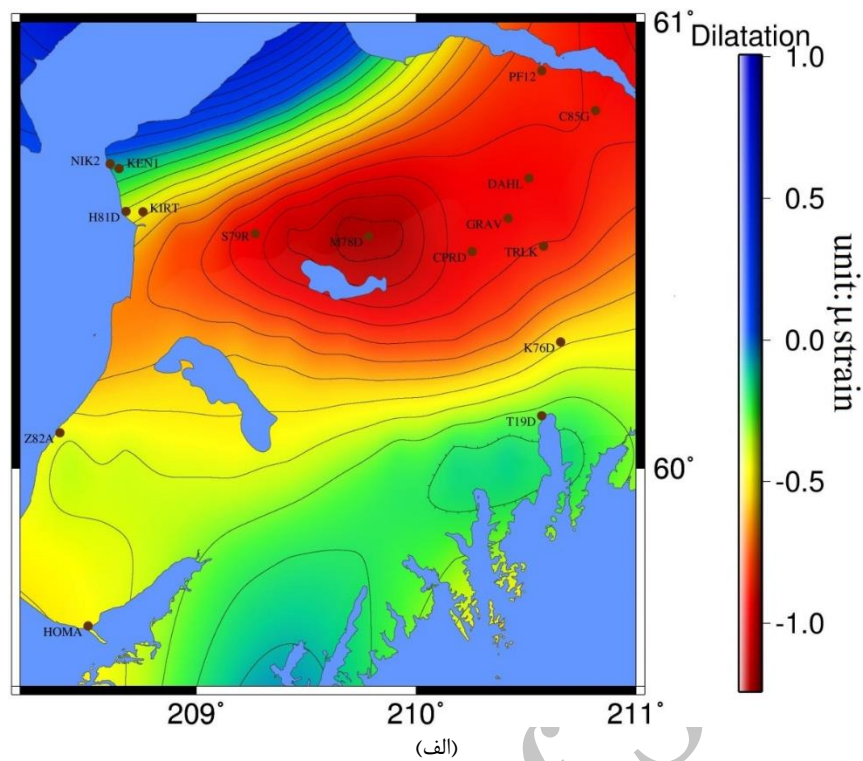
ناهمسانگرد بر روی شبکه‌ای منظم از نقاط در فواصل ۱۵ دقیقه‌ای از یکدیگر، محاسبه گردید. برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های گرادیان میدان جابجایی از فرمول‌های (۱۵) تا (۱۷) استفاده شد و نهایتاً عناصر تنسور کرنش برای هر یک از نقاط شبکه محاسبه گردید. در شکل ۷ مؤلفه‌های اساسی کرنش در نقاط محاسبه نمایش داده شده‌اند.



شکل ۷- مؤلفه‌های اساسی کرنش محاسبه‌شده با مدل ناهمسانگرد

مؤلفه‌ی اتساع به نحو قابل‌ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد هرچند که در تمامی منطقه به‌صورت کلی فشردگی در جهت جنوب شرقی - شمال غربی به‌وضوح رؤیت می‌شود و این همخوانی کاملی با مطالعات سایر محققین دارد [۳۰ و ۳۱ و ۳۲]. در قسمت الف از شکل ۸، مؤلفه‌ی اتساع  $\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$  نشان داده شده است و از آنجاکه در بیشتر نقاط علامت آن منفی است آن را فشردگی می‌نامیم. در قسمت ب از همین شکل خطای برآورد فشردگی در منطقه را در سطح اطمینان ۹۵٪ نمایش داده‌ایم.

بر اساس میدان سرعت در منطقه (شکل ۶) انتظار داریم که مؤلفه‌های اصلی کرنش در راستای شمال غرب به جنوب شرق باشند که این موضوع در تمامی نقاط مشهود است. در شکل ۷ مشاهده گردد که میزان بیشینه‌ی کرنش در منطقه در ناحیه همسایگی نقطه M78D اتفاق افتاده است. نکته‌ی قابل‌تأمل دیگر در شکل ۶ وجود الگوی تغییر شکل ناهمگن در منطقه با حرکت از سمت شمال به‌طرف جنوب است طوری که با تغییر عرض ژئودتیک الگوی تغییر شکل نیز عوض می‌شود البته در بالاترین عرض این تغییر الگو با حرکت از سمت شرق به غرب هم اتفاق می‌افتد و در همسایگی ایستگاه‌های NIK2 و KEN1



