نشریه علوم و فناوری
کامپوزیت
http://jstc.iust.ac.ir

کنترل مقاوم ارتعاشات تیر مدرج تابعی ترک‌دار

بهروز رحمانی[۱*]، فرشاد غلامی[۲]

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج
* یاسوج، صندوق پستی ۷۴۹۳۴-۷۵۹۱۸، b_rahmani@yu.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: آذر ۹۳
پذیرش: فروردین ۹۴

کلیدواژگان:
ارتعاشات عرضی تیر یک سرگیردار
ریلی-ریتز
مواد مدرج تابعی
کنترل مقاوم
محیط حرارتی

چکیده

در این مقاله، کنترل ارتعاشات عرضی تیر یک سرگیردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای ترک عرضی و تحت تأثیر بار حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که ارتعاشات، به شکست قطعات مکانیکی و تحمیل هزینه‌های فراوان ناشی از تعمیرات و قطع روند تولید منجر می‌شود، کنترل ارتعاش سازه‌ها در صنایع مهندسی از اهمیت خاصی برخوردار است. در این راستا، از صفحات پیزوالکتریک به‌منظور اندازه‌گیری میزان ارتعاشات عرضی تیر و هم‌چنین اعمال نیروهای کنترلی بهره برده شده است. برای دست‌یابی به این هدف، از روش ریلی-ریتز برای تشخیص مدهای ارتعاشی استفاده شده و بر این اساس، تصویرسازی گالرکین برای استخراج معادله‌های دیفرانسیل زمانی تشریح‌کننده‌ی رفتار سیستم مورد استفاده قرار گرفته است. سپس با بیان این معادلات به فرم فضای حالت، روش بازخورد خروجی مبتنی بر رؤیت‌گر حالت برای کنترل این سیستم به‌کار گرفته شده است. همچنین با توجه به اینکه تشخیص دقیق مشخصه‌های الکتریکی و مکانیکی سیستم ارتعاشی کار پیچیده‌ای است، روشی مقاوم برای طراحی بهره‌های کنترل‌کننده و رؤیت‌گر حالت پیشنهاد شده است. در این راه‌کار، با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های پارامتری به‌صورت نُرم محدود، از روش لیاپانوف برای پایدارسازی بهره برده شده است. در پایان، با انجام چند شبیه‌سازی، کارایی روش پیشنهادی نشان داده شده است.

Robust vibration control of a functionally graded cracked beam

Behroz Rahmani*, Farshad Gholami

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
*P.O.B. 75918-74934, Yasouj, Iran, b_rahmani@yu.ac.ir

Keywords

Vibration control
Functionally graded cracked beam
Rayleigh–Ritz
Robust control
thermal environment

Abstract

In this paper, vibration control of a cracked, functoinally graded, uncertain beam allocated in a thermal environment has been investigated. For this purpose, piezoelectric patches are used as sensors to measure the displacement of the beam and also as actuators to apply control forces. In this way, firstly, partial differential equation governing the dynamics of the system is derived by considering the Euler-Bernoulli assumption using Lagrange method. Approximate solution of eigenvalue equation is achieved using Rayleigh–Ritz method. After that, time dependent ordinary differential equations is obtained using Galerkin projection scheme and then represented in the state-space form. Based on this model, a robust observer-based output feedback controller is designed for this continuous-time model. In this regard, controller and observer gains are designed by a Lyapunov-based method. This procedure is done by solving a set on linear matrix inequalities. Simulation studies show the effectiveness of the proposed method.

.

۱- مقدمه

سازه‌های انعطاف‌پذیر به‌دلیل وزن کم، انعطاف‌پذیری بالا و سادگی طراحی، کاربرد زیادی در مهندسی دارد و سهم گسترده‌ای را در علوم فضایی، تولید انرژی و خودروسازی به خود اختصاص داده است؛ برای نمونه در قطارها، هواپیماها، موشک‌ها، توربین‌ها، بازوهای انعطاف‌پذیر ربات‌ها، پره‌های توربین، ماشین آلات دوار و سازه‌های هوایی از آنها استفاده می‌شود. در کنار این برتری‌ها و ویژگی‌های خوب، میرایی کم این سازه‌ها سبب ارتعاش طولانی مدت در مجموعه‌ی مکانیکی و درنتیجه افزایش تنش‌های دینامیکی و سر و صدای مجموعه می‌شود؛ پس ناپایداری و آسیب‌دیدگی دستگاه موردنظر و همچنین آلودگی وحشتناک صوتی از آن ناشی می‌شود. بر این اساس، بررسی ارتعاشات این سازه‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است و پژوهشگران زیادی بر روی آن متمرکز شده‌اند. همچنین، به دلیل خستگی و وجود بار نوسانی،

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:
Please cite this article using:
Rahmani, B. and Gholami, F., "Robust vibration control of a functionally graded cracked beam" Journal of Science and Technology of Composite, Vol. 2, No. 1, pp. 41-52, 2015.

ترک‌هایی در سازه‌های مختلف ایجاد می‌شود، که این مسأله سبب کاهش سفتی و درنتیجه کاهش فرکانس‌های طبیعی و کاهش عمر مجموعه‌ی مکانیکی می‌شود. در این راستا، افشاری و اینمن به بررسی تغییرات فرکانس‌های طبیعی یک تیر نازک دارای ترک پرداخته‌اند؛ ایشان از روش مدل پیوسته به همراه سفتی محلی برای ترک در مدلسازی بهره برده‌اند و با توجه به مکان ترک و نسبت عمق‌های متفاوت و در شرایط مرزی مختلف فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کرده‌اند و شکل مدهای تیر مفروض را با روش ریلی ریتز تخمین زده‌اند [۱]، در همین راستا حیدری و همکاران نیز به تحلیل ارتعاشات یک تیر تیموشنکوی دارای ترک پرداختند. برای رسیدن به این مهم، از مدل پیوسته به همراه سفتی پیوسته برای مدل‌سازی ترک بهره برده شد و در نهایت پاسخ فرکانسی سیستم با پاسخ اجزا محدود مقایسه شد [۲].

برای کاهش ارتعاشات، در سال‌های اخیر، پژوهشگران به استفاده از کنترل فعال به‌منظور بالا بردن میرایی سازه‌ها روی آورده‌اند. برای رسیدن به این هدف، استفاده از مواد هوشمندی مانند پلیمرها و سرامیک‌های پیزوالکتریک پیشنهاد شده است، که از صفحات حساسه‌ی پیزوالکتریک به‌منظور اندازه‌گیری میزان ارتعاشات تیر و هم‌چنین صفحات عملگر یا محرک پیزوالکتریک برای اعمال ورودی‌های کنترلی بهره برده شده است برای مثال دامن‌پاک و همکاران به کنترل فعال یک تیر ساندویچی به وسیله‌ی حسگر و عملگر پیزوالکتریک پرداخته‌اند، همچنین ایشان پس از بدست آوردن معادلات غیر خطی حاکم بر مسئله و حل آن به وسیله روش نیوتن رافسون، تاثیر هندسه و عوامل غیر خطی را بر روی پاسخ سیستم مقایسه کرده‌اند [۳]. ریچدای و همکارش به کنترل یک تیر ساندویچی تشکیل شده از سه لایه (پیزوالکتریک، تیر الاستیک و پیزوالکتریک) پرداخته و تأثیر پارامترهای کنترل‌کننده‌ی بازخوردی بر پایداری و همچنین پاسخ گذرا را بررسی کردند [۴]. کواک و همکارش از حسگر و عملگرهای پیزوالکتریک برای کنترل ارتعاشات یک سیلندر که در سیال مانند آب قرار گرفته است، بهره برده و به‌صورت تجربی به ارزیابی نتایج پرداختند [۵]. نوبار و همکاران روشی بر مبنای سوئیچ همزمان با نوسانات کم پیشنهاد کرده‌اند، که در آن تنها یک مد بررسی شد. آنها با ارائه‌ی روش مبتنی بر استفاده از مشاهده‌گر مدهای ارتعاشی، توانایی روش برای پایدارسازی سیستم در حالت تحریک چند مد را نیز بهبود بخشیدند [۶].

از طرف دیگر، برای برطرف نمودن معایبی که در فلزها، مواد مرکب لایه‌ای و سرامیک‌ها وجود دارد، در سال‌های اخیر، پژوهشگران دسته‌ی نوینی از مواد را معرفی و به‌عنوان ماده‌ی سپر حرارتی در صنایع هوافضا، رآکتورهای هسته‌ای به‌خدمت گرفتند. این ترکیب‌ها، که با نام مواد مدرج تابعی[1] شناخته می‌شود اساساً ناهمگن بوده و معمولا از مخلوط فلزات و سرامیک‌ها ساخته می‌شود [۷]. در ساخت این مواد، سرامیک در یک سطح و فلز در سطح دیگر در نظر گرفته شده و نسبت حجمی مواد سازنده بین این دو سطح به‌صورت تدریجی تغییر می‌کند؛ بنابراین، خواص مکانیکی مؤثر آنها نیز از یک سطح به سطح دیگر به‌صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند. این پیوستگی ساختار مواد، منجر به بهبود کیفیت چسبندگی، کاهش ناهماهنگی در خواص ترمودینامیکی و همچنین کاهش تنش بین لایه‌ای می‌شود. بر این اساس، شماری پژوهش در زمینه‌ی بررسی ارتعاشات تیرها، پره‌ها و ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی و کنترل آنها انجام شده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. فاضل‌زاده و حسینی به بررسی ارتعاش یک تیر تو خالی مدرج تابعی با در نظر گرفتن حرکت سیال خنک از داخل آن پرداخته‌اند. ایشان با فرض مدرج تابعی بودن جنس، معادله‌ی توزیع گرما در راستای ضخامت را حل کرده‌اند و سپس به حل معادله‌ی ارتعاشات عرضی با وجود اثرات ژیرسکوپیک پرداخته‌اند. در این پژوهش، تاثیر میزان پیچش محوری و سرعت دوران بر میزان فرکانس‌های طبیعی بررسی شد [۷]. آیدین به بررسی ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی دارای ترک پرداخت؛ او ترک را به‌صورت یک فنر بدون جرم در نظر گرفت و با استفاده از روش مدل‌سازی گسسته به همراه سفتی محلی، فرکانس‌های طبیعی تیر را محاسبه کرد [۸]. تانگ و همکاران به بررسی ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی پرداختند و روشی برای محاسبه‌ی تحلیلی فرکانس‌های طبیعی تیر مفروض ارائه کردند [۹]. بورانت و همکارش به وسیله‌ی الگوریتم ژنتیک محل عملگرها و سنسورها را روی یک صفحه‌ی مدرج تابعی بهینه کردند و همچنین با استفاده از تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه‌ی دوم به کنترل ارتعاشات آن صفحه پرداختند [۱۰]. بداغی و همکاران از بازخورد منفی سرعت برای افزایش میرایی یک تیر با مقطع مستطیلی مواد مدرج تابعی استفاده و عوامل دمایی و جنس را بر پارامترهای کنترل بررسی کردند [۱۱]. اما در این دو پژوهش روشی برای طراحی این بهره‌های کنترلی پیشنهاد نشد و تضمین پایداری سیستم حلقه‌بسته نیز مورد توجه قرار نگرفت.

