



## تحلیل خزشی دیسک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با پروفیل غیریکنواخت

حدیث ژرفی<sup>۱</sup>، حمید اختراعی طوسی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد

\*مشهد، کد پستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۷۴، ekhteraee@um.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت: آذر ۹۳	دیسک‌های دوار بخش مهم بسیاری از ماشین‌آلات صنعتی می‌باشند. در بسیاری از موارد این دیسک‌ها در شرایط سرعت دورانی و دمایی زیاد کار می‌کنند. به این سبب تحلیل و مطالعه خزش در دیسک‌های دوار، ارزشمند و ضروری است. اخیراً کاربردهای مواد مدرج تابعی در ساخت دیسک‌های دوار مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. این مواد مرکب پیشرفته با داشتن قابلیت تنوع در ساختار، امکان ترکیب مناسب خواص مواد و ایجاد خواص مطلوب ترمومکانیکی را فراهم می‌آورند. علاوه بر نوع ماده، عامل دیگری که در توزیع میدان‌های تنش و در نتیجه تغییر شکل‌ها و عمر دیسک موثر است شکل مقطع عرضی (پروفیل) دیسک می‌باشد. برای مطالعه تاثیر شکل مقطع عرضی دیسک روی پاسخ‌های خزشی آن، سه نوع دیسک مدرج تابعی متفاوت، مرکب از آلومینیوم و کاربید سیلیسیم Al-SiC مورد مطالعه قرار گرفته است. با فرض توزیع خطی ذرات کاربید سیلیسیم در زمینه آلومینیوم خالص، پروفیل این دیسک‌ها به سه صورت شامل ضخامت ثابت، کاهش ضخامت خطی و کاهش ضخامت غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. مسئله به صورت تحلیلی فرمول‌بندی و حل شده است. توزیع تنش‌ها و نرخ‌های کرنش محاسبه شده‌اند. تاثیر پارامتر سرعت در پاسخ خزشی دیسک‌های مختلف مطالعه شده است. سرعت ویژه‌ای که در آن خزش در دیسک به میزان چشم‌گیری کاهش می‌یابد مشاهده شد. این سرعت مهم سرعت حدی خزش نامگذاری شد و تاثیر پروفیل دیسک روی این سرعت حدی مطالعه و بررسی شد.
پذیرش: دی ۹۳	
کلیدواژگان	
خزش	
مواد مدرج تابعی	
دیسک دوار	
پروفیل دیسک	
سرعت حدی	

## Creep Analysis of FGM Rotating Disc with non-Uniform Profiles

Hodais Zharfi, Hamid Ekhteraei Toussi\*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

\*P.O.B. 9177948974, Mashhad, ekhteraee@um.ac.ir

### Keywords

Creep, FGM materials, Rotating disc, Disc profile, Limit speed

### Abstract

Rotating discs are the vital part of many kinds of machineries. Usually they are operating at a relatively high angular velocity and temperature conditions. Accordingly in practice, the creep analysis is an essential necessity in the study of rotating discs. More recently the application of Functionally Graded Materials (FGMs) in the construction of rotating discs is the subject of many researches. These newly developed heterogeneous compounds enable the designer to manage the distribution of material properties and benefit their superior thermo-mechanical capacities. Apart from the patterns of material distribution, the shape of a disc is another factor which controls the stress field and consequently the deformation and life expectations. To study the effects of cross sectional profile, three different Aluminum-Silicon Carbide FGM discs with uniform, convergent and divergent cross section profiles are selected as the case studies. It is seen that there is a definite speed in which creep relaxation reduces considerably at the entirety of the disc. This important rotational speed is named the creep limit speed. Some case studies are represented to show the effects of disc profile upon the disc creep limit speeds.

### ۱- مقدمه

کرنش) شامل پدیده‌هایی از قبیل رهاسازی و بازتوزیع تنش، تغییرشکل‌های تصاعدی و کاهش موضعی استحکام ماده می‌باشد. خزش به عنوان رفتار ماده دارای سه مرحله مجزا می‌باشد که مراحل اول، دوم و سوم خزش نامگذاری می‌شوند.

خزش یک تغییر شکل غیر الاستیک پیش‌رونده وابسته به زمان در دماها و تنش‌های بالا می‌باشد. تغییرات وابسته به زمان در وضعیت اعمال تنش (یا

Please cite this article using:

Zharfi, H. and Ekhteraei Toussi, H., "Creep Analysis of FGM Rotating Disc with non-Uniform Profiles" Journal of Science and Technology of Composite, Vol. 1, No. 2, pp. 29-36, 2015.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

داشت [۹]. واندانا<sup>۱۱</sup> و سینگ<sup>۱۲</sup> تاثیر ناهمسانگردی و تغییرات ضخامت را در پاسخ خزشی دیسک دوار ساخته شده از توزیع ذرات کاربرد سیلیسیم در آلومینیوم خالص بررسی نمودند. آنها از قانون شربی و تئوری تسلیم میز استفاده نمودند [۱۰]. تحقیقات دیگری توسط سینگ و ری<sup>۱۳</sup> انجام شد [۱۱-۱۳]. در تمام این مطالعات تاثیر نحوه توزیع ذرات در توزیع تنش‌ها، نرخ‌های کرنش و تغییرشکل‌ها بررسی شدند. جاهد و بیدآبادی با استفاده از روش مشخصات مواد متغیر<sup>۱۴</sup> خزش اولیه و ثانویه را در مسائل متقارن محوری مانند دیسک‌ها و مخازن تحت فشار مطالعه کردند [۱۴]. گوپتا و همکارانش با در نظر گرفتن توزیع‌های مختلف ذرات کاربرد سیلیسیم و گرادیان حرارتی و با استفاده از مدل اجزای محدود، پاسخ خزشی حالت پایای دیسک دوار را مطالعه نمودند [۱۵]. در سال‌های اخیر مطالعه خزش در دیسک‌های دوار ادامه پیدا کرده است. تحلیل خزش در دیسک دوار ناهمسانگرد در حضور تاثیرات حرارتی [۱۶]، مسائل شکست و آسیب تحت تغییرشکل‌های خزشی [۱۷]، خزش در مواد و سازه‌های هوشمند [۱۸] و بهینه سازی رفتار خزشی دیسک دوار [۱۹] از جمله تحقیقات اخیر در زمینه خزش سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی می‌باشند.

در این مقاله رفتار خزشی حالت پایای دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر که از مواد مدرج تابعی ساخته شده‌اند تحت دمای ثابت، بررسی شده است. بدین منظور مدل ریاضی استخراج شده و تنش‌ها و نرخ‌های کرنش برای سه دیسک با ضخامت‌های مختلف تحلیل و مقایسه گردیده است. نتایج تحلیل خزش دیسک نشان دادند که سرعت مشخصی وجود دارد که به ازای آن آزادسازی خزش رفتار مطلوب‌تری خواهد داشت. این سرعت که در این مقاله سرعت حدی خزشی دیسک نامگذاری شده است و تاکنون در مراجع به آن پرداخته نشده است، سرعتی است که به ازای آن پاسخ خزشی دیسک تغییر رفتار می‌دهد. به عبارت دیگر پاسخ خزشی دیسک که تا قبل از این سرعت روند کاهشی داشت پس از آن شروع به رشد می‌کند. اگر این سرعت به عنوان سرعت کارکرد دیسک انتخاب شود و یا اگر با تغییر پارامترهای فیزیکی دیسک بتوان سرعت کارکرد آن را در محدوده سرعت حدی دیسک نگه داشت می‌توان شاهد کمترین نرخ‌های خزشی و به عبارتی بقاء طولانی دیسک دوار بود. همچنین در این مقاله تاثیر شکل پروفیل دیسک در مقدار سرعت حدی آن مطالعه شده است.