شکل ۸- (الف): مؤلفه‌ی فشردگی  $\Delta$  محاسبه‌شده با مدل ناهمسانگرد، (ب): خطای برآورد مؤلفه‌ی فشردگی در سطح اطمینان ۹۵٪

اساس مطالعات کوهن و فری مولر<sup>۱</sup> [۳۱] که با استفاده از نتایج مشاهدات ترازیبی، مشاهدات GPS و ثقل سنجی در سال‌های ۱۹۹۳ تا ۱۹۹۵ در منطقه انجام شده است، تغییر

در شکل ۸ (الف) بیشینه فشردگی در همسایگی M78D مشاهده می‌گردد و همچنین الگوی گنبدی شکل برای کمیت فشردگی در منطقه قابل تشخیص است. بر

<sup>۱</sup> Cohen and Freymueller

دقیق تری از جابجایی نقاط در منطقه مورد مطالعه به دست می آید طوری که شاخص های مختلف CVE که معیاری برای صحت پیش بینی با LSC است، همگی کاهش پیدا کردند. برای داده های مورد استفاده در این تحقیق، مقادیر میانگین قدر مطلق و RMS برای مؤلفه ی  $u$  به ترتیب  $0.41\%$  و  $0.42\%$  و برای مؤلفه ی  $v$  به ترتیب  $0.46\%$  و  $0.45\%$  کاهش نشان می دهند. در مورد خطای استاندارد پیش بینی با LSC (خطای داخلی) بر روی شبکه ای منظم از نقاط، مقادیر میانگین و RMS خطا برای مؤلفه ی  $u$  تفاوت محسوسی نشان نمی دهد. در حالی که میانگین و RMS خطای مذکور برای مؤلفه ی  $v$  به ترتیب  $0.13\%$  و  $0.11\%$  کاهش نشان می دهد. در خصوص اندازه ی دو شاخص میانگین و RMS خطای داخلی در خود نقاط داده نیز به ترتیب  $0.29\%$  و  $0.27\%$  برای مؤلفه ی  $u$  و  $0.7\%$  و  $1.0\%$  برای مؤلفه ی  $v$  کاهش خطا مشاهده می شود. بنابراین می توان نتیجه گرفت که با به کارگیری روش های پیشنهادی در این تحقیق با داده های مورد استفاده در منطقه مورد مطالعه انواع خطاهای داخلی کاهش چشمگیری نشان نداده اند. از این جهت تنها بهبود اندکی در نتایج به دست آمده است. اما در مقابل اندازه ی خطاهای خارجی که شاخص مهمی در خصوص قابلیت اطمینان و اعتماد پذیری نتایج حاصله می باشند به نحو قابل ملاحظه ای بهبود یافته است و می توان انتظار داشت که برای داده های مشابه در مناطق دیگر هم، اندازه ی شاخص های مورد استفاده برای سنجش کیفیت پیش بینی با به کارگیری روش های پیشنهادی بهبود یابد. در این تحقیق همچنین روابط ریاضی لازم برای استفاده از مدل ناهمسانگرد به منظور محاسبه عناصر تنسور کرنش ارائه گردید. با توجه به الگویی که از نوع تغییر شکل در شبه جزیره کنای وجود داشت، نشان دادیم که روش LSC با مدل ناهمسانگرد قادر است الگوی تغییر شکل صحیحی را از داده های جابجایی مستخرج نماید. این مورد نیز دلیلی مضاعف برای نشان دادن صحت بیشتر محاسبات مربوط به کرنش با این روش در منطقه ی مورد مطالعه است. علاوه بر آن مشخص گردید که با LSC می توان تغییرات شکل ناهمگن را نیز در این منطقه تشخیص داد. توجه به این نکته نیز ضروری است که برخلاف بسیاری از مسائل معمول که LSC در آنها مورد استفاده قرار می گیرد، مانند پیش بینی ثقل، تعداد نقاط داده در اینجا کم بوده است. ما نشان دادیم که با تعداد کم نقاط هم

شکل میان لرزه ای پوسته ی زمین در شبه جزیره ی کنای دارای الگویی گنبدی شکل در مؤلفه ی ارتفاعی می باشد طوری که بیشترین میزان بالآمدگی در بخش مرکزی شبه جزیره و در همسایگی ایستگاه M78D رخ می دهد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که آزمایش استفاده از مدل کوواریانس ناهمسانگرد در پیش بینی صحیح الگوی تغییر شکل ناهمگن در منطقه موفقیت آمیز بوده است. در خصوص دقت کمیت های پیش بینی شده نیز همان طور که در شکل ۸ (ب) دیده می شود در ناحیه محصور بین ایستگاه های اندازه گیری کمترین میزان خطای پیش بینی وجود دارد.