با بررسی ادبیات موجود می‌توان متوجه شد که در زمینه‌ی کنترل فعال ارتعاشات اجسام معیوب ساخته شده از مواد مدرج تابعی پژوهشی صورت نگرفته است. همچنین در بسیاری از تحقیقات انجام شده، فرض شده است که میزان سختی و اینرسی عملگرهای پیزوالکتریک در مقایسه با سختی و اینرسی تیر اصلی قابل اغماض است و همچنین پارامترهای مدل به‌صورت دقیق در نظر گرفته شده‌اند؛ در حالی‌که چنین فرضیاتی منجر به خطا در تخمین پاسخ الکترومکانیکی سیستم ارتعاشی خواهد شد. این کمبودها، انگیزه‌ای برای ادامه‌ی تحقیقات در این حوزه و ارائه‌ی پژوهش کنونی بوده است.

در این مقاله، روشی برای کنترل مقاوم ارتعاشات تیر دارای ترک عرضی ساخته شده از مواد مدرج تابعی طولی که تحت اثر بار حرارتی قرار دارد، پیشنهاد شده است. در این راستا، نخست با محاسبه‌ی انرژی‌های جنبشی و پتانسیل، از روش لاگرانژ برای استخراج معادلات مشتق معمولی حاکم بر سیستم استفاده می‌شود. سپس از روش ریلی-ریتز برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و همچنین شکل مدهای سیستم بهره برده می‌شود. همچنین با نوشتن معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم به فرم فضای حالت و به‌کارگیری قضیه‌ی لیاپانوف، کنترل‌کننده‌ی بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر حالت مقاوم طراحی می‌شود. شبیه‌سازی عددی انجام شده کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. روش پیشنهادی، شماری نوآوری نسبت به پژوهش‌های همانند دارد: الف) در انتهای تیر در نظر گرفته شده، که می‌توان از آن به عنوان مدلی از یک پره‌ی توربین نام برد، گاز و یا بخار با دمای بسیار بالا وارد می‌شود و به مرور در طول توربین تا خروجی آن، دمای گاز یا بخار کاهش پیدا می‌کند؛ لذا مواد استفاده شده در نزدیکی نوک تیر باید مانند سرامیک، مقاوت خوبی در برابر دماهای بالا داشته باشد. همچنین، با حرکت گاز به سمت محور پره‌ها، دمای آن کاهش پیدا کرده اما نیروهای وارده افزایش پیدا می‌کند؛ لذا لازم است که تیر با استفاده از فلزات تقویت شود تا بتواند این ارتعاشات را تحمل نماید. بر این اساس، تغییر تدریجی ویژگی‌های مکانیکی در طول تیر با به‌کارگیری مواد مدرج تابعی طولی پیشنهاد می‌شود؛

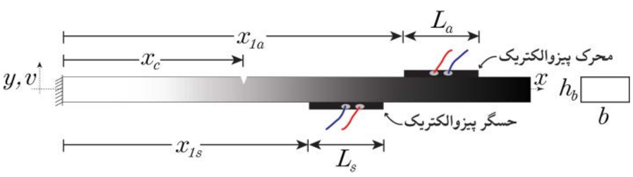
1. Functionally Graded Material: FGM

ب) سختی و اینرسی سنسور و عملگر پیزوالکتریک و همچنین اثر دما بر ویژگی‌های آن در نظر گرفته شده است. بنابراین خطای مدلسازی به حداقل می‌رسد؛ پ) در مدل‌سازی دینامیکی تیر موردنظر، اثر ترک موجود در تیر لحاظ شده است؛ ت) اثرات بارگذاری دمایی و هدایت گرمایی بر مشخصه‌های مکانیکی تیر در نظر گرفته شده است؛ ث) با توجه به عدم قطعیت‌هایی که ممکن است در مدل‌سازی الکتریکی و مکانیکی سیستم تحت کنترل ایجاد شود، یک روش کنترل مقاوم پیشنهاد می‌شود که توانایی پایدارسازی یک سیستم نامعین را تا حد زیادی دارد.

در ادامه، نخست در بخش ۲ به بیان مسأله پرداخته شده و در بخش ۳ چگونگی مدل‌سازی ترک و اثر آن در کاهش انرژی پتانسیل بررسی می‌شود. در بخش ۴ مدل ریاضی تیر مرتعش موردنظر استخراج شده و در بخش ۵ به بیان روشی برای محاسبه‌ی پاسخ آن پرداخته می‌شود. در بخش ۶ روش کنترلی مقاوم پیشنهادی تشریح شده و در بخش ۷ با انجام شبیه‌سازی کارایی آن نشان داده می‌شود.

۲- تیر معیوب مدرج تابعی طولی دارای عملگر و حسگر پیزوالکتریک تحت اثر بار حرارتی

همان‌طور که در شکل ۱ نمایان است، تیر مفروض دارای مقطعی یکنواخت با پهنای ، ضخامت و طول است. جابجایی تیر در راستای محور که تابعی از زمان و مکان است، با (,) بیان شده است و = صفحه‌ی میانی تیر است. فاصله‌ی ترک عرضی از مبدأ مختصات که در ابتدای سمت چپ تیر قرار گرفته است، با نماد مشخص شده است. همچنین یک قطعه‌ی محرک پیزوالکتریک بر روی سطح بالایی و یک قطعه‌ی حسگر پیزوالکتریک بر روی سطح پایینی تیر قرار گرفته است. در این شکل، لایه‌ی عملگر پیزوالکتریک در فاصله‌ی از ابتدای تیر، با ضخامت و طول − = ، لایه‌ی سنسور پیزوالکتریک در فاصله‌ی با ضخامت و طول − = قرار داده شده است. در اینجا فرض می‌شود که عرض تیر و قطعات پیزوالکتریک، با هم برابر و نسبت طول تیر به ضخامت آن نسبتاً بزرگ باشد (بزرگ‌تر از ۱۰)؛ بنابراین در استخراج روابط می‌توان از فرض تیر اویلر-برنولی استفاده کرد، همچنین فرض شده است که وصله‌های پیزوالکتریک بر روی ترک قرار ندارند.



شکل ۱ تیر مدرج تابعی طولی دارای ترک با وصله‌های حسگر و محرک پیزوالکتریک.

تیر موردنظر از مواد مدرج تابعی ساخته شده است؛ به این ترتیب که فرض می‌شود، سطح سمت چپ آن یک لایه‌ی فلزی و سطح سمت راست لایه‌ای سرامیکی است و مشخصه‌های مکانیکی آن، مانند چگالی ρ و مدول الاستیک ، به طور پیوسته در جهت طول تغییر می‌کند. علت در نظر گرفتن چنین تغییری این است که به‌عنوان مثال در یک توربین، گاز با دمای بسیار بالا وارد می‌شود. پس لازم است که انتهای پره از جنسی که مقاومت بالایی در درجه حرارت‌های زیاد دارد، استفاده شود تا از خوردگی و اکسیداسیون آن جلوگیری شود؛ برای رسیدن به این مهم از مواد سرامیکی بهره برده می‌شود. با حرکت گاز به سمت ریشه پره‌ها، دما کاهش پیدا کرده اما نیروهای وارده افزایش پیدا می‌کند. لذا باید تیر تقویت شود تا بتواند این ارتعاشات را تحمل نماید، که به‌این منظور از مواد فلزی استفاده می‌شود. در این پژوهش، نیترید سیلیکون[1] و فولاد[2]، به‌ترتیب، به‌عنوان سرامیک و فلز به‌کار گرفته شده است، که برای معرفی ساده‌تر آنها از علائم اختصاری و استفاده می‌شود. فرض کنید که ، ρ، و ρ به‌ترتیب مقادیر مدول الاستیک و چگالی را در لایه‌های سرامیکی سمت چپ و فلزی سمت راست تیر نشان دهد. این دو مشخصه به طور پیوسته در جهت طول طبق رابطه‌های (۱) و (۲) تغییر می‌کند [۱۲].

$$=(-) + \tag{۱}$$

$$\rho = (\rho - \rho) + \rho \tag{۲}$$

که معرف کسر حجمی فلز به‌کار رفته در مواد مدرج تابعی در هر نقطه از تیر است و به صورت معادله‌ی (۳) تعریف می‌شود، درحالی‌که بیانگر ثابت کسر حجمی است.

$$=\left(-\right) \tag{۳}$$

اما آشکار است که تغییرات دما نسبت به مقدار مرجع بر مشخصه‌های مکانیکی مواد مختلف تأثیرگذار است. برای در نظر گرفتن اثر آن در مواد مدرج تابعی، از مدل ارائه شده مرجع [۱۳] استفاده می‌شود. همچنین در مسأله‌ی در نظر گرفته شده، دما نیز تابعی از طول تیر است؛ بنابراین باید توزیع دما نیز در تیر پیدا گردد. به‌منظور اعمال تغییرات دما در طول تیر، حالت پایای یک بعدی و با شرط مرزی دما ثابت در طرفین تیر، یعنی در سمت چپ و راست آن، به‌ترتیب دماهای و (با فرض >) در نظر گرفته می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل انتشار گرمای یک بعدی به صورت رابطه (۴) قابل بیان است.

$$-\left(-\right) \tag{۴}$$

در رابطه‌ی (۴)، ( ) ضریب هدایت گرمایی در طول تیر است و چون جنس تیر مورد بررسی از مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شده است، با ضریب هدایت گرمایی هر یک از اجزای سازنده رابطه دارد و در هر فاصله از مبدأ متغییر خواهد بود. پس این ضریب را می‌توان به‌صورت معادله‌ی (۵) در نظر گرفت که در آن و به‌ترتیب ضریب هدایت گرمایی سرامیک و فلز است که در دمای 300K طبق مرجع [۱۲] محاسبه خواهد شد.

$$( ) = (-) + \tag{۵}$$

در نهایت، با حل معادله‌ی دیفرانسیل (۴)، به ازای شرایط مرزی دما ثابت = ، = توزیع دما در طول تیر را می‌توان به‌دست آورد.

