



تحلیل فرکانسی تیر کامپوزیتی آلیاژ حافظه‌دار روی بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از چهار نظریه مهندسی تیر

ایمان رحیمی بافرانی^۱، حمید اختراعی طوسی^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد،

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد،

*ekhtraee@um.ac.ir، ۹۱۷۷۹۴۸۹۴۴، صندوق پستی

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت: ۹۴/۶/۱۹	در چند دهه‌ی اخیر، تولید مواد هوشمند منجر به ایجاد سازه‌های برتر با خواص ممتاز شده است. از جمله‌ی این مواد می‌توان به آلیاژهای حافظه‌دار، که قابلیت بازیابی کرنش‌های پلاستیک بزرگ در اثر اعمال تنش یا حرارت را دارند، اشاره نمود. توسعه‌ی عملگرهای آلیاژ حافظه‌دار به شکل‌های سیم و استنت در حوزه‌های مهندسی و سازه‌های هوشمند بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این راستا، مدل تحلیلی برای تیر کامپوزیتی با الیافی از جنس آلیاژ حافظه‌دار که روی بستر الاستیک پاسترناک قرار گرفته، ارائه شده است. تیر کامپوزیتی دارای تکیه‌گاه ساده در دو طرف بوده و الیاف حافظه‌دار با پیش-کرنش فشاری در لایه‌ی میانی تیر قرار گرفته‌اند. معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر تیرهای اولر-برنولی، رایلی، برشی و تیموشنکو با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده‌اند. با اعمال حرارت، عملیات بازیابی کرنش، نیروی کششی در راستای طول تیر اعمال و این نیرو منجر به ایجاد نیروی فشاری در تکیه‌گاه‌ها می‌شود. نیروی ایجاد شده با استفاده از رابطه‌ی تغییر فاز مارتنزیتی مدل شده است. با بی‌بعدسازی معادله‌های دیفرانسیل حاکم، روابط تحلیلی برای ارزیابی پاسخ دقیق فرکانس طبیعی تیر ارائه شده است. اعتبار نتایج از طریق مقایسه‌ی موردی با تحلیل‌های مشابه مورد صحت‌سنجی قرار گرفته است. براساس تحلیل‌های انجام شده، تاثیر ضرایب بستر الاستیک پاسترناک، تعداد الیاف حافظه‌دار، نسبت ضخامت به طول تیر، حد کرنش قابل بازیابی و نسبت طول به پهنای تیر روی فرکانس طبیعی در دمای بالاتر از دمای پایان آستنیت براساس نظریه‌های مختلف مهندسی تیر تعیین و ارائه شده است.
پذیرش: ۹۴/۹/۲۷	
کلیدواژگان:	
تحلیل فرکانسی	
تیر کامپوزیتی	
الیاف حافظه‌دار	
بستر الاستیک	

Frequency analysis of SMA composite beam resting on Pasternak elastic foundation using four engineering beam theories

Iman Rahimi Bafrani, Hamid Ekhteraei Toussi*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
 *P.O.B. 9177948944, Mashhad, Iran, ekhteraee@um.ac.ir

Keywords

Frequency analysis
 Composite beam
 Shape memory alloy wires
 Elastic foundation

Abstract

In the last decades, the production of smart materials have led to modern structures with superior properties. Among these materials one may points to the Shape Memory Alloys (SMAs) which show the capability of retaining the large plastic strains when exposed to outer temperature or traction loadings. The development of SMA actuators in the forms of wire and stent have attracted many attentions in the fields of engineering and smart structures. In this regard, an analytical model is represented for the composite beam with shape memory alloy wires resting on the Pasternak elastic foundation. The composite beam is simply-supported in both sides and pre-strained SMA wires are embedded in the middle of the cross section. The governing equations of Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear and Timoshenko beams are extracted using the Hamilton's principle. By heating the beam, strain recovery operation will produce a tensile force along the beam. This tensile force in turn will produce a compressive force against the beam supports. The resulted force is modeled by martensite transformation. By normalizing the governing equations, analytical relations are provided to evaluate the exact solution of natural frequency. The validity of results are established by comparing the typical solution with similar solution in the literature. Based on the analyses, the effects of Pasternak foundation coefficients, number of SMA wires, thickness to span ratio, recoverable strain limit and span to width ratio on the natural frequency in temperature above the austenite finish temperature are found and represented by using the engineering beam theories.

Please cite this article using:

Rahimi Bafrani, I. and Ekhteraei Toussi H., "Frequency analysis of SMA composite beam resting on Pasternak elastic foundation using four engineering beam theories". In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 1, pp. 73-84, 2016.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

۱- مقدمه

آلیاژهای حافظه‌دار دسته‌ای از آلیاژهای فلزی می‌باشند که در اثر تغییر فاز ناشی از دما یا میدان مغناطیسی می‌توانند به شکل و اندازه‌ی اصلی خود بازمی‌گردند. این تغییر فاز منجر به بروز اثر حافظه‌داری^۱ و اثر شبه‌الاستیسیته^۲ می‌شود [۱]. در میان مواد هوشمند، آلیاژهای حافظه‌دار برای کنترل فعال سازه‌های کامپوزیتی به منظور افزایش پایداری، کاهش نویز و ارتعاشات مناسب می‌باشند [۲-۴]. این آلیاژها دارای دو فاز کریستالوگرافی دما-بالا به نام فاز آستنیت^۳ و دما-پایین به نام فاز مارتنزیت^۴ می‌باشند و می‌توانند به صورت عملگر کرنشی در حالت با یا بدون پیش-کرنش^۵ درون سازه قرار گیرند. اعمال حرارت از طریق جریان الکتریکی به این آلیاژها، منجر به ایجاد نیرو و گشتاور شده و در نتیجه شکل و سفتی سازه را کنترل می‌نمایند [۵].

تغییر فاز جامد در آلیاژ حافظه‌دار یا آلیاژ هوشمند اولین بار توسط اولاند [۶] در سال ۱۹۳۲ کشف شد. او نشان داد که آلیاژهای طلا-کادمیوم (Au-Cd) می‌توانند به هنگام سرد شدن دچار تغییر شکل پلاستیک^۶ شده و به هنگام گرم شدن به حالت اصلی یا اولیه خود باز گردند. اثر حافظه‌داری اولین بار توسط گرینگر و مرادبان [۷] در سال ۱۹۳۸ برای آلیاژهای مس-روی (Cu-Zn) و مس-قلع (Cu-Sn) مشاهده شد. پدیده‌ی بنیادین اثر حافظه‌داری حاکم شده به وسیله‌ی رفتار ترموالاستیک فاز مارتنزیت به صورت گسترده‌ای در یک دهه بعد توسط کردیوموف و کندروس [۸] در سال ۱۹۴۹ و همچنین توسط چنگ و رد [۹] در سال ۱۹۵۱ گزارش شد. اثرات مشابه نیز در سایر آلیاژهایی از قبیل ایندیم-تالیوم (In-Tl) و مس-آلومینیوم-نیکل (Cu-Al-Ni) در دهه‌ی ۱۹۵۰ مشاهده شد. اهمیت مواد حافظه‌دار شناخته نشد تا زمانی که ویلیام بوهرلر و فردریک ونگ [۱۰، ۱۱] در سال ۱۹۶۲ اثر حافظه‌داری را در آلیاژ نیکل-تیتانیوم (Ni-Ti)، که به نایتینول^۷ مشهور است، نشان دادند.

در دو دهه‌ی گذشته، مدل‌های ریاضی بنیادی بسیاری به منظور پیش بینی ویژگی‌های آلیاژ حافظه‌دار تحت بارگذارهای ترمومکانیکی ارائه شده است. یکی از اولین مدل‌های یک بعدی برای آلیاژهای حافظه‌دار توسط تاناکا [۱۲] در سال ۱۹۸۶ ارائه شد. او با در نظر گرفتن توابع نمایی به توصیف تغییر فاز بین دو فاز مارتنزیت جهت یافته^۸ و آستنیت پرداخت. مدل کامل تری نسبت به مدل قبل توسط لیانگ-راجرز [۱۳] در سال ۱۹۹۰ پیشنهاد شد که در این مدل، تغییر فاز براساس توابع کسینوسی پیش بینی گردید. با توجه به نقص دو مدل قبلی در شبیه‌سازی فرآیند جهت‌گیری مارتنزیت، برینسون [۱۴] در سال ۱۹۹۳ با تقسیم کردن کسر حجمی مارتنزیت به کسر مارتنزیتی متأثر از دما و متأثر از تنش، توانست با ارائه مدل کامل تری این نقص را بر طرف سازد. بوید و لاگوداس [۱۵] در سال ۱۹۹۶ مدل سه بعدی توسعه یافته‌تری را به منظور توصیف رفتار شبه‌الاستیک و اثر حافظه‌داری پیشنهاد کردند. لاگوداس [۱۶] در سال ۱۹۹۶ یک چهارچوب واحد و یکپارچه برای مدل‌های قبلی تاناکا [۱۲]، لیانگ-راجرز [۱۳] و بوید و لاگوداس [۱۵] فراهم کرد.

لازم به ذکر است که مدل‌های مطرح شده توانایی شبیه سازی فروالاستیک^۹ در دماهای پایین را ندارند.

