



## پیش‌بینی مسیر رشد ترک در نمونه‌ی پلیمری دارای شیار V شکل تحت بارگذاری مرکب برشی - فشاری

علیرضا ترابی<sup>1\*</sup>، بهادر بهرامی<sup>2</sup>، مجیدرضا آیت‌اللهی<sup>3</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\*a\_torabi@ut.ac.ir, 14395-1561، صندوق پستی تهران

### اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۵/۱۱/۲۵

پذیرش: ۹۶/۱/۳۰

### کلیدواژگان:

مسیر رشد ترک

شیار V شکل

المان محدود توسعه یافته

روش گام به گام

### چکیده

مسیر رشد ترک از شیارهای V شکل نوک گرد در نمونه‌ی دیسک برزیلی ساخته شده از پلیمر پلکسی گلاس تحت بارگذاری برشی-فشاری به دو صورت تجربی و تئوری مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا با انجام 18 آزمایش شکست، مسیر تجربی رشد ترک بر روی نمونه‌ی دیسک برزیلی دارای شیار V شکل (RV-BD) برای زوایای دهانه‌ی شیار مختلف و شعاع نوک شیار 0.5 میلی‌متر به دست آمده است. سپس با استفاده از دو روش المان محدود توسعه یافته بر مبنای مدل ناحیه‌ی چسبناک و روش گام به گام بر مبنای معیار حداکثر تنش محیطی، مسیر رشد ترک پیش‌بینی شده است. پیش‌بینی‌های حاصل از هر دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام و همچنین نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که اگرچه شیار V شکل تحت بارگذاری برشی-فشاری قرار دارد، اما شکست آن در اثر تنش‌های کششی موجود در لبه‌ی شیار آغاز شده و تا مرز خارجی قطعه رشد می‌کند. تطابق کیفی مسیرهای پیش‌بینی شده توسط هر دو معیار با مسیر به دست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی نشان دهنده‌ی توانایی هر دو روش در پیش‌بینی مسیر رشد ترک، برای شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی-فشاری می‌باشد.

## Crack growth trajectory prediction in V-notched polymeric specimen under combined compressive-shear loading conditions

Ali Reza Torabi<sup>1\*</sup>, Bahador Bahrami<sup>2</sup>, Majid Reza Ayatollahi<sup>2</sup>

1- Faculty of New Sciences & Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

2- School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14395-1561, Tehran, Iran, a\_torabi@ut.ac.ir

### Keywords

Crack growth trajectory  
 V-notch  
 Extended finite element  
 Incremental method

### Abstract

Crack growth trajectory in V-notched specimens is investigated by polymeric round-tip V-notched Brazilian disk (RV-BD) under combined compressive-shear loading conditions both experimentally and theoretically. First, the experimental fracture trajectory of RV-BD specimens is obtained by means of 18 fracture tests for various notch opening angles and 0.5 mm notch tip radius. Then, by utilizing two methods, namely the extended finite element method (XFEM) based on the cohesive zone model and the incremental method on the basis of the maximum tangential stress (MTS criterion), the fracture trajectory is predicted. Predictions of both the methods and also the experimental observations show that although the V-notch is under compressive-shear loading conditions, fracture initiates due to the tensile stresses at the notch border and propagates to the external boundary of the specimen. The graphical agreement of the two predicted trajectories with the experimental one demonstrates the ability of both methods in predicting the fracture trajectory for V-notches under compressive-shear loading conditions.

### ۱- مقدمه

قطعات و در نهایت شکست قطعه می‌باشند. بنابراین، بررسی رشد ترک‌های شروع شده از این شیارها تحت بارگذاری‌های گوناگون اهمیت ویژه‌ای دارد. به صورت عمومی می‌توان پژوهش‌های صورت گرفته بر روی شکست شیارهای V شکل را به چهار دسته‌ی عمومی تقسیم کرد. دسته‌ی اول از این تحقیقات مربوط به بررسی توزیع تحلیلی تنش در اطراف این شیارها می‌باشد. در این زمینه تحقیقات اولیه توسط ویلیامز [1] و بر روی شیارهای V شکل

بر خلاف ترک‌ها که معمولاً به صورت ناخواسته در قطعات و سازه‌ها ایجاد می‌شوند، شیارها و به خصوص شیارهای V شکل به دلایل خاص کاربردی در طراحی‌های مهندسی از جمله سازه‌های هوافضایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. وجود شیارهای V شکل در قطعات، موجب تمرکز شدید تنش در نزدیکی نوک آن‌ها شده و این شیارها مکان‌های مستعدی برای جوانه‌زنی ترک در

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Torabi, A. R. Bahrami, B. and Ayatollahi, M. R., "Crack growth trajectory prediction in V-notched polymeric specimen under combined compressive-shear loading conditions", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 3, pp. 337-346, 2017.

حداکثر تنش محیطی توسط آیت‌الهی و ترابی [21] و ترابی و امینی‌نژاد [22] اشاره کرد. معیار ارائه شده توسط آنها توانست به خوبی شکست شیارهای V شکل را در طیف کاملی از ترکیب موها پیش‌بینی کند.