۳- مدل‌سازی ترک عرضی

جهت مدل‌سازی ترک عرضی موجود در تیر، فرض شده است که ترک در سطح فوقانی تیر و به طور کامل در راستای پهنای تیر قرار دارد و به هنگام ارتعاش تیر باز و بسته نمی‌شود. مطابق شکل ۲، ترک به صورت یک فنر پیچشی بدون جرم مدل شده است. سفتی این فنر را می‌توان به‌کمک روابط مکانیک شکست و انرژی کرنشی به‌صورت معادله‌ی (۶) محاسبه نمود.

$$= \frac{}{C} = \frac{\pi}{}\Psi(-) \tag{۶}$$

1. Silicon nitride
2. Stainless steel

که معرف انعطاف‌پذیری ترک، a عمق آن، گشتاور اینرسی سطح تیر حول محور و $\Psi(-)$ تابعی است که در بازه‌ی تغییر نسبت / بین صفر تا شش دهم، به صورت معادله‌ی (۷) قابل بیان است [۱۴].

$$\Psi\left(/\right)= . \left(/\right) - . \left(/\right) + . \left(/\right) - . \left(/\right) + . \left(/\right) - . \left(/\right) + . \left(/\right) - . \left(/\right) + . \left(/\right) \quad (۷)$$

وجود ترک باعث کاهش سفتی و در نتیجه کاهش انرژی کرنشی تیر خواهد شد. افشاری و اینمن در مرجع [۱]، با فرض اینکه ترک در زیر وصله‌ی پیزوالکتریک قرار ندارد، رابطه‌ی (۸) را برای محاسبه‌ی این کاهش انرژی پیشنهاد کردند.

$$= - \left(\frac{\partial (x,t)}{\partial}\right) \quad (۸)$$

که در آن ( ) = است.

شکل ۲ نحوه مدل‌سازی ترک موجود در تیر

۴- مدل‌سازی ریاضی دینامیک عرضی تیر مفروض

در ادامه از روش لاگرانژ برای استخراج معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی تیر شکل ۱ استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا باید انرژی پتانسیل و جنبشی تیر محاسبه شود. در این راستا، انرژی پتانسیل کرنشی مجموعه با در نظر گرفتن اثر قطعات پیزوالکتریک و تغییرات دما به‌کمک رابطه (۹) محاسبه می‌شود.

$$\Pi = \Pi + \Pi = -\iiint \sigma \ \varepsilon \quad + -\iiint \sigma \ \varepsilon \quad (۹)$$

در این رابطه، Π، σ، ε، Π، σ، ε، به‌ترتیب معرف انرژی پتانسیل کرنشی، تنش و کرنش عمودی در تیر و قطعات پیزو الکتریک است.

در اثر وجود بار حرارتی، تنش و به دنبال آن گشتاور و همچنین نیروی داخلی در تیر و قطعات پیزوالکتریک پدید خواهد آمد [۱۵]. جهت محاسبه‌ی گشتاور و نیروی داخلی، با توجه به این که جابجایی در صفحه‌ی (,) است، گشتاور و نیروی خارجی با استفاده از روابط (۱۰) تا (۱۲) قابل محاسبه خواهد بود.

$$( ) = - ( ) \left(\frac{\partial}{\partial}\right) + ( ) \quad (۱۰)$$

$$( ) = -\int \alpha ( ) \ ( ) ( ) \quad (۱۱)$$

$$( ) = -\int \alpha ( ) \ ( ) ( ) \quad (۱۲)$$

که α ( ) ضریب انبساط دمایی ماده‌ی مدرج تابعی است. درنتیجه با توجه به رابطه‌ی / ( ) = σ، اصل برهم‌نهی و رابطه‌ی (۸)، انرژی کرنشی تیر ترک‌دار تحت بار حرارتی را می‌توان به‌صورت رابطه (۱۳) نوشت.

$$\Pi = -\int (x) \left(\frac{\partial (,)}{\partial}\right) + -\int (x)\left(\frac{\partial (,)}{\partial}\right) - - (x) \left(\frac{\partial (x,t)}{\partial}\right) \quad (۱۳)$$

چون بر روی تیر مفروض قطعات حسگر و عملگر پیزوالکتریک قرار دارد، لذا باید با در نظر گرفتن روابط تنش و کرنش در قطعه‌های پیزوالکتریک، انرژی کرنشی در رابطه‌ی (۱۳) را اصلاح نمود. رابطه تنش در قطعات پیزوالکتریک به صورت معادله‌ی (۱۴) است.

$$\sigma = - \frac{\partial}{\partial} - \quad - \lambda \quad (۱۴)$$

درمعادله‌ی (۱۴)، ، و به‌ترتیب مدول الاستیک پیزوالکتریک در میدان الکتریکی ثابت، ضریب تنش پیزوالکتریک در دمای ثابت و میدان الکتریکی بین الکترودهای پیزوالکتریک است. همچنین، λ ضریب تنش دمایی در میدان الکتریکی ثابت است که به‌صورت معادله‌ی (۱۵) محاسبه می‌شود.

$$\lambda = {}^{,T}\alpha \quad (۱۵)$$

در اینجا، α و ^{,T} به‌ترتیب ضریب انبساط دمایی و مدول الاستیک پیزوالکتریک در میدان الکتریکی و دمای ثابت است. همچنین و به صورت روابط (۱۶) تا (۱۷) محاسبه می‌شود.

$$= \frac{( )}{} \quad (۱۶)$$

$$= \quad (۱۷)$$

در رابطه (۱۷)، ثابت کرنش پیزوالکتریک است. با استفاده از روابط (۱۴) تا (۱۷) و جاگذاری آنها در عبارت دوم معادله‌ی (۹) رابطه (۱۸) به‌دست می‌آید.

$$\Pi = - {}^{,T} \int \left(\frac{\partial}{\partial}\right) + - {}^{,T} \int \left(\frac{\partial (,)}{\partial}\right) + - \int \left(\frac{\partial (,)}{\partial}\right) ( ) + -\lambda \int ( )\left(\frac{\partial (,)}{\partial}\right) + -\lambda \int ( )\left(\frac{\partial (,)}{\partial}\right) \quad (۱۸)$$

که با فرض برابر برابر بودن ضخامت حسگر و عملگر (=) پیزوالکتریک روابط (۱۹) تا (۲۰) حاصل می‌شود.

$$= \quad =- \quad +- \quad (\quad + \quad) \tag{۱۹}$$

$$=-\frac{(\quad + \quad)}{} \tag{۲۰}$$

با فرض عدم تغییر دما در راستای ضخامت پیزوالکتریک می‌توان نوشت (روابط (۲۱) و (۲۲)).

$$(\quad) =-\frac{(\quad + \quad)}{}(\Delta \quad (\quad)) \tag{۲۱}$$

$$(\quad) =-\frac{(\quad + \quad)}{}(\Delta \quad (\quad)) \tag{۲۲}$$

لازم به ذکر است که در روابط (۲۱) تا (۲۲)، عبارت $\Delta(\quad)$ نشان دهنده‌ی اختلاف دمای پیزوالکتریک با دمای اولیه است .(منظور از دمای اولیه، دمای لحظه‌ی نصب پیزوالکتریک بر روی تیر است). با ترکیب روابط (۹)، (۱۳) و (۱۸) انرژی کرنشی مجموعه‌ی موردنظر را می‌توان به‌صورت رابطه (۲۳) نوشت.

$$
\begin{aligned}
\Pi \quad =- \quad & {}^{,T} \int \left(\frac{\partial [redacted]}{\partial}\right) \\
& +- [redacted] \int \left(\frac{\partial [redacted]}{\partial}\right) \\
& +- \int \left(\frac{\partial [redacted]}{\partial}\right) \quad (\quad) \\
& +-\lambda \int \left(\frac{\partial \ (\ , \ )}{\partial}\right) \\
& +-\lambda \int \left(\frac{\partial \ (\ , \ )}{\partial}\right) \\
& +-\int \ (x) \left(\frac{\partial \ (\ , \ )}{\partial}\right) \\
& +-\int \ (x) \left(\frac{\partial \ (\ , \ )}{\partial}\right) \\
& -- \quad (x \ ) \left(\frac{\partial \ (x \ ,t)}{\partial}\right)
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

البته با توجه به این که سطح مقطع یکنواخت و اینکه توزیع دما به صورت یک بعدی و در جهت طول تیر در نظر گرفته شده است، برابر با صفر است [۱۵].

همچنین انرژی جنبشی تیر و قطعات پیزوالکتریک را در صورت صرف‌نظر از انرژی جنبشی الکتریکی، می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲۴) محاسبه نمود.

$$
\begin{aligned}
& =-\iiint \rho \ (\ ) \left(\frac{\partial \ (\ , \ )}{\partial}\right) \qquad +-\rho \qquad \int \left(\frac{\partial}{\partial}\right) \\
& +-\rho \qquad \int \left(\frac{\partial}{\partial}\right)
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

بر اساس این رابطه و یکسان فرض شدن چگالی قطعه‌های سنسور و عملگر پیزوالکتریک ($\rho = \rho$)، انرژی جنبشی کل مجموعه را می‌توان به‌صورت روابط (۲۵) و (۲۶) نوشت.

$$=-\int (\rho \quad)(\quad) \left(\frac{\partial \ (\ , \ )}{\partial}\right) \tag{۲۵}$$

$$
\begin{aligned}
(\rho \quad)(\quad) = \rho \quad + \rho \quad & [\ (\ - \quad) \ (\quad - \ )] \\
+ \rho \quad & [\ (\ - \quad) \ (\quad - \ )]
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

در ادامه از معادله‌ی لاگرانژ (۲۷) برای استخراج معادلات زمانی مربوط به مدهای $= \quad , \ ,...,$ استفاده می‌شود.