در سال‌های اخیر، تحقیقات گسترده‌ای روی مواد هوشمند نظیر آلیاژهای حافظه‌دار که گستره‌ی وسیعی از صنایع را در بر گرفته‌اند، انجام شده است. لا [۱۷] در سال ۲۰۰۲ به بررسی مشخصه‌های ارتعاشی در تیرهای کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده در آن با شرایط مرزی مختلف پرداخت. او با معرفی یک مدل تئوری ساده، فرکانس‌های طبیعی سازه را قبل و بعد از تحریک الیاف حافظه‌دار مورد ارزیابی قرار داد. همچنین، نسبت‌های میرایی تیرهای کامپوزیتی الیاف حافظه‌دار را به صورت آزمایشگاهی بررسی کرد. لا و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۰۲ به بررسی کنترل فرکانس‌های طبیعی تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده در آن پرداختند. آن‌ها با تغییر دما، تغییرات فرکانس‌های طبیعی را مورد ارزیابی قرار دادند. لیو و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۴ یک شبیه‌سازی عددی برای رفتار شبه‌الاستیک تیر آلیاژ حافظه‌دار تحت بارهای استاتیکی ترمومکانیکی، با استفاده از مدل بنیادین سه بعدی آلیاژ حافظه‌دار مطرح شده توسط بوید و لاگوداس [۱۵]، ارائه کردند. کنگ و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۰۷ پاسخ ضربه‌ی کامپوزیت شیشه‌اپوکسی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده در آن را که در معرض ضربه‌ی سرعت پایین قرار گرفته در دماهای مختلف ارزیابی نمودند. نی و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۰۷ سفتی و مشخصه‌های ارتعاشی تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار کوتاه جاسازی شده در آن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به این نتیجه دست یافتند که با اضافه کردن این الیاف، مشخصه‌های ارتعاشی تیر کامپوزیتی بهبود می‌یابد. سان و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۰۹ روی ارتعاشات و کنترل موقعیت یک تیر با استفاده از عملگرهای آلیاژ حافظه‌دار^{۱۰} به صورت آزمایشگاهی تحقیق کرده و نتایج بدست آمده را با نتایج تئوری مقایسه کردند. لی و هوآ [۲۳] در سال ۲۰۱۰ مشخصه‌های ارتعاشات آزاد تیرهای الاستیک را با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی تحت شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادله‌های حاکم بر تیر-های الاستیک را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کردند و همچنین با به کارگیری روش سفتی دینامیک، فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود را بدست آوردند. روغان و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۱۰ الیاف حافظه‌دار سوپرالاستیک^{۱۱} را به منظور افزایش ظرفیت میرایی و چقرمگی ماتریس پلیمری امکان‌سنجی کردند. برزگری و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۱۳ به تحلیل ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده در آن پرداختند. آن‌ها مدلی تحلیلی به منظور ارزیابی فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مد با استفاده از نظریه‌های اولر-برنولی، تیموشنکو و ردی-بیکفورد ارائه کردند. طاهری و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۴ مدل ساختاری برای حالت شبه‌الاستیک تحت بار کششی-پیچشی غیر یکنواخت به دست آوردند. خانجانی و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۵ به تحلیل دینامیکی غیر خطی یک پانل ساندویچی استوانه‌ای با الیاف حافظه‌دار جاسازی شده در آن پرداختند. عبدالهی و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۱۵ به بررسی پایداری حرارتی غیر خطی تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن نظریه تیر تیموشنکو و بستر الاستیک غیر خطی، معادله‌های حاکم را استخراج کرده و با استفاده از روش عددی تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته^{۱۲}، به حل این معادله‌ها پرداختند.

9. Ferroelasticity
10. Shape memory alloy actuators
11. Superelasticity
12. Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

1. Shape Memory Effect (SME)
2. Pseudoelasticity Effect (PE)
3. Austenite phase
4. Martensite phase
5. Pre-strain
6. Plastic deformation
7. NiTiNol
8. Detwinned martensite

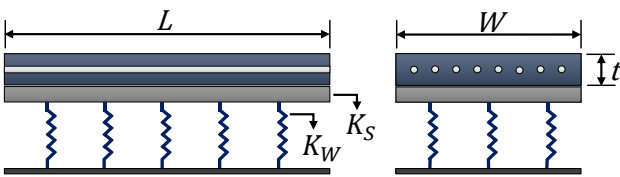
در رابطه (۴)، σ_R معرف تنش ایجاد شده در الیاف حافظه‌دار، A_{SMA} سطح مقطع الیاف و A_C سطح مقطع تیر بدون حضور الیاف می‌باشد. سطح مقطع الیاف حافظه‌دار A_{SMA} به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود.

$$A_{SMA} = N \frac{\pi(D_{SMA})^2}{4} \quad (5)$$

در رابطه (۵)، N نشان‌دهنده‌ی تعداد الیاف و D_{SMA} قطر الیاف می‌باشد. اکنون با جای‌گذاری رابطه (۴) در رابطه (۳)، رابطه تنش- کرنش تیر به صورت رابطه (۶) نتیجه می‌شود.

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)_C = \frac{\sigma_R A_{SMA}}{E_C A_C} + \alpha_C (T - T_0) \quad (6)$$

در رابطه (۶)، اندیس C معرف ماتریس در تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار می‌باشد.



شکل ۱ تیر کامپوزیتی آلیاژ حافظه‌دار قرار گرفته روی بستر الاستیک پاسترناک

۳- رفتار ترمومکانیکی آلیاژهای حافظه‌دار

رفتار ترمومکانیکی الیاف حافظه‌دار به شرایط فاز آن‌ها (ساختارهای فاز مارتنزیت و آستنیت) و دما بستگی دارد. فرآیند تغییر فاز تنها در اثر تغییر دما رخ می‌دهد. در مطالعه‌ی حاضر تغییر فاز از مارتنزیت به آستنیت، که به تغییر فاز معکوس مشهور است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

رابطه‌ی بنیادی یک بعدی الیاف حافظه‌دار در طی تغییر فاز مارتنزیتی صورت رابطه (۷) می‌باشد [۱۳].

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_0)_C + \theta(T - T_0) + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0) \quad (7)$$

در رابطه (۷)، E معرف مدول یانگ الیاف حافظه‌دار، θ ضریب انبساط حرارتی الیاف حافظه‌دار، Ω ضریب تغییر فاز و ξ کسر مارتنزیتی می‌باشد. همچنین، اندیس ۰ نشان دهنده شرایط اولیه الیاف حافظه‌دار است. با جای‌گذاری رابطه (۶) در رابطه (۷)، رابطه (۸) به دست می‌آید.

$$\sigma_R = E(\xi) \left[\frac{\sigma_R A_{SMA}}{E_C A_C} + \alpha_C (T - T_0) \right] + \theta(T - T_0) + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0) \quad (8)$$

با انجام ساده سازی، تنش ایجاد شده در الیاف حافظه‌دار به صورت رابطه (۹) محاسبه می‌شود.

$$\sigma_R = \frac{[\alpha_C E(\xi) + \theta](T - T_0) + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0)}{1 - \frac{E(\xi) A_{SMA}}{E_C A_C}} \quad (9)$$

بنابراین نیروی محوری ایجاد شده در راستای طولی تیر به صورت رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود.

$$P = \frac{[\alpha_C E(\xi) + \theta](T - T_0) + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0)}{1 - \frac{E(\xi) A_{SMA}}{E_C A_C}} A_{SMA} \quad (10)$$

رابطه بین کسر مارتنزیتی ξ و دمای اعمال شده T در طی حرارت دادن برای تغییر فاز مارتنزیتی به صورت رابطه (۱۱) می‌باشد.

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{A_f - A_s} (T - A_s) \right] + 1 \right\} \quad (11)$$

نظریه‌های مهندسی مختلفی نظیر اولر-برنولی، رایلی، برشی و تیموشنکو به منظور مدل کردن رفتار تیر الاستیک وجود دارد. در این میان، نظریه‌ی تیر اولر-برنولی (نظریه‌ی کلاسیک) نتایج قابل قبولی برای پیش بینی فرکانس‌های طبیعی در تیرهای نازک ارائه می‌دهد. اما این نظریه در مدهای بالا و یا تیرهای ضخیم، فرکانس‌های طبیعی را بیش حد معمول نشان می‌دهد. نظریه تیر رایلی با در نظر گرفتن اثر اینرسی سطح مقطع، نتایج مدل قبلی را به طور نسبی بهبود بخشیده است اما همچنان نتایج به دست آمده بزرگ‌تر از حد معمول می‌باشد. در نظریه‌ی تیر برشی که اثر تغییر شکل برشی به نظریه‌ی اولر-برنولی اضافه می‌شود، فرکانس‌های طبیعی به شکل چشم‌گیری بهبود پیدا می‌کند. نظریه‌ی تیر تیموشنکو علاوه بر در نظر گرفتن تغییر شکل برشی، اینرسی چرخشی سطح مقطع تیر را لحاظ می‌کند که منجر به ایجاد نتایج دقیق‌تری نسبت به نظریه‌های قبلی می‌شود [۲۹].

تا آنجا که مولفین اطلاع دارند، بررسی اندکی روی تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار روی بستر الاستیک صورت پذیرفته است. این در حالی است که برای مدل‌سازی بسیاری از سازه‌های هوشمند در نظر گرفتن بستر الاستیک حائز اهمیت می‌باشد. در این تحقیق، روابط تحلیلی به منظور ارزیابی فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی برای دمای بالاتر از دمای پایان آستنیت با تلفیق نظریه‌های شناخته شده‌ی مهندسی تیر و بستر الاستیک پاسترناک، که قبلاً سابقه‌ای از آن مشاهده نشده، بسط و ارائه گردیده است. نتایج برای تکیه‌گاه ساده و با ضخامت‌های مختلف تیر نشان داده شده است.