در تمامی تحقیقات اشاره شده، شکست شیارهای V شکل در حالت مود ترکیبی I/II اختصاص به بارگذاری برشی-کششی دارد. ترابی و همکاران [24,23] اولین کسانی بودند که با استفاده از معیار حداکثر تنش محیطی و مفهوم فاصله‌ی بحرانی توانستند شکست شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری را پیش‌بینی کنند. آنها با استفاده از نتایج تحلیل‌های عددی و همچنین نتایج آزمایشگاهی نشان دادند اگرچه نیمساز شیار V شکل تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، اما شکست شیار در نهایت ناشی از تنش‌های کششی محلی موجود بر روی مرز آن می‌باشد.

دسته‌ی چهارم از پژوهش‌های صورت گرفته بر روی شیارهای V شکل مربوط به مسیر رشد ترک از این شیارها تا شکست نهایی قطعه می‌باشد. پیش‌بینی مسیر رشد ترک در کاربردهای مهندسی اهمیت بسیاری دارد. با معلوم بودن مسیر رشد ترک می‌توان با تقویت مسیر مذکور، رشد ترک و وقوع شکست را به تاخیر انداخت و شانس آشکارسازی ترک در بازدیدهای دوره‌ای را افزایش داد. بعلاوه، در برخی کاربردهای خاص از جمله جنگ-افزارهای تخریبی مبتنی بر انفجار (سرجنگی و ...) نیاز به داشتن ترک‌هایی با اندازه‌ی مشخص و کنترل شده می‌باشد که برای این منظور نیاز مبرم به حصول ترک‌های شاخه شاخه شده از محل انفجار و رشد ترک‌ها در مسیر معین می‌باشد. با وجود اینکه پیش‌بینی مسیر رشد ترک می‌تواند اهمیت قابل ملاحظه‌ای در کاهش هزینه‌ها و صدمات ناشی از شکست ناگهانی قطعه‌ی مهندسی داشته باشد، اما تاکنون بخش بسیار کمی از تحقیقات به این حوزه اختصاص داشته است [25].

در این پژوهش سعی می‌شود تا رشد ترک از شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور از دو روش المان محدود توسعه یافته<sup>2</sup> و روش گام به گام<sup>4</sup> استفاده شده است. روش المان محدود توسعه یافته با استفاده از المان‌های غنی شده این امکان را برای هر یک از المان‌ها فراهم می‌کند که از درون دچار گسیختگی شود. بنابراین برای رشد ترک در سراسر قطعه نیاز به المان‌بندی مجدد آن نیست و با یک مرحله حل، ترک به صورت کامل تا مرزهای خارجی قطعه رشد می‌کند.

اما روش دوم یک روش چند مرحله‌ای می‌باشد که در هر مرحله ترک بر اساس یکی از معیارهای رشد ترک تا اندازه‌ی محدودی رشد می‌کند و سپس تحلیل جدید برای گام بعدی رشد ترک صورت می‌گیرد. این عمل تا آنجایی ادامه پیدا می‌کند که ترک تا مرزهای خارجی قطعه به صورت کامل رشد کند. برای ارزیابی پیش‌بینی‌های حاصل از هر دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام از نتایج آزمایشگاهی مربوط به قطعه‌ی پلیمری دیسک برزیلی استفاده می‌شود. در پایان نشان داده می‌شود که هر دو روش به خوبی می‌توانند مسیر رشد ترک از شیارهای V شکل تا مرزهای خارجی قطعه را پیش‌بینی کنند.

## ۲- آزمون‌های شکست

تعداد 18 آزمایش بر روی قطعات دیسک شکلی که به وسیله‌ی شیار V شکل تضعیف شده‌اند برای زوایای دهانه‌ی شیار 30 و 60 درجه و شعاع نوک شیار

نوک تیز و به صورت حل دقیق انجام گرفت. پس از ارائه‌ی حل ویلیامز، از آنجایی که شیارهای V شکل نوک گرد به دلیل وجود تمرکز تنش کمتر، عملاً کاربرد بسیار بیشتری از شیارهای V شکل نوک تیز دارند، علاقه‌ی بسیاری از محققان به بررسی توزیع تنش در اطراف این دسته از شیارها جلب شد. در نهایت، روابط میدان تنش در اطراف شیار V شکل نوک‌گرد، اولین بار توسط تاوو و لازارین در سال 1996 محاسبه و به صورت حل تقریبی استخراج شد [2]. محاسبات اجزای محدود نشان می‌داد که در زوایای دهانه شیار بزرگ، دقت روابط ارائه شده توسط تاوو و لازارین [2] در حد مناسبی نیست. اصلاح و افزایش دقت این روابط تا چندین سال موضوع تحقیق محققین بود تا اینکه روابط دقیق‌تری توسط فیلیپی و همکاران در سال 2002 ارائه شد [3]. اگرچه روابط جدید به دست آمده همچنان یک حل تقریبی برای میدان تنش در اطراف نوک شیار می‌باشد، اما دقت آن به مقدار قابل توجهی افزایش یافته است.

