



## مایکرومکانیک انتقال تنش از فاز میانی در آزمون بیرون کشی الیاف از رزین

فتح‌اله طاهری بهروز<sup>۱\*</sup>، سید محمدجواد مهدوی زاده<sup>۲</sup>، محمدجواد غلامی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* taheri@iust.ac.ir ، 16846-13114

چکیده	اطلاعات مقاله
در این پژوهش از یک مدل مایکرومکانیکی برای پیش‌بینی انتقال تنش از لایه میانی کامپوزیت سه فازی تقویت‌شده استفاده شده است. مدل متقارن شامل الیاف، زمینه و لایه میان آن‌ها است. رفتار مکانیکی اجزا تشکیل دهنده کامپوزیت به صورت الاستیک خطی فرض شده‌اند. همچنین، زمینه به صورت یک ماده‌ی همسانگرد و الیاف و لایه میانی به صورت مواد همسانگرد عرضی فرض شده‌اند. تحلیل تنش سه بعدی در دو حالت الف) لایه میانی کاملاً متصل و سالم، ب) لایه میانی تا حدی جدا شده، انجام شده است. از مدل‌سازی تحلیلی، یک جفت معادلات دیفرانسیل جزئی مستقل برحسب مؤلفه‌های نامعین جابجایی به دست آمده است. سپس به منظور حل دقیق معادلات دیفرانسیل از روش جداسازی متغیرها و بسط توابع ویژه استفاده شد. حل‌های تحلیلی برای شرایط مرزی آزاد در سطح خارجی ماتریس برای مدل کردن آزمون بیرون کشی به دست آمده‌اند. در هر دو حالت نتایج حاصل از روش تحلیلی هم‌خوانی خوبی با نتایج به دست آمده از روش عددی دارند. با مقایسه مؤلفه‌های تنش برشی، شعاعی و محوری مشخص می‌شود که کامپوزیت سه فازی به مراتب مقادیر کمتری نسبت به کامپوزیت دوفازی اتخاذ می‌کند، همچنین میدان تنش به دست آمده در حالت تا حدی جدا شده، مقادیر کوچک‌تری نسبت به حالت سالم اتخاذ می‌کند.	دریافت: ۹۵/۸/۴ پذیرش: ۹۵/۱۱/۱۹ <b>کلیدواژگان:</b> مایکرومکانیک فاز میانی انتقال تنش حالت سالم حالت تا حدی جدا شده

## Micromechanics of stress transfer through the interphase in pull out test of fiber through the resin

Fathollah Taheri-Behrooz\*, Seyyed Mohammad Javad Mahdavi Zade, Mohammad Javad Gholami

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

\*P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran, taheri@iust.ac.ir

### Keywords

Micromechanics  
Interphase  
Stress transfer  
Intact  
Partially debonded

### Abstract

In this paper, a micromechanical based model is presented to estimate the stress transfer in interphase of three-phase reinforced composites. The symmetric model consists of fiber, matrix and a layer in between them. In this study, composite constituents were considered as linear elastic materials. Also, matrix was treated as isotropic material while the fiber and the interphase were considered as transversely isotropic materials. The stress distribution solutions for intact model and partially debonded model are obtained. A pair of uncoupled partial differentiation equations was obtained in terms of unknown displacement components. The separation of variable with Eigenfunction expansion methods were used to drive the exact solution of the PDE's. Analytical solutions for the free boundary conditions on the external surface of the matrix are obtained to simulate the pull out test. In both cases, numerical findings revealed a good correlation with the analytical results. By comparing the shear, radial and axial stress components becomes clear that, three-phase composite adopts smaller amounts than of two-phase composites. Also it was shown that the stress field in partially debonded model has small quantities in comparison to the intact model.

### ۱- مقدمه

عواملی مانند هندسه‌ی نمونه، درصد حجمی الیاف و نوع مکانیزم اتصالی که مابین الیاف و ماتریس وجود دارد، اشاره نمود [4-8]. ذکر این نکته بسیار حائز اهمیت است که با توجه به نوع بار اعمالی بر کامپوزیت‌ها میزان درصد انتقال تنش در فاز میانی کامپوزیت‌ها تغییر می‌کند و از این رو بررسی تنش انتقالی در کامپوزیت‌ها امری بسیار مهم خواهد بود [9]. به منظور بررسی اثر لایه میانی بر عملکرد کلی کامپوزیت از آزمایش‌های مختلفی از قبیل بیرون کشی الیاف، فشار بر الیاف، شکست در فاز میکرو در الیاف و تکه تکه

امروزه کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف به دلیل وزن مخصوص کم و پایداری ترمومکانیکی کاربردهای فراوانی در صنعت دارند. در حین فرآیند تشکیل کامپوزیت لایه نازکی با ضخامت نانو در میان الیاف و ماتریس تشکیل می‌شود که از این فاز به عنوان فاز میانی و یا لایه میانی نام برده می‌شود [1]. در تشکیل فاز میانی خواص از الیاف تا ماتریس تغییر می‌کند [2,3]. عوامل مختلفی در تشکیل فاز میانی تأثیرگذار هستند که در این میان می‌توان به

### Please cite this article using:

Taheri-Behrooz, Fathollah. Mahdavi Zade, S. M. J. and Gholami, M. J., "Micromechanics of stress transfer through the interphase in pull out test of fiber through the resin", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 3, pp. 283-294, 2017.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

در بررسی فاز میانی مقالات متعددی ارائه شده است که در اکثر این مقالات، فاز میانی به‌عنوان ماده‌ای همگن در نظر گرفته شده است [23-28]. با این حال مقالات محدودی فرض غیر همگن بودن فاز میانی را در نظر گرفته‌اند [29-31].

در بررسی رفتار فاز میانی اغلب فاز میانی را به همراه الیاف به‌عنوان یک ماده مؤثر در نظر می‌گیرند و سپس همانند یک کامپوزیت که شامل دو ماده است آن را بررسی می‌کنند [32].

اکثر مقالات موجود الیاف را به‌عنوان یک ماده همسانگرد مورد بررسی قرار داده‌اند. با این حال در مقاله وو کامپوزیت به‌عنوان یک ماده دوفازی بررسی شده است که جنس الیاف همسانگرد عرضی و جنس ماتریس را همسانگرد در نظر گرفته است. در این مقاله وو روشی تحلیلی بر اساس معادلات حاکم بر جابه‌جایی‌ها ارائه نموده است که در این روش شرایط مرزی برخلاف مقالات دیگر به‌خوبی ارضا می‌شوند [33]. وو در حل معادلات حاکم بر جابه‌جایی‌ها از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد و با روش بسط توابع ویژه نتایج نهایی برای جابه‌جایی‌ها را به دست آورد و در نهایت با اعمال شرایط مرزی به بررسی تنش‌ها پرداخته است. در ادامه‌ی مقاله وو، پیرانیکا با در نظر گرفتن سه فاز مختلف برای کامپوزیت به بررسی تنش‌ها انتقالی پرداخته است [34]. روش حل ارائه شده توسط پیرانیکا تفاوتی با روش ارائه شده توسط وو دارد. او در مقاله خود با فرض تابعی که معادلات جابه‌جایی‌ها را ارضا می‌کند به حل روابط پرداخته است و با توجه به این مسئله به بررسی تنش‌ها انتقالی پرداخته است.

در مقاله حاضر برای لایه میانی سالم و کاملاً متصل، در ادامه کار وو روشی بر اساس بسط توابع ویژه ارائه شده است که برای کامپوزیت سه فازی اعمال می‌شود. در نهایت نتایج حاصل از بررسی کامپوزیت با سه فاز مختلف با نتایج به‌دست‌آمده توسط وو که کامپوزیت را دوفازی در نظر گرفته است، مقایسه شده و نشان داده خواهد شد که چنانچه کامپوزیتی با فاز میانی تولید شود، عملکرد بهتری نسبت به کامپوزیت دوفازی از خود نشان خواهد داد. در ادامه برای لایه میانی تا حدی جداسازی نیز تحلیل به‌صورت ترکیبی از ناحیه کاملاً جداسازی (با طول  $l$ ) و استفاده از نتایج مقاله ژو و ناحیه کاملاً سالم (با طول  $l-l$ ) و استفاده از روش ارائه شده برای حالت سالم تنها با تفاوت در شرایط مرزی، ارائه شده است [35]. در نهایت، نتایج حالت تا حدی جداسازی با نتایج حالت سالم مقایسه می‌شود. نوآوری این مقاله تحلیل حالت تا حدی جداسازی برای کامپوزیت سه فازی با جدایش بین الیاف و لایه میانی است، درحالی‌که در مدل ژو تحلیل برای کامپوزیت دوفازی و جدایش بین الیاف و زمینه انجام شده بود.

## ۲- بیان مسئله

اولین مرحله در بررسی کامپوزیت با الیاف تقویت‌کننده انتخاب المان معرف حجمی بر اساس چیدمان الیاف است. معروف‌ترین چیدمان‌ها که نسبتاً به چیدمان‌های دیگر ترجیح داده می‌شوند، چیدمان مربعی و شش‌وجهی الیاف در زمینه است. در این مقاله چیدمان شش‌وجهی با یک مدل استوانه‌ای که شامل الیاف و در اطراف آن زمینه است، ایده آل سازی می‌شود.

شکل شماتیک المان معرف حجمی در شکل 1 نشان داده شده است. مبدأ مختصات  $(r, \theta, z)$  در مرکز سیستم سه فاز در شکل 1 نشان داده شده است. پارامتر  $l$  نصف طول المان معرف حجمی و  $r_f, r_m$  و  $r_m$  به ترتیب شعاع خارجی الیاف، لایه میانی و ماتریس است. شکل 1 نشان‌دهنده‌ی مدل ساده‌سازی شده همراه با شرایط مرزی است.

کردن الیاف استفاده می‌شود که در میان این آزمایش‌ها، آزمایش بیرون کشی الیاف به دلیل سادگی در هندسه به‌وفور استفاده می‌شود، از این رو در مقالات متعددی تأثیر میزان چسبندگی و مقاومت لایه میانی بر عملکرد کلی کامپوزیت مورد بررسی قرار گرفته است.