۲- عملیات بازیابی کرنش در تیر کامپوزیتی آلیاژ حافظه‌دار

با توجه به آرایش الیاف حافظه‌دار در تیر کامپوزیتی شکل ۱، سازه مورد بررسی به صورت ارتوتروپیک، که دارای خواص مکانیکی یکسان در دو جهت ۲ و ۳ می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین،

$$E_2 = E_3, \quad \nu_{12} = \nu_{13}, \quad G_{12} = G_{13} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، E نشان‌دهنده‌ی مدول یانگ، ν ضریب پواسون و G مدول برشی می‌باشد.

بر اثر اعمال جریان الکتریکی به الیاف، الیاف گرم شده و سبب ایجاد عملیات بازیابی کرنش در تیر می‌شود. رابطه تنش-کرنش برحسب ماتریس نرمی به صورت رابطه (۲) می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_0)_1 \\ (\varepsilon - \varepsilon_0)_2 \\ (\varepsilon - \varepsilon_0)_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، α معرف ضریب انبساط حرارتی ماده، ε کرنش، T دمای اعمال شده، σ تنش و S مولفه‌ی ماتریس نرمی می‌باشد. مولفه‌ی ماتریس نرمی S برحسب خواص مکانیکی E ، G و ν در مرجع [۳۰] آورده شده است. همچنین، اندیس ۰ نشان دهنده شرایط اولیه تیر کامپوزیت است. T_0 دمای مرجع بوده و مقدار آن ۲۵ درجه سانتی‌گراد در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به رابطه (۲)، کرنش محوری تیر کامپوزیتی در راستای طولی آن به صورت رابطه (۳) تعیین می‌شود.

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)_1 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + \alpha_1(T - T_0) \quad (3)$$

همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود در دو راستای پهنا و ضخامت، تنش برابر صفر می‌باشد. در طی عملیات بازیابی کرنش به دلیل اتصال الیاف حافظه‌دار به تیر کامپوزیتی، تنش کششی در راستای طول تیر ایجاد شده که به صورت رابطه (۴) قابل محاسبه می‌باشد.

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_R A_{SMA}}{A_C} \quad (4)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T + W_{SMA}) dt = 0 \quad (19)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۶) تا (۱۸) در اصل همیلتون، رابطه (۲۰) نتیجه می‌شود.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[K_W w^2 + K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt = 0 \quad (20)$$

با اعمال عملگر تغییراتی^۶ (δ) روی هر کدام از جمله‌های رابطه (۲۰)، معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی به صورت روابط (۲۱) و (۲۲) به دست می‌آیند.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - (K_S + P) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + K_W w(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \left[-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (K_S + P) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (22)$$

به منظور بی‌بعد سازی معادله دیفرانسیل رابطه (۲۱)، پارامترهای بی‌بعدی به صورت رابطه (۲۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w}(\bar{x}, \tau) = \frac{w(x, t)}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad T = L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \\ \bar{K}_W = K_W \frac{L^4}{EI}, \quad \bar{K}_S = K_S \frac{L^2}{EI}, \quad \bar{P} = P \frac{L^2}{EI}, \quad \beta = \frac{AL^2}{I} \quad (23)$$

در رابطه (۲۳)، مدول الاستیسیته و چگالی معادل تیر با استفاده از قانون اختلاط^۷ به صورت رابطه (۲۴) محاسبه می‌شوند.

$$E = E_C + (E(\xi) - E_C) \frac{I_{SMA}}{I_{TOTAL}} \\ \rho = \rho_C + (\rho_{SMA} - \rho_C) \frac{A_{SMA}}{A_{TOTAL}} \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)، I_{SMA} معرف ممان اینرسی سطح مقطع الیاف حافظه‌دار، I_{TOTAL} ممان اینرسی سطح مقطع تیر با الیاف حافظه‌دار و A_{TOTAL} مساحت سطح مقطع تیر با الیاف حافظه‌دار می‌باشد. بنابراین شکل بی‌بعد معادله دیفرانسیل رابطه (۲۱) به صورت رابطه (۲۵) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^4 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^4} - (\bar{K}_S + \bar{P}) \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + \bar{K}_W \bar{w}(\bar{x}, \tau) + \beta \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (25)$$

پاسخ هارمونیک به شکل رابطه (۲۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$\bar{w}(\bar{x}, \tau) = \bar{W}(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}_n \tau} \quad (26)$$

حال با جای‌گذاری پاسخ هارمونیک رابطه (۲۶) در رابطه (۲۵)، معادله دیفرانسیل رابطه (۲۷) نتیجه می‌شود.

$$\frac{d^4 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} - (\bar{K}_S + \bar{P}) \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + (\bar{K}_W - \beta \bar{\omega}_n^2) \bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (27)$$

معادله‌ی مشخصه برای رابطه (۲۷) به صورت رابطه (۲۸) می‌باشد.

$$m^4 - (\bar{K}_S + \bar{P}) m^2 + (\bar{K}_W - \beta \bar{\omega}_n^2) = 0 \quad (28)$$

در رابطه (۱۱)، A_S نشان دهنده‌ی دمای شروع تغییر فاز آستنیت و A_F دمای پایان تغییر فاز آستنیت می‌باشد. مدول یانگ E به صورت رابطه (۱۲) بیان می‌شود.

$$E(\xi) = \xi E_M + (1 - \xi) E_A \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)، E_M معرف مدول یانگ فاز مارتنزیت و E_A مدول یانگ فاز آستنیت می‌باشد.

ضریب تغییر فاز Ω به صورت رابطه (۱۳) می‌باشد.

$$\Omega(\xi) = -\varepsilon_L E(\xi) \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، ε_L معرف حد کرنش قابل بازیابی (کرنش پسماند حداکثر) بوده و مقدار آن ۴٪ در نظر گرفته می‌شود.

۴- تحلیل فرکانسی براساس نظریه‌های مهندسی

۴-۱- نظریه تیر اولر-برنولی^۱

در نظریه تیر اولر-برنولی یا نظریه تیر کلاسیک^۲ برای تیرهای نازک، یک فرض مهم این است که مقطع هر صفحه بعد از تغییر شکل به صورت صفحه و عمود به خط مرکزی باقی می‌ماند. به عبارت دیگر از هر گونه تغییر شکل ناشی از تنش برشی در طول مقطع صرف نظر می‌شود.

مولفه‌های جابجایی هر نقطه در سطح مقطع به صورت رابطه (۱۴) می‌باشند [۳۱].

$$u = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad v = 0, \quad w = w(x, t) \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، u ، v و w به ترتیب معرف جابجایی در راستای محور طولی تیر، پهنا و خیز می‌باشند.

مولفه‌های کرنش و تنش متناظر با میدان جابجایی رابطه (۱۴)، به صورت رابطه (۱۵) بیان می‌شوند [۳۱].

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \\ \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (15)$$

انرژی کرنشی کل به صورت رابطه (۱۶) می‌باشد.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[K_W w^2 + K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)، K_W نشان دهنده‌ی ضریب بستر وینکلر^۳ و K_S ضریب بستر برشی^۴ می‌باشد.

انرژی جنبشی کل به صورت رابطه (۱۷) نوشته می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (17)$$

کار ناشی از نیروی محوری الیاف حافظه‌دار روی تیر به صورت رابطه (۱۸) می‌باشد.

$$W_{SMA} = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (18)$$

اصل همیلتون^۵ به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود [۳۳، ۳۲].

1. Euler-Bernoulli Beam Theory (EBT)
2. Classical Beam Theory (CBT)
3. Winkler foundation coefficient
4. Shear foundation coefficient
5. Hamilton's principle

6. Variation operator
7. Mixture rule

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \left[-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (K_S + P) \frac{\partial w}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (37)$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد معرفی شده در رابطه (۲۳)، شکل بی بعد معادله دیفرانسیل رابطه (۳۶) به صورت رابطه (۳۸) نتیجه می شود.

$$\frac{\partial^4 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^4} - (\bar{K}_S + \bar{P}) \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + \bar{K}_W \bar{w}(\bar{x}, \tau) + \beta \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^4 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2 \partial \tau^2} = 0 \quad (38)$$

با اعمال پاسخ هارمونیک رابطه (۲۶) در معادله دیفرانسیل رابطه (۳۸)، رابطه (۳۹) حاصل می شود.

$$\frac{d^4 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} + [\bar{\omega}_n^2 - (\bar{K}_S + \bar{P})] \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + (\bar{K}_W - \beta \bar{\omega}_n^2) \bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (39)$$

معادله‌ی مشخصه برای معادله دیفرانسیل رابطه (۳۹) به صورت رابطه (۴۰) می باشد.

$$m^4 + [\bar{\omega}_n^2 - (\bar{K}_S + \bar{P})] m^2 + (\bar{K}_W - \beta \bar{\omega}_n^2) = 0 \quad (40)$$

اکنون با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۴۰)، شکل مد مشابه رابطه (۳۰) نتیجه می شود. همچنین شرایط مرزی بی بعد مشابه رابطه (۳۱) می باشند. با اعمال شرایط مرزی بی بعد در رابطه (۳۰)، معادله فرکانسی مشابه رابطه (۳۲) حاصل شده و فرکانس‌های طبیعی بی بعد به صورت رابطه (۴۱) به دست می آیند.

$$\bar{\omega}_n = \pm \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 [n^2 \pi^2 + (\bar{K}_S + \bar{P})] + \bar{K}_W}{\beta + n^2 \pi^2}} \quad (41)$$

۳-۴- نظریه تیر برشی^۵

این نظریه، اثر تغییر شکل برشی را به نظریه تیر اولر-برنولی اضافه می کند. به این ترتیب مولفه‌های جابجایی هر نقطه در سطح مقطع به صورت رابطه (۴۲) می باشند [۳۱].

$$u = -z \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right) = -z \phi(x, t), \quad v = 0, \quad w = w(x, t) \quad (42)$$

در رابطه (۴۲)، $\phi(x, t)$ معرف زوایه‌ی چرخش سطح مقطع تیر است. مولفه‌های کرنش و تنش متناظر با میدان جابجایی رابطه (۴۲)، به صورت رابطه (۴۳) بیان می شوند [۳۱].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0 \\ \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} = -Ez \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \sigma_{zx} = KG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

در رابطه (۴۳)، K نشان دهنده‌ی ضریب تصحیح برشی می باشد و مقدار آن برای سطح مقطع مستطیلی برابر $\frac{5}{6}$ است.