دسته‌ی دوم در پژوهش‌های صورت گرفته بر روی شکست شیارهای V شکل را می‌توان به تلاش‌های انجام شده برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش اختصاص داد. این ضرایب با استفاده از روش‌های گوناگون که می‌توان آن‌ها را به سه دسته‌ی کلی تحلیلی، تجربی و عددی تقسیم‌بندی کرد، به دست آمده‌اند. از آنجایی که روش‌های تحلیلی تنها برای هندسه‌های بسیار ساده قابل بررسی می‌باشند، بیشتر پژوهش‌های صورت گرفته در دو دسته‌ی عددی و تجربی قرار دارند. از جمله تلاش‌های عددی صورت گرفته در زمینه-ی محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش شیار V شکل می‌توان به روش اجزاء مرزی توسط اشتراندبرگ [4]، روش اجزا محدود مقیاس شده [5]، استفاده از روش المان محدود توسط آیت‌الهی و همکاران [6,7] و همچنین موارد دیگر [8-10] اشاره کرد. همچنین روش‌های تجربی متفاوتی نیز برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش شیارهای V شکل مورد توجه محققان بوده است. از این میان می‌توان به استفاده از روش فتوالاستیسیته [11]، برهم‌نگاری دیجیتال<sup>1</sup> [12] و CGS<sup>2</sup> [13] توسط محققان اشاره کرد.

دسته‌ی سوم از پژوهش‌های صورت گرفته بر روی شکست شیارهای V شکل را می‌توان به بررسی معیارهای شروع ترک از این شیارها اختصاص داد. تاکنون معیارهای متفاوتی برای بررسی شروع ترک از شیارهای V شکل ارائه شده است. بخش عمده‌ی این معیارها مربوط به پیش‌بینی شکست این شیارها تحت بارگذاری مود I خالص است. از میان این معیارها می‌توان به معیار ضریب شدت تنش بحرانی [14]، معیار حجم انرژی محدود به وسیله‌ی لازارین و همکاران [15] و همچنین معیار حداکثر تنش محیطی توسط آیت-الهی و ترابی [16] اشاره کرد.

حجم تحقیقات صورت گرفته بر روی معیارهای شکست شیارهای V شکل در حالت بارگذاری مود ترکیبی I/II نسبت به حالت مود I خالص از میزان کمتری برخوردار است. از میان این معیارها می‌توان به معیار ترک چسبناک توسط سندن و همکاران [17] و معیار ارائه شده توسط دان و همکاران [18] اشاره کرد. این معیار در واقع تعمیمی بود بر معیاری که همین محققان در حالت مود I خالص مورد بررسی قرار داده بودند. از سایر معیارهای ارائه شده می‌توان به معیار پیریل و همکاران [19] که در واقع تعمیمی بر معیار ارائه شده توسط یوسیباش [20] بود اشاره کرد. همچنین از دیگر تحقیقات صورت گرفته بر روی معیارهای شکست شیارهای V شکل (و درحالت خاص برای شیارهای V شکل با سوراخ انتهایی) می‌توان به معیار

<sup>3</sup> Extended finite element method (XFEM)

<sup>4</sup> Incremental method

<sup>1</sup> Digital image correlation

<sup>2</sup> Coherent gradient sensing

تدریج زاویه‌ی  $\beta$  افزایش یابد، آنگاه شرایط بارگذاری از مود I خالص به سمت مود II خالص تغییر می‌کند. زاویه‌ی  $\beta_{II}$  زاویه‌ای است که در آن شیار به صورت کامل تحت بارگذاری مود II خالص قرار می‌گیرد. اگر مجدداً زاویه  $\beta$  افزایش یابد شرایط از مود II به مود I تغییر می‌کند با این تفاوت که در این حالت مود I فشاری به قطعه اعمال می‌گردد و در حالتی که زاویه‌ی  $\beta$  به صورت کامل 90 درجه گردد، شیار تحت مود I فشاری خالص قرار می‌گیرد. بنابراین، در صورتی که  $0 \leq \beta \leq \beta_{II}$  شیار تحت بارگذاری مود ترکیبی I و II با مود I مثبت (برشی-کششی) و در حالتی که  $90^\circ \leq \beta \leq \beta_{II}$  باشد شیار تحت بارگذاری مود ترکیبی I و II با مود I منفی (برشی- فشاری) قرار می‌گیرد.

برای انجام آزمایش‌ها تحت بارگذاری مود ترکیبی I و II و با مود I منفی (برشی- فشاری) ابتدا بایستی زاویه  $\beta_{II}$  محاسبه گردد. سپس می‌توان با انتخاب مقادیری بین  $\beta_{II}$  و 90 درجه آزمون‌های مورد نظر را انجام داد. با در نظر گرفتن نسبت طول شیار به قطر دیسک برابر 0.5 و همچنین شعاع نوک شیار 0.5 میلی‌متر،  $\beta_{II}$  از مرجع [6] قابل استحصال است. با استفاده از مرجع [7] برای زاویه‌ی دهانه‌ی شیار 30 درجه و شعاع نوک شیار 0.5 میلی‌متر این زاویه برابر 27 درجه و برای زاویه‌ی دهانه‌ی شیار 60 درجه و شعاع نوک شیار 0.5 میلی‌متر این زاویه برابر 29 درجه به دست می‌آید.

