



## به کارگیری تئوری مکانیک شکست برای پیش‌بینی عمر خستگی ورق‌های چندلایه متعامد

حسین توزنده‌جانی<sup>۱</sup>، زهرا سلطانی<sup>۱</sup>، سیدعلی حسینی کوردخیلی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکترا، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
۲- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
\* تهران، صندوق پستی ۱۴۵۸۸۸۹۶۹۴، [ali.hosseini@sharif.edu](mailto:ali.hosseini@sharif.edu)

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله از تئوری مکانیک شکست برای پیش‌بینی عمر خستگی ورق‌های چندلایه متعامد پایه پلیمری تحت بارگذاری متناوب استفاده شده است. در این رویکرد ابتدا سهم تنش در هر کدام از لایه‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک تعیین می‌شود و سپس با به کارگیری تئوری جنبشی شکست مقادیر پارامترهای خرابی در اجزای هر لایه یعنی الیاف و ماتریس آن به صورت جداگانه محاسبه می‌شود. با انجام این روند و به کارگیری مدل خرابی پیش‌رونده خواص الیاف و ماتریس کاهش یافته و به تبع آن خواص لایه‌ها تغییر می‌یابند. این امر سبب تغییر در سهم تنش هر لایه و در نتیجه تنش‌های فایبر و ماتریس می‌شود. به این ترتیب عمر چندلایه عمری خواهد بود که مقدار پارامتر خرابی الیاف یا ماتریس در تمام لایه‌ها به مقدار بحرانی ۱ برسد. در این رویکرد به منظور تعیین پارامترهای مادی موجود در رابطه تئوری جنبشی شکست برای ماده الیاف و ماتریس از نتایج تست‌های آزمایشگاهی روی لایه‌های تک‌جهته با زوایای ۰ و ۹۰ درجه استفاده می‌شود. ویژگی اصلی مدل ارائه شده کاهش چشمگیر میزان تست‌های آزمایشگاهی مورد نیاز نسبت به روش‌های متداول است. به منظور اعتبارسنجی مدل حاضر، نتایج خستگی به دست آمده با نتایج آزمایشگاهی موجود برای ورق‌های تک‌لایه با زوایای مختلف و چندلایه متعامد مقایسه شده که تطابق بسیار خوبی بین نتایج مشاهده شده است.</p>	<p>دریافت: ۹۵/۲/۱۶ پذیرش: ۹۵/۴/۲۳</p> <p><b>کلیدواژگان:</b> خستگی ورق چندلایه متعامد تئوری جنبشی شکست خرابی پیش‌رونده</p>

## Fatigue life prediction of cross-ply laminated composite plates using the kinetic theory of fracture

**Hossein Toozandehjani, Zahra Soltani, Seyed Ali Hosseini Kordkheili\***

Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran  
\*P.O.B. 1458889694, Tehran, Iran, [ali.hosseini@sharif.edu](mailto:ali.hosseini@sharif.edu)

**Keywords**  
Fatigue  
Cross-ply laminated composite Plates  
The kinetic theory of fracture  
Progressive damage

**Abstract**  
In this paper the kinetic theory of fracture is employed to predict fatigue life of composite cross-ply laminates. To this end, carrying stress in each layer is determined based on classical plate theory. Then using the rate dependent kinetic theory of fracture, damage index for constituents of each layer, matrix and fiber, are determined separately. According to these values, mechanical degradation model are applied separately for fiber and matrix material properties and the overall property of each layer will be updated. In this way carrying stress in each layer and consequently in fiber and matrix will be changed and fatigue failure is take place when value of fiber or matrix damage index in all layers of cross-ply laminated composite rises to the critical value. In this approach material parameters in fiber and matrix kinetic theory of fracture equations will be determined using experimental fatigue data for the longitudinal ( $\theta=0^\circ$ ) and transverse ( $\theta=90^\circ$ ) unidirectional, respectively. The huge advantage of this micromechanical model is reduction in amount of experimental test. Results from presented model show good agreement with experimental result presented by other researchers on cross-ply laminated composite plates.

۱- مقدمه  
طول ترک، شکست نهایی سازه به وقوع می‌پیوندد و تقریباً در طول عمر خستگی تغییر محسوسی در سختی فلزات رخ نمی‌دهد. اما در طول عمر خستگی مواد کامپوزیتی، مقاومت و سختی به‌طور تدریجی کاهش پیدا می‌کنند. بعلاوه به سبب ناهمگنی و ناهمسانگردی ذاتی این دسته از مواد، رفتار آن‌ها به مراتب پیچیده‌تر از مواد همگن است. به‌طور کلی خواص

در میان خسارات حاصل از شکست‌های مکانیکی در صنایع مختلف، شکست ناشی از خستگی تحت بارهای تناوبی سهم عمده‌ای را دارا است. تفاوت‌های زیادی بین رفتار خستگی فلزات و کامپوزیت‌های پلیمری وجود دارد. در فلزات خرابی با پیدایش ترک‌ها و خرابی‌های ریز شروع و در نهایت با افزایش

**Please cite this article using:**

Toozandehjani, H. Soltani, Z. and Hosseini Kordkheili, S. A., "Fatigue life prediction of cross-ply laminated composite plates using the kinetic theory of fracture", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 47-52, 2017.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