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \ \dot{}}\right) - \frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial \Pi}{\partial} = \tag{۲۷}$$

برای انجام این‌کار، ابتدا با فرض مشخص بودن شکل مد (x) سیستم ارتعاشی و استفاده از روش تقریب مد فرضی، جابجایی عرضی تیر به‌صورت معادله‌ی (۲۸) نوشته می‌شود، که در آن q (t) معرف مختصه‌ی تعمیم‌یافته‌ی مد ام است.

$$(\ , \ ) = \sum_{=} \quad (x) q \ (t) \tag{۲۸}$$

سپس با جاگذاری (۲۳)، (۲۵) و (۲۸) در معادله (۲۷) تعریف $X'' \ (x) = \quad /$ می‌توان معادله (۲۹) را نوشت.

$$\sum_{=} \ddot{q} [redacted] + \sum_{=} q \ (\ ) \quad =- \ (\ )\eta - \quad (t) \tag{۲۹}$$

در رابطه (۲۹) از روابط (۳۰) تا (۳۳) استفاده می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& = \int \quad (\ ) \quad X''(x) X''(x) \\
& - \quad (x \ ) \ (\quad) \quad (X''(x \ )) \\
& + \int \qquad X''(x) X''(x) \\
& + \int \qquad X''(x) X''(x)
\end{aligned}
\tag{۳۰}
$$

$$= \int \ (\rho \quad)(\quad) X \ (x) X \ (x) \tag{۳۱}$$

$$\eta = \int \qquad X''(x) \tag{۳۲}$$

$$R \ (t) = -\lambda \int \quad [redacted] \ '' (\ ) \tag{۳۳}$$

همچنین با تعریف بردارهای $(\ ) = [\ , \ ,..., \ ]$ و $= [\quad]$، ماتریس‌های $(\ ) = [\ (t), \ (t),..., \ (t)]$ ، $= [\quad]$ و $\Gamma = \ _\times$ برای $= \ , \ ,...,$ ،معادله‌ی (۲۹) به‌صورت رابطه (۳۴) بازنویسی می‌شود.

$$[redacted] \ (\ ) = - \ (\ )\eta - \Gamma \quad (t) \tag{۳۴}$$

در این نوشتار، $(\ )$ و به‌ترتیب معرف ولتاژ کنترلی داده شده به محرک پیزوالکتریک و بار خارجی به‌وجود آمده به‌خاطر تغییرات دما در طول تیر است که به‌صورت ورودی اغتشاشی سیستم مرتعش مدل می‌شود.

همچنین ولتاژهای خروجی حسگر را می‌توانی به‌صورت رابطه (۳۵) برحسب جابجایی تیر نوشت[۱۶].

$$V_s(t)=\frac{C_{11}^{E,T}h_s t_{eq}^s}{2\beta_{33}^s C_p^l}\int_{x1s}^{x2s} b\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}dx \qquad (۳۵)$$

درحالی‌که $t_{eq}^s=(h_s+h_b-2z_{n1})$، β_{33}^s ضریب گذرناپذیری تحت شرایط تنش ثابت، C_p^l ظرفیت معادل پیزوالکتریک لایه‌ای و z_{n1} به‌صورت رابطه (۳۶) تعریف می‌شود.

$$=\frac{-\qquad(\ +\ )}{[\ \ (\ )\ \ +\ \ ]} \qquad (۳۶)$$

۵- پاسخ اجباری سیستم مرتعش تحت اثر عملگر پیزوالکتریک

با توجه به ناهمگن بودن تیر مورد بررسی، حل تحلیلی مسأله‌ی مقدار ویژه آن، جهت محاسبه‌ی شکل مدها و فرکانس‌های طبیعی امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل، در ادامه از روش ریلی-ریتز که یک راه‌کار نیمه تحلیلی است، برای محاسبه‌ی شکل مدها و فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد تیر استفاده می‌شود. در این راستا، شکل مدهای تقریبی به‌صورت ترکیبی خطی از شکل مدهای $\phi(\ )$ ارتعاش آزاد تیر اویلر-برنولی ساده با شرایط مرزی مشابه مسأله موردنظر فرض می‌شود.

$$X^{(\ )}(\ )=\sum_{=}\text{[redacted]}\,\phi'(\ ) \qquad (۳۷)$$

به این منظور، چنانچه تیر مفروض یک سرگیردار باشد، $\phi(\ )$ به‌ترتیب، به‌صورت رابطه‌ی (۳۸) فرض می‌شود.

$$\phi(\ )=\left[\text{[redacted]}\cosh(\zeta\ )\right]-\left[\sin(\zeta\ )-\sinh(\zeta\ )\right]\frac{\cos(\zeta\ )-\cosh(\zeta\ )}{\sin(\zeta\ )-\sinh(\zeta\ )}$$

$$\text{[redacted]}(\zeta\ )\qquad(\zeta\ )\qquad =\ ,\ ,\ldots,n \qquad (۳۸)$$

روش ریلی-ریتز بر پایه‌ی برابر نمودن بیشینه‌ی انرژی پتانسیل و جنبشی ارتعاش آزاد هر مد استوار است، که برای kامین مد به‌صورت روابط (۳۹) تا (۴۰) تعریف می‌شود.

$$\Pi_{max}=-\int\ \ (x)\ \left(X''^{(\ )}(x)\right)$$
$$+-\int\ \ \left(X''^{(\ )}(x)\right)$$
$$+-\int\ \ \left(X''^{(\ )}(x)\right)$$
$$--\ \ (x\ )\ \ \left(X''^{(\ )}(x\ )\right) \qquad (۳۹)$$

$$\ ^{(\ )}_{max}=-\left(\omega^{(\ )}\right)\int\left(\rho\ \right)(\ )\left(X^{(\ )}(x)\right) \qquad (۴۰)$$

با جاگذاری معادله (۳۷) درمعادلات (۳۹) و (۴۰) می‌توان نوشت (روابط (۴۱) و (۴۲)).

$$\Pi^{(\ )}_{max}=-\left[\ \ ^{(\ )T}\ \ \ ^{(\ )}\right] \qquad (۴۱)$$

$$\ ^{(\ )}_{max}=-\left(\omega^{(\ )}\right)\left[\ \ ^{(\ )T}\ \ \ ^{(\ )}\right] \qquad (۴۲)$$

که $=[\quad]$ ، $=[\quad]$ (رابطه‌های (۴۳) و (۴۴)).

$$=\int\ \ (\ )\ \ \phi''(x)\phi''(x)$$
$$+\int\ \ \ \ \phi''(x)\phi''(x)$$
$$+\int\ \ \ \ \phi''(x)\phi''(x)$$
$$-\ \ (\ )\ \ \left(\phi''^{(\ )}(x\ )\right)\left(\phi''^{(\ )}(x\ )\right) \qquad (۴۳)$$

$$=\int\left(\rho\ \right)(\ )\phi(x)\phi(x) \qquad (۴۴)$$

$^{(\ )}=\left[\ ^{(\ )}\ \ ^{(\ )}\right.$ [redacted] $\left.\right]$ است. با برابر قرار دادن این دو مقدار بیشینه رابطه (۴۵) حاصل می‌شود.

$$\left[\ \ \ -\left(\omega^{(\ )}\right)\ \ \ \right]\ ^{(\ )}= \qquad (۴۵)$$

با حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معادله‌ی (۴۵)، وزن‌های ترکیب $^{(\ )}$ برای هر شکل مد و همچنین فرکانس‌های طبیعی $\omega^{(\ )}$ محاسبه می‌شود.

پس از تخمین شکل مدها، با بازنویسی معادله‌ی (۳۴) به صورت فضای حالت می‌توان بخش زمانی پاسخ را با حل معادلات مشتقی جزئی معمولی به‌دست آورد. برای این‌کار، بردار حالت به‌صورت معادله‌ی (۴۶) تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{X}=[q_1q_2\ldots q_n\dot{q}_1\dot{q}_2\ldots\dot{q}_n]^T \qquad (۴۶)$$

پس می‌توان نوشت (رابطه (۴۷)).

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t})=A\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})+BV_a(t)+\Gamma R_T(t) \qquad (۴۷)$$

که در آن $A=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & I_{n\times n}\\ -M^{-1}K & 0_{n\times n}\end{bmatrix}$ ماتریس سیستم، $B=\begin{bmatrix}0_{n\times 1}\\ M^{-1}\eta\end{bmatrix}$ و $\Gamma=\begin{bmatrix}0_{n\times 1}\\ M^{-1}\Gamma_1\end{bmatrix}$است. همچنین با ترکیب روابط (۲۸)، (۳۵) و (۴۶) معادله‌ی خروجی این مدل را نیز می‌توان به‌صورت رابطه (۴۸) بیان نمود.

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t})=V_s(t)=C\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) \qquad (۴۸)$$

که در آن C به‌صورت روابط (۴۹) تا (۵۱) تعریف می‌شود.

$$C=\gamma_{ps}[\theta_1\quad\theta_2\ \ldots\quad\theta_n] \qquad (۴۹)$$

$$\gamma_{ps}=\frac{C_{11}^{E,T}h_s t_{eq}^s}{2\beta_{33}^s C_p^l} \qquad (۵۰)$$

$$\theta_i=\int_{x1s}^{x2s} b\,\frac{d^2X^i(x)}{dx^2}dx \qquad (۵۱)$$

۶- کنترل‌کننده‌ی بازخورد خروجی مقاوم

۶-۱- گزینش محل بهینه برای عملگر وحساسه‌ی پیزوالکتریک

مکان حساسه و محرک باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که به رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری سیستم تحت کنترل منجر شود. بر این اساس، در ادامه روشی برای گزینش مکانی بهینه برای قرار دادن این وصله‌ها پیشنهاد می‌شود. بدین منظور، از روشی که فرهادی در مرجع [۱۷] ارائه کرده است، بهره برده می‌شود. برای رسیدن به این هدف، از رابطه‌های (۵۲) و (۵۳) می‌شود که در آن‌ها ψ و φ_i به‌ترتیب بردارهای ویژه iام سمت چپ و راست ماتریس A است.

$$=\left|\frac{\psi}{\|\psi\|\|\ \ \|}\right| \qquad (۵۲)$$

$$= \left| \frac{\varphi}{\|\varphi\|\cdot\|\ \|} \right|$$ (۵۳)

در این روابط، و به‌ترتیب اندیس‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری است. بدیهی است که مقدار بزرگتر به معنای کارایی مناسب‌تر در تخمین متغیرهای حالت و بزرگتر به بهبود شاخص کنترل‌پذیری سیستم تحت کنترل است.

۶-۲- روش کنترلی پیشنهادی

در این مقاله، از کنترل‌کننده‌ی بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر، برای پایدارسازی سیستم ارتعاشی استفاده می‌شود. در این راستا، با توجه به عدم قطعیت‌های مدل به‌دست آمده از سیستم تحت کنترل روشی مقاوم پیشنهاد می‌شود. با فرض اینکه سیستم بیان شده با معادله‌ی (۴۷) کنترل‌پذیر است، کنترل‌کننده‌ی بازخورد حالت (رابطه (۵۴)) برای پایدارسازی سیستم طراحی می‌شود.

u (۵۴)

$\mathrm{K_c}$ بهره‌ی کنترل‌کننده است و می‌توان آن‌را با به‌کارگیری روش مقاوم پیشنهادی در قضیه‌های ۱ یا ۲ طراحی نمود.