## ۲- تحلیل خزش در دیسک‌های دوار مدرج تابعی

در این بخش با استفاده از فرمول‌بندی‌های ارائه شده در مراجع ردیف‌های [۲۰، ۲۱] یک مدل ریاضی برای تحلیل خزش حالت پایای دیسک دوار با ضخامت متغیر بسط داده شده است. برای توصیف خزش حالت پایا از قانون شربی به صورت رابطه (۱) استفاده شده است [۲۲].

$$\dot{\epsilon} = [M(\bar{\sigma} - \sigma_0)]^n \quad (1)$$

که  $\bar{\epsilon}$ ،  $\bar{\sigma}$  و  $\sigma_0$  به ترتیب نرخ خزش پایا، تنش موثر و تنش آستانه<sup>۱۵</sup> می‌باشند.

$n$  توان تنش است و ضریب  $M$  با استفاده از رابطه (۲) بیان می‌شود.

$$M = \frac{A_s^{1/n}}{E} \quad (2)$$

مرحله اول خزش<sup>۱</sup> که به عنوان خزش اولیه شناخته می‌شود در واقع بیانگر دوره‌ای از خزش است که در آزمون خزش یک‌محوری نرخ خزش کاهش می‌یابد. دومین مرحله خزش<sup>۲</sup>، بنام خزش ثانویه شناخته می‌شود. در این مرحله نرخ خزش تقریباً ثابت است. خزش ثانویه نتیجه‌ی توازن و تعادل در رقابت بین کرنش سختی<sup>۳</sup> و بازیابی<sup>۴</sup> می‌باشد. خزش مرحله سوم وقتی اتفاق می‌افتد که در اثر شکل‌گیری حفره‌های درونی یا گلوبی شدن، کاهشی موثر در مقطع عرضی نمونه رخ دهد. در این منطقه آهنگ کرنش به علت کاهش سطح موثر ماده به سرعت افزایش یافته و به سمت بی‌نهایت میل می‌کند که در نهایت منجر به شکست ماده می‌شود. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که بیشتر عمر خزشی سازه مربوط به ناحیه دوم خزش یا خزش حالت پایا است بنابراین بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است [۱]. دیسک‌های دوار به طور گسترده در ماشین‌آلات مختلف مانند وسایل نقلیه، توربوماشین‌ها و وسایل انتقال قدرت کاربرد دارند. در بسیاری از این کاربردها دیسک‌های دوار در دماهای بالا و با سرعت‌های دورانی زیاد کار می‌کنند. این شرایط کارکرد منجر به افزایش بارهای ترمومکانیکی و در نتیجه وقوع پدیده خزش می‌شود. در سال‌های اخیر مواد مدرج تابعی به عنوان مواد مهندسی جدید، توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده‌اند. در واقع هدف از ایجاد و توسعه این مواد، افزایش کارایی اجزای مختلف سازه و کنترل تغییرشکل‌ها و تنش‌های ناخواسته می‌باشد. خواص مطلوب مواد مدرج تابعی مانند استحکام بالا، وزن کم، رسانایی خوب، مقاومت بالا در مقابل خوردگی و دمای زیاد موجب افزایش روزافزون کاربرد این مواد در صنایع مختلف شده است. در این مواد، خواص در هر نقطه توسط یک قانون اختلاط مناسب به صورت تابعی از خواص اجزاء تشکیل‌دهنده (معمولاً فلز و سرامیک) و بر اساس کسر حجمی آنها در هر نقطه تعریف می‌شود [۲].

به علت کاربرد مواد مدرج تابعی<sup>۵</sup> در تولید دیسک‌های دوار و اهمیت بررسی پدیده خزش در عملکرد این وسایل، مطالعات گسترده‌ای در زمینه تحلیل خزش در دیسک‌های مدرج صورت گرفته است. تقریباً اولین تحقیقات در زمینه خزش این نوع دیسک‌ها توسط وال<sup>۶</sup> و همکارانش انجام شده است [۳]. آنها با در نظر گرفتن یک توزیع توانی برای ناهمسانگردی و نیز استفاده از تئوری‌های تسلیم وون-میروز و ترسکا رفتار خزشی دیسک دوار را مطالعه نمودند. در تحقیق دیگری که توسط ما<sup>۷</sup> و همکارانش انجام شد با استفاده از تئوری ماکزیمم تنش برشی، تنش‌ها و نرخ‌های کرنش در دیسک‌های موتور جت و توربین گاز بدست آمدند [۴]. آنها همچنین در تحقیقات دیگری تاثیر ضخامت دیسک و مدل توانی خزش را بررسی نمودند [۵، ۶]. این تحقیقات توسط بهاتنگار<sup>۸</sup> و آریا<sup>۹</sup> ادامه یافت. آنها دریافتند که تنش مماسی در هر شعاعی و نرخ خزش مماسی در شعاع درونی دیسک با افزایش ناهمگنی دیسک کاهش می‌یابد [۷]. بهاتنگار و همکارانش مطالعات خود را به دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر گسترش دادند و از قانون نورتون برای توصیف خزش استفاده نمودند [۸]. گوپتا<sup>۱۰</sup> و همکارانش دریافتند که دیسک با کاهش چگالی و ضخامت در امتداد شعاع، استحکام خزشی بهتری خواهد

1. primary creep
2. Secondary creep
3. Paste Strain hardening
4. recovery
5. Functionally Graded Material
6. Whal
7. Ma
8. Bhatnagar
9. Arya
10. Gupta

11. Vandana
12. Singh
13. Ray
14. Variable Material Properties (VMP)
15. Threshold stress

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{\varepsilon}}{2\sigma} (-\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (11)$$

که در رابطه فوق E مدول الاستیسته است و  $A_s$  ثابتی است که به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود.

$$A_s = \frac{AD_L \lambda^3}{|b|^5} \quad (3)$$

در روابط فوق  $\dot{\varepsilon}$  نرخ کرنش موثر و  $\bar{\sigma}$  تنش موثر است که از روابط (۱) و (۴) بدست می‌آیند. با جایگذاری مقادیر فوق در روابط (۹) و (۱۰) روابط (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آیند.

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{\{M(r)[\bar{\sigma} - \sigma_\theta(r)]\}^n}{\sqrt{2}[\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2}} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (12)$$

در رابطه فوق A مقداری ثابت است که با آزمایش تعیین می‌شود.  $D_L$  و  $\lambda$  به ترتیب ضریب نفوذ شبکه‌ای<sup>۱</sup>، اندازه ریزدانه‌ها و اندازه بردار برگرز<sup>۲</sup> برگرز<sup>۲</sup> می‌باشند. برای محاسبه تنش موثر، از تئوری تسلیم وون-میزز به صورت رابطه (۴) استفاده شده است.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{1/2} \quad (4)$$

در روابط فوق  $\dot{u}_r$  نرخ جابجایی شعاعی می‌باشد و بقیه پارامترها قبلاً معرفی شده‌اند. براساس تقارن دیسک، جابجایی‌های مماسی و محوری طبق رابطه (۱۴) صفر خواهند بود.

$$u = u(r), \quad (v = w = 0) \quad (14)$$

با در نظر گرفتن نسبت تنش  $x(r) = \frac{\sigma_r(r)}{\sigma_\theta(r)}$  و جایگذاری آن در روابط (۱۲) و (۱۳) روابط (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آیند.