های تک‌لایه تحت بار خستگی با استفاده از مدل پل‌ساز<sup>۳</sup> پرداختند. فرتینگ [۱۱] با به‌کارگیری تئوری جنبشی شکست ارائه شده توسط هانسن و بیکرچرویس [۱۲] به تخمین پارامتر خرابی ماتریسی و پیش‌بینی عمر خستگی کامپوزیت‌های تک‌لایه خارج محوری<sup>۴</sup> پرداختند. شکرپه و همکاران [۱۳] آسیب پیش‌رونده در چندلایه کامپوزیتی سوراخ‌دار را با در نظر گرفتن اثرات هم‌زمان مکانیزم‌های تخریب درون و برون‌لایه‌ای مدل‌سازی نمودند. در پی یافتن مدل‌هایی با حداقل تعداد تست‌های آزمایشگاهی مورد نیاز، محققان مقاله حاضر سعی در بررسی فیزیک خرابی هر کدام از اجزا مدل میکرومکانیک کامپوزیت داشته‌اند. به این منظور تئوری شکست جنبشی به‌طور جداگانه برای هر کدام از اجزا الیاف و ماتریس در یک المان حجمی نماینده اعمال شده و مقادیر پارامترهای خرابی به‌دست می‌آیند. در واقع در مدل حاضر تنها با انجام تست خستگی بر روی تک‌لایه‌های صفر و ۹۰ درجه ثوابت موجود در رابطه تئوری شکست جنبشی برای الیاف و ماتریس تعیین می‌شوند. پس از آن مدل قادر خواهد بود افت تدریجی خواص و عمر خستگی تک‌لایه‌های با زاویه دلخواه و همچنین چندلایه‌های متعامد را تعیین نماید. به‌منظور نمایش دقت مدل حاضر، نتایج حاصل از آن با عمرهای خستگی تجربی موجود برای نمونه‌های تک‌لایه [۱۴] و چندلایه متعامد [۱۵] گرافیت-اپوکسی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

## ۲- روابط تئوری کلاسیک برای چند لایه کامپوزیتی

در این مقاله با توجه به نوع بارگذاری درون صفحه‌ای مورد مطالعه و کاهش خواص هر لایه به‌صورت همگن، برای به‌دست آوردن سهم تنش در هر کدام از لایه‌ها از تئوری کلاسیک استفاده شده است. به‌طور کلی فرضیات اصلی این تئوری عبارتند از [۱۶]:

- صفحات عمود بر صفحه میانی بعد از تغییرشکل به‌صورت صفحه و همچنان متعامد بر صفحه میانی باقی می‌مانند.
- طول خطوط عمود بر صفحه میانی بعد از تغییرشکل ثابت می‌ماند.
- لایه‌ها به‌صورت ایده‌آل به یکدیگر اتصال دارند.
- هر لایه متشکل از ماده‌ای همگن با خواص معلوم است.
- هر لایه در وضعیت تنش صفحه‌ای قرار دارد.
- با استفاده از این فرضیات و در نظر گرفتن میدان جابجایی روابط (۱) قابل بیان هستند.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u^0(x, y) - \partial w / \partial x \\ v(x, y) &= v^0(x, y) - \partial w / \partial y \\ w(x, y) &= w^0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

مولفه‌های کرنش درون صفحه‌ای مطابق روابط (۲) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه (۲)،  $\varepsilon_x^0$ ،  $\varepsilon_y^0$  و  $\gamma_{xy}^0$  مولفه‌های کرنش روی صفحه میانی هستند. پس از آن برای مولفه‌های نیرو و گشتاور بر واحد طول چندلایه با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت رابطه (۳) بیان می‌شود. پارامترهای موجود در رابطه (۳) در رابطه (۴) ارائه شده‌اند.

کامپوزیت‌ها تحت تاثیر پارامترهای متعددی نظیر جنس الیاف و ماتریس، نسبت وزنی الیاف به ماتریس، زاویه الیاف، ترتیب لایه‌چینی و روش‌های ساخت و نحوه پخت می‌باشد. بنابراین در صورتی که برای تعیین رفتار خستگی ماده کامپوزیتی از تست آزمایشگاهی استفاده شود، با تغییر هر کدام از پارامترهای فوق نیاز به انجام تست‌های جدید برای تعیین رفتار خستگی می‌باشد. به‌عبارت دیگر برخلاف مواد فلزی، نتایج هر سری تست آزمایشگاهی فقط برای همان نوع کامپوزیت خاص با پارامترهای مشخص قابل استفاده است. از طرف دیگر با توجه به حساسیت خواص ماتریس‌های زمینه پلیمری به دما و رسانایی حرارتی پایین آنها، تست خستگی کامپوزیت‌های پلیمری با فرکانسی کمتر از مقدار حداکثری ۵ هرتز، معمولاً با فرکانس ۱ هرتز، انجام می‌شود. به این ترتیب با در نظر گرفتن عمر متوسط بین  $10^2$  تا  $10^7$  برای هر نمونه انجام تست حدود چند هفته و ساخت دیاگرام S-N تنها برای یک نوع کامپوزیت خاص حدود ۱ سال به طول خواهد انجامید [۱]. بنابراین آرایه روشی که مبتنی بر تعداد تست‌های کمتری باشد همواره مورد توجه محققین و صنعت‌گران بوده است.

روش‌های تحلیل خستگی مواد کامپوزیتی در دو رویکرد اصلی ماکرومکانیک و یا میکرومکانیک تقسیم‌بندی می‌شوند. عیب اصلی روش‌های ماکرومکانیک استفاده از ضرایب تجربی به‌منظور پیش‌بینی گسترش آسیب و عدم به‌کارگیری معیارهای مبتنی بر فیزیک ماده است. در نتیجه این مدل‌ها محدود به انواع مشخصی از مواد کامپوزیتی بوده و در حالت کلی نمی‌توانند مورد استفاده قرار گیرند [۲]. برخلاف مدل‌های ماکرومکانیک، مدل‌های میکرومکانیک امکان بررسی کامل مکانیزم خرابی در هر کدام از اجزا ماده کامپوزیتی را فراهم می‌آورند. این مدل‌ها بر اساس مفهوم المان حجمی نماینده<sup>۱</sup> یا سلول واحد تکراری<sup>۲</sup> هستند.