اگرچه هندسه مورد بررسی ساده است، اما بیان حل بسته‌ی کاملی که به‌طور دقیق نشان‌دهنده‌ی رفتار کامپوزیت باشد، کار دشواری است. در دهه‌های اخیر حل‌های تحلیلی مختلفی با توجه به فرضیات حاکم بر کامپوزیت، ارائه شده است که هدف از این تحلیل‌ها بررسی نوع مکانیزم انتقال تنش در لایه میانی است. یکی از عمومی‌ترین فرض‌ها، فرض کرنش صفحه‌ای است [10]. هدف اصلی در این فرض مرتبط کردن تنش برشی و شعاعی است، تا بتوان با این فرض معادلات تعادل را حل نمود. با توجه به این فرض مقالات متعددی ارائه شده است که به‌طور مثال می‌توان به مقالاتی که توسط هشو ارائه شده است، اشاره نمود [11-15]. در این مقالات هشو با در نظر گرفتن فرض کرنش صفحه‌ای به بررسی تنش‌های ناشی از آزمایش بیرون کشی الیاف و فشار بر الیاف پرداخته است. با این حال لازم به ذکر است که این نوع فرض تنها در حالتی که نسبت طول به شعاع الیاف زیاد باشد، قابل‌اعتماد است [14].

فرض دیگری که در بررسی کامپوزیت‌ها استفاده می‌شود فرض ثابت بودن تنش برشی در محل تماس الیاف و ماتریس است. به‌عنوان مثال در این زمینه آوستون با در نظر گرفتن این فرض و همچنین در نظر گرفتن نوع اتصال الیاف و ماتریس به بررسی رفتار تنش‌ی کامپوزیت پرداخته است [16]. لازم به ذکر است که در این روش تنها شرط تعادل در راستای الیاف ارضا می‌شود. فرض دیگری که به‌وفور در بررسی کامپوزیت‌ها استفاده می‌شود، استفاده از تئوری و اماندگی برشی است. در این زمینه نیز مقالات زیادی ارائه شده است که به‌عنوان مثال می‌توان به مقاله‌ی کاکس، اشاره نمود. در مقاله‌ی کاکس از وابستگی تنش محوری به تنش شعاعی صرف‌نظر شده است. با این حال این فرض نیز تنها زمانی که الیاف دارای طول زیادی باشد، قابل‌استفاده است [10].

اگرچه مقالاتی که در بررسی تنش ارائه شدند به‌خوبی نتوانستند نتایج را برای حالت کلی بیان کنند، با این حال مقالاتی که تئوری و اماندگی برشی توسعه داده شده را در نظر گرفته بودند، نتوانستند نتایج قابل‌قبولی را در بررسی جدا شدن الیاف از ماتریس و همچنین اصطکاک لغزشی ارائه دهند [17]. به‌عنوان مثال می‌توان به مقاله که هشو در این زمینه ارائه داده است، اشاره نمود. در این مقاله هشو با فرض مدلی بر اساس تئوری و اماندگی برشی و در نظر گرفتن این فرض که تنش برشی با عکس فاصله‌ی شعاعی رابطه دارد، به حل روابط پرداخته است. لازم به ذکر است که در این روش نیز شرط مرزی مربوط به سطح خارجی ماتریس به‌خوبی ارضا نمی‌شود، از این رو این روش نیز تنها برای کامپوزیت‌هایی که نسبت شعاع ماتریس به شعاع الیاف بزرگی دارند، قابل‌استفاده است [11-14].

در مقاله‌ی دیگری نارین با فرض مدل تئوری و اماندگی برشی، نشان داد که در کامپوزیت‌هایی که الیاف دارای ضریب سفتی بالا نسبت به ماتریس می‌باشد، نتایج قابل‌استفاده است [18]. با این حال انرژی کل به‌دست‌آمده با فرض تئوری و اماندگی برشی بسیار دقیق است و از این رو از تئوری و اماندگی برشی برای بررسی شکست الیاف استفاده می‌شود [19]. تعدادی از مقالات نیز با استفاده از روابط عددی و با فرض توابعی برای تنش‌ها به بررسی معادلات تعادل پرداختند و با نتایج به‌دست‌آمده از اجزا محدود مقایسه کردند [20-22].

میانی نیز بستگی دارد. یک‌لایه‌ی ضخیم رفتار سفت‌تری نسبت به لایه‌ی نازک رفتار می‌کند [28]. در این تحقیق حالت لایه‌ی میانی سفت مورد تحلیل قرار گرفته‌شده است.

جدول ۱. خواص مکانیکی الیاف، لایه میانی و زمینه [34]

$\nu_{rz}$	$\nu_{r\theta}$	$G_{rz}(GPa)$	$E_z(GPa)$	$E_\theta(GPa)$	$E_r(GPa)$	ماده
0.025	0.25	23	210	20	20	الیاف
0.16	0.3	12	105	11	11	فاز میانی
0.35	0.35	1	2.7	2.7	2.7	زمینه

۲-۲- روابط تحلیلی

به‌طور کلی معادلات پایه در الاستیسیته سه‌بعدی در غیاب نیروهای وارد بر جسم به‌صورت روابط (3) - (1) می‌باشد [33].

$$\sigma_{ij,i} = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \tag{2}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) \tag{3}$$

با توجه به مدل فرض شده می‌توان معادلات را در مختصات استوانه‌ای به‌صورت رابطه (4) بازنویسی نمود [33].

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{r\theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{r\theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{\theta z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z = 0 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} \tag{5}$$

و همچنین کرنش‌ها به‌صورت رابطه (6) محاسبه می‌شود [33]. در این رابطه  $u, v, w$  به ترتیب جابه‌جایی در جهت  $r, \theta, z$  می‌باشند. به دلیل تقارن محوری در جهت  $z$  مؤلفه‌های غیر صفر تنش و جابه‌جایی عبارت‌اند از:  $\tau_{rz}, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, u, w$

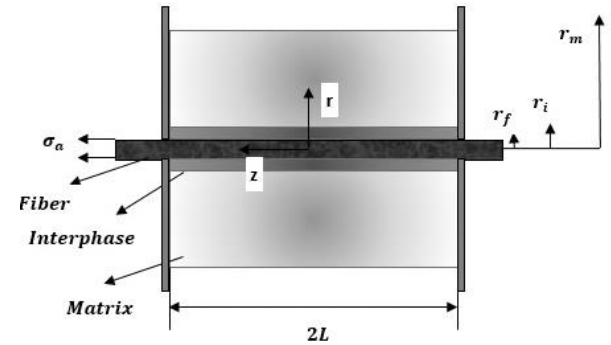


Fig 1. Three-phase RVE with boundary and loading conditions.

شکل ۱ مدل المان معرف حجمی با شرایط مرزی.

۱-۲- مدل هندسی و مواد تشکیل‌دهنده

همان‌گونه که در بخش دوم بحث شد، المان معرف حجمی سه‌بعدی شامل سه فاز ماده است که مدل هندسی متقارن المان معرف حجمی در شکل 1 نشان داده شده است. در تحقیق حاضر شعاع الیاف 5 میکرومتر و شعاع المان معرف حجمی 12.5 میکرومتر در نظر گرفته شده است. در بین الیاف و زمینه، لایه‌ی نازک با ضخامت 0.1 شعاع الیاف جهت مشخص کردن لایه‌ی میانی در نظر گرفته شده است. طول  $l$ ، برابر شعاع الیاف است. طول ناحیه جداشده هم 0.1 طول الیاف در نظر گرفته شده است. در این تحقیق از کامپوزیت کربن اپوکسی استفاده شده است. در حالت واقعی لایه‌ی میانی در بین الیاف و زمینه، ناهمگن و با تغییرات کم در خصوصیات مکانیکی است. تعیین ضخامت و خصوصیات لایه‌ی میانی از طریق شبیه‌سازی مولکولی امکان‌پذیر است. در این زمینه از روش میکروسکوپ الکترونی<sup>۱</sup> جهت تعیین خصوصیات الاستیک لایه‌ی میانی استفاده می‌شود [31]. خصوصیات الاستیکی الیاف، زمینه و لایه‌ی میانی در جدول 1 بیان شده‌اند. اگرچه در بسیاری از مقالات الیاف را به‌عنوان ماده‌ی همسانگرد در نظر می‌گیرند، اما نتایج تجربی نشان می‌دهد که الیاف همچون ماده همسانگرد جانبی عمل می‌کند و به همین دلیل در این تحقیق الیاف ماده‌ای با جنس همسانگرد جانبی فرض شده است.

و نشان داد که ضخامت لایه‌ی میانی برای کربن اپوکسی مابین 100 تا 200 نانومتر متغیر است [1]، با این حال ضخامت و خاصیت لایه‌ی میانی به عواملی مانند تغییرات شیمیایی و فرآیندهای فیزیکی بستگی دارد. به‌طور مثال برای کامپوزیت S-glass اپوکسی، ضخامت لایه‌ی میانی مابین 10 تا 100 نانومتر متغیر است [28]. در این تحقیق جهت مطالعه‌ی بهتر فاز میانی ضخامت 500 نانومتر در نظر گرفته شده است.

هم‌چنین به دلیل فرض شرط پیوستگی در ناحیه سالم، ضخامت میانی تأثیری بر فرمول‌بندی روابط نخواهد داشت. لایه‌ی میانی بر اساس نوع سیستم کامپوزیت امکان دارد سخت‌تر یا نرم‌تر از ماتریس باشد [28]. در این تحقیق ماده‌ی کربن اپوکسی در نظر گرفته شده است که سخت‌تر از زمینه است، به همین دلیل به‌منظور شبیه‌سازی لایه‌ی میانی از میانگین سفتی استفاده شده است. این تحقیق فاز میانی را تنها متشکل از یک‌لایه فرض کرده و این در حالی است که به دلیل استفاده از روابط ریاضی می‌توان این لایه را متشکل از چندین لایه با خصوصیات مختلف در نظر گرفت. با استفاده از تصاویر مایکروگرافی می‌توان دریافت که خصوصیات فاز میانی در مرزها برابر با خصوصیات الیاف و زمینه است. سفتی نسبی فاز میانی، به ضخامت لایه‌ی

<sup>1</sup> Speckle Interferometry with Electron Microscopy

بر اساس معادلات (6)-(4) معادله نهایی برحسب فضای حالت به دست می‌آید [33].

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \sigma_r \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_5}{r} & -c_6\alpha & c_7 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}} \\ \frac{c_1}{r^2} & \frac{c_2}{r}\alpha & \frac{c_4}{r} & -\alpha \\ -\frac{c_2}{r}\alpha & -c_3\alpha^2 & -c_6\alpha & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \sigma_r \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

و برای دو مؤلفه دیگر معادله (13) برقرار است [33].