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{[2x(r) - 1] \{M(r)[\bar{\sigma} - \sigma_\theta(r)]\}^n}{2[x(r)^2 - x(r) + 1]^{1/2}} \quad (15)$$

در رابطه (۴)،  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  به ترتیب مولفه‌های تنش شعاعی و مماسی هستند. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که در یک ماده مدرج پارامترهای خزش به اندازه ذرات، کسر حجمی ذرات و دمای حاکم بستگی دارند. براساس نتایج آزمایشگاهی موجود گوپتا و همکارانش [۹] روابط (۵) و (۶) را برای پارامترهای خزش ارائه دادند.

$$\ln M = -35.38 + 2.07 \ln P + 4.98 \ln T - 0.622 \ln V(r) \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = -2.119 - 0.035 P + 0.01057 T + 1.00536 V(r) \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r} = \frac{[2 - x(r)] \{M(r)[\bar{\sigma} - \sigma_\theta(r)]\}^n}{2[x(r)^2 - x(r) + 1]^{1/2}} \quad (16)$$

در روابط فوق P اندازه ذرات کاربرد سیلیسیم است که در این مقاله برابر  $1/7 \mu m$  در نظر گرفته شده است. همانطور که این روابط نشان می‌دهند پارامترهای خزش تابعی از کسر حجمی  $V(r)$  می‌باشد. با استفاده از یک قانون اختلاط مناسب پارامترهای فیزیکی دیگر نیز به صورت تابعی از کسر حجمی بیان می‌شوند. به عنوان مثال چگالی دیسک در هر نقطه توسط رابطه اختلاط خطی (۷) براساس کسر حجمی ذرات بیان می‌شود [۲۳].

$$\rho(r) = \rho_m + (\rho_d - \rho_m) V(r) \quad (7)$$

روابط (۱۵) و (۱۶) را برهم تقسیم نموده و از تابع حاصل تا شعاع دلخواه  $r$  انتگرال گیری شده و روابط (۱۷) و (۱۸) حاصل می‌شود.

$$\int_a^r \frac{du_r}{u_r} = \int_a^r \frac{1}{r} \left[ \frac{2x(r) - 1}{2 - x(r)} \right] dr \quad (17)$$

$$\dot{u}_r = \dot{u}_{ra} \exp\left(\int_a^r \frac{f(r)}{r} dr\right) \quad (18)$$

در این رابطه،  $V(r)$  توزیع شعاعی کسر حجمی است که برای هر سه دیسک یکسان در نظر گرفته شده است. سایر فرضیات به کار رفته در تحلیل‌ها به شرح زیر است.

۱. مصالح همسانگرد هستند و در تسلیم از معیار وون-میزز پیروی می‌کنند.
۲. تغییر شکل‌های الاستیک در مقابل تغییر شکل‌های خزشی ناچیز هستند.
۳. ضخامت دیسک در مقایسه با سایر ابعاد آن کوچک است. بنابراین می‌توان از تنش‌های عرضی چشم‌پوشی کرد و فرض تنش صفحه‌ای را به کار برد البته تمام معادلات با در نظر گرفتن ضخامت دیسک استخراج شدند که این مطلب می‌تواند تا حدودی خطای ناشی از این فرض را پوشش دهد.
۴. فرض می‌شود ماده دیسک تراکم ناپذیر باشد. بنابراین،

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_z = 0 \quad (8)$$

که در رابطه (۱۸)،  $f(r) = \frac{2x(r) - 1}{2 - x(r)}$  و  $\dot{u}_{ra}$  جابجایی شعاعی در شعاع داخلی دیسک است. اگر معادله (۱۸) را بر  $r$  تقسیم شود رابطه (۱۹) به دست می‌آید.

$$\frac{\dot{u}_r}{r} = \frac{\dot{u}_{ra}}{r} \exp\left(\int_a^r \frac{f(r)}{r} dr\right) = \frac{[2 - x(r)] \{M(r)[\bar{\sigma} - \sigma_\theta(r)]\}^n}{2[x(r)^2 - x(r) + 1]^{1/2}} \quad (19)$$

با جایگذاری تنش موثر از رابطه (۴) در رابطه (۱۹)، تنش مماسی در هر شعاع دلخواهی از رابطه (۲۰) قابل محاسبه است.

$$\sigma_\theta(r) = \frac{(\dot{u}_{ra})^{1/n}}{M(r)} \lambda_1(r) + \lambda_2(r) \quad (20)$$

در این رابطه  $\lambda_1(r)$  و  $\lambda_2(r)$  از روابط (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آیند.

$$\lambda_1(r) = \frac{\lambda(r)}{[x(r)^2 - x(r) + 1]^{1/2}} \quad (21)$$

$$\lambda_2(r) = \frac{\sigma_\theta(r)}{[x(r)^2 - x(r) + 1]^{1/2}} \quad (22)$$

و پارامتر  $\lambda(r)$  از رابطه (۲۳) قابل محاسبه است.

$$\lambda(r) = \left\{ \frac{2[x(r)^2 - x(r) + 1]^{1/2}}{[2 - x(r)]} \exp\left[\int_a^r \frac{f(r)}{r} dr\right] \right\}^{1/n} \quad (23)$$

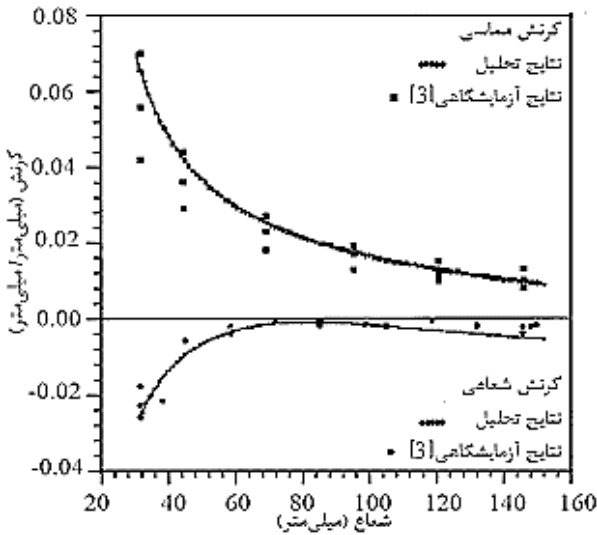
در رابطه (۸)،  $\dot{\varepsilon}_r$ ،  $\dot{\varepsilon}_\theta$  و  $\dot{\varepsilon}_z$  به ترتیب نرخ کرنش‌های شعاعی، مماسی و محوری می‌باشند. معادلات پیوستگی خزش در یک مساله تنش صفحه‌ای به صورت روابط (۹) تا (۱۱) بیان می‌شوند.

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\varepsilon}}{2\sigma} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{\varepsilon}}{2\sigma} (2\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (10)$$

1. Lattice diffusivity  
2. Burgers vector

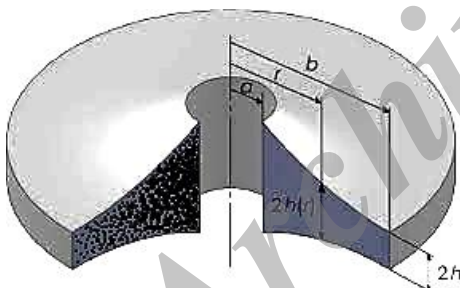
صحت الگوریتم و برنامه کامپیوتری نوشته شده، نتایج دیسک فولادی با ضخامت ثابت که با سرعت زاویه‌ای 15000 rpm دوران می‌کند با نتایج آزمایشگاهی مرجع [3] مقایسه گردید که شکل 2 گویای تطابق خوب نتایج این کد با نتایج آزمایشگاهی موجود می‌باشد.