بر خلاف مطالعات فراوان صورت گرفته در طی پنج دهه اخیر در زمینه پیش‌بینی عمر خستگی کامپوزیت‌ها، این مسئله هنوز به عنوان زمینه‌ای چالش برانگیز برای محققان مطرح است. ریفسیندر و ژانجون [۲] یک معیار خستگی میکرومکانیک بر اساس فرمولاسیون تنش متوسط مواد کامپوزیتی با استفاده از روش موری-تاناکا توسعه دادند. سیرامین و همکاران [۳] از مدل استوانه‌های هم‌مرکز به‌منظور مطالعه خستگی کامپوزیت‌های تک‌لایه استفاده نمودند. در این مدل برای پیش‌بینی عمر و ترسیم منحنی‌های اس-ان تنش‌های متوسط شعاعی در هر کدام از اجزاء به‌کار گرفته شد. ابدلال و همکاران [۴] بر پایه ترکیبی از مدل خرابی اورتوتروپیک و مدل تکامل خستگی همسانگرد به ارائه مدلی به‌منظور پیش‌بینی تکامل خرابی خستگی در کامپوزیت‌های پایه پلیمری پرداختند. بیژن محمدی و همکاران [۵] به ارائه مدلی مبتنی بر مکانیک خرابی محیط‌های پیوسته برای پیش‌بینی عمر خستگی چندلایه‌های متعامد کامپوزیتی پرداختند. هوآنگ [۶] استحکام خستگی کامپوزیت‌های الیافی تک‌لایه را بر حسب خواص خستگی اجزا آن بیان کرد. هوآنگ و همکاران [۷] رویکردی میکرومکانیکی را برای تعیین عمر خستگی کامپوزیت‌های پایه پلیمری ارائه کردند. شکرپه و همکاران [۸] از ترکیبی از رویکرد میکرومکانیکی و رویکرد پیش‌رونده سفتی نرمال شده به‌منظور عمر خستگی نانوکامپوزیت‌های پایه پلیمری استفاده کردند. کیان و همکاران [۹] با استفاده از یک مدل خستگی عددی چندمقیاسی به بررسی رفتار خستگی کامپوزیت‌های تک‌جهته الیاف شیشه تحت بار متناوب کشش-کشش پرداختند. ادیب نظری و همکاران [۱۰] به مشاهده رفتار کامپوزیت-

3. Micromechanical bridging model  
4. Off-axis

1. Representative Volume Element  
2. Repeated Unit Cell

بر طبق مطالعه صورت گرفته توسط هوآنگ [۱۷] تنها پنج درآیه از درآیه‌های ماتریس پل‌ساز  $[A_{ij}]$  مستقل هستند. بقیه درآیه‌ها از شرط تقارن ماتریس نرمی رابطه (۸) تعیین می‌شوند. همچنین با توجه به تقارن محوری سلول واحد استوانه‌ای در هر لایه کامپوزیتی، تساوی  $A_{22} = A_{33}$  نیز برای دو عضو از این عناصر برقرار است. به‌طور خلاصه هشت المان غیرصفر این ماتریس در رابطه (۱۱) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} A_{11} &= E_{11}^m/E_{11}^f \\ A_{22} &= A_{33} = A_{44} = \frac{1}{2}(1 + E_{22}^m/E_{22}^f) \\ A_{12} &= A_{13} = (S_{12}^f - S_{12}^m)(A_{11} - A_{22})/(S_{11}^f - S_{11}^m) \\ A_{55} &= A_{66} = \frac{1}{2}(1 + G_{12}^m/G_{12}^f) \end{aligned} \quad (11)$$

در مدل ارائه شده در این مقاله با به‌کارگیری تئوری جنبشی شکست، به‌صورتی که در بخش بعد توضیح داده خواهد شد، مقادیر پارامترهای خرابی در الیاف و ماتریس ( $D^{f(m)}$ ) محاسبه می‌شوند. سپس از خواص کاهش‌یافته الیاف و ماتریس در تعیین ضرایب روابط (۱۱) استفاده می‌شود.

#### ۴- مدل خستگی براساس تئوری جنبشی شکست

تئوری جنبشی شکست توسط کلمن [۱۸] و ژورکو [۱۹] در مطالعاتی موازی با هدف توصیف پدیده شکست به‌صورت پدیده‌ای ترمودینامیکی توسعه داده شده است. معادله اساسی این تئوری بیان‌گر ارتباط بین زمان شکست و تنش وارده بر قطعه و دمای مطلق آن به‌صورت رابطه (۱۲) است.

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U-\gamma\sigma}{kT}\right) \quad (12)$$

که در آن  $\tau_0$ ،  $k$ ،  $U$  و  $\gamma$ ، به ترتیب، پریود نوسان اتم‌ها در جسم، ثابت بولتزمن، انرژی برانگیختگی فرآیند شکست و ثابت مادی هستند. پس از آن هانسن و بیکرجرویس [۱۲] به‌منظور مطالعه شکست پلیمرها تحت بارگذاری متغیر، تئوری جنبشی شکست وابسته به نرخ را توسعه دادند. این دو با استفاده از رابطه (۱۲) به تعریف یک پارامتر خرابی پرداختند که مقدار آن در طول بارگذاری متناوب از صفر در ابتدا به مقدار ۱ در لحظه شکست افزایش می‌یابد. بر طبق این تئوری میزان افزایش پارامتر خرابی به‌طور مستقیم با نرخ شکست پیوندهای اتمی،  $K_b$ ، مرتبط بوده و با استفاده از رابطه (۱۳) بیان می‌شود.

