



نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری کامپوزیت

http://jstc.iust.ac.ir



کنترل زمان گسسته و مقاوم ارتعاشات عرضی تیر مدرج تابعی دارای سطح مقطع متغیر

بهرروز رحمانی^{۱*}، محمدرضا نغمه‌سنگ^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

* b_rahmani@yu.ac.ir، ۷۵۹۱۸-۷۴۹۳۴ صندوق پستی

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۱/۲۶

پذیرش: ۹۴/۳/۳

کلیدواژه‌ها

کنترل ارتعاشات عرضی

تیر یک سرگردار مدرج تابعی با سطح

مقطع متغیر

تجزیه متعامد بهینه

کنترل دیجیتال مقاوم

چکیده

در این مقاله، کنترل مقاوم ارتعاشات عرضی تیر یک سرگردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای سطح مقطع متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. برای رسیدن به این هدف، از صفحات پیزوالکتریک به منظور اندازه‌گیری میزان ارتعاشات عرضی تیر و همچنین اعمال نیروهای کنترلی بهره برده شده است. در این راستا، با به کار بردن روش تجزیه‌ی متعامد مناسب، حداقل مدهای بهینه‌ی ارتعاشی سیستم برگزیده و سپس از روش تصویرسازی گالرکین برای استخراج حداقل معادله‌های دیفرانسیل معمولی زمانی تشریح‌کننده‌ی رفتار دقیق آن استفاده شده است. از آنجا که در پیاده‌سازی واقعی یا شبیه‌سازی عددی، تنها در بازه‌های زمانی مشخصی ورودی کنترلی ولتاژ محرک پیزوالکتریک را می‌توان تغییر داد، و همچنین کنترل‌کننده سیستم تحت کنترل را تنها در زمان‌های نمونه‌برداری می‌بیند، بنابراین سیستم حلقه‌بسته را می‌توان معادل با یک سیستم زمان گسسته دانست. برای حل مشکلات ناشی از تناوب‌های نمونه‌برداری و همچنین عدم قطعیت‌های مربوط به مدل‌سازی، روش بازخورد خروجی مبتنی بر رؤیت‌گر حالت گسسته‌ی مقاوم برای کنترل این سیستم پیشنهاد می‌شود. به این منظور، طراحی بهره‌های کنترل‌کننده و رؤیت‌گر حالت به کمک قضیه‌ی مستقیم لیاپانوف که منجر به حل مجموعه‌ای از نامعادلات ماتریسی خطی می‌شود، انجام می‌شود. در پایان با انجام چند شبیه‌سازی، کارایی روش پیشنهادی نشان داده شده است.

Robust vibration control of a functionally graded beam with a variable cross section

Behroz Rahmani*, Mohamad Reza Naghmehsanj

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
*P.O.B. 75918-74934, Yasouj, Iran, b_rahmani@yu.ac.ir

Keywords

Vibration control
Functionally graded clamped beam
Proper orthogonal decomposition
Optimal digital control

Abstract

In this paper, robust vibration control of a thin functionally graded beam with a variable cross-section has been investigated. For this purpose, piezoelectric patches are used as sensors to measure the displacement of the beam and as actuators to apply control forces. In this way, firstly, Euler-Bernoulli theory is used to derive the governing dynamical partial differential equation, through the Hamilton's principle. Approximate solution of these equations is achieved using finite difference method, and the proper orthogonal decomposition is then used to obtain vibration mode shapes. After that, time-dependent ordinary differential equations are attained using Galerkin projection scheme and then represented in the state-space form. Since the data measurement is done in sampling intervals, the system is considered as sampled-data. In this way, direct digital control design methodology is used. For this purpose, based on its zero-order hold equivalent model, a robust discrete-time, observer-based, output feedback controller is designed. In this regard, controller and observer gains are designed by a Lyapunov-based method. This procedure is done by solving a set of linear matrix inequalities. Simulation studies show the effectiveness of the proposed method.

۱- مقدمه

عمرانی و پالایشگاهی مورد توجه بسیار قرار گرفته‌اند. اما به کارگیری آن‌ها به ارتعاشات زیاد مجموعه‌ی مکانیکی در برابر اغتشاشات خارجی منجر می‌شود که با توجه به میرایی کم آن‌ها، تا مدت‌ها ادامه پیدا کرده و بنابراین منجر به

در دهه‌ی اخیر، توجه زیادی به سازه‌های انعطاف‌پذیر شده است و به دلیل وزن کم، انعطاف‌پذیری زیاد و سادگی طراحی، در صنایع صنعتی، دریایی،

Please cite this article using:

Rahmani, B. and Naghmehsanj, M. R., "Robust vibration control of a functionally graded beam with a variable cross section", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 2, pp. 17-30, 2015.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

ارتعاش و همچنین کمانش دینامیکی یک ورق مدرج تابعی که تحت اثر بار حرارتی قرار دارد، بهره برد؛ ولی در این پژوهش روشی برای طراحی بهره‌ی کنترلی پایدار ساز ارائه نشد [۱۲]. برنت و همکارش به مطالعه‌ی چگونگی جایابی محل عملگرها و سنسورها روی یک تیر مدرج تابعی و همچنین کنترل ارتعاشات آن با استفاده از تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه‌ی دوم پرداختند [۱۳]. رحمانی و غلامی به بررسی ارتعاش و همچنین کنترل یک تیر مدرج تابعی معیوب پرداختند [۱۴]. با توجه به مطالعات انجام شده توسط نویسندگان این مقاله، مسئله‌ی کنترل مقاوم ارتعاشات یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر بررسی نشده است. همچنین در پژوهش‌های پیشین فرض شده است که مشخصه‌های جرمی و الاستیک ماده‌ی مدرج به کار رفته کاملاً مشخص است؛ در حالی که این تحقق این فرض در واقعیت امکان‌پذیر نیست. بر این اساس، در این مقاله روشی برای کنترل مقاوم ارتعاشات تیر با سطح مقطع متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با مشخصه‌های مکانیکی غیرقطعی پیشنهاد شده است. در این روش، ابتدا مدل بهینه و کاهش مرتبه یافته‌ای از سیستم پارامتر پیوسته استخراج می‌گردد. برای رسیدن به این هدف، ابتدا معادلات حاکمه سیستم تحت شرایط اولیه و بارگذاری خارجی داده شده با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده و از این پاسخ در قالب راه‌کار تجزیه‌ی متعامد مناسب^۱ که به اختصار پی-آ-دی نامیده می‌شود، برای به دست آوردن مدهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی بهره برده می‌شود. سپس با کمک شیوه‌ی تصویرسازی گالرکین معادلات دیفرانسیل زمانی سیستم رتبه کاسته به دست آمده و به صورت فضای حالت بیان می‌شود. همچنین با تخمین عدم قطعیت‌های پارامتری مدل‌سازی به صورت نرم محدود، کنترل‌کننده‌ی بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر حالت مقاوم، با به کارگیری قضیه‌ی لیاپانوف طراحی می‌شود. شبیه‌سازی عددی انجام شده کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

روش پیشنهادی، شماری نوآوری نسبت به پژوهش‌های همانند دارد: الف) با توجه به عدم قطعیت‌های ممکن در مدل‌سازی الکتریکی و مکانیکی تیر مدرج تابعی موردنظر، یک روش کنترل مقاوم پیشنهاد می‌شود که توانایی از بین بردن ارتعاش آن را تا حد زیادی دارد؛ ب) در حالی که در روش‌های دیگر مانند روش‌های ریتز یا گالرکین نیاز به حدس توابع پایه‌ای است که شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی نیرویی را ارضا کند، در روش پی-آ-دی نه تنها نیاز به هیچ گونه حدس اولیه‌ای نیست، بلکه تنها با داشتن میزان ارتعاشات چند نقطه از تیر، شناسایی مدها به راحتی امکان‌پذیر است؛ پ) از آنجا که مدها یا توابع پایه‌ی به دست آمده از روش پی-آ-دی بیشترین انرژی موجود در داده‌های پاسخ را در بر دارد، پس نماینده‌ی مناسب برای زیرفضای مدل کاهش مرتبه یافته‌ی بهینه خواهد بود و رفتار سیستم با بهترین دقت توسط این مدل تقریب زده می‌شود؛ ت) روش ارائه شده قابلیت پیاده‌سازی روی هر سیستم ارتعاشی با پارامترهای نامعین را دارد.

در ادامه، نخست به بیان مدل ریاضی سیستم مورد بحث پرداخته و سپس روش حل معادله مشتقی جزئی به دست آمده بیان می‌شود. در بخش ۵ روش کنترل مقاوم پیشنهادی تشریح شده و در بخش ۶ با انجام شبیه‌سازی کارایی آن در مقابل عدم قطعیت‌های مدل‌سازی نشان داده می‌شود.

۱-۱- نمادهای به کار رفته

در ادامه‌ی این نوشتار، نماد $(p \geq 0)$ $p > 0$ نشان‌دهنده‌ی (نیمه) مثبت معین و متقارن بودن ماتریس p است و برای ماتریس p ، p^T بیان‌گر

افزایش نویز، همچنین تنش‌های دینامیکی سیستم و در نتیجه آسیب‌دیدگی مکانیکی سیستم می‌شود.

بر این اساس و برای کم کردن اثرات منفی ارتعاشات، بررسی این پدیده و روش‌های مختلف کنترل فعال آن مورد توجه پژوهش‌گران بسیاری قرار گرفته است. در این راستا، وانگ به بررسی ارتعاش آزاد تیر کامپوزیتی با سطح مقطع غیرمتقارن پرداخته است [۱]. آیدوگدو و همکاران ارتعاش آزاد تیر نازک با مقطع متغیر را بررسی کرده است و روشی تحلیلی برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی و شکل مدهای آن در چند نوع شرایط مرزی به دست آورده است [۲]. کاپوریا و همکارش با استفاده از مدل اجزاء محدود، معادلات فضای حالت بیانگر دینامیک یک تیر کامپوزیتی را به دست آورده و سپس کنترل‌کننده‌ی بهینه‌ای برای آن طراحی نمودند [۳]. شین و همکاران روش بازخورد سرعت فیلتر شده را برای کنترل ارتعاش تیر دو سرگیردار پیشنهاد نمودند [۴]. آنها همچنین در پژوهش دیگری به بررسی چگونگی پایدارسازی این سیستم مرتعش با استفاده از بازخورد شتاب پرداختند [۵]. ماریناکی و همکاران از استفاده از تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه دو را پیشنهاد نمودند. آن‌ها بهره‌های این کنترل‌کننده‌ی بازخوردی را به کمک روش بهینه‌سازی PSO طراحی نمودند [۶].