شکل 2 اعتبارسنجی مطالب برای دیسک دوار فولادی

### 3- مشخصات دیسک‌ها

یکی از پارامترهای مهمی که در توزیع تنش‌ها و تغییرشکل‌ها تاثیر دارد مطابق شکل 3 پروفیل دیسک یا شکل مقطع عرضی آن است. برای بررسی تاثیر پروفیل دیسک بر پاسخ خزشی آن از سه پروفیل مختلف برای دیسک استفاده شد.



شکل 3 پروفیل و پارامترهای یک دیسک دوار FGM

سه پروفیل مختلف برای دیسک، مطابق روابط (31)، (32) و (33) در نظر گرفته شده است. دیسک 1 دیسکی با ضخامت ثابت است و دیسک 2 و 3 دیسک‌هایی با کاهش ضخامت در امتداد شعاع دیسک می‌باشند.

$$h_1(r) = 0.005415 \quad (31)$$

$$h_2(r) = 0.003257 + 0.03886 \times (b-r) \quad (32)$$

$$h_3(r) = 0.0198 \times a \times r^{-0.74} \quad (33)$$

در این روابط  $a$  شعاع درونی دیسک و برابر  $a = 0.05$  m است.  $b$  شعاع بیرونی دیسک است که مقدار آن  $b = 0.12$  m می‌باشد. مقاطع عرضی دیسک‌ها با توجه به روابط (31)، (32) و (33) در شکل 4 آورده شده است. حجم هر سه دیسک یکسان است.

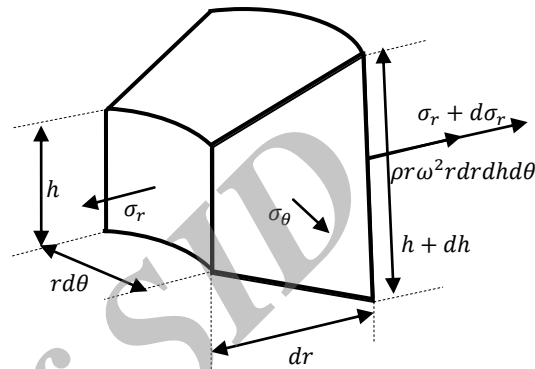
اکنون با در نظر گرفتن یک المان از دیسک با ضخامت متغیر که با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  دوران می‌کند، مطابق شکل 1 می‌توان معادله تعادل دیسک را به صورت رابطه (24) نوشت.

$$\frac{d}{dr}(rh\sigma_r) - h\sigma_\theta - \rho h r^2 \omega^2 = 0 \quad (24)$$

فرض شده است دیسک در شرایط آزاد-آزاد دوران می‌کند بنابراین شرایط مرزی دیسک را می‌توان به صورت روابط (25) و (26) در نظر گرفت.

$$\sigma_r(r=a) = \sigma_{ra} = 0 \quad (25)$$

$$\sigma_r(r=b) = \sigma_{rb} = 0 \quad (26)$$



شکل 1 المانی از دیسک با ضخامت متغیر

با استفاده از شرایط مرزی دیسک و با انتگرال‌گیری از معادله تعادل (24)، در بازه  $r=a$  تا  $r=b$  رابطه (27) حاصل می‌شود.

$$[hr\sigma_\theta]_{r=a}^{r=b} - \int_a^b h\sigma_\theta dr + \rho\omega^2 \int_a^b hr^2 dr = 0 \quad (27)$$

با تقسیم رابطه (27) بر  $\int_a^b h dr$  به دست می‌آید.

$$\sigma_{\theta,av} = \frac{\int_a^b h\sigma_\theta dr}{\int_a^b h dr} = \frac{hb\sigma_{rb} - ha\sigma_{ra} + \rho\omega^2 \int_a^b hr^2 dr}{\int_a^b h dr} \quad (28)$$

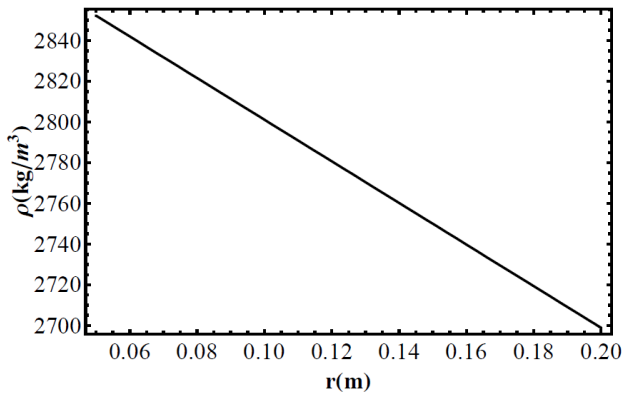
با استفاده از  $\sigma_\theta$  از رابطه (20) و شرایط مرزی از روابط (25) و (26) می‌توان رابطه (29) را نتیجه گرفت.

$$u_{ra}^{1/n} = \frac{\int_a^b M(r)h\sigma_{\theta,av} dr - \int_a^b M(r)h\lambda_2(r) dr}{\int_a^b h\lambda_1(r) dr} \quad (29)$$

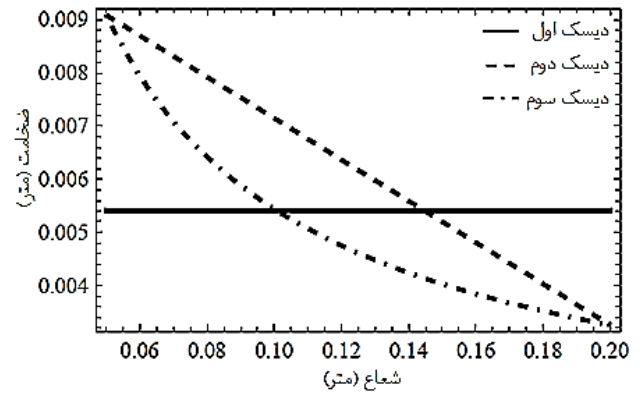
برای تحلیل پدیده خزش با استفاده از روابطی که در بالا استخراج شد از یک فرآیند محاسباتی استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که در مرحله اول تنش مماسی در هر شعاع از دیسک را برابر تنش مماسی متوسط در نظر می‌گیریم که از رابطه (30) بدست می‌آید.

$$\sigma_{\theta,av} = \frac{\int_a^b \sigma_\theta dr}{\int_a^b h dr} \quad (30)$$

با حل معادله تعادل و بدست آوردن توزیع تنش شعاعی می‌توان نسبت تنش و بنابراین مقادیر  $\lambda_1(r)$ ،  $\lambda_2(r)$  و  $\lambda(r)$  را حساب کرد. سپس با استفاده از رابطه (20) می‌توان دومین تخمین برای توزیع تنش مماسی را بدست آورد و مجدداً با تکرار حلقه فوق مقادیر جدید پارامترها را تعیین نمود. این عمل تا جایی ادامه پیدا می‌کند که به همگرایی مناسبی برسیم و در نهایت مقادیر نهایی تنش‌ها و نرخ‌های کرنش محاسبه می‌شوند. این الگوریتم برای سه دیسک با کسر حجمی یکسان و ضخامت‌های متفاوت انجام شده که نتایج آن در بخش 4 ارائه می‌گردد. قبل از ارائه نتایج، به منظور اعتبارسنجی