$$\frac{dD^i}{dt} = (D_0 - D^i(t))K_b; \quad D_0 = \frac{e}{e-1}, i = f, m \quad (13)$$

که در آن نرخ شکست پیوندهای اتمی از رابطه (۱۴) به‌دست می‌آیند.

$$K_b = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{U-\gamma\sigma(t)}{kT}\right) \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۱۳) رابطه تعیین پارامتر خرابی تحت بارگذاری متناوب به‌صورت رابطه (۱۵) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{dD^i}{dt} &= (D_0 - D^i(t))\frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{U-\gamma\sigma(t)}{kT}\right) \\ D_0 &= \frac{e}{e-1}; \quad D^i(0) = 0 \quad i = f, m \end{aligned} \quad (15)$$

با جایگذاری بارگذاری سینوسی با فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  و تنش‌های متوسط و دامنه  $\sigma_a$  و  $\sigma_m$  در رابطه (۱۵) و استفاده از تغییر متغیر  $t = 2\pi N/f$ ، معادله دیفرانسیل پارامتر خرابی بر حسب تعداد سیکل به‌صورت رابطه (۱۶) بازنویسی کرد.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4)$$

از آن جایی که نیروی وارد بر چندلایه کامپوزیتی محوری بوده و با توجه به لایه‌چینی‌های متقارن مورد مطالعه، تنها مولفه  $N_x$  از بردار نیرو و گشتاور رابطه (۳) مقداری مخالف صفر و برابر با حاصلضرب تنش اعمالی در ضخامت کل ورق دارد. به این ترتیب می‌توان مقادیر مجهولات  $\{\epsilon^0\}$  و  $\{k\}$  را به راحتی محاسبه نمود. سپس با جایگذاری مقدار  $z$  میانی هر لایه در رابطه (۲) می‌توان مقدار کرنش و در نتیجه تنش متناظر در آن لایه را تعیین نمود.

#### ۳- مدل پل‌ساز میکرومکانیک بهبودیافته

با مشخص شدن مقدار تنش اعمالی به هر لایه کامپوزیتی، در گام بعد احتیاج است مقادیر تنش در هر کدام از اجزا (الیاف و ماتریس) یک المان حجمی تعیین شوند. به این منظور مدل پل‌ساز میکرومکانیک هوآنگ [۱۷] به‌کار گرفته شده است. در این مدل، میزان ظرفیت تحمل بار ماتریس نسبت به الیاف با استفاده از ماتریس پل‌ساز  $[A_{ij}]$  طبق رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$\{\sigma_i^m\} = [A_{ij}]\{\sigma_j^f\} \quad (5)$$

که در آن  $m$  و  $f$  نشان‌دهنده مقادیر مربوط به ماتریس و الیاف هستند. در واقع مهم‌ترین جنبه این مدل، تعریف درست درآیه‌های ماتریس پل‌ساز می‌باشد. همچنین مقادیر تنش‌ها و کرنش‌های متوسط برای یک المان حجمی با کسر حجمی الیاف  $V_f$  به‌صورت رابطه (۶) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \{\sigma_i\} &= V_f\{\sigma_i^f\} + (1 - V_f)\{\sigma_i^m\} \\ \{\epsilon_i\} &= V_f\{\epsilon_i^f\} + (1 - V_f)\{\epsilon_i^m\} \end{aligned} \quad (6)$$

روابط ساختاری در الیاف، ماتریس و ماده کامپوزیتی نیز به‌صورت روابط (۷) تا (۱۱) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \{\epsilon_i^f\} &= [S_{ij}^f]\{\sigma_j^f\} \\ \{\epsilon_i^m\} &= [S_{ij}^m]\{\sigma_j^m\} \\ \{\epsilon_i\} &= [S_{ij}]\{\sigma_j\} \end{aligned} \quad (7)$$

با ترکیب روابط (۶) و (۷)، طبق رابطه (۸) ماتریس نرمی کامپوزیت استخراج می‌شود.

$$[S_{ij}] = (V_f[S_{ij}^f] + V_m[S_{ij}^m][A_{ij}]) (V_f[I] + V_m[A_{ij}])^{-1} \quad (8)$$

حال با در نظر گرفتن رابطه (۵) و تعریف ماتریس‌های مشابه  $[B_{ij}^{f(m)}]$  در هر یک از اجزاء می‌توان طبق رابطه (۹) مقادیر تنش متوسط در آن‌ها را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} \{\sigma_i^f\} &= [B_{ij}^f]\{\sigma_j\} \\ \{\sigma_i^m\} &= [B_{ij}^m]\{\sigma_j\} \end{aligned} \quad (9)$$