از طرف دیگر در دهه‌های اخیر، برای برطرف نمودن معایبی که در فلزها، مواد مرکب لایه‌ای و سرامیک‌ها در شرایط کاری مختلف وجود دارد، امکان طراحی و ساخت مواد مدرج تابعی^۱ بررسی شده است. این ترکیب‌ها، اساساً ناهمگن بوده و از دو یا چند ماده‌ی مختلف ساخته شده و به دلیل تغییر تدریجی در نسبت حجمی مواد سازنده از یک سطح به سطح دیگر، خصوصیات مؤثر آنها نیز از یک سطح به سطح دیگر به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند. بنابراین، سبب کاهش معایبی می‌شود که در مرز لایه‌های مواد مرکب لایه‌ای وجود دارند. به عبارت دیگر، این تغییر تدریجی و پیوسته در ترکیب مواد، منجر به بهبود کیفیت چسبندگی بین دو ماده، بهبود پیوستگی مکانیکی، کاهش ناهماهنگی در خواص ترمودینامیکی و همچنین کاهش تنش بین لایه‌ای می‌شود. پس، مشکلاتی نظیر لایه لایه شدن، ترک و جدا شدن لایه‌ها که در مواد مرکب لایه‌ای وجود دارد، در مواد مدرج تابعی حذف شده است [۷].

بر این اساس، شمار زیادی پژوهش در زمینه‌ی بررسی ارتعاشات تیرها، پرها و ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی انجام شده است. هین و همکارش از تبدیل موجک برای بررسی ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر بهره بردند و در شرایط مرزی مختلف به حل مسئله پرداختند [۸]. هوانگ و همکارش روشی نو برای بررسی ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر ارائه نمودند. آنها با تبدیل مسئله‌ی مقدار ویژه به انتگرال فردهم و بسط شکل مدها به صورت سری، به یک سری معادله‌ی جبری دست یافتند و با حل آنها فرکانس‌های طبیعی سیستم را محاسبه کردند [۹]. هوانگ و همکاران روشی برای بررسی ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی تیموشنکو با سطح مقطع متغیر ارائه نمودند [۱۰].

ولی با بررسی ادبیات موجود می‌توان متوجه شد که در زمینه‌ی کنترل فعال ارتعاشات اجسام ساخته شده از مواد مدرج تابعی پژوهش‌های زیادی صورت نگرفته است. در این راستا، کارگرنوین و همکاران کنترل ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی و همچنین اثر افزایش بهره‌ی کنترلی بر فرکانس طبیعی را بررسی نمودند [۱۱]. شرعیات از بازخورد سرعت برای کنترل

2. Proper Orthogonal Decomposition

1. Functionally Graded Material: FGM

$$E(x, k) = (E_c - E_m)g(x) + E_m \quad (1)$$

$$\rho(x, k) = (\rho_c - \rho_m)g(x) + \rho_m \quad (2)$$

که در رابطه‌های بالا $g(x) = (x/L)^{kk}$ کسر حجم^۱ فلز به کار رفته و kk نمای کسر حجم^۲ است. این تابع چگونگی تغییر خصوصیات مواد را در طول تیر نشان می‌دهد.

۳- مدل‌سازی ریاضی

همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، خصوصیت‌های مکانیکی و هندسی تیر در راستای طولی و عرضی تغییر می‌کند؛ به همین دلیل انرژی‌های پتانسیل کرنشی و جنبشی نسبت به یک تیر یکنواخت متفاوت خواهد بود. لازم به ذکر است که در اینجا از اثر میرایی‌های ساختاری و لزج صرف نظر شده است. همچنین ولتاژ ورودی $V'_a(x, t)$ اعمال شده به محرک پیزوالکتریک، به عنوان تنها عامل مؤثر خارجی تولیدکننده کار در نظر گرفته می‌شود. در ادامه، با در نظر گرفتن فرضیات تیر اولر-برنولی و به دست آوردن انرژی‌های پتانسیل مکانیکی و الکتریکی، جنبشی مکانیکی و کار مجازی مکانیکی و الکتریکی، از اصل همیلتون، یعنی معادله‌ی (۳)، برای استخراج معادلات ارتعاش عرضی تیر استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L' + \delta W^{ext}) dt = 0 \quad (3)$$

در این رابطه $L', U, T, L' = T - U$ و δW^{ext} به ترتیب معرف لاگرانژین، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار مجازی عوامل خارجی ناپایستار است. با توجه به ناهمگن بودن ساختار سیستم موردنظر، طول تیر را می‌توان به سه بخش تقسیم نمود: الف) بازه‌های $[0, l_1]$ و $[l_4, L]$ ؛ ب) بازه‌ی $[l_1, l_2]$ که محرک پیزوالکتریک در آن قرار دارد؛ پ) بازه‌ی $[l_3, l_4]$ که حساسه‌ی پیزوالکتریک در آن قرار دارد. می‌توان نشان داد که واریاسیون انرژی جنبشی این سیستم با صرف نظر از انرژی جنبشی الکتریکی از رابطه (۴) به دست می‌آید [۱۵].

$$\delta T = \int_0^L \rho(x) \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx \quad (4)$$

که در اینجا $w(x, t)$ و $\dot{w}(x, t)$ به ترتیب معرف جابجایی و سرعت عرضی تیر است (روابط ۵ تا ۷).

$$\rho(x) = b(x) [\rho_b(x)t_b + G_1(x)\rho_p^a t_a + G_2(x)\rho_p^s t_s] \quad (5)$$

$$G_1(x) = H(x - l_1) - H(x - l_2) \quad (6)$$

$$G_2(x) = H(x - l_3) - H(x - l_4). \quad (7)$$

درحالی‌که $H(x)$ ، ρ_b ، ρ_p^a و ρ_p^s به ترتیب بیان‌گر تابع هوی ساید^۳، چگالی طولی تیر، محرک پیزوالکتریک و حساسه پیزوالکتریک است. از آنجا که حرکت یک‌بعدی در راستای محور Z در نظر گرفته شده است، تغییرات انرژی پتانسیل تیر و قطعه‌ی پیزوالکتریک را می‌توان به ترتیب به صورت روابط (۸) و (۹) نوشت.

$$\delta U_b = \int_V (\sigma_{1b} \delta S_{1b}) dV \quad (8)$$

$$\delta U_p = \int_V (\sigma_{1p} \delta S_{1p} + \epsilon_3 \delta D_3) dV \quad (9)$$

همچنین معادلات ساختاری برای قطعه‌های محرک و حساسه پیزوالکتریک یک‌بعدی را می‌توان به صورت (۱۰) و (۱۱) نوشت.

$$\sigma_{1p} = E_{11}^p S_{1p} - h_{31} D_3 \quad (10)$$

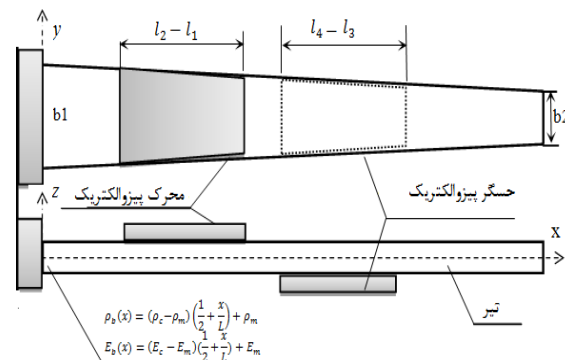
$$\epsilon_3 = -h_{31} S_{1p} + \beta_{33}^s D_3 \quad (11)$$

ترانهاده‌ی آن است. $0_{N_1 \times N_2}$ و $1_{N_1 \times N_2}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی ماتریس‌های همانی و صفر با اندازه‌ی $N_1 \times N_2$ است. در نهایت، دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری T_s را می‌توان از هر متغیر زمانی t فاکتور گرفت و آن را به صورت $t = kT_s \equiv k$ نمایش داد. همچنین علامت * در یک ماتریس نشان‌دهنده‌ی ترانهاده‌ی یک درایه است.

۲- تیر مقطع متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی طولی و دارای عملگر و حسگر پیزوالکتریک

در این پژوهش، کنترل ارتعاشات تیر یک سرگردار مدرج تابعی دارای سطح مقطع متغیر بررسی می‌شود. مشابه با هر سیستم کنترلی دیگر، برای پیاده‌سازی واقعی آن نیاز به حساسه برای اندازه‌گیری خروجی و محرک برای اعمال نیروی کنترلی است. با توجه به مشخصه‌هایی که مواد پیزوالکتریک دارد، برای انجام این دو وظیفه، قطعاتی از این جنس در بالا و پایین تیر نصب می‌شود. مدل تیر مورد نظر این پژوهش در شکل ۱ نشان داده شده است. این تیر منقطع، از مواد مدرج تابعی طولی ساخته شده و دارای مقطع متغیر می‌باشد. در اینجا، طول و ضخامت تیر، به ترتیب، به عنوان محورهای x و z در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، $z = 0$ صفحه میانی تیر می‌باشد. این تیر دارای ضخامت t_b و طول L است. همچنین دو قطعه‌ی به هم چسبیده‌ی محرک پیزوالکتریک بر روی سطح بالایی و دو قطعه‌ی به هم چسبیده‌ی حسگر پیزوالکتریک بر روی سطح زیرین آن قرار گرفته است.

در این شکل، لایه‌ی محرک پیزوالکتریک در فاصله‌ی l_1 از پایه‌ی تیر با ضخامت t_p و طول $l_2 - l_1$ و لایه‌های سنسور پیزوالکتریک در فاصله‌ی l_3 با ضخامت t_p و طول $l_4 - l_3$ قرار داده شده است. اگر b_1 پهنا‌ی تیر در سمت چپ باشد، در اینجا فرض می‌شود که عرض تیر و قطعات پیزوالکتریک، به صورت تابع خطی $b(x) = b_1(1 - \frac{x}{2L})$ در طول تیر تغییر کند و نسبت طول تیر به ضخامت آن نسبتاً بزرگ باشد (بزرگ‌تر از ۱۰ برابر)؛ بنابراین در استخراج روابط می‌توان از فرض تیر اولر-برنولی استفاده کرد.



شکل ۱ نمایش مدل هندسی در نظر گرفته شده

در یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی طولی، سطح سمت چپ یک لایه‌ی فلزی و سطح سمت راست لایه‌ی سرامیکی است. فرض کنید که E_c ، E_m ، ρ_c و ρ_m به ترتیب مقادیر مدول الاستیک و چگالی جرم طولی (جرم بر واحد طول) را در لایه‌های سرامیکی سمت راست و فلزی سمت چپ تیر نشان دهد. این دو مشخصه به طور پیوسته در جهت طول طبق رابطه‌های (۱) و (۲) تغییر می‌کند.