از سوی دیگر نیز باید این نکته را در نظر گرفت که برای مقادیر بالای زاویه‌ی  $\beta$ ، شیارهای جانبی نیز به صورت همزمان تحت بارگذاری مود ترکیبی I و II قرار می‌گیرند که می‌تواند سبب شود شکست قطعه از این شیارها رخ دهد، که اتفاقی مطلوب نیست. بزرگترین مقدار  $\beta$  که در آن شکست از شیار اصلی و نه از شیارهای جانبی رخ می‌دهد را  $\beta_c$  می‌نامند. ترابی و همکاران [23] نشان دادند که مقدار  $\beta_c$  وابسته به زاویه‌ی دهانه شیار و شعاع نوک آن است. آنها نشان دادند که برای زاویه‌ی دهانه شیار 23 درجه و مقادیر مختلف شعاع نوک شیار،  $\beta_c$  بین 55 تا 60 درجه و برای زاویه‌ی دهانه‌ی شیار 60 درجه و مقادیر مختلف شعاع نوک شیار  $\beta_c$  بین 50 تا 55 درجه می‌باشد. بنابراین، مقادیر مناسب  $\beta$  برای بررسی مسیر رشد ترک تحت بارگذاری برشی- فشاری برای شیار V شکل با  $2\alpha=30^\circ$ ، 40، 30 و 50 درجه و برای  $2\alpha=60^\circ$ ، 30، 40 و 45 درجه در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است در تمامی آزمایش‌ها شعاع نوک شیار ثابت و برابر 0.5 میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

به منظور بررسی تکرارپذیری نتایج آزمایش‌ها، برای هر شکل هندسی و زاویه‌ی بارگذاری 3 نمونه تکراری ساخته شده است. همچنین برای اعمال شرایط بارگذاری استاتیکی، سرعت حرکت فک دستگاه 1 میلی‌متر بر دقیقه در نظر گرفته شده است. روی هم رفته 18 آزمایش تحت شرایط جابه‌جایی- کنترل انجام گرفته که تصویر برخی از قطعات دیسک برزلی قبل و بعد از آزمایش در شکل 2 مشاهده می‌شود.

شکل 3 نشان دهنده‌ی نتایج حاصل از آزمایش‌های شکست بر روی 3 نمونه‌ی تکراری دیسک برزلی با مشخصات هندسی و شرایط بارگذاری ثابت می‌باشد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، مسیرهای رشد ترک برای هر 3 نمونه‌ی شکسته شده تکرار پذیر بوده که نشان دهنده‌ی قابل اعتماد بودن نتایج آزمایش است. در بخش‌های بعدی با معرفی دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام مسیرهای شکست شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری پیش‌بینی شده و با نتایج تجربی به دست آمده مقایسه می‌شوند.

0.5 میلی‌متر تحت بارگذاری برشی-فشاری انجام شده است. جزئیات آزمایش‌ها در ادامه آورده می‌شود.

## ۱-۲- ماده

جنس قطعات مورد استفاده برای انجام آزمایش‌ها، پلیکسی گلاس می‌باشد که تاکنون به صورت گسترده‌ای در مکانیک شکست مورد استفاده قرار گرفته است. از آنجایی که انواع پلیکسی گلاس‌ها به دلیل ساخته شدن توسط کارخانه‌های مختلف دارای ترکیبات و خواص مکانیکی متفاوتی هستند، برای به دست آوردن خواص مکانیکی پلیکسی گلاس مورد استفاده، آزمون‌های مشخصه‌سازی مواد صورت گرفته است. به این ترتیب، خواص کششی و چقرمگی شکست ماده به ترتیب با استفاده از استانداردهای ASTM با کدهای D5045-99 و D638-99 به دست آمده است. خواص به دست آمده در جدول 1 آورده شده است.

جدول 1 خواص مکانیکی پلیکسی گلاس آزمایش شده

Table 1 Mechanical properties of the tested PMMA

مقدار	خواص
1.816 GPa	مدول الاستیک
0.38	ضریب پواسون
68.5 MPa	استحکام کششی
$1.71 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$	چقرمگی شکست کرنش صفحه‌ای

## ۲-۲- نمونه آزمون

نمونه‌ی شناخته‌شده‌ی دیسک برزلی به عنوان نمونه آزمایشگاهی برای انجام آزمون‌های برشی- فشاری مورد استفاده قرار گرفته است. تصویر شماتیک این قطعه در شکل 1 مشاهده می‌شود.

در شکل 1،  $\beta$  زاویه‌ی بین راستای بارگذاری و خط نیمساز شیار است. پارامترهای  $2\alpha$ ،  $d$ ،  $t$ ،  $P$  و  $D$  به ترتیب زاویه‌ی دهانه‌ی شیار، شعاع نوک شیار، ضخامت دیسک، دو برابر طول شیار، قطر دیسک و بار فشاری اعمالی می‌باشند. قطر دیسک، دو برابر طول شیار و ضخامت دیسک، مقادیر ثابت و به ترتیب برابر با 80، 40 و 8 میلی‌متر در نظر گرفته شده‌اند. همچنین مقادیر زاویه‌ی دهانه‌ی شیار برابر با 30 و 60 درجه و شعاع نوک شیار برابر با 0.5 میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