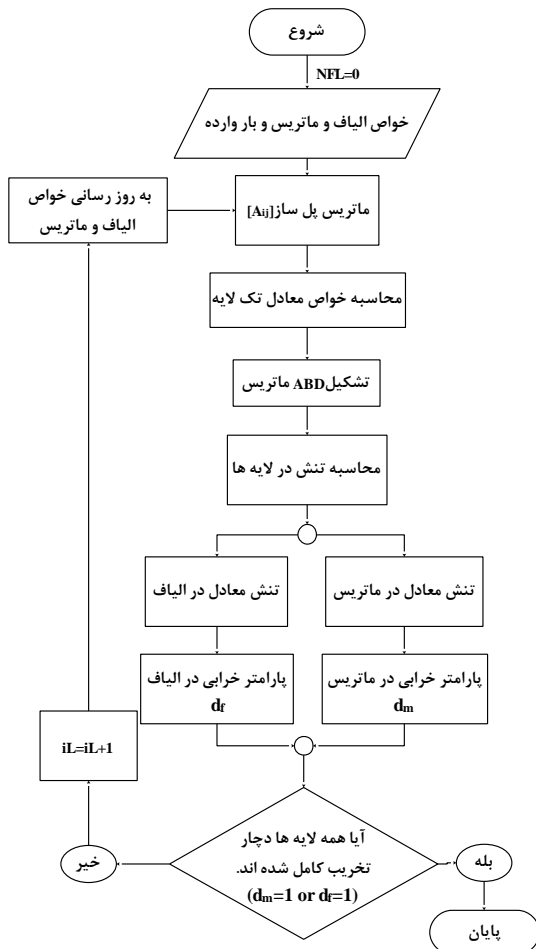
ماتریس‌های  $[B_{ij}^{f(m)}]$  برحسب ماتریس پل‌ساز با ترکیب روابط (۵) تا (۹) به‌صورت روابط (۱۰) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} [B_{ij}^f] &= (V_f[I] + V_m[A_{ij}])^{-1} \\ [B_{ij}^m] &= [A_{ij}](V_f[I] + V_m[A_{ij}])^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

هر کدام از لایه‌ها، با به کارگیری مدل پل‌ساز تانسور تنش در هر کدام از اجزا (الیاف، ماتریس) لایه موردنظر مشخص می‌شود. در گام بعد تنش موثر اسکالر معادل با سهم تانسور تنش وارده بر الیاف و ماتریس، به ترتیب، با استفاده از روابط تنش ون میسر و فرتیگ محاسبه می‌شوند. سپس مقدار پارامتر خرابی در هر کدام از اجزا با استفاده از تئوری جنبشی شکست بعد از گذشت تعدادی سیکل تعیین می‌شود. در گام بعد با استفاده از این پارامترهای خرابی و مدل خرابی پیش‌رونده، خواص الیاف و ماتریس به صورت تدریجی افت داده می‌شوند. سپس مدل تئوری کلاسیک و مدل پل‌ساز با توجه به این خواص کاهش یافته به روزرسانی شده و سهم هر کدام از لایه‌ها و اجزای آن‌ها در تحمل بار وارده اصلاح می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که مقدار پارامتر خرابی در الیاف یا ماتریس در همه لایه‌ها به مقدار بحرانی برسد. به این ترتیب می‌توان به ارائه مدل خستگی پیش‌رونده چندمقیاسی به عنوان ابزاری قدرتمند در تحلیل افت خواص و پیش‌بینی عمر خستگی کامپوزیت‌های چندلایه متعامد تحت بارهای متناوب پرداخت. شکل ۱ الگوریتم مدل خستگی پیش‌رونده چند مقیاسی ارائه شده را نشان می‌دهد.

۶- نتایج

در این بخش به منظور بررسی صحت مدل ارائه شده و بیان قابلیت‌های آن، ابتدا مدل ارائه شده برای تعیین عمر خستگی نمونه‌های تک‌جهته T800H/2500Epoxy با زاویه دلخواه استفاده کرده و نتایج با نتایج تست‌های خستگی ارائه شده توسط کاوایی و همکاران [۱۴] مقایسه می‌شود.



شکل ۱ الگوریتم مدل خستگی پیش‌رونده چند مقیاسی

$$\frac{dD^i}{dN} = \frac{2\pi kT}{\omega h} (D_0 - D^i(N)) \times \exp\left(-\frac{u - \gamma(\sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi N))}{kT}\right) \quad (16)$$

رابطه (۱۶) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که دارای حل تحلیلی نمی‌باشد. با به کارگیری سری تیلور رابطه پارامتر خرابی را می‌توان به صورت رابطه (۱۷) بیان نمود.

$$\ln\left(\frac{D_0^m}{D_0^m - D^m(N)}\right) = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{U - \gamma\sigma_m}{kT}\right) \times \int_0^N \exp\left(\frac{\gamma\sigma_a \sin(2\pi N)}{kT}\right) dN = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{U - \gamma\sigma_m}{kT}\right) \times \int_0^N \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma\sigma_a}{kT}\right)^n \exp\left(\frac{\sin(2\pi N)}{n!}\right) dN \quad (17)$$

به این ترتیب و با در نظر گرفتن پنج جمله ابتدایی در سری رابطه (۱۷) رابطه پارامتر خرابی به صورت رابطه (۱۸) به دست می‌آید.

$$D^m(N) = D_0^m(1 - e^{-A}) \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)، A به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$A = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{U - \gamma\sigma_m}{kT}\right) \times \int_0^N \sum_{n=0}^5 \left(\frac{\gamma\sigma_a}{kT}\right)^n \exp\frac{\sin(2\pi N)}{n!} dN \quad (19)$$

یکی از مهم‌ترین جنبه‌های استفاده از تئوری جنبشی شکست، انتخاب درست تنش اسکالر معادل در هر کدام از اجزا الیاف و ماتریس است. در مطالعه حاضر برای تعیین تنش موثر اسکالر معادل با تانسور تنش اعمالی بر الیاف و ماتریس، به ترتیب، از رابطه تنش ون میسر و رابطه ارائه شده توسط فرتیگ [۱۱] یعنی رابطه (۲۰) استفاده شده است.

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\frac{B_t}{B_{s1}} \{I_t\}^2 + \frac{1}{(1 - \frac{\beta}{\tau_0} \{-I_h\})} \left[ I_{s1} + \frac{B_{s2}}{B_{s1}} I_{s2} \right]} \quad (20)$$

پارامترهای رابطه (۲۰) در رابطه (۲۱) تعریف شده‌اند.

$$I_t = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33} + \sqrt{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - 4(\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2)}}{2}$$

$$I_{s1} = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (21)$$

$$I_{s2} = \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{23}^2$$

$$I_h = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

همچنین  $\beta$  ضریب استحکام فشاری بوده و  $\{\}$  نماد گروه ماکولی است که به‌ازای عبارت منفی داخل گروه مقدار آن صفر می‌باشد. به علاوه مقادیر  $B_i$  ها از سه تست استاتیکی خرابی کامپوزیت مربوط به مودهای شکست ماتریسی که عبارتند از کشش عرضی، فشار عرضی و برش داخل صفحه، تعیین می‌شوند.