انرژی کرنشی کل به صورت رابطه (۴۴) نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + KAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left[K_W w^2 + K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (44)$$

اکنون ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۲۸) به صورت رابطه (۲۹) به دست می آیند.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\bar{K}_S + \bar{P})^2 - 4(\bar{K}_W - \beta \bar{\omega}_n^2)} + (\bar{K}_S + \bar{P}) \right]} \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\bar{K}_S + \bar{P})^2 - 4(\bar{K}_W - \beta \bar{\omega}_n^2)} - (\bar{K}_S + \bar{P}) \right]} \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به ریشه‌های حاصله، شکل مد^۱ به صورت رابطه (۳۰) نتیجه می شود.

$$\bar{W}(\bar{x}) = C_1 \cosh(\lambda_1 \bar{x}) + C_2 \sinh(\lambda_1 \bar{x}) + C_3 \cos(\lambda_2 \bar{x}) + C_4 \sin(\lambda_2 \bar{x}) \quad (30)$$

شرایط مرزی بی بعد^۲ برای تکیه‌گاه ساده به صورت رابطه (۳۱) می باشند.

$$(\bar{W})_{at \bar{x}=0,1} = \left(\frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{x}^2} \right)_{at \bar{x}=0,1} = 0 \quad (31)$$

حال با اعمال این شرایط مرزی در رابطه (۳۰)، معادله‌ی فرکانسی و فرکانس‌های طبیعی بی بعد به صورت روابط (۳۲) و (۳۳) به دست می آیند.

$$\sin(\lambda_2) = 0 \quad (32)$$

$$\bar{\omega}_n = \pm \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 [n^2 \pi^2 + (\bar{K}_S + \bar{P})] + \bar{K}_W}{\beta}} \quad (33)$$

۲-۴- نظریه تیر رابلی^۳

این نظریه مشابه نظریه تیر اولر-برنولی می باشد با این تفاوت که اثر اینرسی چرخشی^۴ در این نظریه لحاظ شده است. بنابراین انرژی جنبشی کل، با توجه توجه به این اثر اینرسی، به صورت رابطه (۳۴) بیان می شود [۳۱].

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (34)$$

انرژی کرنشی کل مشابه رابطه (۱۶) و کار ناشی از نیروی محوری لیاف حافظه دار روی تیر مشابه رابطه (۱۸) می باشد.

با جای گذاری روابط (۱۶)، (۱۸) و (۳۴) در اصل همیلتون، رابطه (۳۵) نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^L \left[K_W w^2 + K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

با اعمال عملگر تغییراتی روی جمله‌های رابطه (۳۵)، معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی به صورت روابط (۳۶) و (۳۷) حاصل می شوند.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - (K_S + P) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + K_W w(x, t) \\ + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

1. Mode shape
2. Dimensionless Boundary Conditions (DBC)
3. Rayleigh Beam Theory (RBT)
4. Rotary inertia

5. Shear Beam Theory (SBT)

$$\frac{d^4 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} + a \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + b \bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (56)$$

در رابطه (56)، a و b به صورت رابطه (57) تعریف می‌شوند.

$$a = \frac{-\bar{K}_W + \bar{\omega}_n^2 - \alpha \gamma (\bar{K}_S + \bar{P})}{1 + \bar{K}_S + \bar{P}} \quad (57)$$

معادله‌ی مشخصه برای معادله دیفرانسیل رابطه (56) به صورت رابطه

(58) می‌باشد.

$$m^4 + am^2 + b = 0 \quad (58)$$

حال ریشه‌های معادله مشخصه‌ی رابطه (58) به صورت رابطه (59) به

دست می‌آیند.

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{a^2 - 4b} - a]} \quad (59)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{a^2 - 4b} + a]} \quad (59)$$

با توجه به ریشه‌های حاصله، شکل مد به صورت رابطه (60) نتیجه

می‌شود.

$$\bar{W}(\bar{x}) = C_1 \cosh(\lambda_1 \bar{x}) + C_2 \sinh(\lambda_1 \bar{x}) + C_3 \cos(\lambda_2 \bar{x}) + C_4 \sin(\lambda_2 \bar{x})$$

$$\bar{\Phi}(\bar{x}) = D_1 \cosh(\lambda_1 \bar{x}) + D_2 \sinh(\lambda_1 \bar{x}) + D_3 \cos(\lambda_2 \bar{x}) + D_4 \sin(\lambda_2 \bar{x}) \quad (60)$$

با جای‌گذاری رابطه (60) در معادله‌های دیفرانسیل روابط (54) و (55)،

ثوابت $\bar{\Phi}(\bar{x})$ برحسب ثوابت $\bar{W}(\bar{x})$ به صورت رابطه (61) تعیین می‌شوند.

$$D_1 = XC_2, D_2 = XC_1, D_3 = YC_4, D_4 = -YC_3 \quad (61)$$

در رابطه (61)، X و Y به صورت رابطه (62) تعریف می‌شوند.

$$X = \frac{\lambda_1^2 [1 + \bar{K}_S + \bar{P}] + \bar{\omega}_n^2 - \bar{K}_W}{\lambda_1}$$

$$Y = \frac{\lambda_2^2 [1 + \bar{K}_S + \bar{P}] - \bar{\omega}_n^2 + \bar{K}_W}{\lambda_2} \quad (62)$$

شرایط مرزی بی‌بعد برای تکیه‌گاه ساده به صورت رابطه (63) می‌باشند.

$$(\bar{W})_{at \bar{x}=0,1} = \left(\frac{d\bar{\Phi}}{d\bar{x}} \right)_{at \bar{x}=0,1} = 0 \quad (63)$$

با اعمال شرایط مرزی بی‌بعد در رابطه (60)، معادله فرکانسی مشابه

رابطه (32) حاصل شده و فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به صورت رابطه (64)

نتیجه می‌شوند.

$$\bar{\omega}_n = \pm \sqrt{\frac{[1 + \bar{K}_S + \bar{P}]n^4 \pi^4 + [\bar{K}_W + \gamma \alpha (\bar{K}_S + \bar{P})]n^2 \pi^2 + \alpha \gamma \bar{K}_W}{\alpha \gamma + n^2 \pi^2}} \quad (64)$$

۴-۴- نظریه تیر تیموشنکو

این نظریه مشابه نظریه تیر برشی می‌باشد با این تفاوت که اثر اینرسی

چرخشی را در نظر می‌گیرد. بنابراین انرژی جنبشی کل، با توجه به این اثر

اینرسی، به صورت رابطه (65) نوشته می‌شود [31].

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (65)$$

انرژی کرنشی کل مشابه رابطه (44) و کار ناشی از نیروی محوری الیاف

حافظه‌دار روی تیر مشابه رابطه (18) می‌باشد.

انرژی جنبشی کل مشابه رابطه (17) و کار ناشی از نیروی محوری الیاف

حافظه‌دار روی تیر مشابه رابطه (18) می‌باشد. حال با جای‌گذاری روابط (17)، (18) و (44) در اصل همیلتون، رابطه (45) نتیجه می‌شود.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + KAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[K_W w^2 + K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt = 0 \quad (45)$$

با اعمال عملگر تغییراتی روی هر کدام از جمله‌های رابطه (45)،

معادله‌های دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی به صورت روابط (46)، (47) و

(48) به دست می‌آیند.

$$-(KAG + K_S + P) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + K_W w(x, t) + KAG \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (46)$$

$$-EI \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + KAG \phi(x, t) - KAG \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (47)$$

$$\left[KAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + (K_S + P) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L + EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \Big|_0^L = 0 \quad (48)$$

به منظور بی‌بعد سازی معادله‌های دیفرانسیل روابط (46) و (47)،

پارامترهای بی‌بعدی به صورت رابطه (49) در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{w}(\bar{x}, \tau) = \frac{w(x, t)}{L}, \tau = \frac{t}{T}, T = L \sqrt{\frac{\rho}{KG}}$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \tau) = \phi(x, t), \bar{K}_W = K_W \frac{L^2}{KAG}, \bar{K}_S = K_S \frac{1}{KAG}$$

$$\bar{P} = P \frac{1}{KAG}, \alpha = \frac{AL^2}{I}, \gamma = \frac{KG}{E} \quad (49)$$

در رابطه (49)، مدول برشی معادل تیر با استفاده از قانون اختلاط به

صورت رابطه (50) بیان می‌شود.

$$G = G_C + (E(\xi) - G_C) \frac{I_{SMA}}{I_{TOTAL}} \quad (50)$$

بنابراین شکل بی‌بعد معادله‌های دیفرانسیل روابط (46) و (47) به ترتیب

به صورت روابط (51) و (52) به دست می‌آیند.

$$-(1 + \bar{K}_S + \bar{P}) \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + \bar{K}_W \bar{w}(\bar{x}, \tau) + \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (51)$$

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + \alpha \bar{\phi}(\bar{x}, \tau) - \alpha \frac{\partial \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (52)$$

پاسخ‌های هارمونیک به شکل رابطه (53) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\bar{w}(\bar{x}, \tau) = \bar{W}(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}_n \tau}, \bar{\phi}(\bar{x}, \tau) = \bar{\Phi}(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}_n \tau} \quad (53)$$

اکنون با جای‌گذاری پاسخ‌های هارمونیک رابطه (53) در روابط (51) و

(52)، معادله‌های دیفرانسیل روابط (54) و (55) حاصل می‌شوند.

$$-[1 + \bar{K}_S + \bar{P}] \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + (\bar{K}_W - \bar{\omega}_n^2) \bar{W}(\bar{x}) + \frac{d\bar{\Phi}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (54)$$

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d^2 \bar{\Phi}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + \alpha \bar{\Phi}(\bar{x}) - \alpha \frac{d\bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (55)$$

با ادغام روابط (54) و (55) می‌توان معادله دیفرانسیلی به صورت رابطه

(56) به دست آورد.