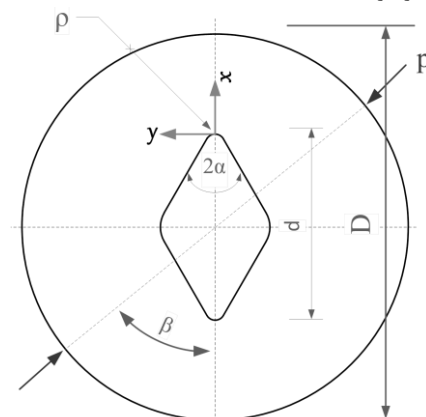


Fig. 1 The RV-BD specimen

شکل 1 تصویر دیسک برزلی دارای شیار V شکل

در صورتی که زاویه‌ی بار اعمالی  $P$  در راستای خط نیمساز شیار باشد ( $\beta=0$ )، شیار مرکزی تحت بارگذاری مود I خالص مثبت قرار می‌گیرد. اگر به

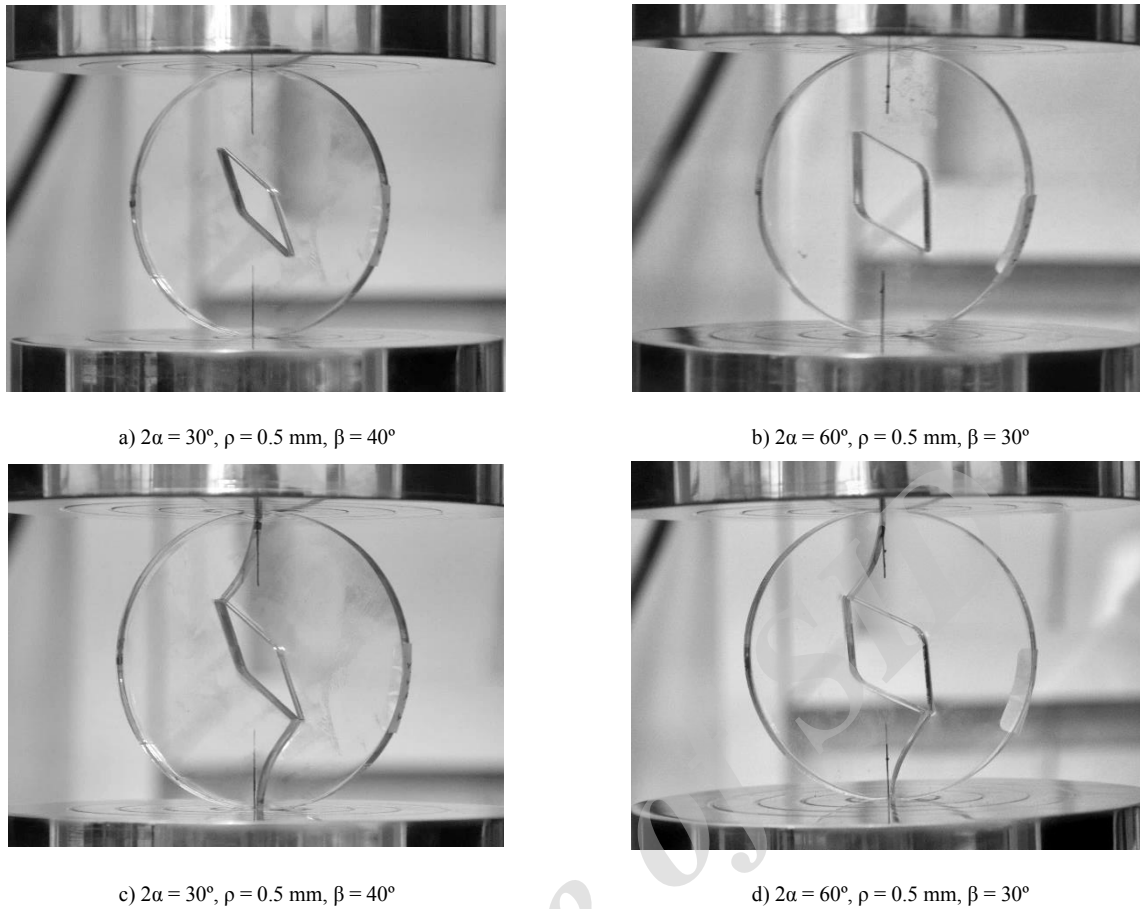


Fig. 2 The RV-BD specimens (a, b) before and (c, d) after the fracture

شکل ۲ قطعات RV-BD (a و b) قبل و (c و d) بعد از شکست

مورد استفاده قرار می‌گیرد.

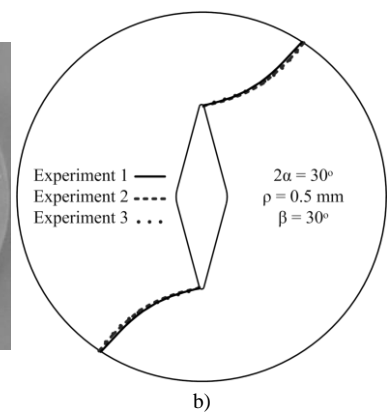
### ۳-۱- روش المان محدود توسعه یافته

روش المان محدود توسعه یافته یکی از جدیدترین روش‌های مدلسازی در مکانیک شکست است. این روش نسبت به روش‌های متداول در مکانیک شکست مزایای زیادی دارد. مدلسازی با استفاده از روش‌های متداول در مکانیک شکست نیازمند آن است که المان‌بندی قطعه از هندسه‌ی ناپیوستگی تبعیت کند، بنابراین برای اینکه نقاط ناپیوستگی به خوبی