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{r} & c_2\alpha & c_5 & 0 \\ \frac{c_2}{r} & c_3\alpha & c_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \sigma_r \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

با در نظر گرفتن دو معادله اول در رابطه‌ی فضای حالت و اعمال چندین ضرب جبری دو معادله (14) حاصل می‌شود [33].

$$\begin{aligned} (\nabla_1^2 + \xi_1\alpha^2)(\nabla_1^2 + \xi_2\alpha^2)u &= 0, \\ (\nabla_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}) \\ (\nabla_2^2 + \xi_1\alpha^2)(\nabla_2^2 + \xi_2\alpha^2)w &= 0, \\ (\nabla_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\xi_{1,2} = \begin{pmatrix} 1/2 \frac{c_{33}}{c_{44}} + 1/2 \frac{c_{44}}{c_{11}} - 1/2 \frac{(c_{13} + c_{44})^2}{c_{11}c_{44}} \\ \mp 1/2 \sqrt{\left( \frac{c_{33} + c_{44}}{c_{44}c_{11}} - \frac{(c_{13} + c_{44})^2}{c_{11}c_{44}} \right)^2 - 4 \frac{c_{33}}{c_{11}}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

برای حل معادلات می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده نمود که نتایج آن به صورت معادلات (16) و (17) می‌باشند [33].

$$w_k = \begin{pmatrix} D_1 J_0(\sqrt{\alpha_{1k}} r) \\ b_1 \sinh(\sqrt{\alpha_k} z) \\ + b_2 \cosh(\sqrt{\alpha_k} z) \\ + D_3 J_0(\sqrt{\alpha_{2k}} r) \\ + D_4 Y_0(\sqrt{\alpha_{2k}} r) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$u_k = \begin{pmatrix} F_1 J_1(\sqrt{\alpha_{1k}} r) \\ b_1 \sqrt{\alpha_k} \cosh(\sqrt{\alpha_k} z) \\ + b_2 \sqrt{\alpha_k} \sinh(\sqrt{\alpha_k} z) \\ + F_3 J_1(\sqrt{\alpha_{2k}} r) \\ + F_4 Y_1(\sqrt{\alpha_{2k}} r) \end{pmatrix} \quad (17)$$

که در روابط (16) و (17)  $J_i, Y_i (i=0,1)$  توابع بسل می‌باشند. همچنین ثوابت موجود در روابط (16) و (17)، با معادله (18) به دست می‌آیند [33].

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta, z), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{u(r, \theta, z)}{r} + \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta, z) - \frac{v(r, \theta, z)}{r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u(r, z, \theta)}{r} + \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta, z), \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{w(r, \theta, z)}{r} + \frac{\partial}{\partial z} v(r, \theta, z) \\ \epsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} w(r, \theta, z), \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial z} u(r, \theta, z) + \frac{\partial}{\partial r} w(r, \theta, z) \end{aligned} \quad (6)$$

به منظور دست‌یافتن به معادله‌ی نهایی از رهیافت فضای حالت برای معادلات (5) و (6) استفاده شده است [33].

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{11} \frac{\partial}{\partial r} U(r, \theta, z) + \frac{C_{12}}{r} U(r, \theta, z) + C_{13} \frac{\partial}{\partial z} W(r, \theta, z) \\ \sigma_\theta &= C_{12} \frac{\partial}{\partial r} U(r, \theta, z) + \frac{C_{12}}{r} U(r, \theta, z) + C_{13} \frac{\partial}{\partial z} W(r, \theta, z) \end{aligned} \quad (7)$$

با قرار دادن معادلات (7) در رابطه‌ی شماره (4) معادله (8) حاصل می‌شود [33].

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_r = \frac{(c_{12} - c_{11})\epsilon_r + (c_{11} - c_{12})\epsilon_\theta}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} \quad (8)$$

همچنین با جایگذاری روابط کرنش-جابجایی معادله (9) حاصل می‌شود [33].

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_r = \begin{pmatrix} \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \left( \frac{u}{r^2} \right) \\ + \left( c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} w \right) \\ + \frac{\sigma_r}{r} \left( \frac{c_{12} - 1}{c_{11}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} \end{pmatrix} \quad (9)$$

به‌طور مشابه از معادله شماره (3) معادله (10) به دست می‌آید [33].

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} = \begin{pmatrix} - \left( c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} u \right) \\ - \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} w \right) - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_r - \frac{\tau_{rz}}{r} \end{pmatrix} \quad (10)$$

با تعریف  $\frac{\partial}{\partial z}$  با  $a$  و همچنین  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  با  $\alpha^2$  و با در نظر گرفتن روابط

$$\begin{aligned} c_1 &= \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right), c_2 = \left( c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} \right), \\ c_3 &= \left( c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right), c_4 = \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \\ c_5 &= \frac{c_{12}}{c_{11}}, c_6 = \frac{c_{13}}{c_{11}}, c_7 = \frac{1}{c_{11}}, G_{rz} = c_{44} \end{aligned} \quad (11)$$

۲-۱-۲- شرایط مرزی برای حالت کاملاً سالم

به دلیل کلی بودن روابط در نتیجه می‌توان از آن روابط برای حالت سه فاز نیز استفاده کرد. باید توجه نمود که در این مورد جنس الیاف و فاز میانی همسانگرد جانبی و جنس زمینه نیز همسانگرد است. حال با توجه به نکات ذکر شده شرایط مرزی حاکم بر مسئله بیان می‌شود.

شرایط پیوستگی در الیاف و سطح تماس فاز میانی.

$$w^f|_{r=r_f} - w^i|_{r=r_f} = 0, (0 \leq z < L) \quad (26)$$

$$u^f|_{r=r_f} - u^i|_{r=r_f} = 0, (0 \leq z < L) \quad (27)$$

$$\tau_{rz}^f|_{r=r_f} - \tau_{rz}^i|_{r=r_f} = 0, (0 \leq z < L) \quad (28)$$

$$\sigma_r^f|_{r=r_f} - \sigma_r^i|_{r=r_f} = 0, (0 \leq z < L) \quad (29)$$

شرایط پیوستگی در زمینه و سطح تماس فاز میانی.

$$w^i|_{r=r_i} - w^m|_{r=r_i} = 0, (0 \leq z < L) \quad (30)$$

$$u^i|_{r=r_i} - u^m|_{r=r_i} = 0, (0 \leq z < L) \quad (31)$$

$$\tau_{rz}^i|_{r=r_i} - \tau_{rz}^m|_{r=r_i} = 0, (0 \leq z < L) \quad (32)$$

$$\sigma_r^i|_{r=r_i} - \sigma_r^m|_{r=r_i} = 0, (0 \leq z < L) \quad (33)$$

شرط مرزی سطح خارجی زمینه.

$$\sigma_r^m|_{r=r_m} = 0, (0 \leq z < L) \quad (34)$$

$$\tau_{rz}^m|_{r=r_m} = 0, (0 \leq z < L) \quad (35)$$

شرایط مرزی انتهایی.

$$w^m|_{z=0} = 0, \tau_{rz}^m|_{z=0} = 0, (r_i \leq r < r_m) \quad (36)$$

$$w^m|_{z=L} = 0, \tau_{rz}^m|_{z=L} = 0, (r_i \leq r < r_m) \quad (37)$$

$$w^f|_{z=0} = 0, \tau_{rz}^f|_{z=0} = 0, (0 \leq r < r_f) \quad (38)$$

$$\int_0^{r_f} \sigma_z^f(r, L) dr = \sigma_0 \pi r_f^2, \tau_{rz}^f|_{z=L} = 0, (0 \leq r < r_f) \quad (39)$$

$$w^i|_{z=0} = 0, \tau_{rz}^i|_{z=0} = 0, (r_f \leq r < r_i) \quad (40)$$

$$\tau_{rz}^i|_{z=L} = 0, (r_f \leq r < r_i) \quad (41)$$

در نهایت اعمال شرایط مرزی، منجر به رسیدن به معادلات خطی جبری خواهد شد. باید توجه داشت که با اعمال شرایط مرزی مربوط به زمینه، مقدار ویژه مورد نظر به دست خواهد آمد که عبارت است از.

$$\alpha_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad (42)$$

در نهایت بسط توابع ویژه منجر به نتایج نهایی خواهد شد [33].

$$D_j = \frac{(-c_{11}\beta_j + G_{rz})\sqrt{\alpha(k)}F_j}{(c_{13} + G_{rz})\sqrt{\beta_j}} \quad (18)$$

$$\beta = \begin{cases} \xi_1 (j=1,2) \\ \xi_2 (j=3,4) \end{cases} (\xi_1 \neq \xi_2)$$

$$\alpha_{ik} = \xi_i \alpha_k (i=1,2)$$

همچنین برای حل مربوط به مقدار ویژه صفر می‌توان از محدودیت معادله (14) و یا حل مستقل معادله فضای حالت به معادله (19) رسید [33].

$$w_0 = (b_{10} + z)(D_{30} + D_{40} \ln(r)) \quad (19)$$

$$u_0 = D_{10}r + D_{20} \frac{1}{r} - \frac{c_{13} + G_{rz}}{2c_{11}} D_{40} r \ln(r)$$

در نهایت با ترکیب حل‌های ارائه شده در روابط (16)، (17) و (19) می‌توان به جواب نهایی معادلات حالت دست یافت [33].