1. Volume Fraction
2. Volume Fraction Index
3. Heaviside function

$$\begin{aligned}
 & -\rho(x) \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \rho(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \right\} dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_0^L b(x) V_a(t) G_1(x) \delta D_3(x, t) dx \right. \\
 & + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(c(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\
 & + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x) (G_1(x) h_{31}^a a_2(x) D_3 \\
 & + G_2(x) h_{31}^s a_4(x) D_3')) dx \Big\} \delta w \\
 & + \left[\int_0^L \left[b(x) G_1(x) \left(h_{31}^a a_2(x) \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + t_a \beta_{33}^a D_3 \right) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \int_0^L \left[b(x) G_2(x) \left(h_{31}^s a_4(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left. t_s \beta_{33}^s D_3' \right] dx \right] \delta D_3' + \left(c(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L \right. \\
 & - \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L \right. \\
 & + b(x) (G_1(x) h_{31}^a a_2(x) D_3 \\
 & + G_2(x) h_{31}^s a_4(x) D_3') \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L \\
 & - \left. \frac{\partial}{\partial x} (b(x) (G_1(x) h_{31}^a a_2(x) D_3 \right. \right. \\
 & \left. \left. + G_2(x) h_{31}^s a_4(x) D_3')) \delta w \Big|_0^L \right\} dt = 0 \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\delta D_3: -V_a(t) + h_{31}^a a_2(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + t_a \beta_{33}^a D_3 = 0 \tag{20}$$

$$\delta D_3': h_{31}^s a_4(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + t_s \beta_{33}^s D_3' = 0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w: & \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(c(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \\
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x) (G_1(x) h_{31}^a a_2(x) D_3 \\
 & + G_2(x) h_{31}^s a_4(x) D_3')) = 0 \tag{22}
 \end{aligned}$$

در رابطه (۲۲) که D_3 جابجایی الکتریکی محرک و D_3' جابجایی الکتریکی سنسور می‌باشد. با ساده‌سازی روابط، معادلات (۲۰) تا (۲۲) به صورت معادله (۲۳) در می‌آید. معادلات (۲۴) و (۲۵) نیز شرایط مرزی معادله (۲۲) را بیان می‌کند.

$$\begin{aligned}
 \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(c(x) - \frac{b(x) h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] \\
 = - \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(\frac{b(x) h_2}{\beta_2} \right) V_a(t) \right] \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(c(x) - \frac{h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{b(x) h_2}{\beta_2} V_a(t) \right) \\
 \times \delta w(x, t) \Big|_0^L = 0 \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\left(c(x) - \frac{h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{b(x) h_2}{\beta_2} V_a(t) \right) \\
 \times \delta \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \tag{25}
 \end{aligned}$$

درحالی‌که پارامترهای معادله‌ی فوق به‌صورت (۲۶)–(۲۴) تعریف شده است.

$$c(x) = b(x) (E_b(x) \frac{t_b^3}{12} + G_1(x) E_p^a a_1(x)) \tag{26}$$

در اینجا σ_{1p} و σ_{1b} به‌ترتیب تنش در راستای محور x تیر و پیژوالکتریک، E_{11}^p مدول الاستیک پیژوالکتریک تحت شرایط جابجایی دی الکتریک ثابت، S_{1p} و S_{1b} کرنش‌های تیر و قطعه‌ی پیژو، h_{31} ثابت پیژوالکتریک برحسب V/m ، D_3 جابجایی الکتریکی در راستای محور z بر حسب C/m^2 ، β_{33}^s و β_{33}^a ضریب گذرناپذیری تحت شرایط تنش ثابت می‌باشد.

در ادامه، بالانویس a و s در یک پارامتر، به‌ترتیب بیانگر مقدار آن در عملگر و سنسور پیژوالکتریک است.

آشکار است جایی که قطعه‌ی پیژوالکتریک وجود ندارد، صفحه‌ی خنثی همان صفحه‌ی مرکزی هندسی تیر می‌باشد ($z = 0$) و رابطه‌ی جابه‌جایی کرنش به صورت رابطه (۱۲) است.

$$S_{1b} = S_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \tag{12}$$

در رابطه (۱۲) $w(x, t)$ جابجایی محور خنثی می‌باشد. بر اساس روندی که در [۱۵] ارائه شده است، برای بخشی که قطعه‌ی پیژوالکتریک به تیر اتصال دارد، با صفر قرار دادن مجموع نیروها در جهت x برای یک سطح مقطع عرضی، صفحه‌ی خنثی و در نتیجه کرنش برای محرک از رابطه‌های (۱۳) و (۱۵) و همچنین برای حساسه از رابطه‌های (۱۴) و (۱۶) محاسبه می‌شود.

$$z_{n1} = \frac{E_p^a t_a (t_a + t_b)}{2[E_b(x) t_b + E_p^a t_a]} \tag{13}$$

$$z_{n2} = \frac{-E_p^s t_s (t_s + t_b)}{2[E_b(x) t_b + E_p^s t_s]} \tag{14}$$

$$S_{1p}^a = -(z - z_{n1}) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \tag{15}$$

$$S_{1p}^s = -(z - z_{n2}) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \tag{16}$$

در این روابط، E_p^a ، z_{n1} ، t_a ، E_p^s ، z_{n2} ، t_s به‌ترتیب معرف مادول الاستیک، موقعیت تار خنثی و ضخامت عملگر و حساسه پیژوالکتریک است. کار مجازی الکتریکی ایجاد شده در اثر ولتاژ وارد شده به محرک پیژوالکتریک را می‌توان به‌صورت (۱۷) در نظر گرفت.

$$\delta W_e^{ext} = \int_0^L b(x) V_a(x, t) \delta D_3(x, t) dx \tag{17}$$

در محرک‌های پیژوالکتریک عرضی فرض می‌شود که در طول اتصال آن با تیر، ولتاژ ورودی یکنواخت است و جاهای دیگر ولتاژ صفر است. بر این اساس ولتاژ محرک را می‌توان با استفاده از تابع هوی ساید (رابطه (۱۸)) بیان نمود.

$$V_a(x, t) = V_a(t) G_1(x) \tag{18}$$

اکنون با جاگذاری معادلات (۴)، (۸)، (۹) و (۱۷) در (۳) و انتگرال‌گیری جزء به جزء رابطه (۱۹) حاصل می‌شود.

برقراری رابطه (۱۹) با فرض صفر بودن تغییرات متغیرها در زمان‌های t_1 و t_2 ، به معادله‌های حاکم بر ارتعاش عرضی تیر مورد نظر شکل ۱ به‌صورت روابط (۲۰) تا (۲۲) منجر می‌شود.

$$\rho(x) \left[\frac{w(i, j+1) - 2w(i, j) + w(i, j-1)}{(\Delta t)^2} \right] + \left(C(x) - \frac{h_1^2}{\beta_1} \right) \times \frac{\Psi_1}{(\Delta x)^4} + \frac{bh_1}{\beta_1} \Psi_2 = 0 \quad (39)$$

در حالی که Ψ_1 و Ψ_2 به صورت رابطه (۴۰) و (۴۱) تعریف می‌شود.

$$\Psi_1 = w(i+2, j+1) - 4w(i+1, j+1) + 6w(i, j+1) - 4w(i-1, j+1) + w(i-2, j+1) \quad (40)$$

$$\Psi_2 = \frac{V'_a(i+1, j+1) - 2V'_a(i, j+1)}{(\Delta x)^2} + \frac{V'_a(i-1, j+1)}{(\Delta x)^2} \quad (41)$$

بنابراین جابجایی هر گره i در زمان $t + \Delta t$ یعنی $w(i, j+1)$ به صورت رابطه (۴۲) محاسبه می‌شود.

$$w(i, j+1) = \frac{-\Psi}{\left(\frac{\rho(x)}{(\Delta t)^2} + \frac{B}{2\Delta t} + \alpha \right)} \quad (42)$$

در حالی که Ψ ، Ψ_3 و α از روابط (۴۳) تا (۴۵) به دست می‌آید.

$$\Psi = \rho(x) \left[\frac{-2w(i, j) + w(i, j-1)}{(\Delta t)^2} \right] + \left(C(x) - \frac{h_1^2}{\beta_1} \right) \Psi_3 + \frac{bh_1}{\beta_1} \Psi_2 \quad (43)$$

$$\Psi_3 = \frac{w(i+2, j+1) - 4w(i+1, j+1) - 4w(i-1, j+1) + w(i-2, j+1)}{(\Delta x)^4} \quad (44)$$

$$\alpha = \left(C(x) - \frac{h_1^2}{\beta_1} \right) \frac{6w(i, j)}{(\Delta x)^4} \quad (45)$$

برای حل این معادلات شرایط مرزی باید مشخص باشد که بر اساس روابط (۳۷) و (۳۸) به صورت رابطه (۴۶) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} w(1, j) &= 0, \\ \frac{w(2, j) - w(1, j)}{2\Delta x} &= 0, \\ \frac{w(imax, j) - 2w(imax-1, j)}{(\Delta x)^2} &+ \frac{w(imax-2, j)}{(\Delta x)^2} = 0, \\ \frac{w(imax, j) - 2w(imax-1, j)}{2(\Delta x)^3} &+ \frac{2w(imax-3, j) - w(imax-4, j)}{2(\Delta x)^3} = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

در این رابطه شماره گره مربوط به انتهای آزاد تیر است.

۵- روش کنترلی پیشنهادی

در روش پیشنهادی، از راه کار تجزیه‌ی متعامد مناسب یا پی-آ-دی برای به دست آوردن مدهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی بهره برده می‌شود. در حالی که در روش‌های دیگر مانند روش‌های ریتز یا گالرکین نیاز به حدس توابع پایه‌ای است که شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی نیرویی را ارضا کند، در روش پی-آ-دی نه تنها نیاز به هیچ گونه حدس اولیه‌ای نیست، بلکه تنها با داشتن میزان ارتعاشات چند نقطه از تیر، شناسایی مدها به راحتی امکان پذیر است. با افزایش تعداد این نقاط، هر چند که هزینه‌ی محاسبات بیشتر شده اما در مقابل دقت نتایج به دست آمده نیز بیشتر می‌شود. سپس با کمک شیوه‌ی تصویرسازی گالرکین معادلات دیفرانسیل زمانی سیستم رتبه کاسته به دست آمده و به صورت فضای حالت بیان می‌شود. همچنین از آنجا که در

$$+G_2(x)E_p^s a_3(x) \quad h_1 = t_s \beta_{33}^s G_1(x) [h_{31}^a a_2(x)]^2 + t_a \beta_{33}^a G_2(x) \times [h_{31}^s a_4(x)]^2 \quad (27)$$

$$\beta_1 = t_a \beta_{33}^a + t_s \beta_{33}^s \quad (28)$$

$$h_2 = G_1(x) h_{31}^a a_2(x) \quad (29)$$

$$\beta_2 = t_a \beta_{33}^a \quad (30)$$

$$a_1(x) = \int_{\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}+t_a} (z - z_{n1})^2 dz \quad (31)$$

$$a_2(x) = \int_{\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}+t_a} (z - z_{n1}) dz \quad (32)$$

$$a_3(x) = \int_{-\frac{t_b}{2}}^{-\frac{t_b}{2}-t_s} (z - z_{n2})^2 dz \quad (33)$$

$$a_4(x) = \int_{-\frac{t_b}{2}}^{-\frac{t_b}{2}-t_s} (z - z_{n2}) dz \quad (34)$$

همچنین ولتاژهای خروجی دو حسگر را می‌توان مطابق (۳۵) و (۳۶) نوشت [۱۵].

$$V_{s1}(t) = \lambda_s \int_{l_3}^{l_{31}} b(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (35)$$

$$V_{s2}(t) = \lambda_s \int_{l_{31}}^{l_4} b(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (36)$$