## ۸- نتایج

مدل کوواریانس ناهمسانگرد علاوه بر فاصله به جهت نیز وابسته است و طبیعتاً می توانیم انتظار داشته باشیم که استفاده از چنین مدلی در مواقعی که اندازه کمیت مورد پیش بینی در جهت خاصی تغییر می کند، بتواند نقش مؤثری در ارتقای کیفیت پیش بینی ایفا کند. از آنجا که داده های مورد استفاده در این تحقیق مؤلفه های بردارهای جابجایی سطحی زمین بود، با توجه به وابستگی این کمیت ها به جهت، بکار گیری مدل کوواریانس ناهمسانگرد برای پیش بینی آنها در حوزه مکانی داده ها می توانست دارای توجیه باشد. یکی از چالش های عمده در بکار گیری مدل ناهمسانگرد تعیین دقیق پارامترهای آن است زیرا که روش سنتی FECM برای آن به راحتی قابل پیاده سازی نیست. در این مقاله از روش REML برای برآورد پارامترهای تابع کوواریانس ناهمسانگرد گاوسی استفاده کردیم. این روش پیش تر نیز برای برآورد پارامترهای تابع کوواریانس همسانگرد گاوسی توسط یارمولوفسکی استفاده شده و نتایج مطلوبی از به کارگیری آن گزارش گردیده است [۲۸]. علاوه بر آن در منابع آماری مرتبط با درون یابی به روش کریجینگ نیز استفاده از این روش برای برآورد پارامترهای واریوگرام توصیه شده است [۲۷]. با در نظر گرفتن ملاحظات فوق همان طور که انتظار می رفت نتایج حاصل از پیاده سازی مدل ناهمسانگرد برای جابجایی سطحی زمین در این تحقیق نیز نشان داد که با به کارگیری توأمان مدل کوواریانس ناهمسانگرد و استفاده از روش REML، پیش بینی هایی صحیح تر و نسبتاً

درستی نتایج حاصل از به‌کارگیری روش REML در محاسبه‌ی پارامترهای کوواریانس، وابستگی شدیدی به کثرت تعداد نقاط داده ندارد.

می‌شود پیش‌بینی صحیحی را از LSC انتظار داشت. این مهم با استفاده از تابع کوواریانس ناهمسانگرد و بکارگیری روش REML برای برآورد پارامترهای آن محقق گردید. همین‌طور نشان داده شد که برخلاف روش سنتی FECM