اما آشکار است که متغیرهای حالت $\mathrm{q_j}$ و $\dot{\mathrm{q}}_\mathrm{j}$ این سیستم قابل اندازه‌گیری نبوده و تنها ولتاژهایی که توسط حساسه‌های پیزوالکتریک اندازه‌گیری می‌شود، به‌عنوان خروجی سیستم در دسترس است. برای تخمین بردار حالت $\boldsymbol{X}(\mathrm{t})$، یک رؤیت‌گر حالت با دینامیک رابطه (۵۵) در کنترل‌کننده جادهی شده است.

$$\hat{\boldsymbol{X}} = A\hat{\boldsymbol{X}} + BV_a(t) + L_c(\boldsymbol{Y}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}(t))$$ (۵۵)

در معادله‌ی (۵۵)، L_c بهره‌ی رویتگر است که با فرض رویت‌پذیری جفت‌های A و C به‌کمک قضیه‌های ۱ یا ۲ طراحی می‌شود. بنابراین ورودی کنترلی سیستم مطابق رابطه (۵۶) خواهد بود.

V_c (۵۶)

در صورتی‌که سیستم حلقه‌بسته پایدار داخلی باشد، اغتشاش محدود باعث ناپایداری آن نخواهد شد. بر این اساس، در ادامه برای بررسی پایداری، با صرف‌نظر کردن از اغتشاش $R_T(t)$ و تعریف خطای تخمین حالت به‌صورت رابطه (۵۷)، معادله‌ی سیستم حلقه‌بسته به‌صورت رابطه (۵۸) نوشته می‌شود.

$\tilde{\boldsymbol{X}}$ (۵۷)

(۵۸)

با توجه به اینکه بر اساس معادله‌ی (۵۸)، مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه‌بسته ترکیبی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های $\mathrm{A - BK_c}$ و $\mathrm{A - L_cC}$ است، اصل جداسازی برقرار است؛ یعنی، اگر به‌صورت مستقل از هم، بهره‌های $\mathrm{K_c}$ و $\mathrm{L_c}$، به‌ترتیب ماتریس‌های $\mathrm{A - BK_c}$ و $\mathrm{A - L_cC}$ را پایدار سازد، سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود. بنابراین در ادامه به بررسی پایداری سیستم‌های (۵۹) و (۶۰) به‌جای (۴۷) پرداخته می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t}) = (\mathrm{A - BK_c})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$$ (۵۹)

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = (\mathrm{A - L_cC})\tilde{\boldsymbol{X}}(t)$$ (۶۰)

ملاحظه ۱. فرض کنید که مقدار دقیق پارامترهای مکانیکی و الکتریکی تیر مرتعش شکل ۱ نامعین است. از آنجا که این عدم قطعیت‌های پارامتری باعث تغییر در ماتریس‌های جرم، سفتی و همچنین اثر عملگر پیزوالکتریک شده، مدل فضای حالت این سیستم نامعین این‌گونه اصلاح می‌شود (روابط (۶۱) و (۶۲)).

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t}) = (A + \Delta A)\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) + (B + \Delta B)V_a(t)$$ (۶۱)

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) = (C + \Delta C)\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$$ (۶۲)

در این رابطه، ΔA، ΔB و ΔC بیانگر عدم قطعیت‌های پارامتری با نرُم محدود بوده و به‌صورت رابطه (۶۳) تعریف می‌شود.

$$[\Delta A\ \Delta B\ \Delta C] = GF(t)[E_A\ E_B\ E_C]$$ (۶۳)

که E_A، E_B، E_C و G ماتریس‌های ثابت و معلومی با ابعاد مناسب هستند و $F(t)$ یک ماتریس متغیر با زمان است که شرط $F(t)F^T(t) \le I_{n\times n}$ را ارضا می‌کند. بنابراین معادلات (۵۹) و (۶۰) به‌صورت روابط (۶۴) و (۶۵) اصلاح می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t}) = (\mathrm{A} + \Delta A - (\mathrm{B} + \Delta B)\mathrm{K_c})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$$ (۶۴)

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = (\mathrm{A} + \Delta A - \mathrm{L_c}(\mathrm{C} + \Delta C))\tilde{\boldsymbol{X}}(t)$$ (۶۵)

پس ورودی کنترلی بازخورد حالت مبتنی بر رویتگر (۵۶)، سبب پایداری سیستم نامعین مشخص شده با روابط (۶۱) و (۶۲) می‌شود، در صورتی‌که سیستم‌های (۶۴) و (۶۵) پایدار باشد.

۶-۳- طراحی کنترل‌کننده‌ی مقاوم و اثبات پایداری

در این بخش به طراحی کنترل‌کننده‌ی مقاوم در برابر عدم قطعیت‌های پارامتری برای تیر مرتعش مورد نظر پرداخته می‌شود. در این راستا، ابتدا لم مورد استفاده در اثبات پایداری بیان می‌شود.

لم ۱. ماتریس‌های ثابت $\mathrm{S_1}$ و $\mathrm{T_1}$ با ابعاد مناسب را در نظر بگیرید. در این‌صورت برای هر $0 < \delta$، نامساوی رابطه (۶۶) برقرار است [۱۸].

$$S_1^T T_1 + T_1^T S_1 \le \delta S_1^T S_1 + \frac{1}{\delta} T_1^T T_1$$ (۶۶)

قضیه ۱: سیستم نشان داده شده با معادلات (۶۱) و (۶۲) اعمال ورودی کنترلی (۵۶) پایدار مجانبی کلی است، اگر ماتریس‌های متقارن $<$ ، $<$ ، ماتریس‌های و و همچنین اسکالرهای δ و δ وجود داشته باشد، به گونه‌ای که روابط (۶۷) و (۶۸) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} \phi & * & * \\ - & -\delta & * \\ \delta & & -\delta \end{bmatrix} < ,$$ (۶۷)

$$\begin{bmatrix} \phi & * & * \\ - & -\delta & * \\ \delta & & -\delta \end{bmatrix} <$$ (۶۸)

که $\phi = \quad + \quad - \quad -$ و $\phi = \quad + \quad - \quad -$ است. در این صورت، بهره‌های کنترل‌کننده‌ی بازخورد حالت و رویت‌گر مطابق روابط (۶۹) و (۷۰) خواهد بود.

$=$ (۶۹)

$=$ (۷۰)

اثبات: همان‌گونه که نشان داده شد، ورودی کنترلی بازخورد حالت مبتنی بر رویتگر (۵۶)، سبب پایداری سیستم نامعین مشخص شده با روابط

(۶۱) و (۶۲) می‌شود، در صورتی‌که سیستم‌های (۶۴) و (۶۵) پایدار باشند. با فرض مثبت معینی ماتریس متقارن ، کاندید لیاپانوف، رابطه (۷۱)، در نظر گرفته می‌شود.

$$(\ )=\quad (\ )\quad (\ ) \qquad (۷۱)$$

پایداری مجانبی (۶۴) تضمین می‌شود در صورتی‌که برای هر $(\ )\neq$ رابطه (۷۲) برقرار باشد.

[redacted] $<$ (۷۲)

با جاگذاری از معادله‌ی (۶۴) در (۷۲)، [redacted] به‌صورت رابطه (۷۳) خواهد بود.

$$[redacted]\ )\{[\ \ +\Delta\ \ -(\ \ +\Delta\ \ )\ \ ]$$
$$+\ \ [\ \ +\Delta\ \ -(\ \ +\Delta\ \ )\ \ ]\}\ (\ ) \qquad (۷۳)$$

بنابراین $<$ [redacted] خواهد بود، در صورتی که رابطه (۷۴) برقرار باشد.

$$[\ \ +\Delta\ \ -(\ \ +\Delta\ \ )\ \ ]$$
$$+\ \ [\ \ +\Delta\ \ -(\ \ $$ [redacted] $$]< \qquad (۷۴)$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی (۷۵) نوشت.

$$+\Delta\ \ -$$ [redacted]
$$+$$ [redacted]
$$=$$ [redacted]
$$+\Delta$$ [redacted] $$-\ \ \Delta\ \ < \qquad (۷۵)$$

بنابراین شرط پایداری مجانبی با ترکیب معادله‌ی (۶۳) و نامساوی (۷۵)، به نامساوی (۷۶) تبدیل می‌شود.

$$\psi+$$ [redacted] $$\ \ )+(\ \ -\ \ )\ \ (\ )\ \ < \qquad (۷۶)$$

که $\psi=\quad+\quad-\quad-$ است. اکنون با توجه به لم ۱، رابطه‌ی (۷۶)، فرض $=(\ )(\ -\ )$ ، $=$ و اینکه $F(t)F^T(t)\le I_{n\times n}$ است، می‌توان گفت سیستم (۶۴) پایدار مجانبی است در صورتی که $\delta_1>0$ وجود داشته باشد، به‌قسمی که نامساوی (۷۷) برقرار باشد.

$$\psi+\frac{}{\delta}(\ \ -\ \ )\ (\ \ -\ \ )+\delta\ \ \ < \qquad (۷۷)$$

با فرض $=\ ^{-}$ ، ضرب از چپ و راست معادله‌ی (۷۷) در و تعریف $=$ می‌توان رابطه (۷۸) را نوشت.

$$\phi+\frac{}{\delta}(\ \ -\ \ )\ (\ \ -\ \ )+\delta\ \ \ < \qquad (۷۸)$$

که $\phi=\quad+\quad-\quad-$ است. اکنون با استفاده از متمم شِر[1]، (۷۸) می‌توان به‌صورت رابطه (۷۹) نوشت.

$$\begin{bmatrix} \phi & * & * \\ - & -\delta\ _{\times} & * \\ & & -\delta^{-}\ _{\times} \end{bmatrix}< \qquad (۷۹)$$

ولی این نامعادله غیرخطی است و حل آن توسط نامساوی ماتریسی خطی امکان‌پذیر نیست. برای برطرف نمودن این مشکل، از پیش‌ضرب و پس‌ضرب در معادله‌ی (۷۹) در ماتریس $\{\ _{\times},\delta\times\ _{\times},\ _{\times},\ _{\times}\}$ استفاده شده که به معادله‌ی (۶۷) منجر می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پایداری مجانبی در معادله‌ی (۶۴) با پیدا کردن ماتریس متقارن $<$ ، ماتریس و همچنین اسکالر δ که به برقراری نامساوی (۶۷) منجر شود، معادل است.