۳- معیارهای پیش‌بینی کننده‌ی مسیر رشد ترک از شیار V شکل در این بخش، دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام به صورت اجمالی معرفی می‌شوند تا در بخش‌های بعد با استفاده از این دو روش مسیر رشد ترک از شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری پیش-بینی شود. لازم به ذکر است که روش گام به گام پیشتر توسط محققان برای پیش‌بینی مسیر رشد ترک در نمونه‌های ترک‌دار مورد استفاده قرار گرفته است [26] و اکنون برای بررسی مسیر رشد ترک‌های شروع شده از شیارها



a)



b)

Fig. 3 Verifying the repeatability of the experiments for constant geometrical and loading conditions

شکل ۳ بررسی تکرار پذیر بودن نتایج آزمایش‌ها در شرایط هندسی و بارگذاری ثابت

یک شیار V شکل دارای ترک مورد بررسی قرار می‌گیرد. این عمل مرحله به مرحله صورت می‌گیرد تا رشد ترک به مرزهای خارجی قطعه برسد و قطعه به صورت کامل به دو قسمت تبدیل شود. هر قدر مقدار طول ترک‌های ایجاد شده در هر مرحله کوچکتر باشد دقت پیش‌بینی مسیر رشد ترک توسط این روش بالاتر خواهد بود، اما تعداد تحلیل‌های لازم افزایش پیدا خواهد کرد. شکل 5 نمایی شماتیک از روند پیش‌بینی مسیر رشد ترک توسط روش گام به گام را نمایش می‌دهد.

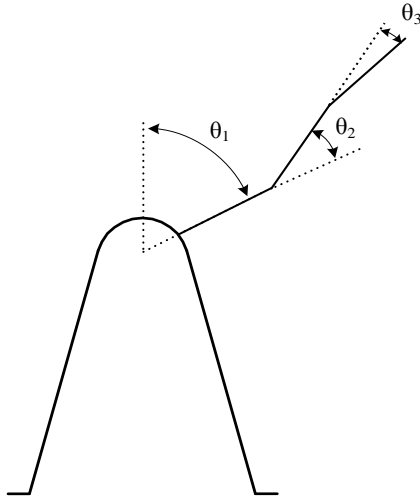


Fig. 5 The incremental method

شکل 5 روش گام به گام

در این پژوهش معیار حداکثر تنش محیطی به عنوان معیار مبنا برای رشد مرحله‌ای ترک مورد استفاده قرار گرفته است. مطابق با معیار حداکثر تنش محیطی، شکست ترد هنگامی رخ می‌دهد که تنش محیطی  $\sigma_{\theta\theta}$  در یک فاصله‌ی بحرانی  $r_c$  از نوک ترک به میزان بحرانی خود برسد. پارامترهای  $r_c$  و  $\sigma_{\theta\theta}$  اغلب به عنوان خواص ماده در نظر گرفته می‌شوند و از شکل هندسی و شرایط بارگذاری مستقل هستند. آیت‌اللهی و همکارانش اولین کسانی بودند که به صورت سیستمی این معیار را برای شیارها نیز به کار بردند [30,29,21]. اولین فرض آن‌ها در استفاده از معیار حداکثر تنش محیطی در حوزه‌ی شیارها این بود که شکست از نقطه‌ای بر روی مرز شیار آغاز خواهد شد که تنش محیطی در آن بیشینه باشد و در راستای عمود بر این تنش بیشینه پیشروی خواهد کرد. فرض دوم آن‌ها در معیار حداکثر تنش محیطی این بود که شکست هنگامی آغاز خواهد شد که تنش محیطی در اطراف شیار به میزان بحرانی خود در فاصله‌ی بحرانی برسد. شکل 6 یک شیار V شکل نوک‌گرد با پارامترهای هندسی مربوط به معیار حداکثر تنش محیطی را نشان می‌دهد.

در مراجع مختلف توسط آیت‌اللهی و ترابی نشان داده شده است که می‌توان میزان تنش محیطی بحرانی را برابر با استحکام نهایی ماده در نظر گرفت [21]. علاوه بر آن اگر شیار بر اثر تنش‌های کششی شکسته شود، فاصله‌ی بحرانی آن می‌تواند برابر با فاصله‌ی بحرانی ترک‌های نوک‌تیز مطابق با رابطه‌ی زیر به دست آید [31,21]:

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_u} \right)^2 \quad (2)$$

در رابطه‌ی (2)،  $K_{Ic}$  چقرمگی شکست کرنش صفحه‌ای است که جزء خواص ماده محسوب می‌گردد. با توجه به جدول 1 و رابطه‌ی (2) مقدار  $r_c$  برای پلیمر آزمایش شده برابر 0.1 میلی‌متر به دست می‌آید.