## مراجع

- [1] Moritz, H. (1980). "Advanced physical geodesy." Herbert Wichmann Verlag, Germany, Karlsruhe.
- [2] Egli, R., Geiger, A., Wiget, A. and Kahle, H.G. (2007). "A modified least-squares collocation method for the determination of crustal deformation: first results in the Swiss Alps." *Geophysical Journal International*, Vol. 168, No.1, PP. 1-12.
- [3] Duquenne, H., Everaerts, M. and Lambot, P. (2005). "Merging a gravimetric model of the geoid with GPS/levelling data: an example in Belgium." In "Gravity, Geoid and Space Missions." Springer, Germany, Berlin, PP. 131-136.
- [4] Darbeheshti, N. and Featherstone, W. E. (2010). "Tuning a gravimetric quasigeoid to GPS-levelling by non-stationary least-squares collocation." *Journal of Geodesy*, Vol. 84, No. 7, PP. 419-431.
- [5] Darbeheshti, N. and Featherstone, W.E. (2009). "Non-stationary covariance function modelling in 2D least-squares collocation." *Journal of Geodesy*, Vol. 83, No. 6, PP.495-508.
- [6] Sampson, P. D. and Guttorp, P. (1992). "Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure." *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No.417, PP.108-119.
- [7] Higdon, D., Swall, J. and Kern, J. (1998). "Non-stationary spatial modeling." In "Bayesian Statistics Vol.6", PP.761-768, Oxford University Press, Oxford.
- [8] Fuentes, M. (2001). "A high frequency Kriging approach for non-stationary environmental processes." *Environmetrics*, Vol. 12, No. 5, PP.469.483.
- [9] Paciorek, C.J. and Schervish, M.J. (2006). "Spatial modelling using a new class of nonstationary covariance functions." *Environmetrics*, Vol.17, No. 5, PP.483-506.
- [10] Neto, J.H.V., Schmidt, A.M. and Guttorp, P. (2014). "Accounting for spatially varying directional effects in spatial covariance structures." *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, Vol.63, No.1, PP.103-122.
- [11] Darbeheshti, N. (2009). "Modification of the least-squares collocation method for non-stationary gravity field modelling." phd thesis, Curtin University of Technology, Australia.
- [12] El-Fiky, G.S. and Kato, T. (1998). "Continuous distribution of the horizontal strain in the Tohoku district, Japan, predicted by least-squares collocation." *Journal of Geodynamics*, Vol.27, No.2, PP.213-236.
- [13] Shimada, S. (2012). "Comparison of the coordinate solutions between the absolute and the relative phase center variation models in the dense regional GPS network in Japan." In "Geodesy for Planet Earth", PP.651-656., Springer, Berlin
- [14] Gomez, D.D., Smalley, R., Langston, C.A., Piñón, D.A., Cimbaro, S.R., Bevis, M., Kendrick, E., Barón, J., Báez, J.C. and Parra, H. (2015). "Co-seismic deformation of the 2010 Maule, Chile earthquake: Validating the least squares collocation interpolation method." *GeoActa*, Vol.40, No.1, PP.25-35.
- [15] Koch, K.R. (1986). "Maximum likelihood estimate of variance components." *Bulletin Gæodésique*, Vol.60, No.4, PP.329-338.
- [16] Kahle, H.G., Müller, M.V., Geiger, A., Danuser, G., Mueller, S., Veis, G., Billiris, H. and Paradissis, D. (1995). "The strain field in northwestern Greece and the Ionian Islands: results inferred from GPS measurements." *Tectonophysics*, Vol.249, No. 1, PP.41-52.
- [17] Jarmołowski, W. (2015). "Least squares collocation with uncorrelated heterogeneous noise estimated by restricted maximum likelihood." *Journal of Geodesy*, Vol.89, No. 6, PP.577-589.
- [18] Mikhail, E.M., Ackermann, F. (1976). "Observations and least squares." Harper and Row, New York.
- [19] Eringen, A. C. (1980). "Mechanics of continua." Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York.
- [20] Wu, J. C., Tang, H. W., Chen, Y. Q. and Li, Y. X. (2006). "The current strain distribution in the North China Basin of eastern China by least-squares collocation." *Journal of Geodynamics*, Vol. 41, No. 5, PP.462-470.
- [21] Paciorek, C.J. (2003). "Non-stationary Gaussian processes for regression and spatial modelling", Doctoral dissertation, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2003.



- [22] Calder, C.A. and Cressie, N. (2007). "Some Topics in Convolution-Based Spatial Modeling", Proceedings of the 56th Session of the International Statistics Institute, Lisbon, Portugal.
- [23] Mahalanobis, P.C. (1936). "On the generalized distance in statistics." *Sci India, Proc Natl Inst*, Vol.12, No.1, PP.49-55.
- [24] Robert, C. and Casella, G. (2013). "Monte Carlo statistical methods", Springer, Berlin.
- [25] Koch, K.R. (2007). "Introduction to Bayesian statistics", 2nd ed., Springer, New York.
- [26] Grodecki, J. (1999). "Generalized maximum-likelihood estimation of variance components with inverted gamma prior" *Journal of Geodesy*, Vol.73, No.7, PP.367-374.
- [27] Stein, M.L. (1999). "Interpolation of spatial data: some theory for kriging", Springer, New York.
- [28] Jarmołowski, W. and Bakula, M. (2014). "Precise estimation of covariance parameters in least-squares collocation by restricted maximum likelihood", *Stud Geophys Geod*, Vol.58, PP.171-189.
- [29] Harville, D.A. (1997). "Matrix Algebra from a Statistician's Perspective", Springer, New York.
- [30] Hossainali, M. M. (2006). "A Comprehensive Approach to the Analysis of the 3D-Kinematics of Deformation", phd thesis, TU Darmstadt.
- [31] Freymueller, J.T., Cohen, S.C. and Fletcher, H.J. (2000). "Spatial variations in present day deformation, Kenai Peninsula, Alaska, and their implications" *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol.105, B4, PP.8079-8101.
- [32] Ali, S.T. and Freed, A.M. (2010). "Contemporary deformation and stressing rates in Southern Alaska" *Geophysical Journal International*, Vol. 183, No.2, PP.557-571.

Archive of SID