به‌طریق مشابه و با در نظر گرفتن دوگان سیستم به صورت معادله‌ی (۶۵) نشان داد که پایداری مجانبی (۶۵) زمانی تضمین می‌شود که ماتریس متقارن $<$ ، ماتریس و همچنین اسکالر δ وجود داشته باشد، به‌قسمی که معادله‌ی (۶۸) برقرار باشد.

قضیه ۲: سیستم نشان داده شده با معادلات (۶۴) و (۶۵) با نرخ کاهش α پایدار نمایی کلی است، در صورت وجود ماتریس‌های متقارن $<$ ، $<$ ، ماتریس‌های و و همچنین اسکالرهای مثبت δ و δ، به‌گونه‌ای که نامعادلات (۸۰) و (۸۱) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} \phi+\alpha & * & * \\ - & -\delta\ _{\times} & * \\ \delta & & -\delta\ _{\times} \end{bmatrix}<\ , \qquad (۸۰)$$

$$\begin{bmatrix} \phi+\alpha & * & * \\ - & -\delta\ _{\times} & * \\ \delta & & -\delta\ _{\times} \end{bmatrix}< \qquad (۸۱)$$

در این صورت، بهره‌های کنترل‌کننده‌ی بازخورد حالت و رویت‌گر از طریق روابط (۶۹) و (۷۰) محاسبه می‌شود.

اثبات: با فرض مثبت معینی ماتریس متقارن و معادله‌ی کاندیدای لیاپانوف به صورت رابطه‌ی (۷۱)، پایداری نمایی سیستم (۶۴) با نرخ $<\alpha$ تضمین می‌شود، درصورتی که رابطه (۸۲) برقرار باشد.

با انجام روندی مشابه آنچه که در اثبات قضیه‌ی ۱ صورت گرفت، می‌توان نشان داده که برقراری معادلات (۸۲) و (۸۰) معادل بوده و بهره‌ی کنترلی با استفاده از رابطه‌ی (۶۹) قابل محاسبه است.

[redacted] $(\ \ $ (۸۲)

به‌طریق مشابه می‌توان نشان داد که با بهره‌ی رویتگر (۷۰) باعث پایداری نمایی سیستم (۶۵) با نرخ کاهش $<\alpha$ می‌شود، درصورتی‌که معادله‌ی (۸۱) برقرار باشد.

ملاحظه ۲. برای انتخاب ماتریس‌های عدم قطعیت ΔA، ΔB و ΔC، به دو روش زیر می‌توان عمل نمود:

الف) بیشینه‌ی اختلاف میان پارامترهای مکانیکی و همچنین الکتریکی مدل نامی و سیستم واقعی را فرض نموده و بر آن اساس به تخمین ماتریس‌های عدم قطعیت‌ها پرداخته می‌شود. درصورتی که ماتریس‌های عدم قطعیت کوچک انتخاب شده باشد، پاسخ سیستم حلقه‌بسته‌ی پیاده‌سازی شده مناسب نخواهد بود. در این صورت، با در نظر گرفتن ماتریس‌های عدم قطعیت بزرگ‌تر، سعی در بیشتر کردن میرایی پاسخ سیستم مرتعش خواهد شد.

ب) در صورت مشخص نبودن حداکثر میزان خطا، با انجام آزمایش بر روی مجموعه‌ی واقعی و تحریک عملگر پیزوالکتریک با یک ورودی مشخص تصادفی، خروجی سنسور پیزوالکتریک را ثبت نموده و برای این مجموعه‌ی ورودی و خروجی در یک بازه‌ی فرکانسی مشخص، اندازه‌ی پاسخ فرکانسی محاسبه می‌شود. سپس با کاستن اندازه‌ی پاسخ فرکانسی مدل نامی از آن، نمودار بود اندازه سیستم تفاضلی ترسیم، نقاطی در بالای آن مشخص و نموداری از آن نقاط عبور داده و مدل فضای حالت هم مرتبه با (۶۴) برای آن شناسایی می‌شود. ماتریس‌های این مدل تفاضلی شناسایی شده در تشکیل ماتریس‌های عدم قطعیت به‌کار برده می‌شود.

1. Schur complement

۷- شبیه سازی عددی

۷-۱- راستی‌آزمایی روش حل پیشنهادی

در ابتدا یک تیر مدرج تابعی با تکیه‌گاه های ساده در دو سمت، با طول = که جنس لبه‌ی ابتدایی آن آلومینیوم و جنس لبه‌ی انتهایی آن زیرکونیوم (ZrO_2) است، مورد بررسی گرفته است. برای این منظور، $\rho =$ ، $A_b = 9.128e-8\,m^2$ ، $I_b = 6.935e-11m^4$ ، $E_z = 200\,GP$ ، $\rho =$ ، $E_a = 71.7\,GPa$ و تغییرات مدول الاستیک و چگالی در طول تیر مطابق با معادلات (۸۳) و (۸۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$E = \begin{cases} E_a\left(1-\frac{e^{\alpha x}-1}{e^{\alpha}-1}\right)+E_z\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{e^{\alpha}-1}\right) & \alpha \neq 0 \\ E_a(1-x)+E_z x & \alpha = 0 \end{cases} \tag{۸۳}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_a\left(1-\frac{e^{\alpha x}-1}{e^{\alpha}-1}\right)+\rho_z\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{e^{\alpha}-1}\right) & \alpha \neq 0 \\ \rho_a(1-x)+\rho_z x & \alpha = 0 \end{cases} \tag{۸۴}$$

همچنین جهت بی‌بعدسازی فرکانس طبیعی از رابطه‌ی (۸۵) استفاده شده است.

$$\Omega = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho -}{-}} \tag{۸۵}$$

در جدول (۱) مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد به‌دست آمده از روش ریلی-ریتز مورد استفاده و همچنین مرجع [۱۹]، به‌ازای ضریب‌های α متفاوت مقایسه شده است. آشکار است که نتایج با دقت بالایی با هم تطابق دارد.

سپس، به بررسی نتایج حاصل از مدل‌سازی دینامیکی یک تیر همگن آلومینیومی با تکیه‌گاه‌های ساده که دارای ترکی در فاصله‌ی است، پرداخته می‌شود. مشخصه‌های مورد استفاده در جدول ۲ مشاهده می‌شود و نسبت عمق ترک به ضخامت تیر برابر با ۰/۴ فرض شده است. در این راستا، با تغییر موقعیت ترک در طول تیر به محاسبه‌ی فرکانس طبیعی اول آن پرداخته شده است (شکل ۳).. همان‌گونه که در جدول ۳ نشان داده شده است، خطای بسیار ناچیزی میان نتایج به‌دست آمده و مرجع [۱] وجود دارد.

جدول ۱ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده برای تیر مدرج تابعی

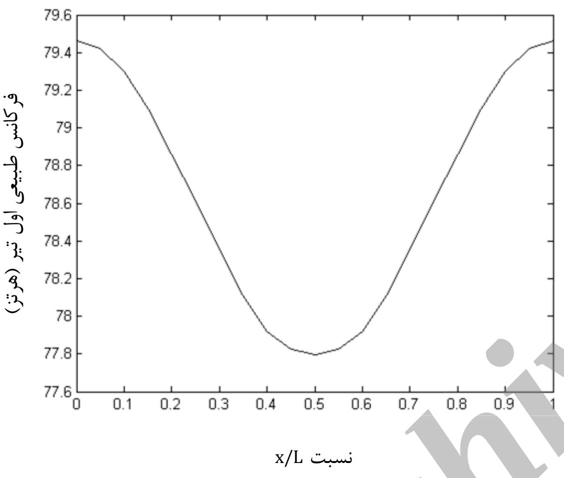
α	فرکانس محاسبه شده در مرجع [۱۹]	فرکانس محاسبه شده در پژوهش حاضر
-۱۰	۱۱/۴۵۳۲	۱۱/۴۵۸۸
-۳	۱۰/۲۴۴۳	۱۱/۲۴۶۹
۰	۱۰/۸۶۶۳	۱۰/۸۶۶۹
۳	۱۰/۳۶۶۳	۱۰/۳۶۷۰
۱۰	۹/۹۳۵۸	۹/۹۳۸۷

جدول ۲ مشخصات هندسی و خواص مواد مورد استفاده شده در راستی‌آزمایی دوم

ثابت	مقدار	واحد
L	۰/۳۰۴۸	m
h_b	۰/۰۰۳۲	m
b	۰/۰۲۵۴	m
	۷۱/۷	GPa

جدول ۳ فرکانس طبیعی اول تیر همگن معیوب با تکیه‌گاه ساده

درصد خطا	فرکانس محاسبه شده در کار حاضر (Hz)	فرکانس محاسبه شده در مرجع [۱] (Hz)	موقعیت ترک نسبت(x/L)
۰/۷۳	۷۹/۴۶	۷۸/۸۸	۰
۰/۷۳	۷۹/۳۰	۷۸/۷۲	۰/۱
۰/۶۶	۷۸/۸۶	۷۸/۳۴	۰/۲
۰/۶۵	۷۸/۳۶	۷۷/۸۵	۰/۳
۰/۶۰	۷۷/۹۲	۷۷/۴۵	۰/۴
۰/۶۴	۷۷/۸۰	۷۷/۳۰	۰/۵
۰/۶۰	۷۷/۹۲	۷۷/۴۵	۰/۶
۰/۶۵	۷۸/۳۶	۷۷/۸۵	۰/۷
۰/۶۶	۷۸/۸۶	۷۸/۳۴	۰/۸
۰/۷۳	۷۹/۳۰	۸۷/۷۲	۰/۹
۰/۷۳	۷۹/۴۶	۷۸/۸۸	۱



شکل ۳ نمایش چگونگی تغییر فرکانس طبیعی اول تیر با جابجایی ترک

۷-۲- بررسی اثر جرم و سفتی قطعات پیزوالکتریک در مدل‌سازی

همان طور که در مقدمه نیز ذکر شد، یکی از انگیزه‌های این پژوهش، نزدیک کردن مدل دینامیکی به واقعیت فیزیکی، با در نظر گرفتن سفتی و جرم قطعات پیزوالکتریک بوده است. در جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی اول تا چهارم تیر دارای ترک قرار گرفته در = ، در حالت وجود و عدم وجود قطعات پیزوالکتریک در مدل دینامیکی ارائه شده است.