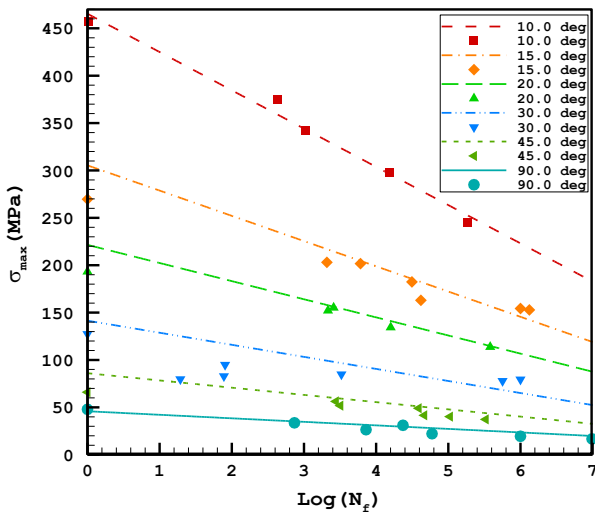
۵- الگوریتم خستگی پیش‌رونده چندمقیاسی

در این بخش، گام‌های موردنیاز برای مدل‌سازی رفتار مکانیکی چندلایه متعامد کامپوزیتی تحت بارگذاری متناوب بیان می‌شود. ابتدا با استفاده از تئوری کلاسیک تنش اعمالی به هر کدام از لایه‌ها مشخص می‌شود. سپس در

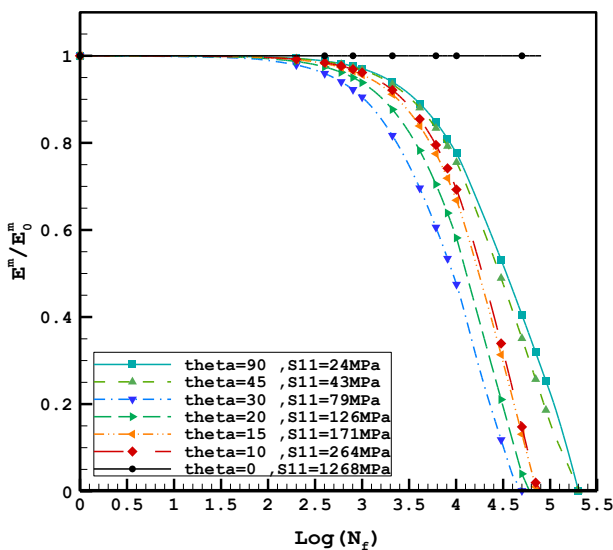
افت مدول ماتریس و الیاف در زوایای مختلف با استفاده از مدل حاضر به دست آمده و در شکل های ۳ و ۴ نمایش داده شده اند. همان طور که انتظار میرفت، افت مدول الیاف در زاویه صفر درجه و افت مدول ماتریس در بقیه زوایا سبب شکست تک لایه می شود که بیانگر توانایی مدل در شناسایی مد خرابی می باشد.

۶-۲- نتایج چندلایه متعامد

پس از تعیین مقادیر  $U$  و  $\gamma$ ، برای الیاف و ماتریس مطابق جدول ۲، می توان عمر خستگی ورق چند لایه متعامد را با استفاده از الگوریتم نشان داده شده در شکل ۱ تعیین نمود. شکل ۵ نمودار اس- ان به دست آمده برای ورق T800H/2500Epoxy با لایه چینی  $[0,90]_{3s}$  را در مقایسه با نتایج تجربی موجود [۱۵] نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود مدل حاضر توانایی پیش بینی عمر خستگی چندلایه کامپوزیتی را با دقت خوبی و به صورت محافظه کارانه دارد.



شکل ۵ نمودار اس- ان برای نمونه های تک جهته محوری و خارج از محور (نماد: نتایج تجربی موجود [۱۴]، خط: مدل حاضر)



شکل ۶ نمودار مدول نرمال شده ماتریس بر حسب سیکل برای نمونه های تک جهته

سپس با توجه به نتایج آزمایشگاهی موجود [۱۵] برای چندلایه متعامد T800H/2500Epoxy با لایه چینی  $[0,90]_{3s}$  به تعیین عمر خستگی این ورق ها پرداخته می شود. مشاهدات بیانگر انطباق بسیار خوب بین نتایج می باشد که نشان از قابلیت بالای مدل ارائه شده دارد. همچنین جدول ۱ خواص مکانیکی کامپوزیت مورد نظر و اجزای آن را نشان می دهد.