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k + w_0 \quad (20)$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + u_0$$

حل‌های ارائه شده برای مواد همسانگرد عرضی می‌باشد که نسبت به مواد همسانگرد کلی‌تر است. برای مواد همسانگرد نیز به‌طور مشابه می‌توان روابط مربوط به جابه‌جایی‌ها را به دست آورد. باید توجه داشت به دلیل اینکه در مواد همسانگرد  $\xi_1 = \xi_2$  نمی‌توان از حل روابط (20) استفاده نمود و در نتیجه برای مواد همسانگرد روابط (21) و (22) حاکم است [33].

$$w_k = \begin{pmatrix} D_1 J_0(\sqrt{\alpha_k} r) \\ b_1 \sinh(\sqrt{\alpha_k} z) + D_2 Y_0(\sqrt{\alpha_k} r) \\ b_2 \cosh(\sqrt{\alpha_k} z) + \sqrt{\alpha_k} r D_3 J_1(\sqrt{\alpha_k} r) \\ + \sqrt{\alpha_k} r D_4 Y_1(\sqrt{\alpha_k} r) \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$u_k = \begin{pmatrix} F_1 J_1(\sqrt{\alpha_k} r) \\ b_1 \sqrt{\alpha_k} \cosh(\sqrt{\alpha_k} z) + F_2 Y_1(\sqrt{\alpha_k} r) \\ b_2 \sqrt{\alpha_k} \sinh(\sqrt{\alpha_k} z) + \sqrt{\alpha_k} r F_3 J_0(\sqrt{\alpha_k} r) \\ + \sqrt{\alpha_k} r F_4 Y_0(\sqrt{\alpha_k} r) \end{pmatrix} \quad (22)$$

در حالی که

$$D_1 = -\sqrt{\alpha_k}(F_1 + 4(1-\nu)F_3), D_3 = \sqrt{\alpha_k}F_3 \quad (23)$$

$$D_2 = -\sqrt{\alpha_k}(F_2 + 4(1-\nu)F_4), D_4 = \sqrt{\alpha_k}F_4$$

همچنین برای مقدار ویژه صفر معادلات (24) حاصل می‌شود.

$$w_0 = (b_{10} + z)(D_{30} + D_{40} \ln(r)) \quad (24)$$

$$u_0 = D_{10}r + D_{20} \frac{1}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)} D_{40} r \ln(r)$$

خاطر نشان می‌شود که حل کلاسیک لامه حالت خاصی از معادله (24) است. در نهایت همانند حالت قبل جواب نهایی را به صورت معادله (20) نمایش داده می‌شود [33].

$$\int_0^{r_f} \sigma_z^f(r, L-l) dr = \sigma_1 \pi r_f^2, \tau_{rz}^f|_{z=L-l} = 0, (0 \leq z < r_f) \quad (54)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{fd}(l) = \sigma_0 - \omega(\sigma^* - \sigma_0)(e^{\lambda l} - 1) \quad (55)$$

مقدار ویژه در این حالت به صورت رابطه (56) تعریف می‌شود.

$$\alpha_k = -\left(\frac{k\pi}{L-l}\right)^2 \quad (56)$$

### ۳- شبیه‌سازی توسط نرم‌افزار آباکوس

به منظور بررسی صحت حل تحلیلی از مدل سه‌بعدی متقارن جهت شبیه‌سازی اجزاء محدود در نرم‌افزار آباکوس استفاده نموده و با روابط تحلیلی مقایسه شده است. خصوصیات مربوط به هندسه و خصوصیات مکانیکی ماده جهت شبیه‌سازی همان خصوصیات مورد استفاده در روش تحلیلی است. برای بررسی تأثیر اندازه‌ی المان، مطالعه همگرایی مش در نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. نتایج حاصله نشان می‌دهد که با افزایش چگالی مش نقاط تکین در میدان تنش افزایش می‌یابد. باین حال تنش برشی در سطح مقطع میانی فاز میانی ارتباط چندانی با اندازه المان‌ها ندارد و در واقع اندازه المان‌ها بر مقدار تنش برشی اثر نمی‌گذارد. بنابراین مقدار تنش در سطح مقطع میانی فاز میانی به عنوان معیاری برای مقایسه با روش تحلیلی در نظر گرفته می‌شوند. شکل 2 الف) نمایش‌دهنده مش استفاده شده در تحلیل اجزاء محدود است. شکل 2 ب) نیز نمایش‌دهنده شرایط مرزی استفاده شده در شبیه‌سازی است. سطح زمینه و لایه میانی در جهت ارتفاع المان حجمی مقید شده است.

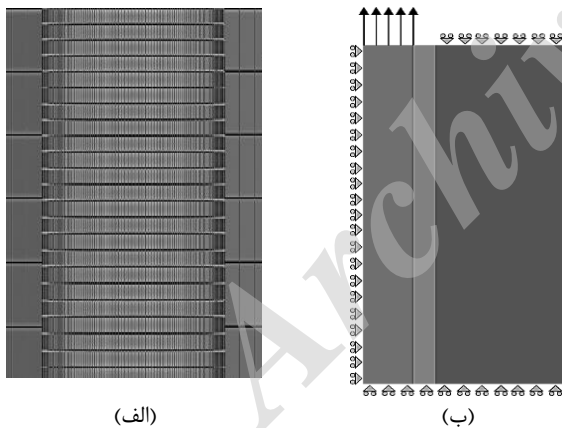


Fig 2. Finite element model: (a) part of the mesh planning, (b) model with boundary conditions

شکل ۲ مدل اجزاء محدود: الف) قسمتی از مش بندی فاز میانی و ب) مدل همراه با شرایط مرزی

### ۴- بحث

باید توجه نمود که برای رسم نمودارها محور عمودی یعنی تنش‌ها با تقسیم آن‌ها بر تنش خارجی اعمال شده و محور افقی یعنی راستای توزیع تنش با تقسیم آن بر شعاع الیاف بی‌بعد شده است. در شکل‌ها تنش برشی، تنش محوری، تنش شعاعی و تنش خارجی به ترتیب با نماد  $S_0, S_r, S_z, S_\theta$  نمایش داده شده است. طول ناحیه جدا شده نیز با  $l$  نمایش داده شده است.

۲-۲-۲- شرایط مرزی برای حالت تا حدی جدا شده در مدل استوانه‌ای الیاف-ماتریس با ناحیه جدایش اولیه، توزیع تنش را می‌توان به دو بخش تقسیم نمود، 1- ناحیه جدا شده و 2- ناحیه متصل. حل ناحیه جدا شده با فرض جدایش بین الیاف و زمینه توسط ژو انجام شده است اما در اینجا فرض می‌شود که جدایش بین الیاف و لایه میانی باشد، در این صورت مؤلفه‌های تنش در کامپوزیت برای حالتی که تنش خارجی  $\sigma_0 = 500 \text{ MPa}$  اعمال می‌شود، به صورت رابطه (43) محاسبه می‌شود. طبق مدل ژو لایه میانی تنها قابلیت تحمل تنش برشی را دارد [35].

$$\sigma_{z,debond}^f(z) = \sigma_0 - \omega(\sigma^* - \sigma_0)(e^{\lambda z} - 1) \quad (43)$$

$$\sigma_{z,debond}^m(z) = \gamma\omega(\sigma^* - \sigma_0)(e^{\lambda z} - 1) \quad (44)$$

$$\tau_{rz,debond}^m(r, z) = \frac{\gamma\lambda\omega(r_m^2 - r^2)}{2r}(\sigma^* - \sigma_0)e^{\lambda z} \quad (45)$$

$$\tau_{rz,debond}^i(r, z) = \frac{r_f\lambda\omega}{2}(\sigma^* - \sigma_0)e^{\lambda z} \quad (46)$$

که در روابط (46)-(43) طول اصطکاکی دوطرفه و  $\sigma^*$  تنش جدایش مجانبی می‌باشند و به صورت معادلات (47) و (48) تعریف می‌شوند.

$$\lambda = \frac{2\mu k}{r_f} \quad (47)$$

$$\sigma^* = -\frac{q_0}{\omega k} \quad (48)$$

که  $\omega$  و  $k$  به صورت توابعی از خواص مکانیکی تعریف می‌شوند.

$$\omega = \frac{\alpha\nu_{rf}}{\alpha\nu_{rf} + \gamma\nu_{rm}} \quad (49)$$

$$k = \frac{\alpha\nu_{rf} + \gamma\nu_{rm}}{\alpha(1 + \nu_{rf}) + 2\gamma + \nu_{rm} + 1} \quad (50)$$

که  $\mu = 0.1263$  ضریب اصطکاک و  $q_0 = 18.2 \text{ MPa}$  تنش فشاری پسماند می‌باشد.  $\alpha$  و  $\lambda$  نیز به ترتیب تابع خواص مکانیکی و هندسی مدل هستند و بدین صورت تعریف می‌شوند [35].

$$\alpha = \frac{E_m}{E_f} \quad (51)$$

$$\gamma = \frac{r_f^2}{r_m^2 - r_f^2} \quad (52)$$

در ناحیه متصل، در ابتدا باید شرایط مرزی (26)-(33) را در بازه  $(0 \leq z < L-l)$  در نظر گرفت، سپس باید شرط مرزی (37) و (39) را به صورت روابط (54)-(53) جایگزین نمود که  $\sigma_1$  به صورت رابطه (55) تعریف می‌شود [35].

$$w^m|_{z=L-l} = 0, \tau_{rz}^m|_{z=L-l} = 0, (r_f \leq r < r_m) \quad (53)$$

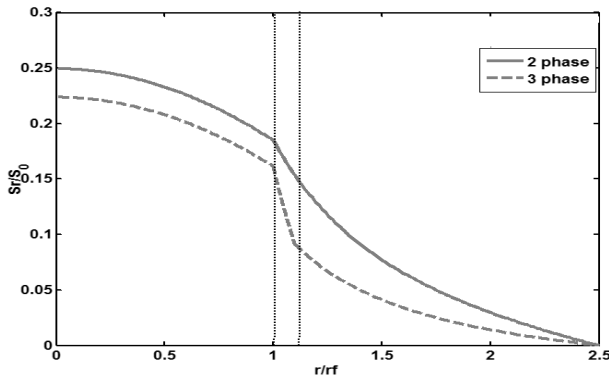


Fig 4. Variation of normalized radial stress along the radial direction (in  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$ )

شکل ۴ نمودار تنش شعاعی بی‌بعد در راستای شعاع (در  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$ )

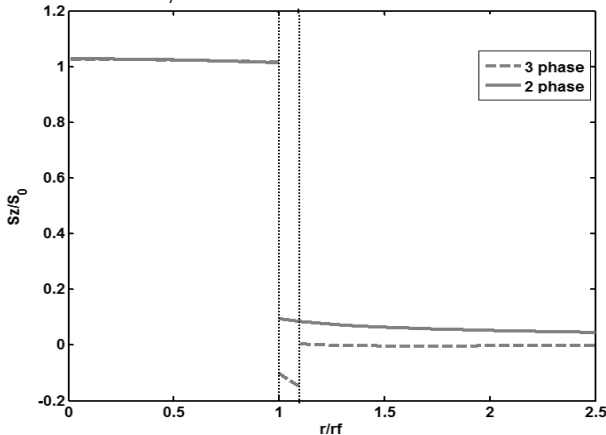


Fig 5. Variation of normalized axial stress along the radial direction (in  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$ )

شکل ۵ نمودار تنش محوری بی‌بعد در راستای شعاع (در  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$ )

اشکال 7(الف) و 7(ب) به ترتیب نمایش‌دهنده توزیع تنش برشی در راستای ارتفاع در حالت سالم و تا حدی جداشده در چهار شعاع مختلف می‌باشند که  $r_{Mid,1} = \frac{r_f+r_i}{2}$  و  $r_{Mid,2} = \frac{r_m+r_i}{2}$  در هر دو شکل مقدار تنش برشی ناحیه سالم در ابتدا، میانه و انتهای طول المان حجمی معرف به صفر می‌رسد (ارضای کامل شرایط مرزی در ابتدا و انتهای ناحیه سالم)، این در حالی است که مقادیر مطلق حداکثر تنش برشی در ناحیه سالم در فواصل میانی نصف طول المان حجمی معرف می‌باشد. مشاهده می‌شود که به دلیل توزیع متقارن تنش برشی برآیند تنش برشی در ناحیه سالم صفر می‌شود.