مدلسازی شوند باید از المان‌های بسیار ریز و یا المان‌های تکین در آن نقاط استفاده کرد. این مسئله زمانی پیچیده‌تر می‌شود که مسئله، مدلسازی ترک در حال رشد باشد. در این موارد باید در هر گام از رشد ترک المان‌بندی قطعه مجدداً تغییر کند تا المان‌بندی بتواند به خوبی ناپیوستگی را مدلسازی کند. بر خلاف روش‌های متداول در مکانیک شکست در روش المان محدود توسعه یافته که نخستین بار توسط بلیشکو و بلک [27] معرفی شد، مدلسازی اطراف ناپیوستگی بدون استفاده از المان‌های تکینه و از طریق غنی‌سازی المان‌ها (اضافه کردن درجات آزادی) صورت می‌گیرد.

روش المان محدود توسعه یافته برای پیش‌بینی آغاز و رشد ترک نیازمند یک معیار تخریب است. معیار تخریب متداول مورد استفاده در این روش مدل ناحیه چسبناک می‌باشد. مدل ناحیه چسبناک اولین بار توسط بارنبلات [28] برای رشد ترک در شکست ترد معرفی شد. در مدل ناحیه چسبناک رفتار بین تنش چسبنده و جابه‌جایی عمودی لبه‌های ترک مجازی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$T = f(\delta) \quad (1)$$

در رابطه‌ی (1)،  $T$  تنش چسبنده،  $\delta$  جابه‌جایی لبه‌های ترک مجازی و  $f(\delta)$  تابع نرم شوندگی می‌باشد. تابع نرم شوندگی جزء خواص ماده بوده و رابطه‌ی بین جابه‌جایی مجازی لبه‌های ترک و تنش چسبنده را نشان می‌دهد. برای مواد ترد مانند پلیکسی گلاس تابع نرم شوندگی رفتاری خطی دارد. در رفتار تابع نرم شوندگی دو پارامتر مقاومت کششی  $T_{max}$  و انرژی شکست  $G_f$  تاثیر بسیار زیادی دارند. مقاومت کششی تنش است که در آن ترک در ماده آغاز می‌شود و معمولاً برای مواد ترد برابر با استحکام کششی ماده در نظر گرفته می‌شود. همچنین انرژی شکست عبارت است از انرژی مورد نیاز برای ایجاد یک صفحه ترک جدید و برابر با سطح زیر منحنی نرم شوندگی می‌باشد. شکل 4 نمایی از مدل ناحیه‌ی چسبناک خطی به همراه سایر متغیرهای مرتبط با آن را نمایش می‌دهد.

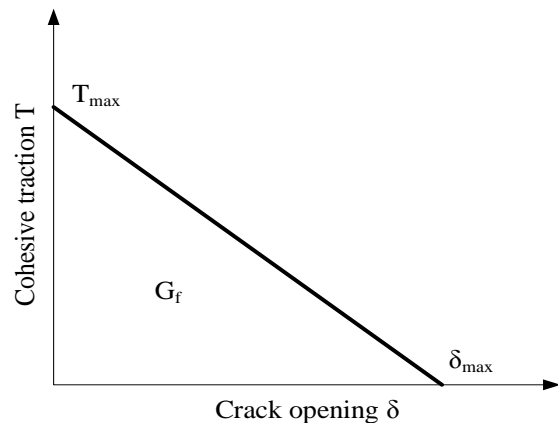


Fig. 4 Linear cohesive zone model

شکل 4 مدل ناحیه‌ی چسبناک خطی

### ۳-۲- روش گام به گام

روش گام به گام یک روش کلاسیک برای به دست آوردن مسیر رشد ترک در سازه‌های مهندسی است. مطابق با این روش راستای ترک اولیه از شیار V شکل بر مبنای یکی از معیارهای آغاز ترک از شیار V شکل مانند معیار حداکثر تنش محیطی، کمینه‌ی نرخ انرژی کرنشی و غیره محاسبه می‌شود و به اندازه‌ی محدودی رشد داده می‌شود. پس از مشخص شدن مسیر و اندازه‌ی ترک اولیه، مجدداً تحلیل جدیدی آغاز می‌شود که در آن مسیر رشد ترک از

## ۴-۱- شبیه‌سازی روش المان محدود توسعه یافته

با توجه به قابلیت مناسب نرم افزار آباکوس در مدلسازی ناپیوستگی‌ها به روش المان محدود توسعه یافته، برای مدلسازی قطعات با استفاده از این روش، از این نرم‌افزار استفاده شده است. به منظور مدلسازی رشد ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته، در گام اول نیاز به یک مدل تخریب مناسب وجود دارد. همانطور که در بخش‌های قبل ذکر شد، مدل ناحیه‌ی چسبناک به عنوان یک مدل متداول و مناسب برای این منظور انتخاب شده است. پس از انتخاب مدل ناحیه‌ی چسبناک به عنوان مدل تخریب مناسب، می‌بایست پارامترهای اساسی این مدل برای نرم افزار المان محدود تعریف شود. به دلیل رفتار ترد ماده پلیمری پلکسی گلاس، حداکثر تنش ( $T_{max}$ ) که برابر نقطه‌ی اوج یا قله‌ی منحنی کشش- جدایش در شکل 4 می‌باشد، برابر با استحکام نهایی ماده در نظر گرفته شده است. همچنین رفتار تابع نرم شوندگی خطی و انرژی کرنشی شکست ( $G_f$ ) از رابطه‌ی پیشنهادی اروین به دست آمده است. رابطه‌ی (3)، نحوه‌ی به دست آوردن انرژی کرنشی شکست پیشنهادی توسط اروین را ارائه می‌دهد [32].