جدول ۱ خواص مکانیکی T800H/2500Epoxy و اجزاء ( $V_f = 0.64$ ) [۱۴]

	$v_{12}$	$G_{12}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$E_{11}$ (GPa)	
الیاف	۰/۲۷۶	۱۵	۱۲/۸	۲۴۵	
ماتریس	۰/۴۶	۱/۴۹	۳/۹۳	۴/۰۱	
کامپوزیت	۰/۳۵۷	۴/۷۸	۸/۴۵	۱۵۹	

۶-۱- نتایج تک لایه با زاویه دلخواه

اولین قدم جهت به کارگیری مدل حاضر استخراج پارامترهای  $U$  و  $\gamma$  برای هر کدام از اجزا الیاف و ماتریس می باشد. برای تعیین مقادیر این پارامترها، به ترتیب، از نتایج تست خستگی لایه های ۰ و ۹۰ درجه استفاده می شود. بدین منظور ابتدا رابطه (۱۲) به صورت رابطه (۲۲) باز نویسی می شود.

$$\sigma = \frac{-kT}{\gamma \log e} \log N_f + \frac{kT}{\gamma \log e} \log \left( \frac{\omega \tau_0}{2\pi} \right) + \frac{U}{\gamma} \quad (22)$$

که  $N_f = \omega \tau / 2\pi$ ، بنابراین در نمودار  $\sigma - \log N_f$  پارامتر  $\frac{-kT}{\gamma \log e}$  شیب نمودار و پارامتر  $\frac{kT}{\gamma \log e} \log \left( \frac{\omega \tau_0}{2\pi} \right) + \frac{U}{\gamma}$  عرض از مبدأ آن می باشد. به این ترتیب و با استفاده از نتایج تست خستگی لایه های ۰ و ۹۰ درجه مقادیر  $U$  و  $\gamma$ ، برای الیاف و ماتریس به صورت جدول ۲ به دست می آید.

جدول ۲ مقادیر  $U$  و  $\gamma$  برای الیاف و ماتریس

	$U$ (kJ/MPa - mol)	$U$ (kJ/mol)	
الیاف	۳۲/۴۲۳	۱۴۶۱۳۰	
ماتریس	۱۰۶۰/۲	۱۲۰۹۸۰	

همچنین در جدول ۳ مقادیر ضرایب  $B_i$  های ماتریس در رابطه (۷)، که با استفاده از سه تست استاتیکی خرابی کشش عرضی، فشار عرضی و برش داخل صفحه به دست آمده اند، آورده شده اند.

جدول ۳ مقادیر ضرایب موجود در تنش موثر فر تینگ [۱۱]

$B_f$ (Pa <sup>-15</sup> )	$B_{s1}$ (Pa <sup>-15</sup> )	$B_{s2}$ (Pa <sup>-15</sup> )
۰/۸۲۴	۰/۸۹۴	۶/۹۴

در شکل ۲ منحنی های اس- ان به دست آمده برای لایه ها با زوایای مختلف در مقایسه با نتایج تجربی نشان داده شده اند. همان طور که از نمودار مشخص است انطباق بسیار خوبی بین نتایج تجربی موجود و عمر پیش بینی شده وجود دارد. بیشترین اختلاف مربوط به لایه ۳۰ درجه می باشد. این امر به دلیل پراکندگی نتایج تست در این چیدمان است که نشان از عدم اطمینان نتایج آزمایشگاهی ارائه شده برای تک لایه با این زاویه دارد و سبب مشاهده این اختلاف با عمر پیش بینی شده است.

همچنین طبق آنچه در تست های آزمایشگاهی مشاهده و گزارش شده خرابی در تک لایه های با زوایای بیشتر از ۲ درجه ناشی از شکست ماتریس و برای زوایای کمتر از ۲ درجه ناشی از شکست الیاف می باشد [۲۰]. نمودار

۸- مراجع

[1] Pach, E. Korin, I. and Ipina, J.P., "Simple Fatigue Testing Machine for Fiber-Reinforced Polymer," *Experimental Techniques*, Vol. 36, pp. 76-82, 2012.

[2] Reifsnider, K. and Gao, Z., "A Micromechanics Model for Composites Under Fatigue Loading," *International Journal Of Fatigue*, Vol. 13, No. 2, pp. 149-156, 1991.

[3] Subramanian, S. Reifsnider, K. and Stinchcomb, W., "A Micromechanics Model For The Prediction Of Fatigue Characteristics Of Off-Axis Unidirectional Laminates," *Applied Composite Materials*, Vol. 1, No. 1, pp. 69-74, 1994.

[4] Abdelal, G. Caceres, A. and Barbero E., "A Micro-Mechanics Damage Approach for Fatigue of Composite Materials," *Composite Structures*, Vol. 56, No. 4, pp. 413-422, 2002.

[5] Mohammadi, B. Fazlali, B. and Madoliat, R., "Fatigue Life Prediction Of Symmetric Cross Ply Laminated Composite Using A Developed Continuum Damage Mechanics Based Model," *In Persian, Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 2, No. 1, pp. 13-22, 2015.

[6] Huang, Z.M., "Micromechanical Modeling Of Fatigue Strength Of Unidirectional Fibrous Composites," *International Journal Of Fatigue*, Vol. 24, No. 6, pp. 659-670, 2002.

[7] Huang, Y. Jin, K. Xu, L. Mustafa, G. Han, Y. and Ha, S., "A Micromechanical Methodology for Fatigue Life Prediction of Polymeric Matrix Composites," 18<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials, 2011.

[8] Shokrieh, M.M. and Esmkhani, M., "Fatigue Life Prediction of Nanoparticle/Fibrous Polymeric Composites Based on the Micromechanical and Normalized Stiffness Degradation Approaches," *Journal of Materials Science*, Vol. 48, No. 3, pp. 1027-1034, 2012.

[9] Qian, C. Westphal, T. and Nijssen, R.P.L., "Micro-Mechanical Fatigue Modelling Of Unidirectional Glass Fibre Reinforced Polymer Composites," *Computational Materials Science*, Vol. 69, pp. 62-72, 2013.

[10] Adibnazari, S. Farsadi, M. Koochi, A. and Khorashadizadeh, S.N., "New Approach For Fatigue Life Prediction Of Composite Plates Using Micromechanical Bridging Model," *Journal of Composite Materials*, Vol. 49, No. 3, pp. 309-319, 2014.