در شکل 7(الف) مشاهده می‌شود که در  $r = r_f$  نسبتاً مقدار تنش برشی بیشتری وجود دارد و با دور شدن از  $r_f$  مقدار تنش برشی کاهش می‌یابد. شکل 7(ب) حاکی از آن است که حداکثر تنش برشی به ترتیب در لایه میانی و سپس در زمینه در محل اعمال بار خارجی وجود دارد و رفته‌رفته از میزان آن کاسته شده تا اینکه در مرز ناحیه سالم و جداشده به‌طور ناگهانی صفر می‌شود. در ناحیه سالم نیز الیاف و لایه میانی تنش بیشتری تحمل می‌کنند پس دلیل جدایش الیاف از لایه میانی مقدار تنش برشی بالا در نزدیکی مرز میان ناحیه سالم و ناحیه جداشده است. لازم به ذکر است که میزان حداکثر تنش برشی قابل تحمل در ناحیه سالم حالت جداشده کاهش می‌یابد. الیاف نیز در ناحیه جداشده تنش برشی تحمل نمی‌کنند.

#### ۴-۱- مقایسه حالت دوفازی و سه فازی

شکل 3 بیانگر توزیع تنش برشی در راستای شعاعی کامپوزیت دوفازی و سه فازی در نسبت  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$  است. از شکل 3 می‌توان دریافت که تمرکز تنش در ناحیه فاز میانی اتفاق می‌افتد و به همین دلیل این ناحیه از اهمیت بیشتری نسبت به ناحیه‌های دیگر برخوردار است. همچنین لازم به ذکر است که شرط پیوستگی تنش برشی در سطح تماس‌ها در نمودار به‌خوبی ارضا شده است. ملاحظه می‌شود که کامپوزیت سه فازی نسبت به کامپوزیت دوفازی تنش برشی کمتری در نواحی اتصال لایه میانی به الیاف و زمینه ایجاد می‌کند.

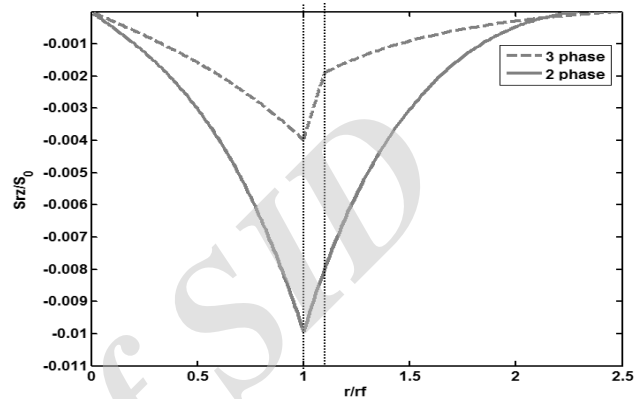


Fig 3. Variation of normalized shear stress along the radial direction (in  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$ )

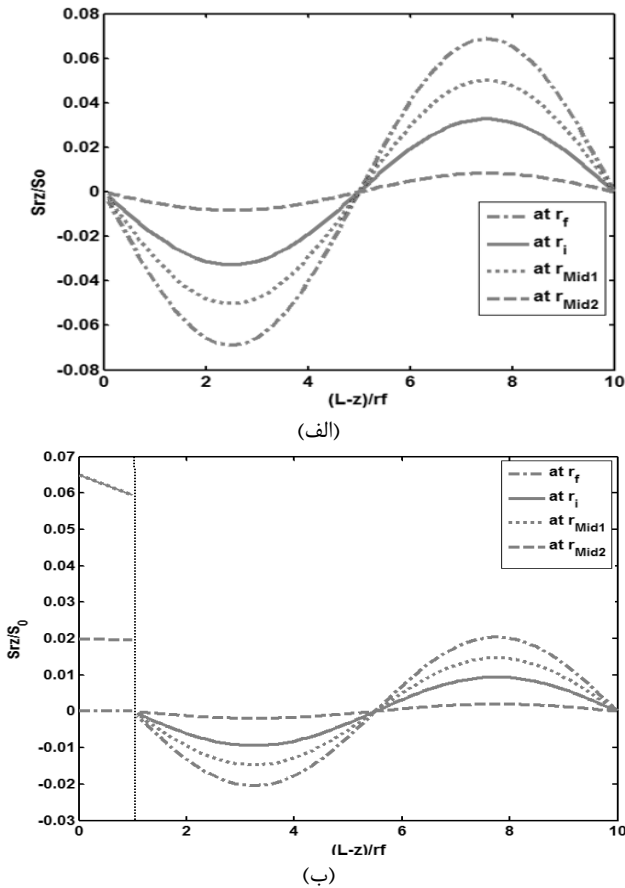
شکل ۳ نمودار تنش برشی بی‌بعد در راستای شعاعی (در  $\frac{L-z}{r_f} = 0.1$ )

شکل 4 بیانگر توزیع تنش شعاعی در راستای شعاعی کامپوزیت دوفازی و سه فازی در نسبت  $\frac{L-z}{r_f} = 0$  است. از شکل 4 می‌توان دریافت که نواحی زمینه، فاز میانی و الیاف تحت تنش شعاعی کشش می‌باشند که این نوع تنش باعث ضعیف شدن اتصال در محل اعمال بار می‌شود. تنش شعاعی نیز در کامپوزیت سه فازی نسبت به کامپوزیت دوفازی کمتر است.

توزیع تنش محوری در راستای شعاعی دو کامپوزیت را در شکل 5 می‌توان مشاهده نمود. با توجه به شکل 5 می‌توان دریافت که دو کامپوزیت در ناحیه الیاف تنش برابر و تقریباً ثابتی در حدود  $1.1\sigma_0$  دارند اما وجود لایه میانی در کامپوزیت سه فازی باعث ایجاد تنش فشاری کمی در این لایه شده که این باعث می‌شود تنش محوری زمینه مقدار ناچیزی داشته باشد در حالی که در کامپوزیت دوفازی تنش محوری زمینه اولاً کششی بوده ثانیاً مقدار بیشتری نسبت به کامپوزیت سه فازی دارد.

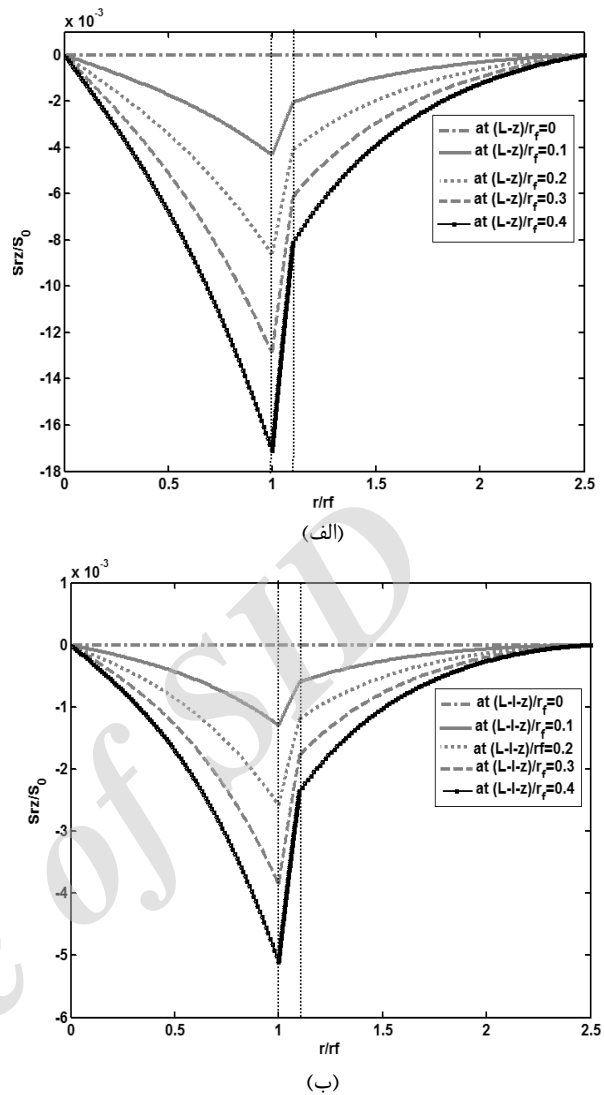
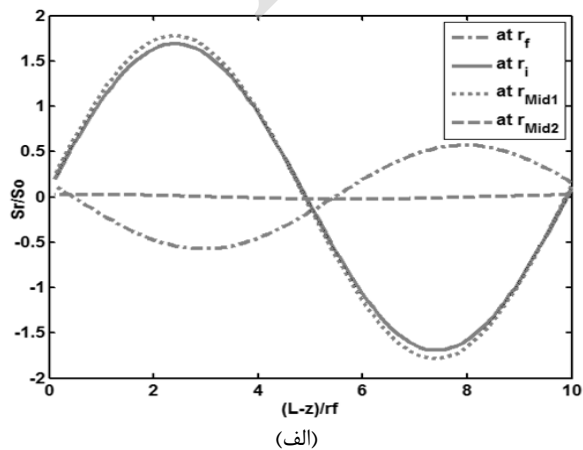
#### ۴-۲- مقایسه حالت سالم و حالت تا حدی جداشده در کامپوزیت سه فازی

اشکال 6(الف) و 6(ب) به ترتیب نمایش‌دهنده توزیع تنش برشی در راستای شعاع در حالت سالم و تا حدی جداشده می‌باشند. دو شکل توزیع تنش برشی را در چهار موقعیت محوری مختلف نشان می‌دهند. هم در حالت سالم و هم در حالت تا حدی جداشده شرایط مرزی به‌طور کامل ارضا می‌شوند و حداکثر تنش برشی در اتصال لایه میانی به الیاف به وجود می‌آید. همچنین در هر دو حالت با فاصله گرفتن از محل اعمال بار میزان تنش برشی افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که در حالت تا حدی جداشده به دلیل جدایش الیاف از زمینه از میزان تنش برشی کاسته می‌شود.