در حالی که $t_{eq}^s = (t_p^s + t_b - 2z_{n1})$ ، $\lambda_s = E_p^s h_{31}^s t_{eq}^s / 2\beta_{33}^s C_p^l$ ظرفیت معادل پیزوالکتریک لایه‌ای است. همچنین با توجه به این نکته که در ابتدا و انتهای تیر توابع $G_1(x)$ و $G_2(x)$ برابر صفر هست، شرایط مرزی (۲۴) و (۲۵) را می‌توان به صورت رابطه‌های (۳۷) تا (۳۸) ساده نمود.

$$w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w(L, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (38)$$

۴- استفاده از روش تفاضل محدود برای حل معادله‌ی حاکم

اکنون از روش تفاضل محدود برای محاسبه‌ی پاسخ تیر تعریف شده در بخش ۲ استفاده می‌شود [۱۶]. ذکر این نکته لازم است که حل تحلیلی معادله‌ی (۲۳) تا (۲۴) حاکم بر این سیستم مرتعش پیچیده وجود ندارد. بر این اساس، برای حل این معادله از روش تفاضل محدود^۱، به دلیل سادگی نسبی و دقت مناسب استفاده می‌شود. در تفاضل محدود از بسط سری تیلور، برای تقریب مشتق‌های توابع پیوسته با عبارت‌های تفاضلی معادل آنها استفاده می‌شود. در اینجا، با توجه به مزایای روش ضمنی در پایداری و دقت نسبت به روش صریح از این روش استفاده شده است. برای اعمال روش ضمنی در محاسبه‌ی جابجایی هر گره در یک لحظه زمانی، از مقادیر جابجایی گره‌های مجاور در همان لحظه زمانی استفاده می‌شود. برای این کار، تیر به بخش‌های مساوی با طول Δx تقسیم و شماره‌ی این گره‌ها با i مشخص و سپس جابجایی هر گره طولی i ، در بازه‌های زمانی Δt ، که با گره‌هایی با شماره‌ی i نمایش داده شده، محاسبه می‌شود. پس $w_{i,j}$ و $w_{i+\lambda, j+\mu}$ به ترتیب بیان گر $w(x, t)$ و $w(x + \lambda \Delta x, t + \mu \Delta t)$ است، که λ و μ اعدادی مثبت و صحیح، $t = j \Delta t$ و $x = i \Delta x$ است. بر این اساس معادله‌ی مشتقی جزئی حاکم بر سیستم را می‌توان به صورت (۳۹) نوشت.

1. Finite Difference Method: FDM

ستون‌های ماتریس L ، یعنی φ_x^j ها، مدهای پی-آدی گسسته می‌باشد، که می‌توان بر اساس داده‌های آن و استفاده از روش‌های برآزش نمودار، تابع پیوسته‌ی $\varphi^j(x)$ را محاسبه نمود. ذکر این نکته ضروری است که مدهای مختلف در ماتریس L ، به ترتیب میزان انرژی آنها مرتب می‌شود.

۵-۲- استفاده از روش گالرکین برای به دست آوردن مدل کاهش مرتبه یافته‌ی سیستم

پس از آنکه با کمک روش پی-آدی مدهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی به دست آمد، از روش تصویرسازی گالرکین برای استخراج معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش مرتبه یافته بهره برده می‌شود. در این روش، معادله‌ی دیفرانسیل مشتقی جزئی حاکم روی مدهای ارتعاشی پی-آدی تصویر می‌شود. اگر روش پی-آدی باشد که $N_1 < N$ معرف تعداد مدهای در نظر گرفته شده در ساخت مدل کاهش مرتبه یافته است. برای گزینش N_1 ، از مقادیر تکین σ_i استفاده می‌شود؛ با توجه به اینکه در روش پی-آدی مدهای اول بیشترین انرژی را دارد، با در نظر گرفتن چند مد اول با بزرگ‌ترین مقادیر σ_i ، با تقریب خیلی خوبی می‌توان به مدلی بهینه دست یافت. با ضرب داخلی $\varphi^j(x)$ در معادله‌ی حاکم بر حرکت، یعنی (۲۳)، رابطه (۴۹) حاصل می‌شود.

$$\int_0^L \rho(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \varphi^j(x) dx + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(c(x) - \frac{b(x)h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] \times \varphi^j(x) dx = \int_0^L -\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{b(x)h_2}{\beta_2} \right] V_a(t) \varphi^j(x) dx \quad (49)$$

با به کارگیری تقریب گالرکین که به صورت (۵۰) است،

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{N_1} q_i(t) \varphi^i(x) \quad (50)$$

و جاگذاری آن در رابطه‌ی (۴۹)، می‌توان به مدل کاهش مرتبه یافته‌ی رابطه (۵۱) رسید.

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = FV_a(t) \quad (51)$$

که در آن M و K ماتریس‌های $N_1 \times N_1$ بوده و درایه‌های آن‌ها به صورت رابطه‌های (۵۲) و (۵۳) تعیین می‌شود.

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \varphi^i(x) \varphi^j(x) dx \quad (52)$$

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(c(x) - \frac{b(x)h_1}{\beta_1} \right) \frac{d^2 \varphi^i(x)}{dx^2} \right] \times \varphi^j(x) dx \quad (53)$$

همچنین $q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_{N_1}(t)]^T$ و F یک بردار $N_1 \times 1$ است که درایه‌های آن به صورت رابطه (۵۴) تعیین می‌شود.

$$F_j = \int_0^L -\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{b(x)h_2}{\beta_2} \right] \varphi^j(x) dx \quad (54)$$

برای محاسبه انتگرال مشتقات تابع هوی‌ساید از خصوصیت تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ که بر روی تابع $f(x)$ به صورت رابطه (۵۵) تعریف شده، استفاده می‌شود [۱۵].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x-x_0) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \quad (55)$$

شرایط اولیه‌ی این مدل نیز به صورت روابط (۵۶) و (۵۷) قابل تعیین است.

$$q_j(0) = \int_0^L w(x,0) \varphi^j(x) dx \quad (56)$$

عمل ساخت ماده‌ی مدرج تابعی با تغییرات پیوسته‌ی خواص مکانیکی از سرامیک به فلز بسیار سخت است، در ارائه‌ی روش کنترل پیشنهادی، فرض می‌شود که بین مشخصه‌های مکانیکی ماده‌ی ساخته شده و مطلوب تفاوت وجود داشته باشد. با در نظر گرفتن این تفاوت به صورت عدم قطعیت پارامتری، از روش مستقیم لیاپونوف برای طراحی کنترل‌کننده‌ی مقاوم بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر حالت بهره برده می‌شود.

۵-۱- محاسبه‌ی مدهای بهینه به روش پی-آدی

آشکار است که معادله حاکم بر سیستم موردنظر، یعنی معادله‌ی (۲۳)، بیان‌گر ارتعاشات بی‌نهایت ذره به هم پیوسته می‌باشد؛ بنابراین در برگزیده‌ی تعداد بی‌شمار مختصه‌ی تمیم یافته است. پس استفاده از چنین مختصه‌های بی‌شماری برای گسسته‌سازی این معادله‌ی مشتقی جزئی و در نتیجه به دست آوردن معادلات حالت، به یک مسئله با ابعاد بزرگ منجر می‌شود که زمان بر شدن و هزینه‌ی بالای محاسبات سیستم کنترلی موردنظر را به دنبال خواهد داشت. در اینجا، برای حل این مشکل و به دست آوردن مدهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی، از راه‌کار تجزیه‌ی متعامد مناسب یا پی-آدی استفاده می‌شود. آنالیز داده‌ها به روش پی-آدی به استخراج شکل مدها یا توابع پایه از داده‌های تجربی و یا شبیه‌سازی دقیق سیستم‌های با ابعاد بالا منجر می‌شود و معمولاً در پی آن از روش‌هایی مانند گالرکین برای رسیدن به مدل دینامیکی کم مرتبه استفاده می‌شود. بیان ریاضی بهینه بودن مدها به این صورت است که باید شکل مد φ نرمالی محاسبه شود که متوسط تصویر جابجایی w بر روی آن که به صورت رابطه‌ی (۴۷) تعریف می‌شود را بیشینه کند [۱۷].

$$\max \frac{\langle |w(x,t), \varphi(x)|^2 \rangle}{\|\varphi(x)\|^2} \quad (47)$$

که $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ، $\|\cdot\|$ ، $\|\varphi(x)\| = (\varphi(x), \varphi(x))^{\frac{1}{2}}$

قدرمطلق آن، ضرب داخلی توابع پیوسته‌ی $w(x,t)$ و $\varphi(x)$ و نرم $\varphi(x)$ است. بنابراین می‌توان گفت پیدا کردن این مدهای نرمال، در قالب مسئله‌ی حساب تغییرات محاسبه‌ی بیشینه‌ی تابع $\langle |w(x,t), \varphi(x)|^2 \rangle$ تحت اثر قید $\|\varphi(x)\|^2 = 1$ قابل بیان است. اکنون از روش تصاویر^۲ که توسط سیرویچ پیشنهاد شده است برای محاسبه‌ی این مدها استفاده می‌شود [۱۸].

برای تفسیر این روش، فرض می‌شود که یک شبیه‌سازی عددی بر روی تعداد زیادی از گره که با N نشان داده می‌شود، صورت پذیرفته است. همچنین، شمار نمونه‌هایی که برای تشریح این فرآیند مناسب است، M در نظر گرفته می‌شود، در حالی که $N \gg M$ است. در ادامه، برای نوشتار ساده‌تر، داده‌هایی از پاسخ سیستم که در لحظه‌ی t_k ثبت شده‌اند، با $w(x, t_k) = w^k(x) = w^k \in R^N$ نمایش داده می‌شود. با استفاده از روش تجزیه‌ی مقدار تکین، اگر $W \in R^{N \times M} = [w^1, w^2, \dots, w^M]$ می‌توان رابطه (۴۸) نوشت.

$$W = U \Sigma V^T \quad (48)$$

در رابطه (۴۸)، $U = [\varphi_1^1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^N]$ ماتریس متعامد $N \times N$ ($UU^T = I_{N \times N}$) و $V = [v^1, v^2, \dots, v^M]$ نیز یک ماتریس متعامد $M \times M$ ($VV^T = I_{M \times M}$) است. Σ یک ماتریس $N \times M$ با تمام درایه‌های صفر بجز در طول قطر اصلی آن است که درایه‌های قطری آن شامل مقادیر تکین ماتریس W ، یعنی σ_i ، است که از بزرگتر به کوچکتر مرتب شده‌اند.

1. Basis functions
2. Snapshots

که E_A, E_B, E_C و G ماتریس‌های ثابت و معلومی با ابعاد مناسب است و $F(t)$ یک ماتریس متغیر با زمان است که شرط $F(t)F^T(t) \leq I_{n \times n}$ را ارضا می‌کند. برای انتخاب ماتریس‌های عدم قطعیت $\Delta A, \Delta B$ و ΔC بیشینه‌ی اختلاف میان پارامترهای مکانیکی و همچنین الکتریکی مدل نامی و سیستم واقعی را فرض نموده و بر آن اساس به تخمین ماتریس‌های عدم قطعیت‌ها پرداخته می‌شود.