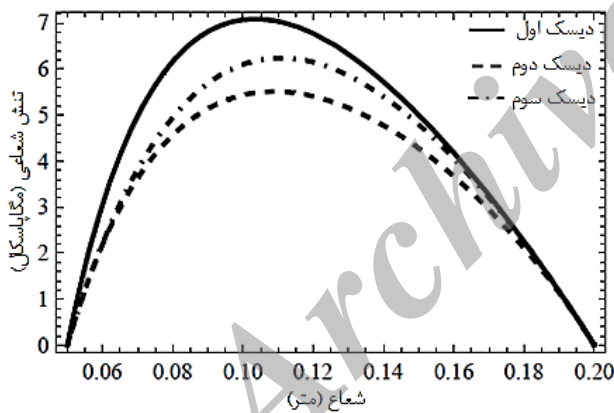
شکل ۷ توزیع چگالی دیسک‌ها در امتداد شعاع



شکل ۴ ضخامت دیسک‌ها

## ۴- نتایج و بحث

بر اساس الگوریتم ارائه شده در بخش قبل و با استفاده از یک کد کامپیوتری تحلیل خزش حالت پایا در دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی انجام شد و نتایج این تحلیل برای سه نوع دیسک با ضخامت‌های مختلف در ادامه ارائه شده است. توزیع تنش شعاعی در سه دیسک و به ازای سرعت دوران  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  در شکل ۸ آورده شده است. این شکل نشان می‌دهد اختلاف در ضخامت دیسک‌ها منجر به اختلاف در توزیع تنش‌های شعاعی در این سه دیسک می‌شود و تنش شعاعی در دیسک با ضخامت ثابت یعنی دیسک شماره ۱، بیشتر از دیسک‌های با پروفیل غیریکنواخت است. بنابراین دیسک‌های با ضخامت بیشتر در شعاع درونی متحمل تنش‌های شعاعی کمتری می‌شوند.



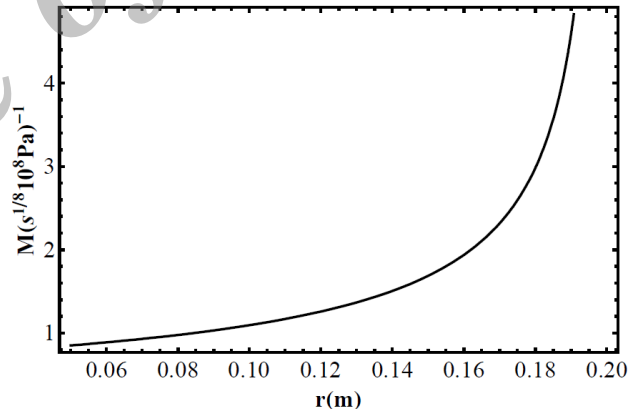
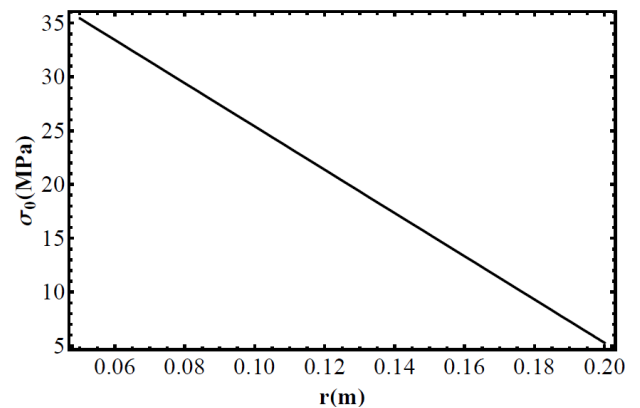
شکل ۸ توزیع تنش شعاعی

شکل ۹ توزیع تنش مماسی را در امتداد شعاع دیسک نشان می‌دهد. تنش مماسی در امتداد شعاع روند کاهشی دارد. این یعنی بیشترین مقدار تنش مماسی در شعاع درونی دیسک و کمترین مقادیر آن در شعاع‌های بیرونی اتفاق می‌افتد. تاثیر پروفیل دیسک در این شکل مشهود است. تنش مماسی در شعاع درونی دیسک ۱ بیشتر از دو دیسک دیگر است در حالی که تنش مماسی هر سه دیسک در شعاع بیرونی و نیز تنش مماسی دو دیسک با ضخامت متغیر تقریباً یکسان است. توزیع نرخ کرنش شعاعی در امتداد شعاع دیسک برای هر سه دیسک در شکل ۱۰ ارائه شده است.

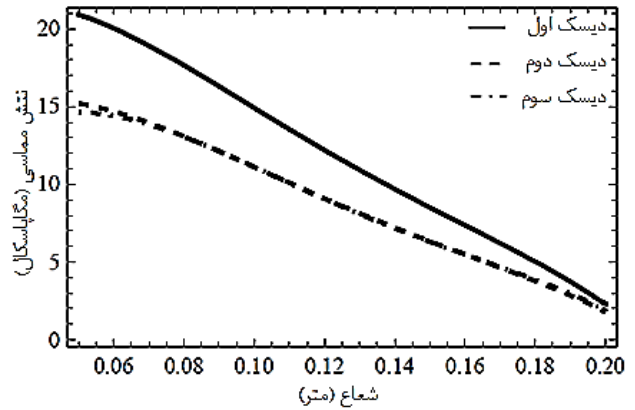
برای مقایسه بهتر نتایج، کسر حجمی هر سه دیسک یکسان و مطابق رابطه (۳۴) در نظر گرفته شده است.

$$V(r) = [0.3 - 0.3 \times \left(\frac{r-a}{b-a}\right)] \times 100 \quad (34)$$

توان تنش در قانون خزش (رابطه ۱) مشابه [۲۱] برابر ۸ در نظر گرفته شده است. در رابطه (۷)، چگالی آلومینیوم برابر  $2698.9 \text{ kg/m}^3$  و چگالی ذرات کاربید سیلیسیم برابر  $3210 \text{ kg/m}^3$  در نظر گرفته شده است. دمای حاکم بر دیسک‌ها  $700 \text{ K}$  است. براین اساس توزیع شعاعی پارامترهای  $M(r)$  و  $\sigma_0(r)$  در دیسک‌ها مطابق شکل‌های ۵ و ۶ می‌باشند. توزیع چگالی دیسک‌ها نیز در شکل ۷ قابل مشاهده می‌باشد.

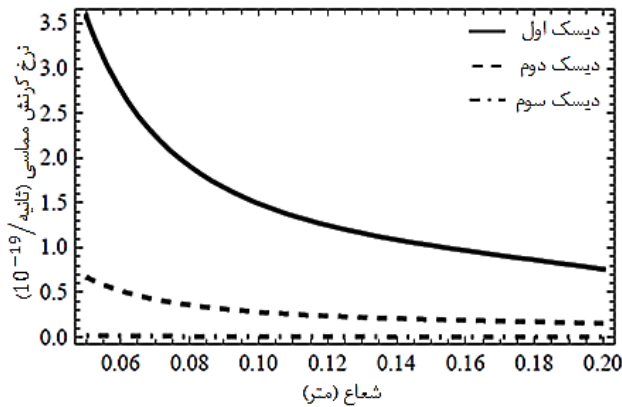
شکل ۵ توزیع پارامتر  $M(r)$  در امتداد شعاعشکل ۶ توزیع پارامتر  $\sigma_0(r)$  در امتداد شعاع

نرخ کرنش مماسی بیشترین مقدار خود را در شعاع درونی دارد سپس در امتداد شعاع به تدریج کاهش پیدا می‌کند تا به کمترین مقدار خود در شعاع خارجی می‌رسد. تغییرات شعاعی نرخ خزش مماسی در شکل ۱۲ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند انتخاب دیسکی با کاهش ضخامت در امتداد شعاع می‌تواند در کنترل نرخ کرنش مماسی بسیار موثر باشد. از شکل ۱۲ بر می‌آید که دیسک شماره ۳ در سرعت  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  دارای نرخ‌های کمتر کرنش مماسی است اما همانطور که در شکل ۱۳ از مقایسه دو دیسک با ضخامت متغیر مشخص است، در سرعت  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  دیسک ۲ نرخ‌های کمتر کرنش مماسی را خواهد داشت. این مقایسه علاوه بر اینکه تاثیر پروفیل دیسک در پاسخ خزشی آن را نشان می‌دهد، اهمیت بررسی اثر سرعت دوران دیسک را نیز نمایان می‌سازد.