**Fig 7.** Variation of normalized shear stress along the axial direction (a) intact model in  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid,2}$  (b) partially debonded model in  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid,2}$  with debonded length  $l$   
 شکل ۷ توزیع تنش برشی بی‌بعد در راستای ارتفاع (الف). حالت سالم در شعاع‌های  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid,2}$  و (ب) حالت تا حدی جداشده در نسبت‌های  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid,2}$  با طول جداشده  $l$

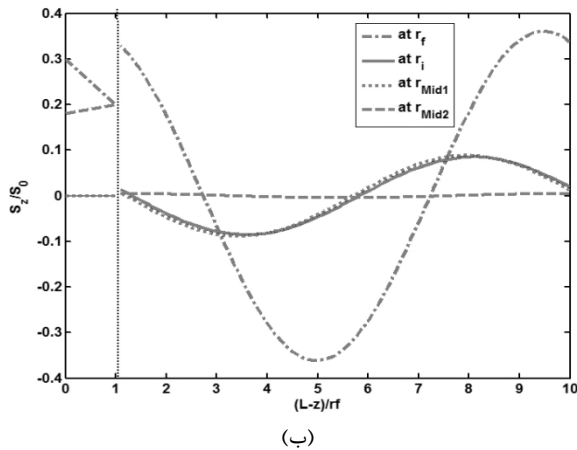
برای حالت تا حدی جداشده نیز می‌توان از شکل ۸ (ب) دید که مقدار تنش برشی در ناحیه سالم تقریباً  $\frac{1}{6}$  برابر حالت سالم بدون جداشده می‌شود و موقعیت حداکثر تنش شعاعی به مقادیر محوری بیشتر تغییر مکان می‌دهد. همچنین تنش شعاعی در ناحیه سالم از حالت کششی به فشاری تبدیل می‌شود. در این حالت نیز مقدار تنش شعاعی در زمینه تقریباً صفر می‌باشد. در ناحیه جداشده هم طبق فرضیات مقاله مرجع [35] مقدار تنش شعاعی در الیاف، لایه میانی و زمینه ناچیز است.



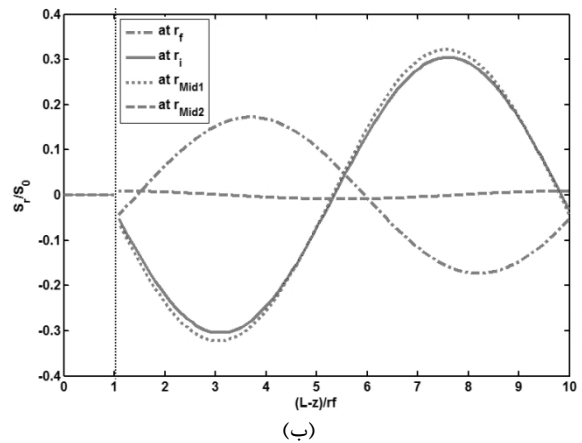
**Fig 6.** Variation of normalized shear stress along the radial direction (a) intact model in  $\frac{L-z}{r_f} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  (b) partially debonded model in  $\frac{L-z}{r_f} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  with debonded length  $l$   
 شکل ۶ توزیع تنش برشی بی‌بعد در راستای شعاع (الف). حالت سالم در نسبت‌های  $\frac{L-z}{r_f} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  و (ب) حالت تا حدی جداشده در نسبت‌های  $\frac{L-z}{r_f} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  با طول جداشده  $l$

اشکال ۸ (الف) و ۸ (ب) به ترتیب نمایش‌دهنده‌ی توزیع تنش شعاعی در راستای ارتفاع در حالت سالم و تا حدی جداشده در چهار شعاع مختلف می‌باشند. در شکل ۸ (الف) می‌توان دید که حداکثر تنش شعاعی در لایه میانی و در نسبت  $2 < \frac{L-z}{r_f} < 3$  و به‌طور متناظر در  $7 < \frac{L-z}{r_f} < 8$  اعمال می‌شود و پس‌از آن به‌سرعت کاهش می‌یابد. حداکثر مقدار تنش شعاعی در مقایسه با حداکثر مقدار تنش برشی بیشتر است و چنانچه تنش شعاعی در مرز مشترک الیاف و فاز میانی از استحکام کششی فاز میانی تجاوز کند باعث ازهم‌گسیختگی الیاف از لایه‌مرزی می‌شود. درنهایت این‌گونه تخریب‌ها که در فاز مایکرو رخ می‌دهند باعث ایجاد تخریب در فاز ماکرو خواهد شد. از شکل ۸ (الف) مشاهده می‌شود که تنش شعاعی در زمینه تقریباً صفر بوده ولی جهت اعمال تنش شعاعی در الیاف و لایه میانی مخالف یکدیگر است.





**Fig 9.** Variation of normalized axial stress along the axial direction (a) intact model in  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  (b) partially debonded model in  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  with debonded length  $l$



**Fig 8.** Variation of normalized radial stress along the axial direction (a) intact model in  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  (b) partially debonded model in  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  with debonded length  $l$

شکل ۹ توزیع تنش محوری بی‌بعد در راستای ارتفاع (الف). حالت سالم در شعاع‌های  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  و (ب) حالت تا حدی جدا شده در نسبت‌های  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  با طول جدا شده  $l$

شکل ۸ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در راستای ارتفاع (الف). حالت سالم در شعاع‌های  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  و (ب) حالت تا حدی جدا شده در نسبت‌های  $r_f, r_i, r_{Mid1}, r_{Mid2}$  با طول جدا شده  $l$

**۴-۳- مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج اجزاء محدود**

اشکال ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به ترتیب نمایش‌دهنده نمودارهای تنش در راستای ارتفاع، تنش شعاعی و تنش برشی به‌دست‌آمده از روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود می‌باشند. در هر سه شکل، شکل (الف) مربوط به حالت سالم و شکل (ب) مربوط به حالت تا حدی جدا شده است. شکل ۱۰ (الف) و (ب) به ترتیب مربوط به نسبت  $\frac{(L-l)-z}{r_f} = 0.4$  و اشکال ۱۱ (الف) و (ب) ۱۲ (الف) مربوط به نسبت  $\frac{L-z}{r_f} = 0$  و اشکال ۱۱ (ب) و ۱۲ (ب) مربوط به نسبت  $\frac{(L-l)-z}{r_f} = 0$  هستند.

در این نمودارها به بررسی نتایج تحلیلی در مقابل نتایج به‌دست‌آمده از روش اجزاء محدود در ۱۲ نسبت  $\frac{r}{r_f}$  مختلف پرداخته شده است. در شکل‌های ۱۰ (الف)-(ب) و ۱۱ (الف)-(ب) نتایج تحلیلی با نتایج اجزاء محدود هم‌پوشانی مناسبی دارند.

در شکل ۱۲ (الف)-(ب) تنها در برخی نقاط از الیاف تفاوت وجود دارد. علت این تفاوت نیز می‌تواند به خاطر نوع شرط مرزی مربوط به نیرو باشد. در رابطه با روابط تحلیلی باید توجه نمود که روابط به‌دست‌آمده از ارضاء کردن شرایط مربوط به تنش محوری در حالت کلی به‌دست‌آمده‌اند که این شرایط، شرط مربوط به برابری نیرو را ارضاء خواهد کرد و تنها در برخی نقاط از الیاف دچار مشکل خواهد شد.

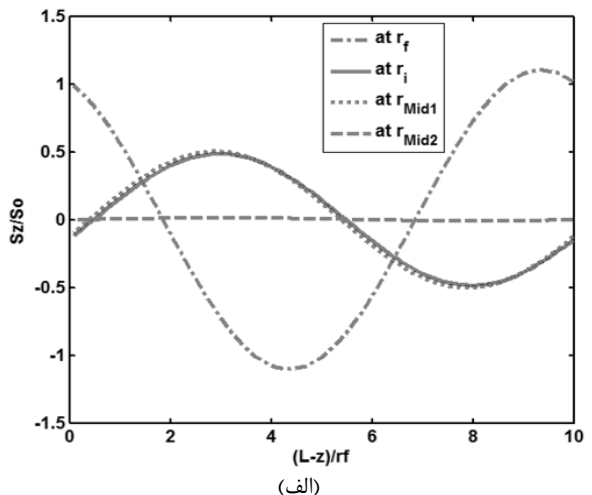
**۵- نتیجه**

در تحقیق حاضر حالت تحلیلی برای بررسی مایکرومکانیکی انتقال تنش در کامپوزیت متقارن سه‌فازی بر اساس بسط توابع ویژه برای دو حالت سالم و تا حدی جدا شده ارائه شد. فاز میانی به‌عنوان یک ناحیه محدود با خاصیت همسانگرد جانبی مدل شد. برخلاف تحقیق‌های ارائه شده در این زمینه که الیاف را ماده‌ای با خاصیت همسانگرد در نظر گرفته‌اند، در این تحقیق الیاف با خاصیت همسانگرد جانبی مورد بررسی قرار گرفت. برای فرمول‌بندی جابه‌جایی‌ها دودسته معادله با مشتقات جزئی درجه چهار در نظر گرفته شد. حل مقادیر ویژه برای جابه‌جایی‌ها بر اساس توابع بسط به دست آمد. سپس نتایج به‌دست‌آمده برای جابه‌جایی‌ها منجر به رسیدن به روابط تنش‌ها و

اشکال ۹ (الف) و ۹ (ب) به ترتیب نمایش‌دهنده توزیع تنش محوری در راستای ارتفاع در حالت سالم و تا حدی جدا شده در چهار شعاع مختلف می‌باشند. در شکل ۹ (الف) می‌توان دید که حداکثر تنش محوری در ابتدا، میانه و انتهای المان معرف حجمی و در مرز الیاف و لایه میانی می‌باشد و تقریباً با بار خارجی  $\sigma_0$  برابر است.