ملاحظه ۲. برای انتخاب ماتریس‌های عدم قطعیت $\Delta A, \Delta B$ و ΔC به دو روش زیر می‌توان عمل نمود:

(الف) بیشینه‌ی اختلاف میان پارامترهای مکانیکی و همچنین الکتریکی مدل نامی و سیستم واقعی را فرض نموده و بر آن اساس به تخمین ماتریس‌های عدم قطعیت‌ها پرداخته می‌شود. در صورتی که ماتریس‌های عدم قطعیت کوچک انتخاب شده باشد، پاسخ سیستم حلقه‌بسته‌ی پیاده‌سازی شده مناسب نخواهد بود. در این صورت، با در نظر گرفتن ماتریس‌های عدم قطعیت بزرگ‌تر، سعی در بیشتر کردن میرایی پاسخ سیستم مرتعش خواهد شد.

(ب) در صورت مشخص نبودن حداکثر میزان خطا، با انجام آزمایش بر روی مجموعه‌ی واقعی و تحریک عملگر پیزوالکتریک با یک ورودی مشخص تصادفی، خروجی سنسور پیزوالکتریک را ثبت نموده و برای این مجموعه‌ی ورودی و خروجی در یک بازه‌ی فرکانسی مشخص، اندازه‌ی پاسخ فرکانسی محاسبه می‌شود. سپس با کاستن اندازه‌ی پاسخ فرکانسی مدل نامی از آن، نمودار بود اندازه سیستم تفاضلی ترسیم، نقاطی در بالای آن مشخص و نموداری از آن نقاط عبور داده و مدل فضای حالت هم مرتبه با (۶۵) و (۶۶) برای آن شناسایی می‌شود. ماتریس‌های این مدل تفاضلی شناسایی شده در تشکیل ماتریس‌های عدم قطعیت به کار برده می‌شود.

۵-۳- طراحی کنترل کننده

همان‌گونه که در بخش ۴ مشاهده شد، در روش تفاضل محدود، تنها در گره‌های زمانی j که به اندازه‌ی گام زمانی Δt با هم فاصله دارد، ورودی ولتاژ محرک پیزوالکتریک را می‌توان تغییر داد و در بین دو بازه‌ی زمانی ورودی ثابت در نظر گرفته شده است. این مسئله در اعمال ورودی به سیستم‌های دارای حلقه‌های کنترلی زمان گسسته با نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی صفر که در دوره‌های تناوب نمونه‌برداری ورودی جدید اعمال می‌شود نیز قابل مشاهده است. در این سیستم‌ها، کنترل کننده‌ی دیجیتال رفتار دستگاه تحت کنترل را تنها در زمان‌های نمونه‌برداری می‌بیند و اطلاعی از آن در بین این زمان‌ها ندارد. این مسئله، چالش‌هایی را به همراه می‌آورد که در صورت در نظر نگرفتن آن‌ها در طراحی کنترل کننده، به کاهش کارایی و یا حتی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته منجر خواهد شد.

سه راه‌یافت اصلی برای طراحی یک سیستم کنترلی گسسته وجود دارد: (الف) طراحی مستقیم؛ (ب) بازطراحی گسسته‌ی کنترل کننده‌ی زمان پیوسته، که ابتدا کنترل کننده‌ی پیوسته‌ی مناسب طراحی شده و سپس به منظور دستیابی به کنترل کننده‌ی دیجیتال معادل گسسته می‌شود؛ (پ) طراحی نمونه‌برداری داده^۲، که در آن طراحی کنترل کننده‌ی گسسته در محیط پیوسته انجام می‌شود. در راه‌یافت نخست، که در این پژوهش از آن استفاده می‌شود، مدل زمان گسسته‌ی مناسبی از سیستم تحت کنترل برای طراحی مستقیم کنترل کننده‌ی گسسته به کار برده می‌شود. این مدل ناپیوسته از

$$\dot{q}_j(0) = \int_0^L \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} \varphi^j(x) dx \quad (57)$$

آشکار است که در این روابط $j = 1, 2, \dots, N_1$ است.

این مدل بهینه حداقل مرتبه را می‌توان با نمایش فضای حالت نیز مشخص نمود. این کار، با تعریف بردار حالت (۵۸) انجام می‌شود.

$$X = [q_1 q_2 \dots q_{N_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_{N_1}]^T \quad (58)$$

پس معادله‌ی فضای حالت سیستم را می‌توان به صورت (۵۹) نوشت.

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (59)$$

که در آن $A = \begin{bmatrix} 0_{N_1 \times N_1} & I_{N_1 \times N_1} \\ -M^{-1}K & 0_{N_1 \times N_1} \end{bmatrix}$ ماتریس سیستم، $B = \begin{bmatrix} 0_{N_1 \times 1} \\ M^{-1}F \end{bmatrix}$ ماتریس اثر ورودی و $u = V_a(t)$ همان ولتاژ ورودی محرک پیزوالکتریک است. چون تنها عامل مؤثر خارجی تولیدکننده‌ی کار محرک پیزوالکتریک در نظر گرفته شده است، تعداد ورودی‌ها برابر با شمار محرک‌های به کار رفته است؛ پس مدل در نظر گرفته شده در این پژوهش دارای دو ورودی است. البته ذکر این نکته ضروری است که گزینش شمار محرک‌ها و حسگرها، به ترتیب، بر اساس معیارهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم انجام می‌شود و در صورتی که سیستم رویت‌پذیر یا کنترل‌پذیر نباشد، باید شمار بیشتری محرک و حساسه پیزوالکتریک در نظر گرفت. همچنین با ترکیب روابط (۳۵)، (۳۶) و (۵۰) معادله‌ی خروجی این مدل را نیز می‌توان به صورت رابطه (۶۰) بیان نمود.

$$Y = CX \quad (60)$$

که در آن $Y = [y_1, y_2]^T$ خروجی‌های ولتاژ دو حساسه‌ی پیزوالکتریک و C به صورت روابط (۶۱) تا (۶۴) است.

$$C = \gamma_{ps} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_1^2 \dots & \theta_1^{N_1} \\ \theta_2^1 & \theta_2^2 \dots & \theta_2^{N_1} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\gamma_{ps} = \frac{E_p^s h_{31}^s t_{eq}^s}{2\beta_{33}^s C_p^s} \quad (62)$$

$$\theta_1^j = \int_{l_3}^{l_{31}} b(x) \frac{d^2 \varphi^j(x)}{dx^2} dx \quad (63)$$

$$\theta_2^j = \int_{l_{31}}^{l_4} b(x) \frac{d^2 \varphi^j(x)}{dx^2} dx \quad (64)$$

ملاحظه ۱. فرض کنید که مقدار دقیق پارامترهای مکانیکی و الکتریکی تیر مرتعش شکل ۱ نامعین است. در تئوری مربوط به مواد مدرج تابعی این فرض در نظر گرفته می‌شود که خواص مواد از سرامیک به فلز به صورت پیوسته تغییر کند؛ در حالی که در عمل ساخت چنین ماده‌ای با دقت بالا سخت و غیرممکن به نظر می‌رسد. در این پژوهش، فرض می‌شود که بین مشخصه‌های مکانیکی ماده‌ی ساخته شده و مطلوب مشخص شده در طراحی تفاوت وجود داشته باشد. این تفاوت در قالب عدم قطعیت مدلسازی در نظر گرفته شده است. از آنجا که این عدم قطعیت‌های پارامتری باعث تغییر در ماتریس‌های جرم، سختی و همچنین اثر عملگر پیزوالکتریک شده، مدل فضای حالت این سیستم نامعین به صورت رابطه‌های (۶۵) و (۶۶) اصلاح می‌شود.

$$\dot{X}(t) = (A + \Delta A)X(t) + (B + \Delta B)V_a(t) \quad (65)$$

$$Y(t) = (C + \Delta C)X(t) \quad (66)$$

در این رابطه، $\Delta A, \Delta B$ و ΔC بیانگر عدم قطعیت‌های پارامتری با نرم محدود بوده و به صورت رابطه (۶۷) تعریف می‌شود.

$$[\Delta A \ \Delta B \ \Delta C] = GF(t)[E_A \ E_B \ E_C], \quad (67)$$

1. Direct design
2. Digital redesign
3. Sampled-data design

با این نمودار، یک مدل فضای حالت هم مرتبه شناسایی شده و ماتریس‌های آن به‌عنوان ΔA_d , ΔB_d و ΔC_d در نظر گرفته می‌شود.

(ت) در صورتی که ماتریس‌های عدم قطعیت زمان پیوسته کوچک انتخاب شده باشد، پاسخ سیستم حلقه‌بسته‌ی پیاده‌سازی شده مناسب نخواهد بود. در این صورت، با در نظر گرفتن ماتریس‌های عدم قطعیت بزرگ‌تر، سعی در بیشتر کردن میرایی پاسخ سیستم مرتعش می‌شود.

اکنون با تعریف خطای تخمین حالت، به‌صورت $\bar{X}(k) = X(k) - \hat{X}(k)$ و استفاده از (۷۱)-(۷۴)، معادله‌ی سیستم حلقه‌بسته را می‌توان به‌صورت رابطه (۷۶) نوشت.

$$\begin{bmatrix} \bar{X}(k+1) \\ \hat{X}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d^{un} - B_d^{un} K_c & B_d^{un} K_c \\ \varphi_d & \psi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ \bar{X}(k) \end{bmatrix} \quad (76)$$

که $A_d^{un} = A_d + \Delta A_d$, $B_d^{un} = B_d + \Delta B_d$ و $\varphi_d = \Delta A_d - \Delta B_d K_c - L_c \Delta C_d$, $\psi_d = A_d + \Delta A_d K_c - L_c C_d$ در ادامه و در دو لم زیر، به بررسی طراحی بهره‌های کنترل‌کننده و رویتگر پایدار ساز برای این سیستم پرداخته خواهد شد.

لم ۱ [۲۰]. سیستم حلقه‌بسته‌ی (۷۶) با $\Delta B_d = 0$ ، پایدار مجانبی کلی است اگر ماتریس‌های متقارن $P_1, P_2 > 0$ ، ماتریس‌های Y_1, Y_2 با ابعاد مناسب و همچنین اسکالره‌ای حقیقی مثبت $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ و α و β وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که نامعادلات ماتریسی روابط (۷۷) تا (۷۹) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} P_1 & I \\ I & I(2\beta - \alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 + \varepsilon_2 E_d^A E_d^{A^T} & AP_1 + BY_1 & BY_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_1 & 0 & P_1 G^T & P_1 G^T & P_1 G^T \\ * & * & -\alpha I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} -P_2 & A_d^T P_2 + C_d^T Y_2^T & \beta I & 0 & 0 \\ * & -P_2 & 0 & P_2 E_d^A & Y_2 E_d^C \\ * & * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -(2 - \varepsilon_1) I & 0 \\ * & * & * & * & -(2 - \varepsilon_2) I \end{bmatrix} < 0 \quad (79)$$

در این صورت بهره‌های کنترل‌کننده و رویتگر به‌صورت روابط (۸۰) تا (۸۱) محاسبه خواهد شد.

$$K_c = -Y_1 P_1^{-1} \quad (80)$$

$$L_c = -P_2^{-1} Y_2 \quad (81)$$

لم ۲ [۲۰]. در صورتی که $\Delta B_d \neq 0$ باشد، با تعریف متغیر حالت افزوده‌ی $\xi = [X \quad u]^T$ و همچنین مدل فضای حالت افزوده به‌صورت روابط (۸۲) تا (۸۳)، می‌توان از لم ۱ استفاده نمود.

$$\xi(k+1) = (\Phi + \Delta\Phi)\xi(k+1) + \Psi u(k) \quad (82)$$

$$y(k) = (\Pi + \Delta\Pi)\xi(k) \quad (83)$$

که $\Pi_d = [C_d \quad 0]$, $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

و $\Delta\Phi = \begin{bmatrix} \Delta A_d & \Delta B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\Delta\Pi_d = [\Delta C_d \quad 0]$ است.