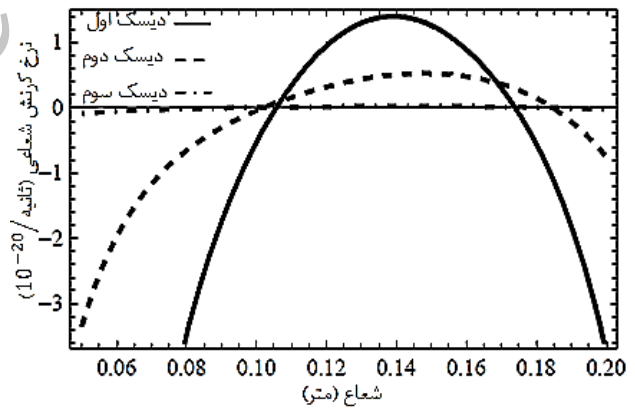


شکل ۹ توزیع تنش مماسی در امتداد شعاع دیسک

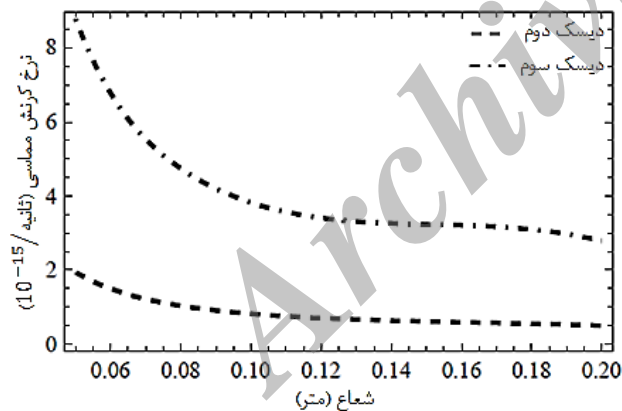
نتایج نشان می‌دهند که کمترین نرخ کرنش مربوط به دیسک دارای کاهش ضخامت به صورت غیرخطی می‌باشد. همچنین بیشترین مقادیر نرخ خزش شعاعی در شعاع‌های داخلی و یا خارجی اتفاق می‌افتد و در شعاع‌های میانی دیسک، کرنش تغییر علامت می‌دهد. همانطور که مشخص است دیسک با ضخامت ثابت دارای نرخ‌های کرنش بزرگ‌تری نسبت به دیسک‌های دارای ضخامت متغیر می‌باشد. برای مقایسه بهتر توزیع نرخ کرنش شعاعی در دیسک‌های با ضخامت متغیر، این توزیع در سرعت زاویه‌ای  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  برای هر دو دیسک در شکل ۱۱ ارائه شده است. این شکل نشان می‌دهد کاهش ضخامت در امتداد شعاع دیسک تاثیر مشابهی در نرخ خزش شعاعی هر دو دیسک دارد اما این تاثیر در مورد دیسک شماره ۲ یعنی دیسک با کاهش خطی ضخامت بزرگ‌تر است.



شکل ۱۲ توزیع نرخ کرنش مماسی در امتداد شعاع دیسک‌ها

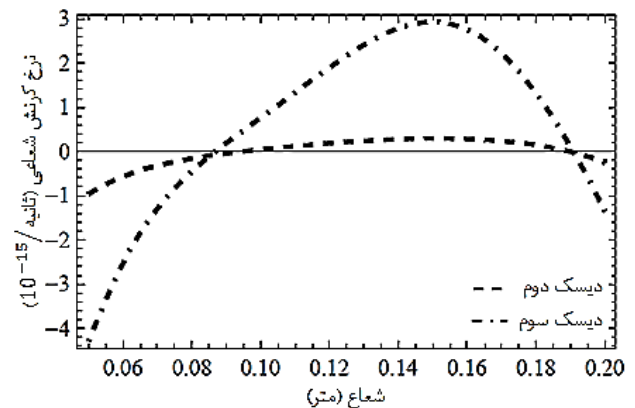


شکل ۱۰ توزیع نرخ کرنش شعاعی در امتداد شعاع دیسک‌ها



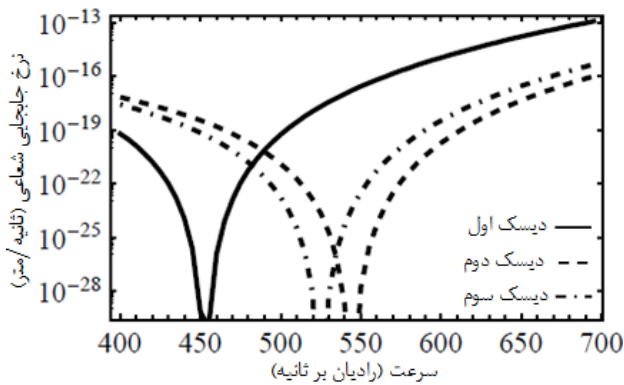
شکل ۱۳ توزیع نرخ کرنش مماسی در امتداد شعاع دیسک‌های ۲ و ۳

تغییرات نرخ جابجایی شعاعی در امتداد شعاع دیسک‌ها در شکل ۱۴ نشان داده شده است. با توجه به طبیعت انتگرالی جابجایی (در مقایسه با توزیع کرنش)، بسیاری از جزئیات منحنی‌های توزیع تنش یا کرنش در این نمودار آشکار نمی‌شود. برطبق شکل ۱۴ جابجایی شعاعی در هر سه دیسک از یک روند ملایم و مشابه پیروی می‌کند. با این وجود این شکل نشان می‌دهد که تغییرات نرخ جابجایی شعاعی دارای الگویی مشابه نرخ کرنش مماسی است. در بسیاری از کاربردها، دیسک‌های دوار در طول دوره کاری خود بطور مکرر دچار افزایش و کاهش‌های سرعت می‌شوند. همانطور که از نمودارهای قبل نتیجه شد سرعت اثر مهمی در مقادیر تنش‌ها و نرخ‌های کرنش داشت.