حداکثر تنش محوری در ابتدا و انتهای المان معرف حجمی به‌طور کششی و در میانه آن به‌صورت فشاری وارد می‌شود. می‌توان گفت که درجایی که تنش برشی به مقدار صفر می‌رسد، تنش محوری حداکثر بوده و بالعکس. همچنین مشاهده می‌شود که جهت تنش محوری در الیاف و لایه میانی مخالف یکدیگر و در زمینه تقریباً توزیع ثابت صفر دارد. این شرایط در ناحیه سالم حالت تا حدی جدا شده نیز برقرار است با این تفاوت که مقدار حداکثر تنش محوری تا  $0.3\sigma_0$  کاهش می‌یابد، همان‌طور که در شکل ۹ (ب) دیده می‌شود. در ناحیه جدا شده هم فقط در الیاف و زمینه تنش محوری وجود دارد که حداکثر تنش محوری در این ناحیه نیز مربوط به ابتدای المان در الیاف و برابر با همان مقدار  $\sigma_0$  است.

ملاحظه می‌شود که با شروع جدایش الیاف از لایه میانی تنش محوری الیاف کاهش یافته و در عوض تنش محوری زمینه افزایش می‌یابد، تا این‌که در مرز ناحیه سالم و جدا شده تقریباً به مقدار یکسانی می‌رسد.



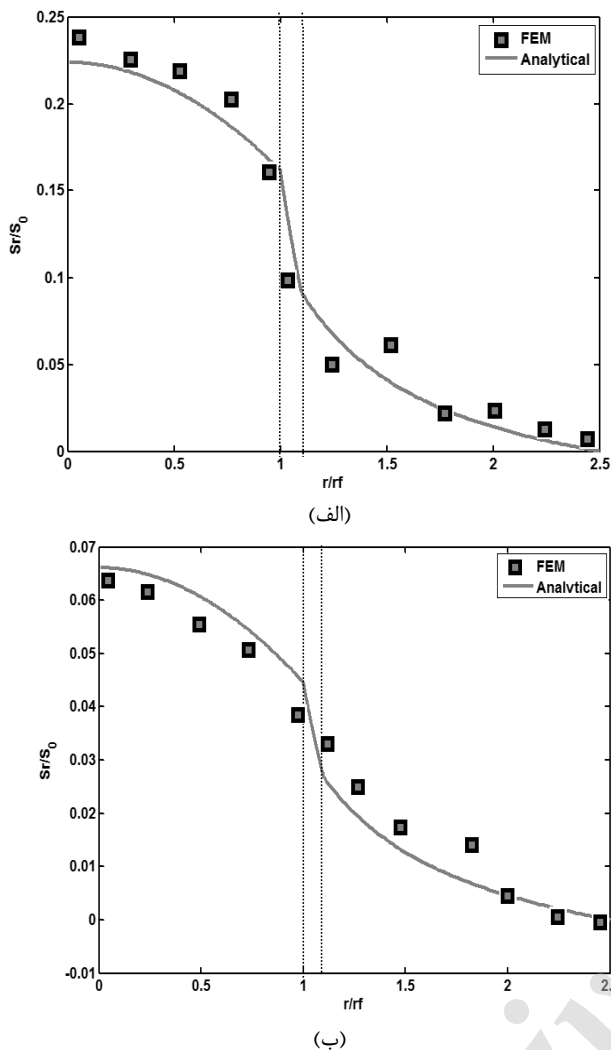


Fig 11. Variation of normalized radial stress along the radial direction derived from analytical and finite element method (a) intact model (b) partially debonded model with debonded length  $l$

شکل ۱۱ توزیع تنش شعاعی بی بعد در راستای شعاع به دست آمده از روش تحلیلی و اجزاء محدود (الف) حالت سالم و (ب) حالت جدا شده با طول جدا شده  $l$

همچنین مشاهده شد که حداکثر تنش شعاعی و تنش محوری در محل بارگذاری در مرکز الیاف رخ داده است. برای حالت تا حدی جدا شده هم موقعیت حداکثر تنش‌ها برای ناحیه سالم مانند حالت سالم بدون جدایش است اما مقدار آن به مراتب کمتر است، که این حاکی از آن است که در کامپوزیت با الیاف تا حدی جدا شده توانایی سازه در تحمل تنش‌ها کاهش می‌یابد. در کامپوزیت دوفازی در مرز الیاف و لایه میانی، به دلیل تکین بودن تنش در صفحه تماس الیاف و زمینه و همچنین شرایط سطح آزاد و همچنین مشابه نبودن خصوصیات مواد در این صفحه، صفحه تماس الیاف و زمینه تحت برش ترکیبی است که این امر موجب تخریب از نوع اول و دوم می‌شود که با وجود فاز میانی مجزا حداکثر تنش کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع در فرآیند تولید کامپوزیت‌ها، تولیدکننده‌ها می‌توانند با استفاده از فاز میانی عملکرد مکانیکی و انسجام ساختاری کامپوزیت را بهینه نمایند. ضخامت فاز میانی می‌تواند در حد میکرون و یا نانو باشد.

کرنش‌ها شد. پس از آن برای حالت سالم شرایط مرزی تنش همگن و اتصال قوی در ناحیه فاز میانی اعمال شد. حالت کلی شرط برابری نیرو در محل بارگذاری الیاف نیز اعمال شد. از مقایسه نتایج حاصل از تحلیل کامپوزیت سه فازی با نتایج دو فازی برای کامپوزیت دوفازی دریافت شد که در کامپوزیت سه فازی نسبت به کامپوزیت دوفازی به مراتب تنش‌های کمتری ایجاد می‌شود که این به نقش لایه میانی در تحمل و انتقال تنش مربوط می‌شود. سپس برای حالت تا حدی جدا شده نیز یک حل ترکیبی از ناحیه سالم طبق روش بالا و ناحیه جدا شده طبق روش مکانیک شکست ژو انجام شد. نتایج حاکی از آن بود که الیاف تا حدی جدا شده از لایه میانی قابلیت تحمل تنش برشی، شعاعی و محوری الیاف، لایه میانی و زمینه کمتری دارد. تحلیل اجزا محدود با همان ویژگی‌های استفاده شده در روابط تحلیلی به منظور بررسی صحت روابط تحلیل مورد بررسی قرار گرفته شد. نتایج تحلیلی به دست آمده برای تنش‌ها به طور منطقی با نتایج اجزا محدود همخوانی مناسبی داشت. در نتایج حالت سالم مشاهده شد که حداکثر تنش برشی در نزدیکی محل بارگذاری در صفحه تماس فاز میانی و الیاف صورت گرفت و با فاصله گرفتن از آن تنش برشی کاهش پیدا کرد تا این که در سطح خارجی زمینه به مقدار صفر رسید.

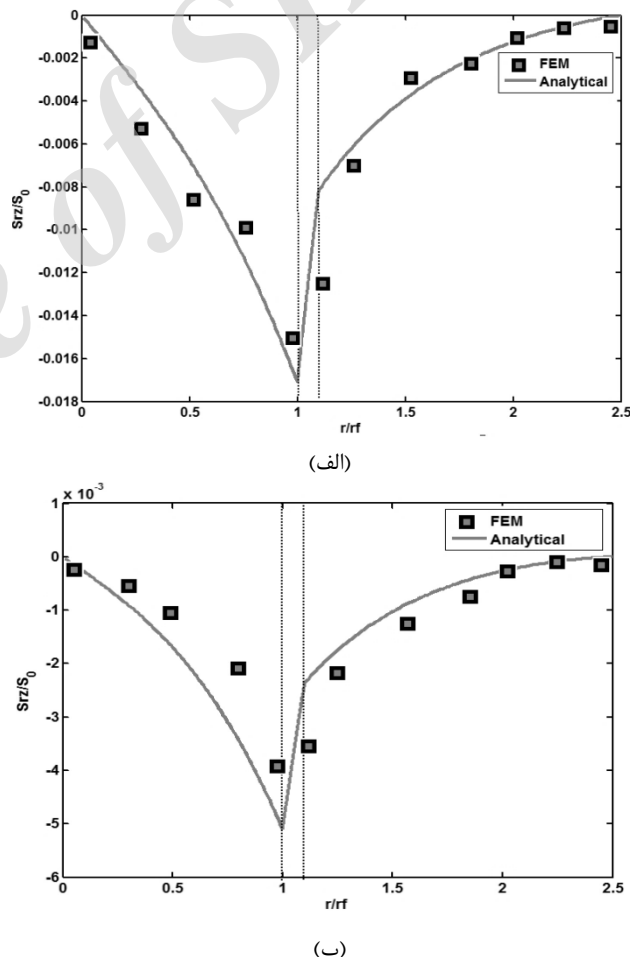


Fig 10. Variation of normalized shear stress along the radial direction derived from analytical and finite element method (a) intact model (b) partially debonded model with debonded length  $l$

شکل ۱۰ توزیع تنش برشی بی بعد در راستای شعاع به دست آمده از روش تحلیلی و اجزاء محدود (الف) حالت سالم و (ب) حالت جدا شده با طول جدا شده  $l$