۶- شبیه‌سازی عددی

ابتدا به اعتبارسنجی روش پیشنهادی برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی پرداخته شده و سپس کارایی روش کنترل مقاوم پیشنهادی بررسی می‌شود.

سیستم تحت کنترل، در واقع همان مدل ناپیوسته موسوم به تبدیل حافظ پاسخ پله^۱ یا معادل نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی صفر^۲ است. برتری این روش در سادگی ریاضیات مورد بحث در آن است.

فرض کنید که معادلات حالت زمان پیوسته و کاهش مرتبه‌ی یافته‌ی سیستم ارتعاشی (یا همان معادلات مختصه‌های تعمیم یافته) به‌صورت (۵۹) تشکیل شود. مدل زمان گسسته‌ی معادل نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی صفر این سیستم به‌صورت روابط (۶۸) و (۶۹) است.

$$X(k+1) = A_d X(k) + B_d u(k) \quad (68)$$

$$Y(k) = C_d X(k) \quad (69)$$

که در آن $A_d = e^{AT_s}$, $B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau B$, $C_d = C$ و $T_s = \Delta t$ دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری است [۱۹]. اکنون، با فرض اینکه سیستم بالا کنترل پذیر است، کنترل‌کننده‌ی بازخورد حالت رابطه (۷۰) برای پایدارسازی سیستم طراحی می‌شود.

$$u(k) = -K_c X(k) \quad (70)$$

در این رابطه K_c بهره‌ی کنترل‌کننده است. اما آشکار است که متغیرهای حالت \hat{q}_j و \hat{q}_j سیستم قابل اندازه‌گیری نبوده و تنها ولتاژهایی که توسط حساسه‌های پیزوالکتریک اندازه‌گیری می‌شود، به‌عنوان خروجی سیستم در دسترس است. برای تخمین بردار حالت $X(k)$ یک رویتگر حالت با دینامیک رابطه (۷۱) در کنترل‌کننده جاده‌ی شده است.

$$\hat{X}(k+1) = A_d \hat{X}(k) + B_d u(k) + L_c [Y(k) - C_d \hat{X}(k)] \quad (71)$$

در (۷۱)، L_c بهره‌ی رویتگر است که با فرض رویت‌پذیری جفت‌های A_d و C_d مطابق لم ۲ طراحی می‌شود. بنابراین ورودی کنترلی این سیستم معین مطابق رابطه (۷۲) می‌باشد.

$$u(k) = -K_c \hat{X}(k) \quad (72)$$

ملاحظه ۳. با فرض نامعینی مقدار دقیق پارامترهای مکانیکی و الکتریکی تیر مرتعش، مدل فضای حالت نامعین زمان پیوسته‌ی (۶۵)-(۶۷) به‌صورت رابطه (۷۳) و (۷۴) اصلاح می‌شود.

$$X(k+1) = (A_d + \Delta A_d)X(k) + (B_d + \Delta B_d)u(k) \quad (73)$$

$$Y(k) = (C_d + \Delta C_d)X(k) \quad (74)$$

در این رابطه، ΔA_d , ΔB_d و ΔC_d بیانگر عدم قطعیت‌های پارامتری با نرم محدود سیستم زمان گسسته است و فرض می‌شود که به‌صورت رابطه (۷۵) بیان شود.

$$[\Delta A_d \quad \Delta B_d \quad \Delta C_d] = G_d F_d(k) [E_d^A E_d^B E_d^C], \quad (75)$$

در اینجا، E_d^A, E_d^B, E_d^C و G_d ماتریس‌های ثابت و معلومی با ابعاد مناسب است و $F_d(k)$ یک ماتریس متغیر با زمان است که شرط $F_d(k) F_d^T(k) \leq I_{n \times n}$ را ارضا می‌کند. برای محاسبه‌ی این ماتریس‌های عدم قطعیت به‌ترتیب زیر عمل می‌شود:

(الف) بر اساس دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری Δt ، مدل زمان گسسته‌ی (۶۸) محاسبه می‌شود.

(ب) با فرض معلوم بودن عدم قطعیت‌های ΔB , ΔC و ΔA گسسته شده و حاصل به‌صورت (۷۳) نمایش داده می‌شود.

(پ) نمودار بود تفاضل اندازه‌ی پاسخ فرکانسی (۷۳) و (۶۸) رسم و نقاطی در بالای آن مشخص و نموداری از آن نقاط عبور داده می‌شود. مناظر

1. Step-invariant transformation
2. Zero-order hold equivalent

۱-۶- اعتبارسنجی روش حل عددی پیشنهادی

۱-۱-۶- اعتبارسنجی سنجی نخست

جهت اعتبارسنجی برنامه‌ی تفاضل محدود نوشته شده، نخست یک تیر همگن آلومینیومی با مقطع ثابت، بدون قطعات پیزوالکتریک و با پارامترهای مشخص شده در جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. سه فرکانس طبیعی اول آن محاسبه شده و با جواب‌های حل تحلیلی که از (۸۴) به دست می‌آید، مقایسه می‌شود:

$$\omega_n = \frac{(\beta_n L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (84)$$

در این رابطه، از رابطه (۸۵) به دست می‌آید.

$$\cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) = -1 \quad (85)$$

نتایج این مقایسه که در جدول ۲ آورده شده است، بر دقت مناسب روش حل پیشنهادی دلالت دارد.

۲-۱-۶- اعتبارسنجی دوم

در اعتبارسنجی دوم، یک تیر آلومینیومی با چگالی، مدول الاستیک و ضخامت ثابت t_{b0} و پهنای متغیر $b(x)$ در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، رابطه‌ی پهنای تیر به صورت (۸۶) بیان می‌شود، که در آن پهنای تیر در سمت چپ است (جدول ۱).

$$\frac{b(x)}{b_0} = 1 - 0.5x \quad (86)$$

هوانگ و همکارش روشی بر پایه‌ی انتگرال فردلیم برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی این تیر پیشنهاد نمود. در این راستا، فرکانس طبیعی Ω_n به صورت (۸۷) تعریف شد. نتایج این مقایسه (جدول ۳) دقت مناسب روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

جدول ۱ مشخصات هندسی و خواص مواد مورد استفاده در دو اعتبارسنجی

ثابت	مقدار	واحد
L	۰/۴۰۱	m
t_{b0}	۰/۰۰۰۳۲	m
b_0	۰/۰۲۵۴	m
E_b	۷۰	Gpa
Δx	۰/۰۲۶۷	m
Δt	۰/۰۱	sec

جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی روش‌های پیشنهادی و تحلیلی در مثال نخست

شماره مود ارتعاشی	فرکانس طبیعی	فرکانس طبیعی	خطا
	به دست آمده از روش تفاضل محدود (رادیان بر ثانیه)	فرکانس طبیعی به دست آمده از (۸۴) (رادیان بر ثانیه)	
n=۱	۱۰/۳۱	۱۰/۲۰	۱/۱
n=۲	۶۳/۸۷	۶۳/۹۴	۰/۱۱
n=۳	۱۷۹/۴۵	۱۷۹/۰۶	۰/۲

$$\Omega_n = \omega_n L^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} \quad (87)$$

در جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد محاسبه شده توسط روش پیشنهادی و [۹] آورده شده است. مقایسه‌ی داده‌های این جدول، دقت روش پیشنهادی را در بررسی پاسخ آزاد نشان می‌دهد.

۲-۶- اعتبارسنجی روش کنترل پیشنهادی

برای اعتبارسنجی سیستم کنترلی پیشنهادی، تیر آلومینیومی همگن یک سرگردار با دو عملگر به هم چسبیده در بالا و دو حسگر پیزوالکتریک به هم چسبیده در پایین تیر، که مشخصه‌های آن در جدول ۴ بیان شده است، در نظر گرفته می‌شود. داده‌های مربوط به قطعات پیزوالکتریک با توجه به [۱۵] ارائه شده است.

همان‌گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، ایجاد یک شرایط اولیه‌ی غیر صفر، باعث نوساناتی مانا با دامنه‌ی ثابت در این سیستم می‌شود. لی و همکاران [۲۱] با فرض عدم قطعیت ۶۳٪ در مشخصه‌های جرمی تیر و استفاده از کنترل‌کننده‌ی مد لغزشی فازی تطبیقی، به پایدارسازی آن پرداختند. اما پاسخ این سیستم میراشونده با نوسانات بزرگ و همچنین زمان نشست حدود ۲ ثانیه همراه بود. در ادامه برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، تیر نامعین مشابه با آنچه که لی در نظر گرفت، از یک شرایط اولیه‌ی غیرصفر رها شده و سپس از کنترل‌کننده‌ای که با استفاده از لم ۲ طراحی می‌شود، برای از بین بردن نوسانات عرضی آن استفاده می‌شود.

جدول ۳ مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش‌های تفاضل

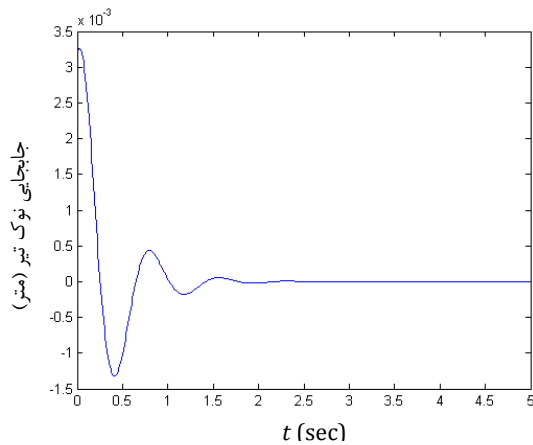
شماره مود ارتعاشی	فرکانس طبیعی	فرکانس طبیعی	خطا
	به دست آمده از روش تفاضل محدود	فرکانس طبیعی بی‌بعد به دست آمده در [۹]	
n=۱	۴/۳۱	۴/۲۱	۲/۳
n=۲	۲۳/۵۱	۲۳/۱۴	۱/۲
n=۳	۶۳/۲۲	۶۳/۲۷	۰/۱

جدول ۴ داده‌های شبیه‌سازی انجام شده برای اعتبارسنجی سیستم کنترلی

ثابت	مقدار	واحد
L	۰/۴۰۱	m
t_b	۰/۰۰۳۲	m
t_p	۰/۲۶۶۷	mm
b_0	۰/۰۲۵۴	m
$l_1 = l_3$	۰/۰۸۰۲	m
$l_2 = l_4$	۰/۱۳۳۷	m
ρ_p	۷۷۵۰	Kg/m ³
ρ_b	۲۶۹۰	Kg/m ³
$E_p^a = E_p^s$	۶۶/۴۷	Gpa
E_b	۷۰	Gpa
h_{31}^a	۸e-۴/۸۰	V/m
β_{33}^s	۷e۶/۶۶	m/F
d_{13}	۱۲e-۱۹۰۰	V/m
Δt	۰/۰۱	sec
Δx	۰/۰۲۶۷	m

برای انجام این کار، مدل فضای حالت مورد استفاده در طراحی سیستم کنترلی، بر اساس دو مد نخست که بیشترین انرژی را دارد، برگزیده می‌شود.