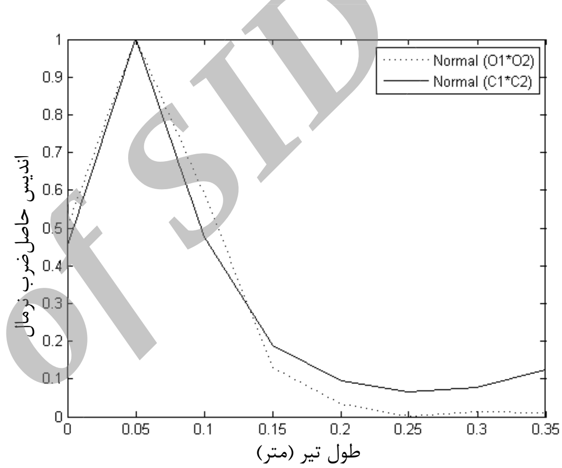
جدول ۴ فرکانس‌های اول تا چهارم تیر، در دو حالت، با پیزوالکتریک و بدون پیزوالکتریک

	فرکانس محاسبه شده با وجود پیزوالکتریک(Hz)	فرکانس محاسبه شده در غیاب پیزوالکتریک(Hz)	در صد خطا
مد اول	۲/۰۳	۱/۹۲	۵/۰۱
مد دوم	۱۴/۰۳	۱۱/۹۲	۱۵/۰۶
مد سوم	۴۲/۳۵	۳۳/۴۷	۲۰/۹۶
مد چهارم	۷۳/۹۸	۷۳/۵۰	۰/۶۴

مشخصات این وصله‌ها مطابق ۰ در نظر گرفته شده است. همان طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، تاثیر وجود جرم و سفتی قطعات پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی در مدهای دوم و سوم آشکار است.

۷-۳- مکان بهینه‌ی وصله‌های پیزوالکتریک

در این قسمت، به بررسی روش پیشنهادی برای گزینش مکان بهینه برای وصله‌های پیزوالکتریک پرداخته شده است. بدین منظور با ثابت فرض کردن محل حسگر در محلی دلخواه، به ازای مکان‌های مختلف عملگر، حاصل‌ضرب اندیس‌های مختلف C_i مربوط به مدهای اول و دوم محاسبه و سپس با ثابت فرض کردن محل عملگر در یک نقطه اختیاری، و جابجا کردن حسگر در طول تیر، حاصل‌ضرب اندیس‌های مختلف O_i مربوط به مدهای اول و دوم محاسبه و سپس نرمال می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، محل بهینه برای عملگر و حسگر، در $x_{1s} = x_{1a} = 0.05\ m$ است.



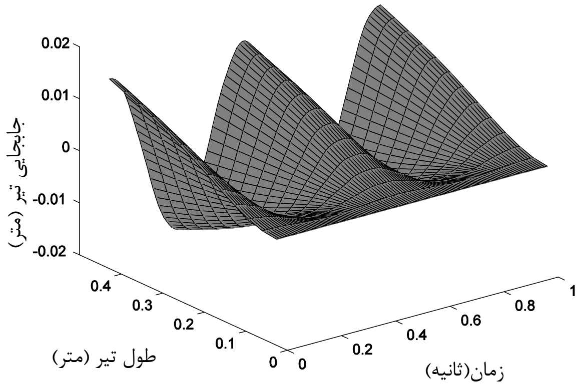
شکل ۴ نمودار تغییرات اندیس رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری نرمال شده به ازای جابجا کردن وصله‌های پیزوالکتریک

۷-۴- راستی‌آزمایی روش کنترل پیشنهادی

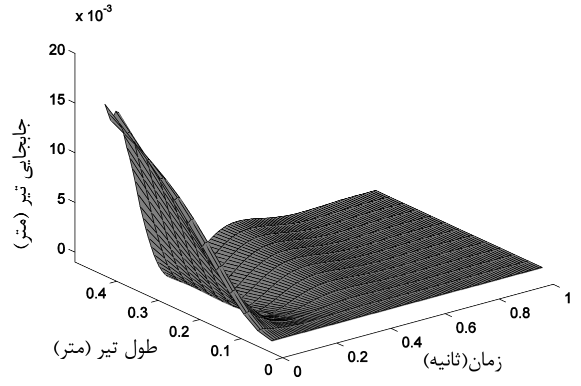
برای بررسی عملکرد سیستم کنترلی پیشنهادی، رفتار یک تیر آلومینیومی همگن یک سرگیردار با عملگر و حسگر پیزوالکتریکی که مشخصه‌های آن در جدول ۵ معرفی شده، در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، ایجاد یک شرایط اولیه‌ی غیر صفر، باعث نوساناتی مانا با دامنه‌ی ثابت در این سیستم می‌شود. لی و همکاران در مرجع [۲۰] با فرض عدم قطعیت ۶۳٪ در مشخصه‌های جرمی تیر و استفاده از کنترل‌کننده‌ی مد لغزشی فازی تطبیقی به پایدارسازی آن پرداختند. اما پاسخ این سیستم میراشونده با نوسانات بزرگ و همچنین زمان نشست ۲ ثانیه همراه بود. در ادامه برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، تیر از یک شرایط اولیه‌ی غیرصفر رها شده و سپس از کنترل‌کننده‌ای که با استفاده از قضیه‌ی ۲ طراحی می‌شود، برای از بین بردن نوسانات عرضی آن استفاده می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، اعمال ورودی کنترلی شکل ۷، باعث از بین رفتن ارتعاشات این سیستم نامعین با زمان نشست ۰/۴ ثانیه خواهد شد.

۷-۵- کنترل ارتعاشات تیر یک سرگیردار نامعین و معیوب تحت بار حرارتی

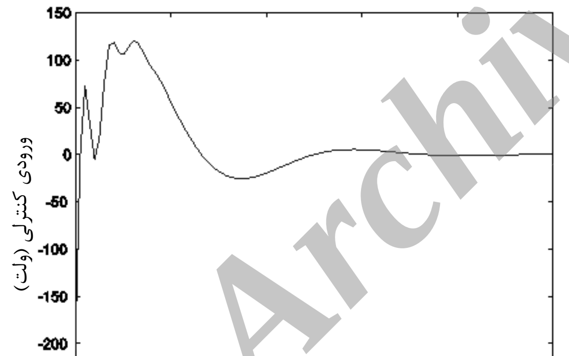
در شبیه‌سازی آخر، به بررسی کارایی روش پیشنهادی در کنترل ارتعاش تیر در شکل ۱ پرداخته می‌شود.



شکل ۵ پاسخ سیستم حلقه‌باز به شرایط اولیه‌ی ایجاد شده.



شکل ۶ پاسخ سیستم حلقه‌بسته به شرایط اولیه‌ی ایجاد شده.



شکل ۷ ورودی کنترلی اعمال شده به محرک پیزوالکتریک.

داده‌های این شبیه‌سازی مطابق با جدول ۵ نظر گرفته شده و دمای سمت راست و چپ تیر، به‌ترتیب، = و = فرض می‌شود. همچنین اطلاعات موجود از توزیع جرم و مدول الاستیک تیر که در طراحی کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرد، به‌صورت رابطه‌های (۱) و (۲)، با = فرض می‌شود. بر این اساس، با استفاده از روابط (۴۷) تا (۵۱) و فرض اینکه بیشترین اثر این بارگذاری در دو مد نخست است، مدل فضای حالت نامی سیستم با ماتریس‌های رابطه (۸۶) ساخته می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -767 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1113.8 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0.0257\\ -0.0155\end{bmatrix},$$
$$C=1e-3[-0.34 \quad 0.3 \quad 0 \quad 0]. \tag{۸۶}$$

اما فرض کنید که مدل‌سازی انجام شده با خطا همراه است؛ یعنی تیر مدرج تابعی واقعی دارای مدول الاستیک و چگالی طبق رابطه (۸۷) و (۸۸) باشد.

$$E_b=(E_m-E_c)\left(1-\frac{x}{L}\right)^3+(E_m-E_c)\left(1-\frac{x}{L}\right)+E_c \tag{۸۷}$$

$$\rho_b=(\rho_m-\rho_c)\left(1-\frac{x}{L}\right)^3+(\rho_m-\rho_c)\left(1-\frac{x}{L}\right)+\rho_c \tag{۸۸}$$

همان‌گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، ایجاد یک شرایط اولیه‌ی غیر صفر و همچنین بار حرارتی (که مطابق رابطه‌ی (۳۳) سبب ایجاد اغتشاش ثابت [ ]= بر سیستم تحت کنترل می‌شود)، باعث نوساناتی مانا با دامنه‌ی ثابت در این سیستم می‌شود. اکنون برای طراحی کنترل‌کننده‌ی مقاوم، فرض کنید که با توجه به بند الف ملاحظه‌ی ۲، ماتریس‌های عدم قطعیت به‌صورت رابطه (۸۹) بر روی مدل نامی (۸۶) در نظر گرفته شود.

$$\Delta A=1e5\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.07 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.2 & -1.1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \Delta B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0.26\\ -0.15\end{bmatrix},$$
$$\Delta C=[0.26 \quad 0.15 \quad 0 \quad 0]. \tag{۸۹}$$

بر این اساس، با در نظر گرفتن = α و استفاده از قضیه‌ی ۲، بهره‌های کنترل‌کننده و رویت‌گر حالت مقاوم به‌صورت روابط (۹۰) و (۹۱) محاسبه می‌شود.