- [8] Naslain, R. R., "The Design Of The Fibre-Matrix Interfacial Zone In Ceramic Matrix Composites", *Composites Part A: Applied Science And Manufacturing*, Vol. 29, No. 9, Pp. 1145-1155, 1998.
- [9] Kim, J.-K. And Mai, Y.-W., "Engineered Interfaces In Fiber Reinforced Composites", Elsevier, A, Vol. 978, No. 1, Pp. 08-042695-2, 1998.
- [10] Cox, H., "The Elasticity And Strength Of Paper And Other Fibrous Materials", *British Journal Of Applied Physics*, Vol. 3, No. 3, Pp. 72, 1952.
- [11] Hsueh, C.-H., "Interfacial Debonding And Fiber Pull-Out Stresses Of Fiber-Reinforced Composites", *Materials Science And Engineering: A*, Vol. 123, No. 1, Pp. 1-11, 1990.
- [12] Hsueh, C.-H., "Interfacial Debonding And Fiber Pull-Out Stresses Of Fiber-Reinforced Composites III: With Residual Radial And Axial Stresses", *Materials Science And Engineering: A*, Vol. 145, No. 2, Pp. 135-142, 1991.
- [13] Hsueh, C.-H., "Interfacial Debonding And Fiber Pull-Out Stresses Of Fiber-Reinforced Composites IV: Sliding Due To Residual Stresses", *Materials Science And Engineering: A*, Vol. 145, No. 2, Pp. 143-150, 1991.
- [14] Hsueh, C.-H., "Interfacial Debonding And Fiber Pull-Out Stresses Of Fiber-Reinforced Composites Part V. With A Viscous Interface", *Materials Science And Engineering: A*, Vol. 149, No. 1, Pp. 1-9, 1991.
- [15] Hsueh, C.-H., "Interfacial Debonding And Fiber Pull-Out Stresses Of Fiber-Reinforced Composites VII: Improved Analyses For Bonded Interfaces", *Materials Science And Engineering: A*, Vol. 154, No. 2, Pp. 125-132, 1992.
- [16] Aveston, J., Kelly, A., "Theory Of Multiple Fracture Of Fibrous Composites", *Journal Of Materials Science*, Vol. 8, No. 3, Pp. 352-362, 1973.
- [17] Naim, J. A., "On The Use Of Shear-Lag Methods For Analysis Of Stress Transfer In Unidirectional Composites", *Mechanics Of Materials*, Vol. 26, No. 2, Pp. 63-80, 1997.
- [18] Naim, J. A., "A Variational Mechanics Analysis Of The Stresses Around Breaks In Embedded Fibers", *Mechanics Of Materials*, Vol. 13, No. 2, Pp. 131-154, 1992.
- [19] Kovalev, S. P. Miranzo, P. And Osendi, M. I., "Finite Element Simulation Of Thermal Residual Stresses In Joining Ceramics With Thin Metal Interlayers", *Journal Of The American Ceramic Society*, Vol. 81, No. 9, Pp. 2342-2348, 1998.
- [20] Christensen, R. And Lo, K., "Solutions For Effective Shear Properties In Three Phase Sphere And Cylinder Models", *Journal Of The Mechanics And Physics Of Solids*, Vol. 27, No. 4, Pp. 315-330, 1979.
- [21] Needleman, A. Borders, T. Brinson, L. Flores, V. And Schadler, L., "Effect Of An Interphase Region On Debonding Of A CNT Reinforced Polymer Composite", *Composites Science And Technology*, Vol. 70, No. 15, Pp. 2207-2215, 2010.
- [22] Qing, H., "A New Theoretical Model Of The Quasistatic Single-Fiber Pullout Problem: Analysis Of Stress Field", *Mechanics Of Materials*, Vol. 60, Pp. 66-79, 2013.
- [23] Hashin, Z., "Thermoelastic Properties Of Fiber Composites With Imperfect Interface", *Mechanics Of Materials*, Vol. 8, No. 4, Pp. 333-348, 1990.
- [24] Hayes, S. Lane, R. And Jones, F., "Fibre/Matrix Stress Transfer Through A Discrete Interphase. Part 1: Single-Fibre Model Composites", *Composites Part A: Applied Science And Manufacturing*, Vol. 32, No. 3, Pp. 379-389, 2001.
- [25] Jiang, Y. Guo, W. And Yang, H., "Numerical Studies On The Effective Shear Modulus Of Particle Reinforced Composites With An Inhomogeneous Inter-Phase", *Computational Materials Science*, Vol. 43, No. 4, Pp. 724-731, 2008.
- [26] Qiu, Y. And Weng, G., "Elastic Moduli Of Thickly Coated Particle And Fiber-Reinforced Composites", *Journal Of Application Mechanics*, Vol. 58, No. 2, Pp. 388-398, 1991.
- [27] Rjafiallah, S. Guessasma, S. And Bizot, H., "Effect Of Surface Etching On Interphase And Elastic Properties Of A Biocomposite Reinforced Using Glass-Silica Particles", *Composites Science And Technology*, Vol. 70, No. 8, Pp. 1272-1279, 2010.
- [28] Tsai, H. C., Arocho, A. M., Gause, L. W., "Prediction Of Fiber-Matrix Interphase Properties And Their Influence On Interface Stress, Displacement And Fracture Toughness Of Composite Material", *Materials Science And Engineering: A*, Vol. 126, No. 1-2, Pp. 295-304, 1990.

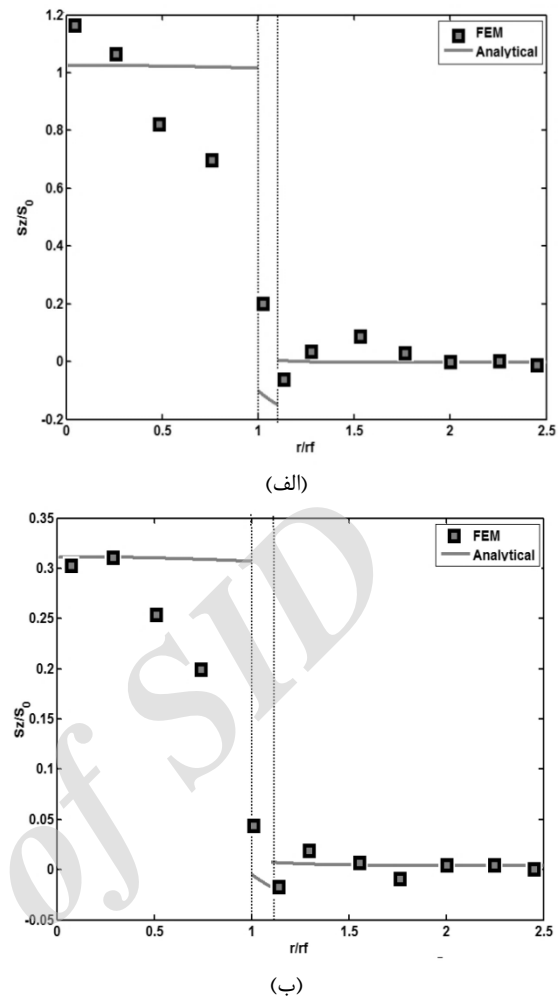


Fig 12. Variation of normalized axial stress along the radial direction derived from analytical and finite element method (a) intact model (b) partially debonded model with debonded length  $l$

شکل ۱۲ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در راستای شعاع به‌دست‌آمده از روش تحلیلی و اجزاء محدود (الف) حالت سالم و (ب) حالت جداشده با طول جداشده

## ۶- مراجع

- [1] Wu, Q. Li, M. Gu, Y. Li, Y. And Zhang, Z., "Nano-Analysis On The Structure And Chemical Composition Of The Interphase Region In Carbon Fiber Composite", *Composites Part A: Applied Science And Manufacturing*, Vol. 56, Pp. 143-149, 2014.
- [2] Drzal, L. T., "The Interphase In Epoxy Composites", In: *Epoxy Resins And Composites II*, Springer, Vol. 2, No. 3, Pp. 1-32, 1986.
- [3] Sottos, N. McCullough, R. And Scott, W., "The Influence Of Interphase Regions On Local Thermal Displacements In Composites", *Composites Science And Technology*, Vol. 44, No. 4, Pp. 319-332, 1992.
- [4] Atkins, A. G., "Intermittent Bonding For High Toughness/High Strength Composites", *Journal Of Materials Science*, Vol. 10, No. 5, Pp. 819-832, 1975.
- [5] Gao, S.-L. And Mäder, E., "Characterisation Of Interphase Nanoscale Property Variations In Glass Fibre Reinforced Polypropylene And Epoxy Resin Composites", *Composites Part A: Applied Science And Manufacturing*, Vol. 33, No. 4, Pp. 559-576, 2002.
- [6] Huang, Y. And Young, R. J., "Interfacial Micromechanics In Thermoplastic And Thermosetting Matrix Carbon Fibre Composites", *Composites Part A: Applied Science And Manufacturing*, Vol. 27, No. 10, Pp. 973-980, 1996.
- [7] Liu, L. Song, Y. Fu, H. Jiang, Z. Zhang, X. Wu, L. And Huang, Y., "The Effect Of Interphase Modification On Carbon Fiber/Polyarylacetylene Resin Composites", *Applied Surface Science*, Vol. 254, No. 17, Pp. 5342-5347, 2008.

- [29] Mogilevskaya, S. And Crouch, S., "A Galerkin Boundary Integral Method For Multiple Circular Elastic Inclusions With M Homogeneously Imperfect Interfaces", *International Journal Of Solids And Structures*, Vol. 39, No. 18, Pp. 4723-4746, 2002.
- [30] Shen, L. And Li, J., "Homogenization Of A Fibre/Sphere With An Inhomogeneous Interphase For The Effective Elastic Moduli Of Composites", In *Proceeding Of, The Royal Society*, Vol. 461, No. 3, Pp. 1475-1504, 2005 .
- [31] Wang, J. Crouch, S. L. And Mogilevskaya, S. G., "Numerical Modeling Of The Elastic Behavior Of Fiber-Reinforced Composites With Inhomogeneous Interphases", *Composites Science And Technology*, Vol. 66, No. 1, Pp. 1-18, 2006.
- [32] Shen, L. And Li, J., "Effective Elastic Moduli Of Composites Reinforced By Particle Or Fiber With An Inhomogeneous Interphase", *International Journal Of Solids And Structures*, Vol. 40, No. 6, Pp. 1393-1409, 2003.
- [33] Wu, Z. Ye, J. And Cabrera, J., "3D Analysis Of Stress Transfer In The Micromechanics Of Fiber Reinforced Composites By Using An Eigen-Function Expansion Method", *Journal Of The Mechanics And Physics Of Solids*, Vol. 48, No. 5, Pp. 1037-1063, 2000.
- [34] Upadhyaya, P. And Kumar, S., "Micromechanics Of Stress Transfer Through The Interphase In Fiber-Reinforced Composites", *Mechanics Of Materials*, Vol. 89, Pp. 190-201, 2015.
- [35] Zhou, L.-M. Kim, J.-K. And Mai, Y.-W., "Interfacial Debonding And Fibre Pull-Out Stresses", *Journal of Materials Science*, Vol. 27, No. 12, pp. 3155-3166, 1992.

Archive of SID