حال با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۷۵)، شکل مد مشابه رابطه (۶۰) نتیجه می‌شود. همچنین، با جای‌گذاری رابطه (۶۰) در معادله‌های دیفرانسیل روابط (۷۱) و (۷۲)، ثوابت $\bar{\Phi}(\bar{x})$ برحسب ثوابت $\bar{W}(\bar{x})$ مشابه رابطه (۶۱) تعیین می‌شوند.

شرایط مرزی بی‌بعد مشابه رابطه (۶۳) می‌باشند. اکنون با اعمال شرایط مرزی در رابطه (۶۰)، معادله فرکانسی مشابه رابطه (۳۲) حاصل شده و فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد از حل معادله‌ی رابطه (۷۶) به دست می‌آیند.

$$\bar{\omega}_n^4 - \frac{1}{\gamma} \{ [1 + \gamma(1 + \bar{K}_S + \bar{P})] n^2 \pi^2 + (\bar{K}_W + \alpha) \gamma \} \bar{\omega}_n^2 + \frac{1}{\gamma} \{ [1 + \bar{K}_S + \bar{P}] n^4 \pi^4 + [\bar{K}_W + \alpha \gamma (\bar{K}_S + \bar{P})] n^2 \pi^2 + \bar{K}_W \gamma \alpha \} = 0 \quad (76)$$

۵- نتایج و بحث

در این تحقیق، طول و پهنای تیر کامپوزیتی و قطر الیاف حافظه‌دار به ترتیب ۲۵۰ میلی‌متر، ۲۵ میلی‌متر و ۰/۵ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. تیر کامپوزیتی دارای تکیه‌گاه ساده در دو طرف بوده و روی بستر الاستیک پاسترناک قرار گرفته است. الیاف حافظه‌دار با پیش‌کنش فشاری ۴٪ در لایه‌ی میانی تیر جاسازی شده‌اند. فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی برای دو ضخامت ۳ میلی‌متر و ۳۰ میلی‌متر در دمای بالاتر از دمای پایان آستنیت، که برابر ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد فرض شده، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در جدول‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب خواص مکانیکی آلیاژ حافظه‌دار نایتینول (NiTi)، کامپوزیت شیشه‌اپوکسی و ضرایب بستر الاستیک پاسترناک ارائه شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی آلیاژ حافظه‌دار نایتینول [۱۷]

مقدار	الیاز حافظه‌دار نایتینول (واحد)
۲۵	E_t (GPa)
۵۰	E_A (GPa)
۰/۵۵	θ (MPa/°C)
۶۴۵۰	ρ_{SMA} (kg/m ³)
۴۸	A_S (°C)
۵۵	A_f (°C)

جدول ۲ خواص مکانیکی کامپوزیت شیشه‌اپوکسی [۱۷]

مقدار	کامپوزیت شیشه‌اپوکسی (واحد)
۱۲	E_c (GPa)
0.734×10^{-6}	α_c (m/m/°C)
۱۸۰۰	ρ_c (kg/m ³)

جدول ۳ ضرایب بستر الاستیک پاسترناک

مقدار	ضریب بستر (واحد)
۵۵۰۰	K_W (N/m ²)
۲۲/۵	K_S (N)

با جای‌گذاری روابط (۱۸)، (۴۴) و (۶۵) در اصل همیلتون، رابطه (۶۶) نتیجه می‌شود.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + KAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[K_W w^2 + K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt = 0 \quad (66)$$

با اعمال عملگر تغییراتی روی جمله‌های رابطه (۶۶)، معادله‌های دیفرانسیل حرکت به صورت روابط (۶۷) و (۶۸) به دست می‌آیند. همچنین شرایط مرزی مشابه رابطه (۴۸) می‌باشند.

$$-(KAG + K_S + P) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + K_W w(x, t) + KAG \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (67)$$

$$-EI \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + KAG \phi(x, t) - KAG \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (68)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده در رابطه (۴۹)، شکل بی‌بعد معادله‌های دیفرانسیل روابط (۶۷) و (۶۸) به صورت روابط (۶۹) و (۷۰) نتیجه می‌شوند.

$$-(1 + \bar{K}_S + \bar{P}) \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + \bar{K}_W \bar{w}(\bar{x}, \tau) + \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (69)$$

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + \alpha \bar{\phi}(\bar{x}, \tau) - \alpha \frac{\partial \bar{w}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (70)$$

با اعمال پاسخ‌های هارمونیک رابطه (۵۳) در معادله‌های دیفرانسیل روابط (۶۹) و (۷۰)، روابط (۷۱) و (۷۲) حاصل می‌شوند.

$$-[1 + \bar{K}_S + \bar{P}] \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + (\bar{K}_W - \bar{\omega}_n^2) \bar{W}(\bar{x}) + \frac{d\bar{\Phi}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (71)$$

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d^2 \bar{\Phi}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + (\alpha - \bar{\omega}_n^2) \bar{\Phi}(\bar{x}) - \alpha \frac{d\bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (72)$$

با ادغام روابط (۷۱) و (۷۲) می‌توان معادله‌ی دیفرانسیلی به صورت رابطه (۷۳) به دست آورد.

$$\frac{d^4 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} + r \frac{d^2 \bar{W}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + s \bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (73)$$

در رابطه (۷۳)، r و s به صورت رابطه (۷۴) تعریف می‌شوند.

$$r = \frac{-\bar{K}_W + \bar{\omega}_n^2 [1 + \gamma(1 + \bar{K}_S + \bar{P})] - \alpha \gamma (\bar{K}_S + \bar{P})}{1 + \bar{K}_S + \bar{P}}$$

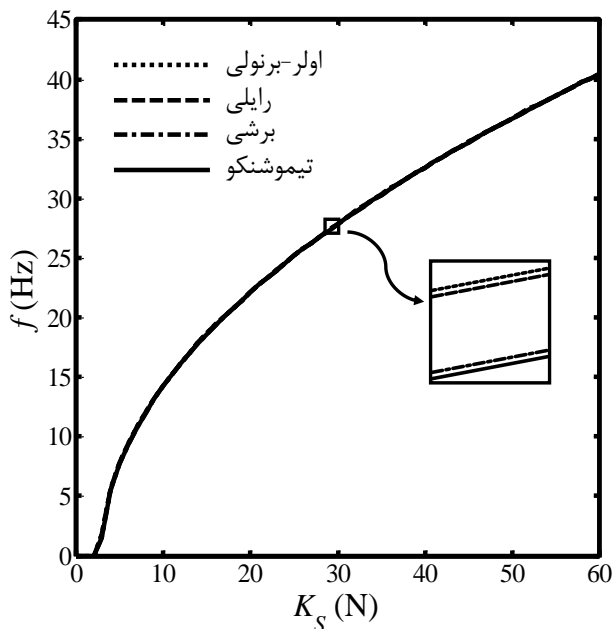
$$s = \frac{\gamma (\bar{\omega}_n^2 - \alpha) (\bar{\omega}_n^2 - \bar{K}_W)}{1 + \bar{K}_S + \bar{P}} \quad (74)$$

معادله‌ی مشخصه برای رابطه (۷۳) به صورت رابطه (۷۵) نوشته می‌شود.

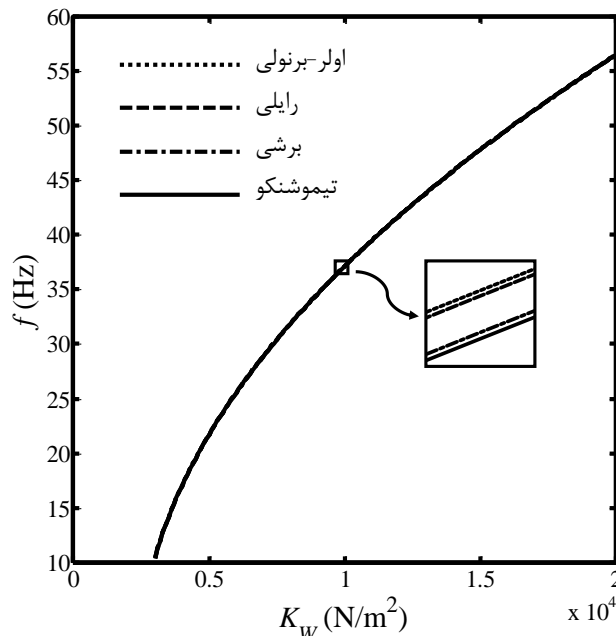
$$m^4 + r m^2 + s = 0 \quad (75)$$

شکل‌های ۶ و ۷، نمودار فرکانس طبیعی مد اول برحسب تعداد الیاف حافظه‌دار را در ضخامت‌های ۳ میلی‌متر و ۳۰ میلی‌متر براساس نظریه‌های مختلف مهندسی نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود در دمای بالاتر از دمای پایان آستنیت، فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی با افزایش تعداد الیاف حافظه‌دار در ضخامت ۳ میلی‌متر بیش‌تر از ضخامت ۳۰ میلی‌متر کاهش می‌یابد. این کاهش فرکانس طبیعی به دلیل افزایش نیروی فشاری تولید شده بر اثر عملیات بازیابی کرنش در تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد.