می‌کند. فرض می‌شود که در سمت چپ این تیر آلومینیوم و در سمت راست آن سرامیک زیرکونیوم با مشخصه‌های مکانیکی (۸۸) مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۵ جابجایی نوک تیر کنترل شده تحت اثر شرایط اولیه‌ی غیر صفر.

$$E_c = 200 \text{ Gpa}, \rho_c = 5700 \text{ kg/m}^2 \quad (۸۸)$$

بقیه‌ی مشخصه‌های هندسی و مکانیکی تیر بررسی شده مطابق با جدول ۴ است. در ادامه روند طراحی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی و کارایی آن در از بین بردن ارتعاشات سیستم مورد نظر بررسی می‌شود.

الف) محاسبه‌ی مدهای بهینه به روش بی-ا-دی

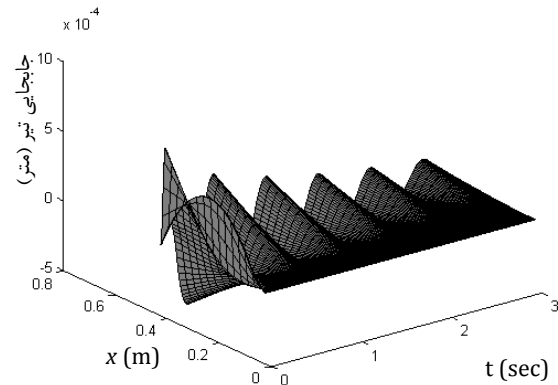
در گام نخست با در نظر نگرفتن کنترل‌کننده، پاسخ آزاد سیستم حلقه‌باز محاسبه می‌شود. در این مرحله با هدف به دست آوردن مدهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی، فرآیندی مشابه با شناسایی سیستم انجام می‌شود. برای این کار، با اعمال دو ورودی ولتاژ هارمونیک به عملگرهای پیزوالکتریک، پاسخ سیستم به دست آمده و بر اساس روش تصاویر گفته شده در زیربخش ۵-۱، مدهای سیستم ارتعاشی و میزان انرژی هر کدام در تحریک مشخص می‌شود. پاسخ آزاد این سیستم مرتعش حلقه‌باز در شکل ۶ نشان داده شده است. همان‌گونه که گفته شد، به کارگیری روش تصاویر به محاسبه‌ی یک ماتریس Σ منجر شده و درایه‌های قطری آن شامل مقادیر تکین تصاویر W ، یعنی σ_i است که با مقدار ویژه‌ی مد نام سیستم به صورت $\sigma_i^2 = \lambda_i$ ارتباط دارد و هر چه این مقدار ویژه بزرگ‌تر باشد، نشان‌دهنده‌ی آن است که انرژی این مد بیشتر است.

در قطر اصلی ماتریس Σ این مقادیر ویژه به صورت کاهنده مرتب شده‌اند؛ پس مدهای اول آن، بیشترین انرژی را دارد. شکل ۷ توزیع مقادیر تکین را برای این سیستم نشان می‌دهد. بنابراین بیشترین انرژی مربوط به دو مد نخست است و بر آن اساس می‌توان گفت مدلی که با این دو مد (یعنی دو ستون اول ماتریس V) ساخته می‌شود، بهترین تقریب مرتبه‌ی پایین از رفتار سیستم اصلی را به همراه خواهد داشت. در شکل ۸ و شکل ۹ این دو مد مشخص شده‌اند.

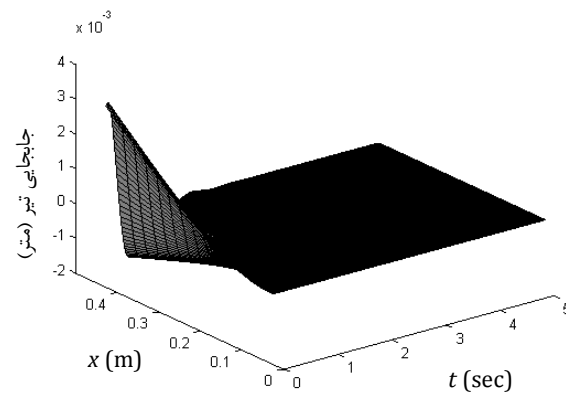
ب) تصویرسازی گالرکین

سپس با کمک تصویرسازی گالرکین، معادلات حالت کاهش مرتبه یافته‌ی سیستم به دست می‌آید. ماتریس‌های این مدل به صورت (۸۹) است.

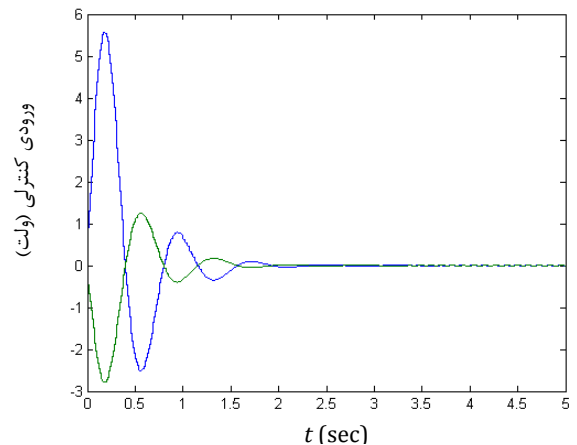
همان‌گونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، اعمال ورودی‌های کنترلی شکل ۴ باعث پایداری با کارایی مناسب این سیستم نامعین خواهد شد.



شکل ۲ پاسخ حلقه‌باز مثال بخش ۶-۲ به شرایط اولیه‌ی ایجاد شده.



شکل ۳ پاسخ کنترل‌شده‌ی مثال بخش ۶-۲ به شرایط اولیه‌ی ایجاد شده.

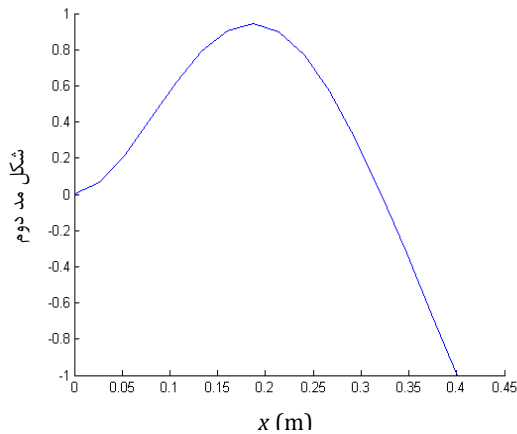


شکل ۴ ورودی‌های کنترلی اعمال شده در مثال بخش ۶-۲.

برای نمایش بهتر کیفیت پاسخ، جابجایی نوک این تیر در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود زمان نشست این سیستم در حدود ۱/۵ ثانیه است.

۶-۳- کنترل تیر مقطع متغیر مدرج تابعی طولی

در این شبیه‌سازی به کنترل ارتعاشات عرضی تیر مقطع متغیر مدرج تابعی طولی شکل ۱ پرداخته می‌شود. مقادیر مدول الاستیک و چگالی جرم طولی، به طور پیوسته در جهت طول طبق رابطه‌های (۱) و (۲) با $kk = 1$ تغییر



شکل ۹ شکل مد دوم به دست آمده از روش بی-آدی.

پ) طراحی کنترل کننده‌ی مقاوم

برای این منظور، ابتدا با توجه به دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری شده، سیستم گسسته‌ی نگه‌دارنده‌ی مرتبه‌ی صفر (۶۸) و (۶۹) محاسبه می‌شود. سپس ماتریس‌های عدم قطعیت گسسته‌ی (۷۵) به صورت (۹۰) انتخاب می‌شود.

$$E_d^A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.02 & 0.002 & 0.0001 \\ 0.0009 & 0.14 & 0 & 0.0018 \\ -0.30 & 2.87 & 0.19 & 0.015 \\ 0.17 & -11.02 & 0.0009 & 0.14 \end{bmatrix},$$

$$E_d^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.002 & -0.0012 \\ -0.009 & -0.008 \end{bmatrix},$$

$$E_d^C = \begin{bmatrix} -0.245 & -1.083 & 0 & 0 \\ -0.317 & -1.002 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_d = I_{4 \times 4} \quad (90)$$

اکنون از لم ۲ برای طراحی بهره‌های کنترلی استفاده می‌شود (رابطه (۹۱)).

$$L_c = \begin{bmatrix} 5.22 & -5.74 \\ -3.68 & 2.89 \\ -84.07 & 68.97 \\ 292.58 & -232.24 \end{bmatrix},$$

$$K_c = \begin{bmatrix} -73.3 & 1080.6 & 42.7 & -2.7 \\ 74.0 & -697.1 & -47.8 & -3.6 \end{bmatrix} \quad (91)$$

ت) شبیه‌سازی سیستم حلقه‌بسته

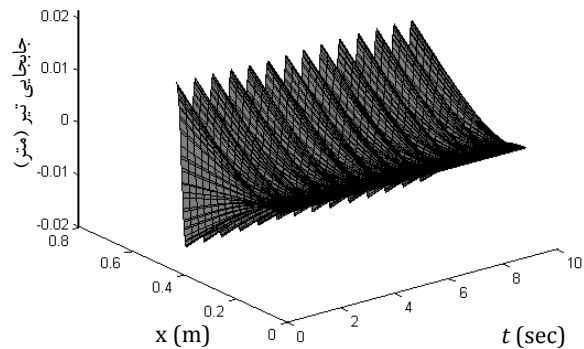
اکنون برای نشان دادن کارایی روش کنترلی پیشنهادی بر روی این سیستم، سیستم کنترلی فعال و سپس تیر از یک شرایط اولیه‌ی غیرصفر رها می‌شود. همچنین در این شبیه‌سازی فرض می‌شود که مشخصه‌های مکانیکی تیر ۵۰٪ با مقادیری که بر اساس آن، کنترل‌کننده طراحی شده متفاوت باشد. این سیستم حلقه‌بسته در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

در شکل ۱۱ نیز جابجایی انتهایی تیر مدرج تابعی نامعین در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده مشاهده می‌شود. واضح است که در حالت جبران نشده، تیر دارای ارتعاشاتی با دامنه‌ی مانا است؛ ولی همان‌گونه که مشخص است، روش پیشنهادی با اعمال ورودی‌های کنترلی شکل ۱۲ به خوبی این سیستم را پایدار ساخته است و با زمان نشست کمتر از ۱/۵ ثانیه نوسانات سیستم به خوبی حذف شده است.