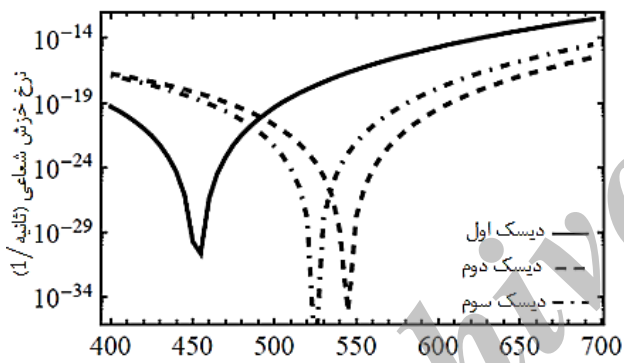
شکل ۱۱ توزیع نرخ کرنش شعاعی در دیسک‌های ۲ و ۳





شکل ۱۶ توزیع لگاریتمی نرخ جابجایی شعاعی نسبت به افزایش سرعت

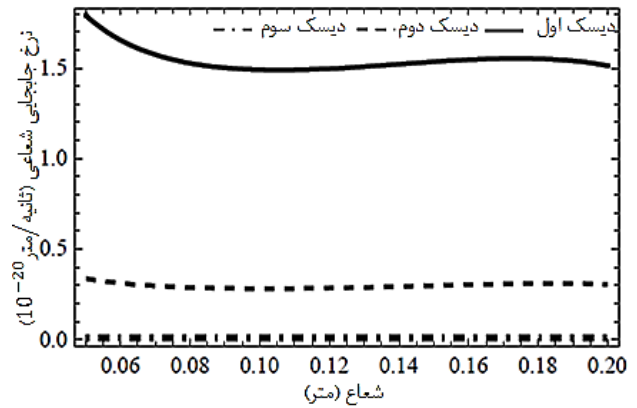
در شکل ۱۷ توزیع لگاریتمی تغییرات نرخ خزش شعاعی در میانه دیسک و در شعاع  $r = 0.15 \text{ m}$ ، نسبت به تغییرات سرعت نشان داده شده است. همانطور که از این شکل بر می آید تغییرات نرخ کرنش خزشی نسبت به تغییرات سرعت نیز دارای رفتار افزایشی و کاهشی در کل دیسک می باشد و در سرعت حدی خزش دارای کمترین مقدار خود می باشد. همچنین این شکل نشان می دهد علاوه بر اینکه دیسک دوم دارای سرعت حدی خزشی بزرگتری است، دارای نرخ خزشی کمتری در این سرعت نیز می باشد.



شکل ۱۷ توزیع لگاریتمی نرخ خزش شعاعی نسبت به افزایش سرعت

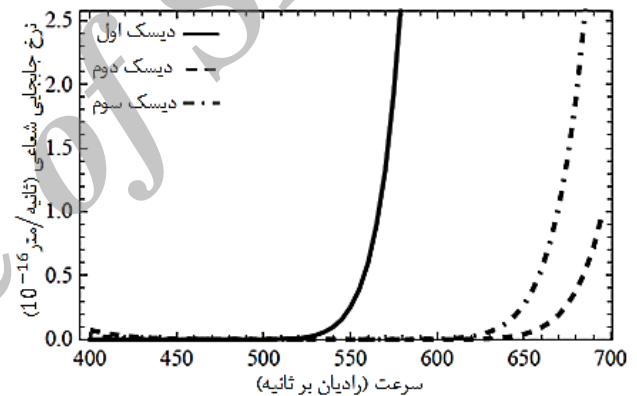
در شکل ۱۸ تغییرات تنش شعاعی نسبت به افزایش سرعت در شعاع  $r = 0.1 \text{ m}$  ارائه شده است. همچنین تغییرات تنش مماسی در شعاع داخلی دیسکها نسبت به سرعت، در شکل ۱۹ نشان داده شده است. با حفظ مقدار سرعت بحرانی، روند مشاهده شده در این اشکال در سایر شعاعها به همین شکل تکرار می شود. به عبارت دیگر این ویژگی کاهشی-افزایشی سرعت اختصاص به یک شعاع خاص ندارد، بلکه یک مشخصه دیسک است و در تمام شعاعهای آن حاکم است.

شکلهای ۱۸ و ۱۹ نشان می دهند تنشهای شعاعی و مماسی در نقطه سرعت حدی دچار تغییر شیب ناگهانی می شوند. شیب تغییرات تنش قبل از سرعت حدی برای هر سه دیسک تقریباً یکسان می باشد اما بلافاصله بعد از سرعت حدی شیب تغییرات تنش در دیسک با ضخامت ثابت بیشتر از دیسکهای با ضخامت متغیر است. علاوه بر اینکه در دیسک ۱ یعنی دیسک با ضخامت ثابت، این افزایش شیب ناگهانی در سرعتهای پایینتری اتفاق می افتد. یعنی دیسک با ضخامت ثابت دارای سرعت حدی خزشی کوچکتری می باشد. بنابراین روند روبه رشد نرخهای خزش در دیسک با ضخامت ثابت سریعتر رخ می دهد.



شکل ۱۴ توزیع نرخ جابجایی شعاعی در امتداد شعاع دیسکها

بنابراین در ادامه به بررسی تاثیر سرعت در پاسخ خزشی دیسک دوار پرداخته شده است. در شکل ۱۵ تغییرات نرخ جابجایی شعاعی در شعاع داخلی دیسک بر حسب سرعتهای مختلف آورده شده است. این شکل نشان می دهد نرخ جابجایی شعاعی با افزایش سرعت ابتدا دارای روند کاهشی و سپس افزایشی می باشد.

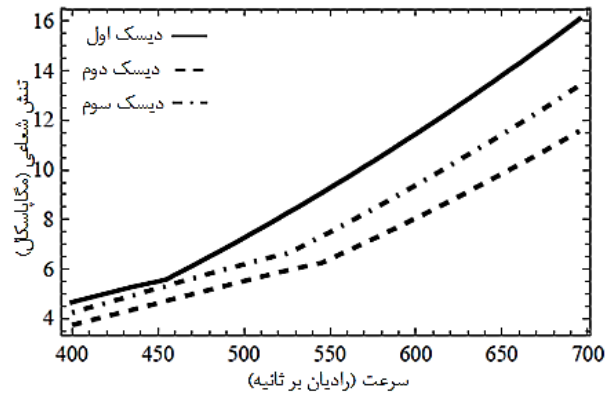


شکل ۱۵ توزیع نرخ جابجایی شعاعی نسبت به افزایش سرعت

برای مقایسه دقیق تر رفتار منحنی شکل ۱۵، ضمن تغییر مقیاس محور قائم از مقیاس خطی به لگاریتمی بار دیگر این منحنی در شکل ۱۶ ارائه شده است. در این شکل رفتار کاهشی-افزایشی نرخ جابجایی شعاعی نسبت به افزایش سرعت به صورت مشخصتری دیده می شود. بر اساس این نوع رفتار می توان سرعت دورانی ویژه ای که طی آن تغییر روند شکل ۱۶ رخ می دهد را اندازه گیری کرد. چنانچه این کمیت «سرعت حد خزشی دیسک» نامیده شود می توان از آن به عنوان یک معیار کلیدی برای طراحی دیسک دوار استفاده نمود. به ازای این سرعت، نرخهای خزشی دیسک کمترین مقادیر خود را دارند. به عبارت دیگر اگر این سرعت به عنوان سرعت کارکرد دیسک انتخاب شود، می توان شاهد نرخهای خزشی کمتر و در نتیجه عمر خزشی بیشتر برای دیسک بود.

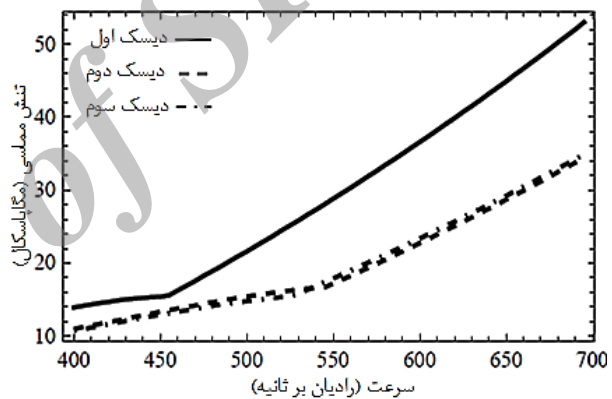
با توجه به شکل ۱۶ پروفیل دیسک در مقدار سرعت حدی آن تاثیر زیادی دارد. در شرایط یکسان اگر دیسک ضخامت متغیر داشته باشد مقدار سرعت حدی خزشی آن بزرگتر خواهد بود. این بدان معنی است که روند کاهشی نرخ خزش در محدوده بزرگتری حاکم است و خزش مخرب به تعویق افتاده است.