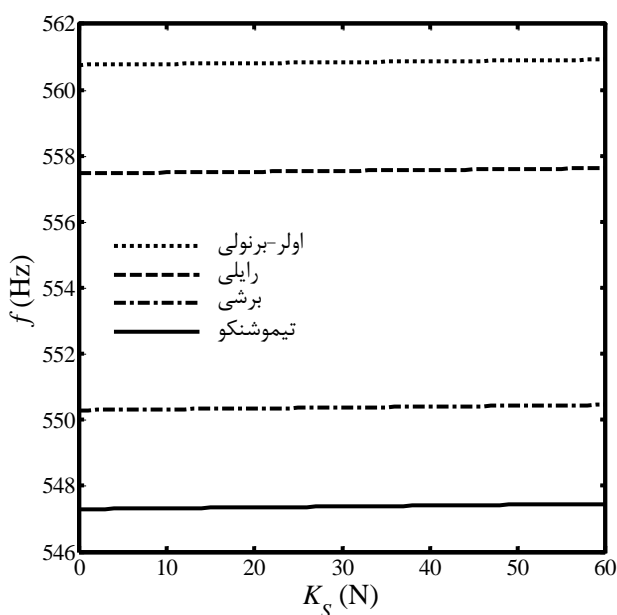
در شکل‌های ۲ تا ۵، نمودار فرکانس طبیعی مد اول برحسب ضرایب بستر الاستیک پاسترناک برای ضخامت‌های ۳ میلی‌متر و ۳۰ میلی‌متر براساس نظریه‌های مختلف مهندسی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود در دمای بالاتر از دمای پایان آستنیت، فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی با افزایش ضرایب بستر پاسترناک افزایش می‌یابد. همچنین، اثر ضریب بستر برشی نسبت به ضریب بستر وینکلر در این افزایش فرکانس غالب است.



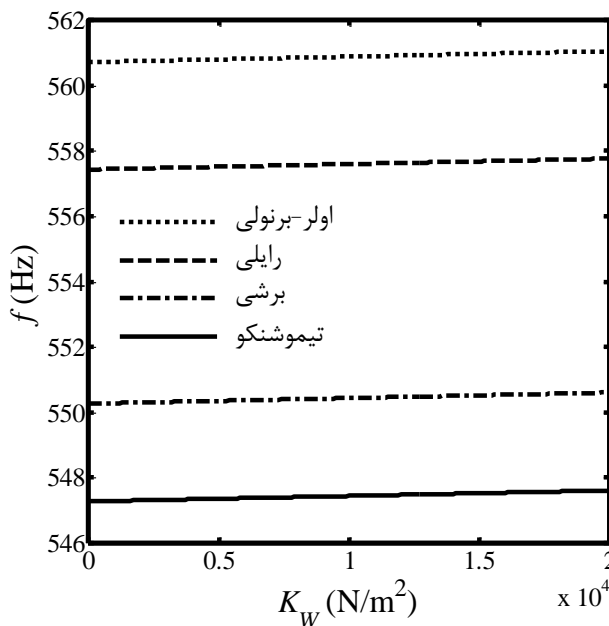
شکل ۴ فرکانس طبیعی مد اول برحسب ضریب بستر برشی در ضخامت ۳ میلی‌متر، دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$



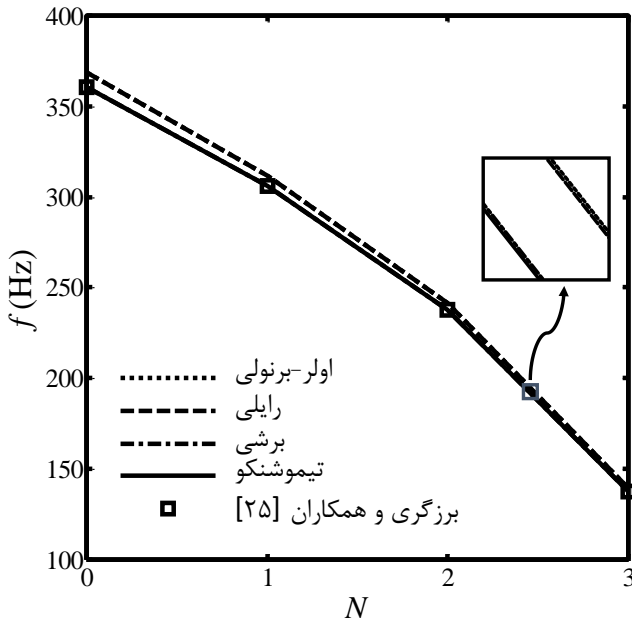
شکل ۲ فرکانس طبیعی مد اول برحسب ضریب بستر وینکلر در ضخامت ۳ میلی‌متر، دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$



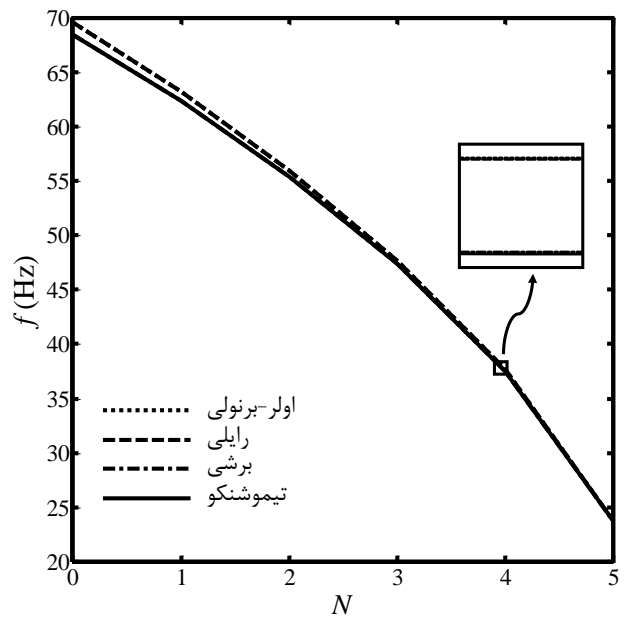
شکل ۵ فرکانس طبیعی مد اول برحسب ضریب بستر برشی در ضخامت ۳۰ میلی‌متر، دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$



شکل ۳ فرکانس طبیعی مد اول برحسب ضریب بستر وینکلر در ضخامت ۳۰ میلی‌متر، دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$



شکل ۸ فرکانس طبیعی مد سوم برحسب تعداد الیاف حافظه‌دار در طول ۲۰۰ میلی‌متر، پهنای ۳۲ میلی‌متر، ضخامت ۱/۴ میلی‌متر و دمای ۶۴ درجه سانتی‌گراد



شکل ۶ فرکانس طبیعی مد اول برحسب تعداد الیاف حافظه‌دار در ضخامت ۳ میلی‌متر و دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد

نتایج بدست آمده از تحلیل فرکانسی براساس نظریه تیر تیموشنکو با نتایج تجربی ارائه شده در مرجع [۱۷] مقایسه شده و مطابقت بسیار خوبی را بین نتایج نشان می‌دهد که این نشان‌دهنده اطمینان از صحت معادلات استخراج شده در تحقیق حاضر می‌باشد.

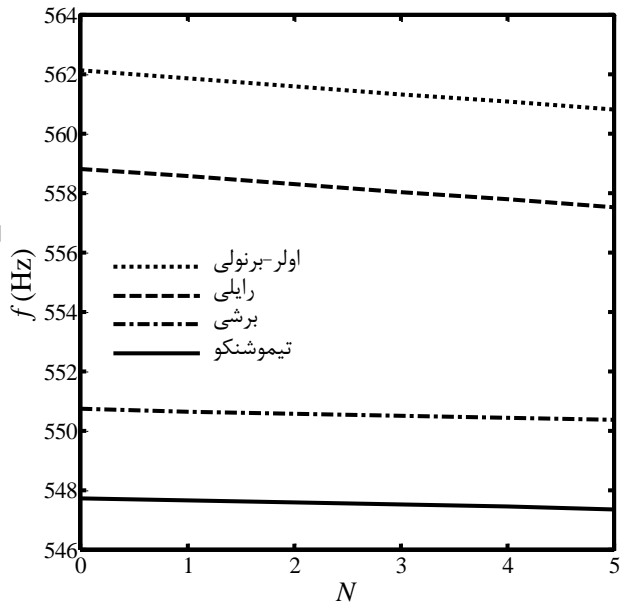
جدول ۴ صحت‌سنجی نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی تحقیق حاضر با نتایج تجربی مرجع [۱۷] در ضخامت ۱/۵ میلی‌متر و دمای بالاتر از دمای پایان آستنتیت