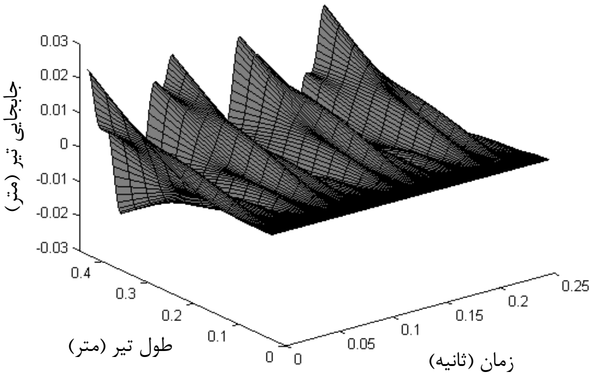
= × (۹۰)

= × (۹۱)

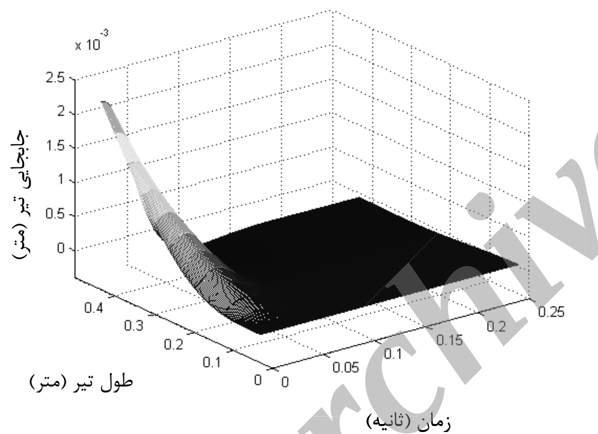
جدول ۵ مشخصات لازم جهت شبیه‌سازی کنترل تیر معیوب

ثابت	مقدار	واحد
L	۰/۴۰۱	m
h_b	۰/۰۰۳۲	m
h_p	۰/۲۶۶۷	mm
b	۰/۰۲۵۴	m
l_a	۰/۰۵	m
l_s	۰/۰۵	m
x_{1a}	۰/۱	m
x_{1s}	۰/۰۵	m
ρ_p	۷۸۰۰	kg/m³
C_{11}^E	۶۶	GPa
h_{31}^a	-۴/۸۰e۸	V/m
β_{33}^s	۶/۶۶e۷	m/F
d_{13}	-۱۹۰e-۱۲	V/m
α	۴e-۷	m/(m K)
	۰/۲	

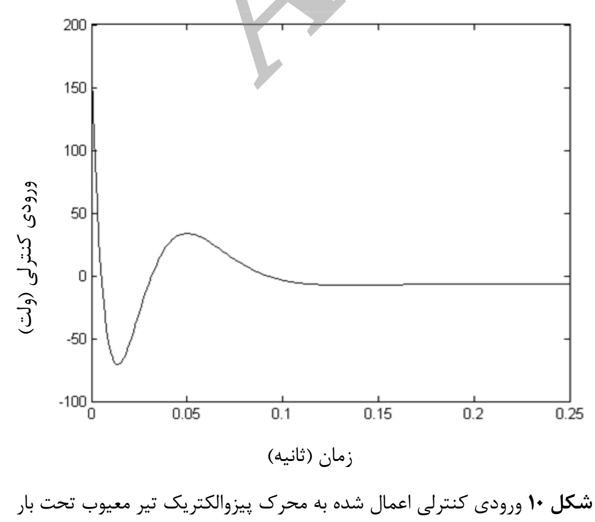
همان‌گونه که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، اعمال ورودی کنترلی شکل ۱۰ باعث پایدارسازی با کارایی مناسب این سیستم حلقه‌بسته‌ی دارای عدم قطعیت خواهد شد. برای نمایش بهتر کیفیت پاسخ، جابجایی نوک این تیر در شکل ۱۱ نشان داده شده است. در شکل ۱۲ جابجایی نوک این تیر وقتی که تحت بار حرارتی قرار ندارد، مشاهده می‌شود. آشکار است که وجود اغتشاش حرارتی تنها باعث ایجاد یک خطای حالت ماندگار کوچک در پاسخ سیستم حلقه‌بسته می‌شود.



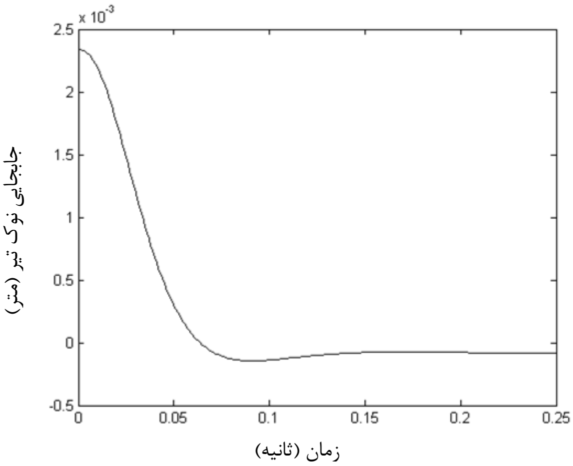
شکل ۸ پاسخ تیر معیوب کنترل نشده تحت بار حرارتی و شرایط اولیه‌ی غیرصفر.



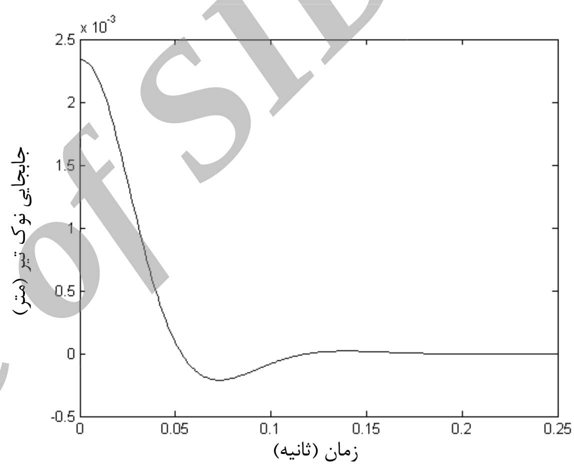
شکل ۹ پاسخ تیر معیوب کنترل شده تحت بار حرارتی و شرایط اولیه‌ی غیرصفر.



شکل ۱۰ ورودی کنترلی اعمال شده به محرک پیزوالکتریک تیر معیوب تحت بار حرارتی.



شکل ۱۱ جابجایی نوک تیر معیوب کنترل شده تحت بار حرارتی و شرایط اولیه‌ی غیرصفر.



شکل ۱۲ جابجایی نوک تیر معیوب کنترل شده تحت شرایط اولیه‌ی غیرصفر.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله، روشی مقاوم برای کنترل ارتعاشات عرضی تیر یک سرگیردار مدرج تابعی دارای ترک و تحت تأثیر بار حرارتی که مشخصه‌های جرمی و سفتی آن نامعین است، مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، از صفحات پیزوالکتریک به‌منظور اندازه‌گیری میزان ارتعاشات عرضی تیر و هم‌چنین اعمال نیروهای کنترلی بهره برده شد. همچنین با به‌کارگیری روش‌های ریلی-ریتز و تصویرسازی گالرکین معادله‌های دیفرانسیل زمانی تشریح‌کننده‌ی رفتار سیستم استخراج شد. سپس با بیان این معادلات به فرم فضای حالت، روش بازخورد خروجی مبتنی بر رؤیت‌گر حالت مقاوم برای کنترل این سیستم به‌کار گرفته شد. در این روش، با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های پارامتری به‌صورت نُرم محدود، از روش لیاپانوف بهره برده شد. شبیه‌سازی‌های انجام شده، کارایی بسیار خوب روش پیشنهادی را نشان داد، همچنین همان طور که در قسمت مقایسه توضیح داده شد، در برخی از مدها اثر وجود پیزوالکتریک بارز خواهد بود لذا توصیه می‌شود که در مدل‌سازی وجود قطعات پیزوالکتریک را لحاظ کرد.

۹- مراجع

[1] Afshari, M. and Inman, D. J., "Continuous crack modeling in piezoelectrically driven vibrations of an Ruler–Bernoulli beam", Journal of Vibration and Control, Vol. 19, No. 3, pp. 341-355, 2013.
[2] Heydari, M. and Ebrahimi, A., Behzad, M., "Forced vibration analysis of a Timoshenko cracked beam using a continuous model for the crack, Engineering Science and Technology", an International Journal, Vol. 17, No. 4, pp. 194-204, 2014.
[3] Damanpack, A. Bodaghi, M. Aghdam, M. and Shakeri, M., "Active control of geometrically non-linear transient response of sandwich beams with a flexible core using piezoelectric patches", Composite Structures, Vol. 100, pp. 517-531, 2013.
[4] Rechdaoui, M. S. and Azrar, L., "Active control of secondary resonances piezoelectric sandwich beams", Applied Mathematics and Computation, Vol. 216, No. 11, pp. 3283-3302, 2010.
[5] Kwak, M. K. and Yang, D.-H., "Active vibration control of a ring-stiffened cylindrical shell in contact with unbounded external fluid and subjected to harmonic disturbance by piezoelectric sensor and actuator", Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, No. 20, pp. 4775-4797, 2013.
[6] Neubauer, M. Han, X. and Schwarzendahl, S. M., "Enhanced switching law for synchronized switch damping on inductor with bimodal excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, No. 12, pp. 2707-2720, 2011.
[7] Fazelzadeh, S. A. and Hosseini, M., "Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials", Journal of Fluids and Structures, Vol. 23, No. 8, pp. 1251-1264, 2007.
[8] Aydin, K., "Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks", European Journal of Mechanics - A/Solids, Vol. 42, pp. 112-124, 2013.
[9] Tang, X. X. a. J., "Vibration control of nonlinear rotating beam using piezoelectric actuator and sliding mode approach", Journal of Vibration and Control, Vol. 14, 2008.
[10] Bruant, I. Proslier, L., "Improved active control of a functionally graded material beam with piezoelectric patches", Journal of Vibration and Control, pp. 1-22, 2013.
[11] Bodaghi, M. Damanpack, A. R. Aghdam, M. M. and Shakeri, M., "Non-linear active control of FG beams in thermal environments subjected to blast loads with integrated FGP sensor/actuator layers", Composite Structures, Vol. 94, No. 12, pp. 3612-3623, 2012.
[12] Oh, S.-Y. Librescu, L. Song, O., "Vibration and instability of functionally graded circular cylindrical spinning thin-walled beams", Journal of sound and vibration, Vol. 285, No. 4, pp. 1071-1091, 2005.
[13] Reddy, J. and Chin, C., "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", Journal of Thermal Stresses, Vol. 21, No. 6, pp. 593-626, 1998.
[14] Dimarogonas, A. D., "Vibration of cracked structures: a state of the art review", Engineering fracture mechanics, Vol. 55, No. 5, pp. 831-857, 1996.
[15] Afshari, M., "Vibration-and Impedance-based Structural Health Monitoring Applications and Thermal Effects", Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2012.
[16] Jalili, N., "Piezoelectric-based vibration control: from macro to micro/nano scale systems": Springer Science & Business Media, 2009.
[17] Farhadi, S. Hosseini-Hashemi, S., "Flutter stabilization of cantilevered plates using a bonded patch", Acta mechanica, Vol. 219, No. 3-4, pp. 241-254, 2011.
[18] Khargonekar, P. P. Petersen, I. R. and Kemin, Z., "Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H infinity control theory", Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol. 35, No. 3, pp. 356-361, 1990.
[19] Huang, Y. and Li, X. F., "A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section", Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, No. 11, pp. 2291-2303, 2010.
[20] Li, L. Song, G. and Ou, J., "Adaptive fuzzy sliding mode based active vibration control of a smart beam with mass uncertainty", Structural Control and Health Monitoring, Vol. 18, No. 1, pp. 40-52, 2011.