- [2] Birman, V. Byrd, L. W., "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures", Journal of Transaction of the ASME, Vol. 60, pp. 195-216, 2007.
- [3] Wahl, A. M. Sankey, G. O. Manjone M. J. Shoemaker, E., "Creep test of rotating discs at elevated temperature and comparisons with theory", Journal of Applied Mechanics, Vol. 21, pp. 225-235, 1954.
- [4] Ma, B. M., "A creep analysis of rotating solid discs", Journal of the Franklin Institute, Vol. 267, pp.157-168, 1959.
- [5] Ma, B. M., "Creep analysis of rotating solid discs with variable thickness and temperature", Journal of the Franklin Institute, Vol. 270, pp.40-54, 1961.
- [6] Ma, B. M. "A power-function creep analysis for rotating solid discs having variable thickness and temperature", Journal of the Franklin Institute, Vol. 277, pp.593-612, 1964.
- [7] Arya, V. K. and Bhatnagar, N. S., "Creep analysis of rotating orthotropic discs", International Journal of Nuclear Engineering and Design, Vol. 55, pp.323-330, 1979.
- [8] Bhatnagar, N. S., Kulkarni P. S., Arya, V. K., "Steady state creep of orthotropic rotating discs of variable thickness", International Journal of Nuclear Engineering and Design, Vol. 91, pp.121-141, 1986.
- [9] Deivedi, D. D., Gupta V. K., Dham, A. K., "Investigating the effect of thickness profile of a rotating functionally graded disc on its creep behavior", Journal of Thermoplastic Composite Materials, Vol. 26, No. 4, pp. 461-475, 2011.
- [10] Vandana, V., Singh, S. B. "Modeling anisotropy and steady state creep in a rotating disc of Al-SiC having varying thickness", International journal of scientific & engineering research, Vol. 2, No. 10, 1-12, 2011.
- [11] Singh, S. B., Ray, S., "Steady-state creep behavior in an isotropic functionally graded material rotating disc of Al-SiC composite", Journal of Metallurgical and Materials Transactions, Vol. 32A, pp. 1679-1685, 2001.
- [12] Singh, S. B., Ray, S., "Modeling the anisotropy and creep in orthotropic Al-SiC composite rotating disc", International Journal of Mechanics of Materials, Vol. 34, No. 6, pp. 363-372, 2002.
- [13] Singh, S. B., Ray, S., "Newly proposed yield criteria for residual stress and steady state creep in an anisotropic rotating composite disc", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 143, pp. 623-628, 2003.
- [14] H. Jahed and J. Bidabady, "An axisymmetric method of creep analysis for primary and secondary creep", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 80, pp. 597-606, 2003.
- [15] Gupta, V. K. Singh, S. B. Chandrawat H. N. Ray, S., "Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradients", Journal of Metallurgical and Material Transactions, Vol. 35A, pp. 1381-1391, 2004.
- [16] Gupta, V. and Singh, S. B., "Mathematical model of creep behavior in an anisotropic rotating disc of Al-SiC with thickness variation in presence of thermal residual stress", International Journal of Mechanical engineering and technology, Vol. 3, pp. 274-283, 2012.
- [17] Terada, Y. and Sato, T., "Relationship between minimum creep rate and rupture life for a Die-Cast Mg-Al-Mn alloy", Journal of Materials transactions, Vol. 49, pp. 439-442, 2008.
- [18] Ghorbanpour Arani, A., Mosallaei Barzoki, A. A., Kolahchi, R. Mozdianfard, M. R. Loghman, A. "Semi-analytical solution of time-dependent electro-thermo-mechanical creep for radially polarized piezoelectric cylinder", Journal of Computers and Structures, Vol. 89, pp. 1494-1502, 2011.
- [19] Vakili-Tahami, F. Zehsaz, M. AlizadeFard, A. M., Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 12, pp. 23-34, 2013. (In Persian)
- [20] Gupta, V. K. Singh, S. B. Chandrawat, H. N. Ray, S., "Steady state creep and material parameters in a rotating disc of Al-SiC composite", European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 23, pp. 335-344, 2004.
- [21] Gupta, V. K. Kumar, V. Ray, S., "Modeling creep in a rotating disc with linear and quadratic composition gradient", International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, Vol. 26, pp. 400-421, 2009.
- [22] Pandey, A. B. Mishra, R. S. Mahajan, Y. R., "Steady state creep behavior of silicon carbide particulate reinforced aluminum composites", Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 40, 2045-2082, pp. 1992.
- [23] Rattan, M. Chamoli, N. Singh, S. B., "Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc", International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, Vol. 5, pp.419-431, 2010.



شکل ۱۸ توزیع تنش شعاعی در  $r = 0.1$  m نسبت به افزایش سرعت

سرعت حدی در دیسک‌های با ضخامت متغیر تقریباً نزدیک به هم است اما در دیسک شماره ۲ نسبت به دیسک شماره ۳ مقدار تنش شعاعی کوچک‌تر و مقدار سرعت حدی خزشی کمی بزرگ‌تر است. تنش‌های مماسی دیسک‌های شماره ۲ و ۳ تقریباً یکسان است اما مقدار تنش مماسی در دیسک با ضخامت ثابت بزرگ‌تر از دو دیسک دیگر است.



شکل ۱۹ توزیع تنش مماسی در شعاع داخلی نسبت به افزایش سرعت

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله پاسخ خزشی حالت پایای دیسک دوار FGM در سرعت‌های مختلف، با پروفیل‌های متفاوت و با توزیع یکسان ذرات کاربید سیلیسیم در زمینه آلومینیوم خالص بررسی شده است. سه پروفیل مختلف برای دیسک در نظر گرفته شده است و حل تحلیلی کامل خزش دیسک دوار ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند نوع پروفیل دیسک تأثیر زیادی بر توزیع تنش‌ها و نرخ‌های کرنش دارد. مشاهده می‌شود که دیسک با ضخامت متغیر پاسخ بهتری را ارائه می‌دهد. در سرعت‌های پایین، دیسک با کاهش سهمی ضخامت نرخ‌های خزش کوچکتری نسبت به دو دیسک دیگر داشت اما در سرعت‌های بالاتر دیسک با کاهش خطی ضخامت دارای نرخ‌های خزشی کمتری بود. همچنین نتایج سرعت مشخصی را نشان می‌دادند که در آن رژیم تغییرات نرخ کرنش عوض می‌شد. این سرعت که سرعت حدی خزشی نامگذاری شد سرعتی است که به ازای آن نرخ‌های خزش کمترین مقادیر خود را خواهند داشت. تأثیر شکل پروفیل دیسک بر سرعت حدی نیز مطالعه شد. تحلیل‌ها نشان داد با تغییر پروفیل دیسک می‌توان به سرعت‌های حدی بیشتری دست یافت.

#### ۶- مراجع

- [1] Betten, J., "Creep Mechanics", 2<sup>nd</sup> edition, Springer Press, Berlin Heidelberg, New York, 2005.