فرکانس طبیعی (Hz)	تعداد الیاف حافظه‌دار	تحقیق حاضر	مرجع [۱۷]	درصد خطا (%)
۲۹/۱۱	۱	۲۹/۱۱	۲۷	۷/۸۱
۳۰/۳۲	۳	۳۰/۳۲	۳۲	۵/۲۵
۳۱/۴۵	۵	۳۱/۴۵	۳۰/۵	۳/۱۱

جدول ۵ صحت‌سنجی نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی تحقیق حاضر با نتایج تجربی مرجع [۱۷] در ضخامت ۱/۵ میلی‌متر و دمای پایین‌تر از دمای پایان مارتنزیت

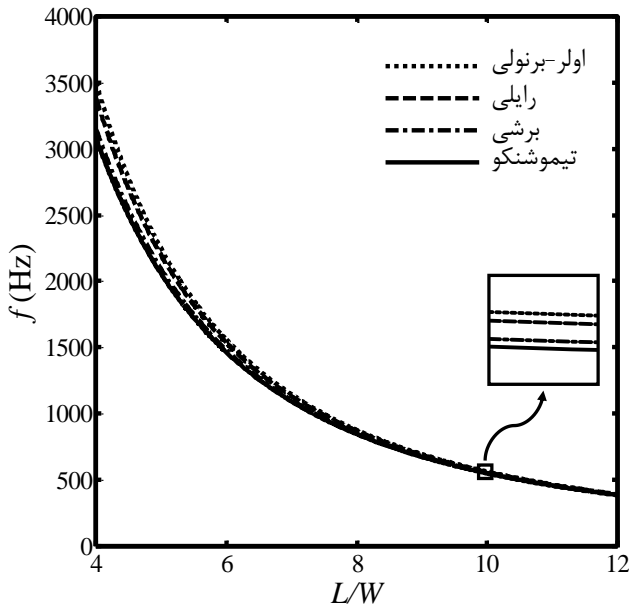
فرکانس طبیعی (Hz)	تعداد الیاف حافظه‌دار	تحقیق حاضر	مرجع [۱۷]	درصد خطا (%)
۳۰/۲۳	۱	۳۰/۲۳	۲۸/۵	۶/۰۷
۲۹/۷۱	۳	۲۹/۷۱	۳۲/۳۸	۸/۲۴
۲۹/۳۳	۵	۲۹/۳۳	۳۰/۵	۳/۸۳

شکل ۹، نمودار فرکانس طبیعی مد اول برحسب نسبت ضخامت به طول تیر را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به طول در دمای بالاتر از دمای پایان آستنتیت، فرکانس طبیعی تیر افزایش یافته و فاصله‌ی بین نظریه‌ها زیاد می‌شود. دلیل زیاد شدن فاصله‌ی بین نظریه‌ها، در نظر گرفتن اثر اینرسی چرخشی و تغییر شکل ناشی از نیروی برشی می‌باشد. نظریه‌های تیر اولر-برنولی و تیموشنکو به ترتیب دارای بیش‌ترین و کم‌ترین فرکانس می‌باشند. شکل‌های ۱۰ و ۱۱، نمودار فرکانس طبیعی مد اول برحسب نسبت طول به پهنای تیر را در ضخامت‌های ۳ میلی‌متر و ۳۰ میلی‌متر براساس نظریه‌های مختلف مهندسی نشان می‌دهند.

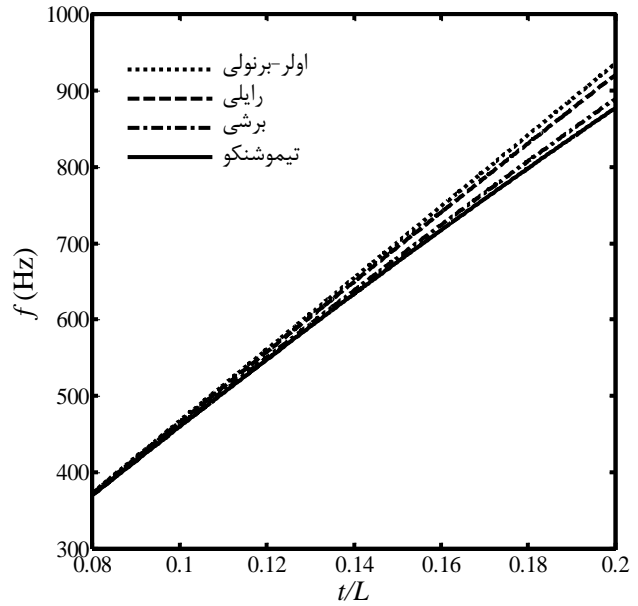


شکل ۷ فرکانس طبیعی مد اول برحسب تعداد الیاف حافظه‌دار در ضخامت ۳۰ میلی‌متر و دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد

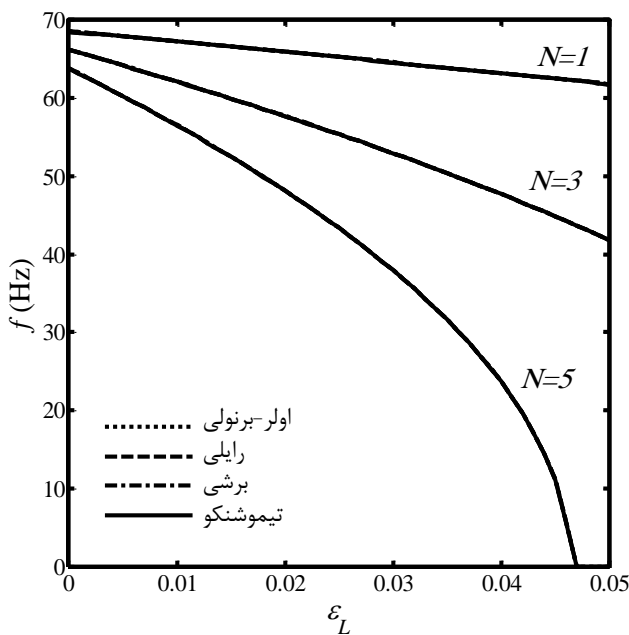
شکل ۸، نمودار فرکانس طبیعی مد سوم برحسب تعداد الیاف حافظه‌دار را در طول ۲۰۰ میلی‌متر، پهنای ۳۲ میلی‌متر، ضخامت ۱/۴ میلی‌متر و دمای ۶۴ درجه سانتی‌گراد براساس نظریه‌های مختلف مهندسی نشان می‌دهد. نتایج بدست آمده از نظریه‌های مختلف تیر با نتایج حاصل از مرجع [۲۵] مقایسه شده و دارای تطابق نزدیکی می‌باشند. با توجه به شکل ۸، در دمای بیش‌تر از دمای پایان آستنتیت، کاهش فرکانس طبیعی با افزایش تعداد الیاف حافظه‌دار مشاهده می‌شود. جدول‌های ۴ و ۵، صحت‌سنجی نتایج حاصل از تحلیل فرکانسی تحقیق حاضر را با نتایج تجربی مرجع [۱۷] در طول ۲۸۰ میلی‌متر، پهنای ۲۵ میلی‌متر و ضخامت ۱/۵ میلی‌متر نشان می‌دهند.



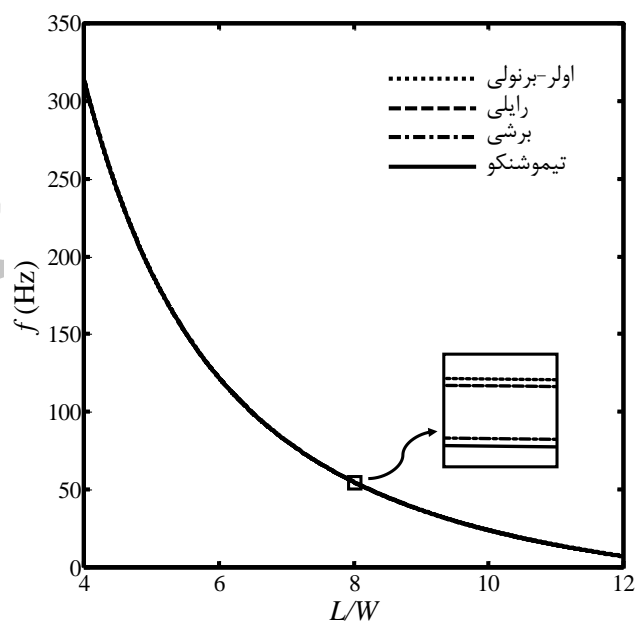
شکل ۱۱ فرکانس طبیعی مد اول برحسب نسبت طول به پهنای تیر در ضخامت ۳۰ میلی‌متر، دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$



شکل ۹ فرکانس طبیعی مد اول برحسب نسبت ضخامت به طول تیر در دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$



شکل ۱۲ فرکانس طبیعی مد اول برحسب حد کرنش قابل بازیابی در ضخامت ۳ میلی‌متر و دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد



شکل ۱۰ فرکانس طبیعی مد اول برحسب نسبت طول به پهنای تیر در ضخامت ۳ میلی‌متر، دمای ۶۳/۵ درجه سانتی‌گراد و با تعداد الیاف حافظه‌دار $N=5$

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، تحلیل ارتعاشات تیر کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار روی بستر الاستیک پاسترناک براساس نظریه‌های مختلف مهندسی مورد مطالعه قرار گرفت. تیر کامپوزیتی دارای تکیه‌گاه ساده در دو طرف بوده و الیاف حافظه‌دار با پیش-کرنش فشاری در لایه‌ی میانی تیر جاسازی شده‌اند. تاثیر ضرایب بستر الاستیک پاسترناک، تعداد الیاف حافظه‌دار، نسبت ضخامت به طول تیر، نسبت طول به پهنای تیر و حد کرنش قابل بازیابی (کرنش پسماند حداکثر) در دمای بالاتر از دمای پایان آستنیته روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد در نمونه‌هایی با ضخامت‌های مختلف ۳ میلی‌متر و ۳۰

مشاهده می‌شود در دمای بیش‌تر از دمای پایان آستنیته، فرکانس طبیعی تیر با افزایش نسبت طول به پهنای تیر کاهش می‌یابد. با توجه به شکل ۱۱، نظریه‌های تیر اولر-برنولی و تیموشنکو به ترتیب دارای بیش‌ترین و کم‌ترین فرکانس می‌باشند.