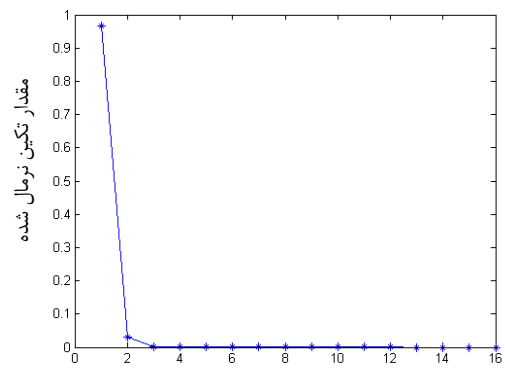
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -155.2 & 1596.3 & 0 & 0 \\ 97.2 & -6116.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.24 & -0.47 \\ -4.87 & -4.33 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.025 & -0.11 & 0 & 0 \\ -0.032 & -0.10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (89)$$

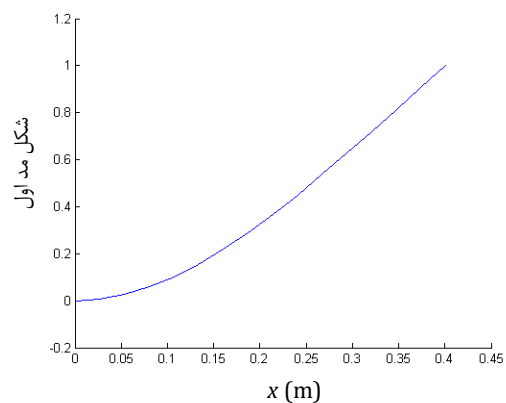
اکنون برای مطمئن شدن از شمار انتخابی برای محرک‌ها و سنسورها، کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم بررسی می‌شود که این مسئله با توجه به رتبه‌ی کامل (چهار) ماتریس‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری برقرار است.



شکل ۶ پاسخ سیستم حلقه‌باز به شرایط اولیه‌ی غیرصفر



شکل ۷ توزیع نقاط تکین پس از پیاده‌سازی روش تصاویر



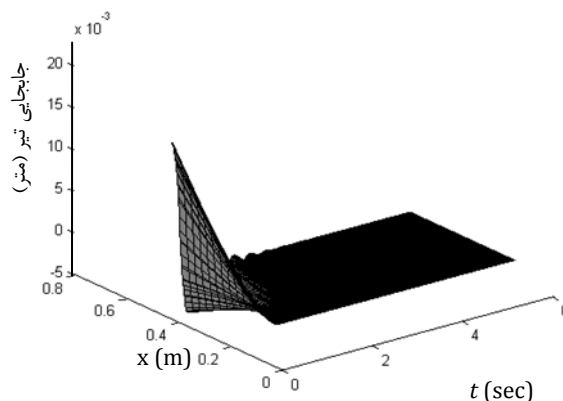
شکل ۸ شکل مد اول به دست آمده از روش بی-آدی.

۷- نتیجه‌گیری

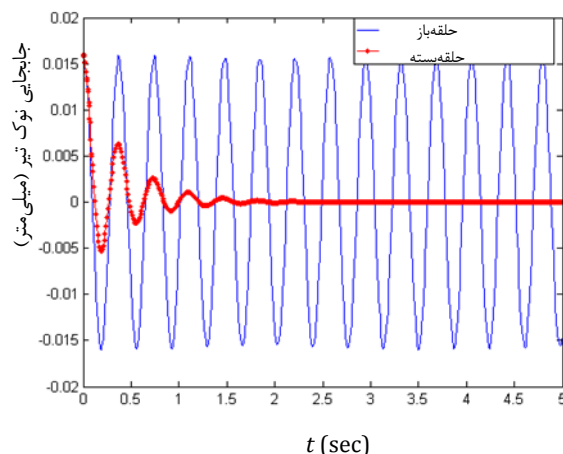
در این مقاله، روشی برای کنترل مقاوم ارتعاشات عرضی تیر یک سر گیر دار نامعین ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای سطح مقطع متغیر پیشنهاد شد. در این راستا، با به‌کار بردن روش تجزیه‌ی متعامد مناسب، حداقل مدهای بهینه‌ی ارتعاشی سیستم برگزیده و سپس از روش تصویرسازی گالرکین برای استخراج حداقل معادله‌های دیفرانسیل معمولی زمانی تشریح‌کننده‌ی رفتار دقیق آن بهره برده شد. همچنین فرض شد که مشخصات مکانیکی تیر موردنظر با حالت ایده‌آل که در آن خواص مواد مدرج تابعی از سرامیک به فلز به‌صورت پیوسته تغییر کند، متفاوت است. این تفاوت در واقع نوعی عدم قطعیت بر مدل‌سازی ریاضی سیستم است که باعث عدم دقت مناسب مدل ریاضی به‌دست آمده در شبیه‌سازی رفتار ارتعاشی تیر موردنظر می‌شود. برای کنترل چنین سیستم نامعینی، روش بازخورد خروجی مبتنی بر رؤیت‌گر حالت گسسته‌ی مقاوم پیشنهاد شد. به این منظور، طراحی بهره‌های کنترل‌کننده و رؤیت‌گر حالت به کمک قضیه‌ی مستقیم لیاپانوف که منجر به حل مجموعه‌ای از نامعادلات ماتریسی خطی می‌شود، صورت پذیرفت. در پایان با انجام چند شبیه‌سازی، کارایی روش پیشنهادی در کنترل ارتعاشات یک تیر نامعین با کارایی مناسب نشان داده شد. در این راستا، فرض شد که مشخصه‌های مکانیکی تیر در نظر گرفته در شبیه‌سازی، ۵۰٪ با پارامترهایی که بر اساس آن کنترل‌کننده طراحی شد، متفاوت باشد. همان‌گونه که مشاهده شد، روش پیشنهادی توانایی پایداری این سیستم و تحمل این مقدار عدم قطعیت در مدل‌سازی را به خوبی دارد.

۸- مراجع

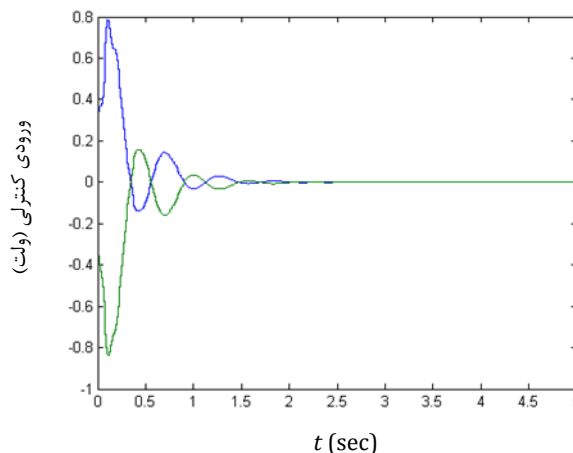
- [1] Wang, G., "Coupled free vibration of composite beams with asymmetric cross-sections, Composite Structures", Vol. 100, pp. 373-384, 2013.
- [2] Ece, M. C. Aydogdu, M. and Taskin, V., "Vibration of a variable cross-section beam", Mechanics Research Communications, Vol. 34, pp. 78-84, 2007.
- [3] Kapuria, S. and YaqoobYasin, M., "Active vibration control of piezoelectric laminated beams with electroded actuators and sensors using an efficient finite element involving an electric node", Smart Materials and Structures, Vol. 19, No. 4, 2010.
- [4] Shin, C. Hong, C. and Jeong, W. B., "Active vibration control of beams using filtered-velocity feedback controllers with moment pair actuators", Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, pp. 2910-2922, 2013.
- [5] Shin, C. Hong, C. and Jeong, W. B., "Active vibration control of beam structures using acceleration feedback control with piezoceramic actuators", Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, pp. 1257-1269, 2012.
- [6] Marinaki, M. Marinakis, Y. and Stavroulakis, G. E., "Vibration control of beams with piezoelectric sensors and actuators using particle swarm optimization", Expert Systems with Applications, Vol. 38, pp. 6872-6883, 2011.
- [7] Su, Z. Jin, G. Shi, S. Ye, T. and Jia, X., "A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 80, pp. 62-80, 2014.
- [8] Hein, H. and Feklistova, L., "Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets", Engineering Structures, Vol. 33, pp. 3696-3701, 2011.
- [9] Huang, Y. and Li, X. F., "A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section", Journal of sound and vibration, Vol. 329, pp. 2291-2303, 2010.
- [10] Huang, Y. Yang, L. E. and Luo, Q. Z., "Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section", Composites: Part B, Vol. 45, pp. 1493-1498, 2013.
- [11] Kargarnovin, M. H. Najafzadeh, M. M. and Viliani, N. S., Vibration control of a functionally graded material plate patched with piezoelectric actuators and sensors under a constant electric charge, Smart Materials and Structures, Vol. 16, pp. 1252-1259, 2007.
- [12] Shariyat, M. "Vibration and dynamic buckling control of imperfect hybrid FGM plates with temperature-dependent material properties subjected to thermo-electro-mechanical loading conditions",



شکل ۱۰ پاسخ سیستم حلقه‌بسته نامعین به شرایط اولیه‌ی ایجاد شده



شکل ۱۱ جابجایی انتهای تیر مدرج تابعی نامعین در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده



شکل ۱۲ ورودی‌های کنترلی اعمال شده به محرک‌های پیزوالکتریک در تیر مدرج تابعی نامعین

- Composite Structures, Vol. 88, pp. 240–252, 2009.
- [13] Bruant, I. and Proslie, L., "Improved active control of a functionally graded material beam with piezoelectric patches", Journal of Vibration and Control, 2013.
- [14] Rahmani, B. and Gholami, F., "Robust vibration control of a functionally graded cracked beam," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Accepted paper.
- [15] Jalili, N., "Piezoelectric-Based Vibration Control", pp. 180-215, Springer, 2010.
- [16] Rahmani B., Moosaie, A. and Mansourian Tabaie, A., "Distributed control of nonlinear Burger's equation", In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, NO. 4, pp. 214-220, 1394.
- [17] Emdad, H., Mostofizadeh, A. R. and Mousavinia, S. A., "Optimal control of vortex shedding around square cylinder via reduced order model", In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, NO. 5, pp. 53-55, 1391.
- [18] Sirovich, L., "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. Part 1: Coherent Structures", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 45, pp. 524-529, 1987.
- [19] Franklin, G.F. Powell, J. D. and Workman, M.L., "Digital Control of Dynamic System", Third Edition, Addison-Wesley, 1997.
- [20] Ibrir, S. and Diop, S., "Novel LMI conditions for observer-based stabilization of Lipschitzian", Applied Mathematics and Computation, 2008.
- [21] Li, L. Song, G. and Ou, J., "Adaptive fuzzy sliding mode based active vibration control of a smart beam with mass uncertainty", Structural control and health monitoring, Vol. 18, pp. 40-52, 2011.