[11] Fertig, R. "Bridging the Gap between Physics and Large-Scale Structural Analysis: A Novel Method for Fatigue Life Prediction of Composites," SAMPE 2009 Fall Technical Conference. 2009.

[12] Hansen, A.C. and Baker-Jarvis, J., "A Rate Dependent Kinetic Theory of Fracture for Polymers," *International Journal of Fracture*, Vol. 44, No. 3, pp. 221-231, 1990.

[13] Shokrieh, M. M. Ghajar, M. Salamattalab, M. and Madoliat, R., "Progressive Damage Modeling Of Laminated Composites By Considering Simultaneous Effects Of Interlaminar And Intralaminar Damage Mechanisms", *In Persian, Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 2, No. 2, pp. 1-8, 2015.

[14] Kawai, M. Yajima, S. Hachinohe, A. and Takano, Y., "Off-Axis Fatigue Behavior Of Unidirectional Carbon Fiber-Reinforced Composites At Room And High Temperatures," *Journal of Composite Materials*, Vol. 35, No. 7, pp. 545-576, 2001.

[15] Kawai, M. and Koizumi, M., "Nonlinear Constant Fatigue Life Diagrams For Carbon/Epoxy Laminates At Room Temperature," Vol. 38, pp. 2342-2353, 2007.

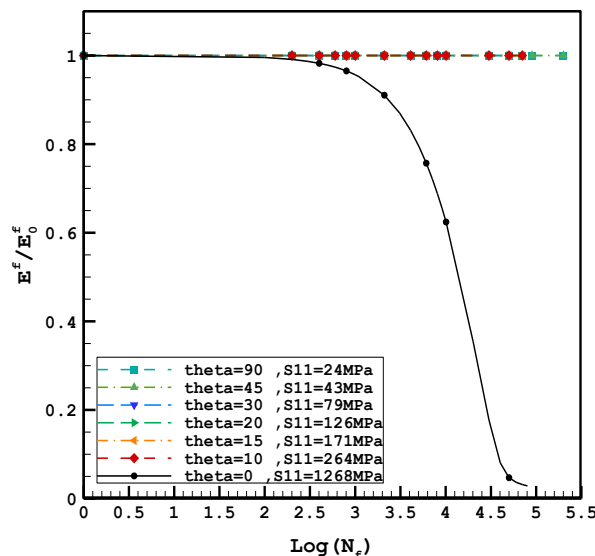
[16] Herakovich, C.T. "Mechanics of Fibrous Composites," First ed., John Wiley & Sons, Virginia, pp. 112-124, 1998.

[17] Huang, Z., "Tensile Strength Of Fibrous Composites At Elevated Temperature," *Materials Science and technology*, Vol. 16, No. 1, pp. 81-94, 2000.

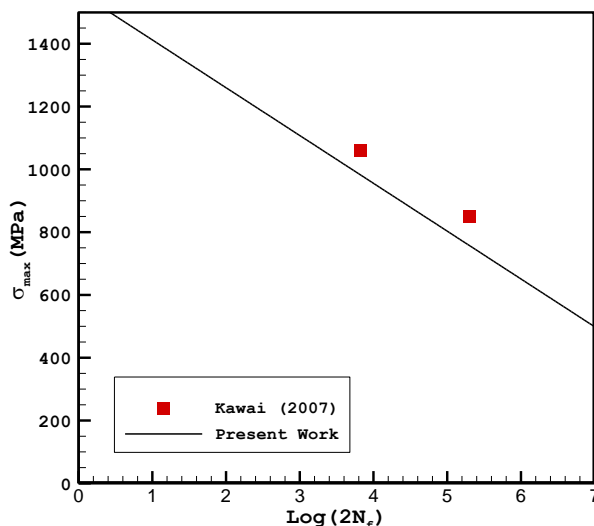
[18] Coleman, B., "Time Dependence of Mechanical Breakdown Phenomena," *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, pp. 862-866, 1956.

[19] Zhurkov, S. and Kuksenko, V., "The Micromechanics of Polymer Fracture," *International Journal of Fracture*, Vol. 11, pp. 629-639, 1975.

[20] Hashin, Z. and Rotem, A., "A Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Materials," *Journal of Composite Materials*, Vol. 7, pp.448-464, 1973.



شکل ۴ نمودار مدول نرمال شده الیاف بر حسب سیکل برای نمونه‌های تک جهت



شکل ۵ نمودار اس-ان برای چندلایه متعامد (نماد: نتایج تجربی موجود [۱۵]، خط: مدل حاضر)

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل خستگی پیش‌رونده چند مقیاسی مبتنی بر فیزیک خرابی در هر یک از اجزا جهت پیش‌بینی عمر ورق‌های متعامد چندلایه ارائه شده است. قابلیت پیش‌بینی خرابی در سطح اجزاء سبب شده تا مدل موردنظر به حداقل داده تجربی جهت تعیین عمر نیاز داشته باشد. نتایج به‌دست آمده از مدل جهت پیش‌بینی مد خرابی با نتایج ارائه شده در مراجع منطبق بوده و نمودار اس-ان هم برای ورق‌های تک‌لایه با زوایای مختلف و هم چندلایه متعامد با دقت خوبی با نتایج تست‌های تجربی موجود سازگار است. بنابراین با توجه به قدرت مدل ارائه شده، می‌توان برای هر ورق متعامد چندلایه پایه پلیمری با جنس‌های مختلف و در دمای محیطی موردنظر، تنها با انجام تست‌های خستگی بر روی نمونه‌های تک‌لایه ۰ و ۹۰ درجه، عمر خستگی را برای لایه چینی‌های دلخواه تعیین نمود.