شکل ۱۲، نمودار فرکانس طبیعی مد اول برحسب حد کرنش قابل بازیابی (کرنش پسماند حداکثر) را در ضخامت ۳ میلی‌متر براساس نظریه‌های مختلف مهندسی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش حد کرنش قابل بازیابی، فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی کاهش یافته و این کاهش با افزایش تعداد الیاف حافظه‌دار بیشتر می‌شود.

- Matrix Composites," *Mechanics of Composite Materials and Structures*, Vol. 3, No. 2, pp. 153-179, 1996.
- [17] Lau, K.-t., "Vibration Characteristics of SMA Composite Beams with Different Boundary Conditions," *Materials & design*, Vol. 23, No. 8, pp. 741-749, 2002.
- [18] Lau, K.-t. Zhou, L.-m. and Tao, X.-m., "Control of Natural Frequencies of a Clamped-Clamped Composite Beam with Embedded Shape Memory Alloy Wires," *Composite Structures*, Vol. 58, No. 1, pp. 39-47, 2002.
- [19] Liew, K. Ren, J. and Kitipornchai, S., "Analysis of the Pseudoelastic Behavior of a SMA Beam by the Element-Free Galerkin Method," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, No. 5, pp. 497-507, 2004.
- [20] Kang, K. Kim, H. and Kim, J., "The Role of Shape Memory Alloy on Impact Response of Glass/Epoxy Laminates under Low Temperature," *Journal of mechanical science and technology*, Vol. 21, No. 10, pp. 1682-1688, 2007.
- [21] Ni, Q.-Q. Zhang, R.-x. Natsuki, T. and Iwamoto, M., "Stiffness and Vibration Characteristics of SMA/ER3 Composites with Shape Memory Alloy Short Fibers," *Composite Structures*, Vol. 79, No. 4, pp. 501-507, 2007.
- [22] Sohn, J. Han, Y. Choi, S. Lee, Y. and Han, M., "Vibration and Position Tracking Control of a Flexible Beam Using SMA Wire Actuators," *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, No. 2, pp. 263-281, 2009.
- [23] Li, J., and Hua, H., "The Effects of Shear Deformation on the Free Vibration of Elastic Beams with General Boundary Conditions," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 1, pp. 71-84, 2010.
- [24] Raghavan, J. Bartkiewicz, T. Boyko, S. Kupriyanov, M. Rajapakse, N. and Yu, B., "Damping, Tensile, and Impact Properties of Superelastic Shape Memory Alloy (SMA) Fiber-Reinforced Polymer Composites," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 41, No. 3, pp. 214-222, 2010.
- [25] Barzegari, M. M. Dardel, M. and Fathi, A., "Vibration Analysis of a Beam with Embedded Shape Memory Alloy Wires," *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 26, No. 5, pp. 536-550, 2013.
- [26] Andani, M. T. and Elahinia, M., "A Rate Dependent Tension-Torsion Constitutive Model for Superelastic Nitinol under Non-Proportional Loading; a Departure From Von Mises Equivalency," *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 1, pp. 015012, 2014.
- [27] Khanjani, M. Shakeri, M. and Sedighi, M. "Non-Linear Transient and Damping Analysis of a Long Cylindrical Sandwich Panel with Embedded SMA Wires," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 47, pp. 98-113, 2015.
- [28] Abdollahi, H. Esfahani, S. Shakeri, M. and Eslami, M., "Non-Linear Thermal Stability Analysis of SMA Wire-Embedded Hybrid Laminated Composite Timoshenko Beams on Non-Linear Hardening Elastic Foundation," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 38, No. 3, pp. 277-308, 2015.
- [29] Han, S. M. Benaroya, H. and Wei, T., "Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories," *Journal of sound and vibration*, Vol. 225, No. 5, pp. 935-988, 1999.
- [30] Kaw, A. K., "Mechanics of Composite Materials:" CRC press, 2005.
- [31] Rao, S. S., "Vibration of Continuous systems," John Wiley & Sons, 2007.
- [32] Reddy, J. N., "Energy and variational methods in applied mechanics," First ed., New York: John Wiley, 1984.
- [33] Malekzadeh Fard, K. and Rezaei Hassanasabadi, M. "Free Vibration and Static Bending Analysis of Curved Sandwich Panel with Magneto-Rheological Fluid Layer in Sheets Using Improved Higher Order Sandwich Panel Theory," In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 1, No. 2, pp. 49-62, 2015.

میلی‌متر با افزایش ضرایب بستر الاستیک پاسترناک، فرکانس طبیعی افزایش یافته و این افزایش به دلیل زیاد شدن صلبیت تیر می‌باشد. همچنین در این ضخامت‌ها با افزایش تعداد الیاف حافظه‌دار، فرکانس طبیعی کاهش یافته و این کاهش به دلیل افزایش نیروی فشاری تولید شده بر اثر عملیات بازیابی کرنش در تکیه‌گاه‌ها می‌باشد. با افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، فرکانس طبیعی افزایش یافته و فاصله‌ی بین نظریه‌های مختلف تیر زیاد می‌شود. دلیل افزایش فاصله‌ی بین نظریه‌ها، در نظر گرفتن اثر ممان اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی در مقطع تیر می‌باشد. در ضخامت‌های ۳ میلی‌متر و ۳۰ میلی‌متر، افزایش نسبت طول به پهنای تیر موجب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین مشاهده شد با افزایش حد کرنش قابل بازیابی (کرنش پسماند حداکثر)، فرکانس طبیعی کاهش یافته و این کاهش با افزایش تعداد الیاف حافظه‌دار، بیشتر می‌شود.

۷- مراجع

- [1] Jani, J. M. Leary, M. Subic, A. and Gibson, M. A., "A Review of Shape Memory Alloy Research, Applications and Opportunities," *Materials & Design*, Vol. 56, pp. 1078-1113, 2014.
- [2] Rogers, C. A., "Active Vibration and Structural Acoustic Control of Shape Memory Alloy Hybrid Composites: Experimental Results," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 88, No. 6, pp. 2803-2811, 1990.
- [3] Tsai, X.-Y. and Chen, L.-W., "Dynamic Stability of a Shape Memory Alloy Wire Reinforced Composite Beam," *Composite Structures*, Vol. 56, No. 3, pp. 235-241, 5, 2002.
- [4] Damanpack, A. R. Bodaghi, M. Aghdam, M. M. and Shakeri, M., "On the Vibration Control Capability of Shape Memory Alloy Composite Beams," *Composite Structures*, Vol. 110, pp. 325-334, 4, 2014.
- [5] Seelecke, S. and Muller, I., "Shape Memory Alloy Actuators in Smart Structures: Modeling and Simulation," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 57, No. 1, pp. 23-46, 2004.
- [6] Ölander, A., "An Electrochemical Investigation of Solid Cadmium-Gold Alloys," *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 54, No. 10, pp. 3819-3833, 1932.
- [7] GRENINGER, A. B. and Mooradian, V. G., "Strain Transformation in Metastable Beta Copper-Zinc and Beta Copper-Ti Alloys," *AIME TRANS*, Vol. 128, pp. 337-369, 1938.
- [8] Kurdjumov, G. and Khandros, L., "Firstreports of the Thermoelastic Behaviour of the Martensitic Phase of Au-Cd alloys," *Doklady Akademii Nauk SSSR*, Vol. 66, pp. 211-213, 1949.
- [9] Chang, L. and Read, T., "Behavior of the Elastic Properties of AuCd," *Trans Met Soc AIME*, Vol. 191, pp. 47, 1951.
- [10] Buehler, W. J. Gilfrich, J. and Wiley, R., "Effect of Low-Temperature Phase Changes on the Mechanical Properties of Alloys Near Composition TiNi," *Journal of applied physics*, Vol. 34, No. 5, pp. 1475-1477, 1963.
- [11] Kauffman, G. B. and Mayo, I., "The Story of Nitinol: the Serendipitous Discovery of the Memory Metal and Its Applications," *The chemical educator*, Vol. 2, No. 2, pp. 1-21, 1997.
- [12] Tanaka, K., "A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One-Dimensional Tensile Behavior," *Res Mech*, Vol. 18, pp. 251-263, 1986.
- [13] Liang, C. and Rogers, C. A., "One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials," *Journal of intelligent material systems and structures*, Vol. 1, No. 2, pp. 207-234, 1990.
- [14] Brinson, L., "One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 4, No. 2, pp. 229-242, 1993.
- [15] Boyd, J. G. and Lagoudas, D. C., "A Thermodynamical Constitutive Model for Shape Memory Materials. Part I. The Monolithic Shape Memory Alloy," *International Journal of Plasticity*, Vol. 12, No. 6, pp. 805-842, 1996.
- [16] Lagoudas, D. C. Bo, Z. and Qidwai, M. A., "A Unified Thermodynamic Constitutive Model for SMA and Finite Element Analysis of Active Metal