$$G_f = \frac{K_{IC}^2}{E'} \rightarrow \begin{cases} E' = E & \text{Plane stress} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{Plane strain} \end{cases} \quad (3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (3) و جدول 1 و با در نظر گرفتن تنش صفحه‌ای بودن مدلسازی، مقدار انرژی شکست ( $G_f$ ) برابر با 1.6 نیوتون بر میلی‌متر به دست می‌آید. همچنین با توجه به رفتار ترد پلکسی گلاس، مدل مادی المان-مرزی قطعه به‌گونه‌ای اعمال شده است که نقطه‌ای که در زیر بار خارجی اعمالی قرار می‌گیرد تنها می‌تواند در راستای شعاعی حرکت داشته باشد و همچنین نقطه‌ی مقابل آن در دیسک برزلی نیز به صورت کامل مقید شده است. همچنین بار خارجی اعمالی به‌گونه‌ای است که راستای آن با نیمساز شیار زاویه‌ی  $\beta$  را خواهد داشت.

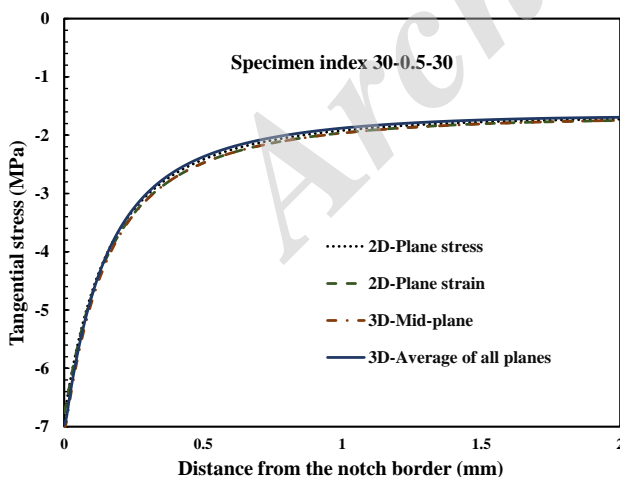


Fig. 7 Variations of the tangential stress versus the distance from the notch border for 2D and 3D analyses

شکل ۷ تغییرات تنش محیطی بر حسب فاصله از مرز شیار برای تحلیل‌های دو و سه بعدی

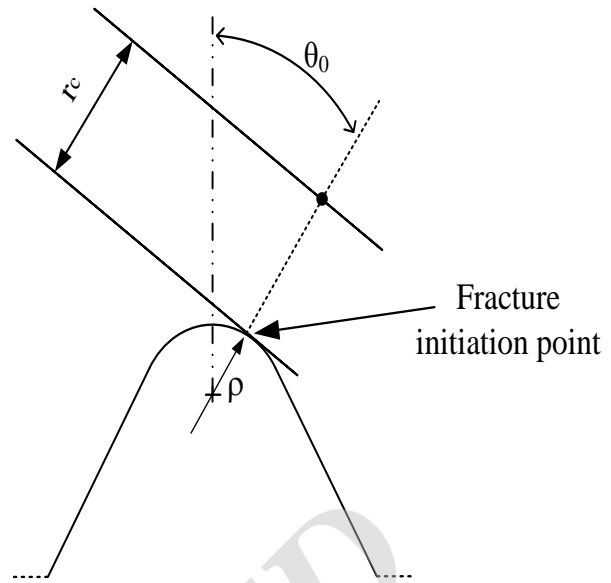


Fig. 6 A blunt V-notch with its geometrical parameters related to the RV-MTS criterion

شکل ۶ یک شیار V شکل نوک‌گرد با پارامترهای هندسی مربوط به معیار حداکثر تنش محیطی

## ۴-۲- شبیه‌سازی المان محدود

اولین گام برای انجام تحلیل‌های اجزای محدود، بررسی قابلیت انجام تحلیل به صورت دو بعدی می‌باشد. زیرا اگر بتوان تحلیل را به صورت دو بعدی انجام داد حجم تحلیل‌ها بسیار کمتر و در نتیجه سرعت تحلیل‌ها بسیار بالاتر می‌گردد. برای این منظور، برای یک هندسه و نوع بارگذاری مشخص از قطعه ( $2\alpha = 30^\circ$ ,  $\rho = 0.5\text{mm}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ) سه نوع تحلیل صورت گرفته است؛ دو نوع تحلیل دو بعدی تنش و کرنش صفحه‌ای و یک تحلیل سه بعدی. لازم به ذکر است در تمام این تحلیل‌ها بار ثابت با مقدار 1000 N به قطعه اعمال شده است. شکل 7 تغییرات تنش محیطی در راستای نیمساز شیار را بر حسب میزان فاصله از شیار نشان می‌دهد. در این شکل دو منحنی به ترتیب مربوط به تحلیل‌های دو بعدی تنش و کرنش صفحه‌ای و دو منحنی هم مربوط به تحلیل سه بعدی صورت گرفته می‌باشد.

برای تحلیل سه بعدی صورت گرفته دو منحنی گزارش شده که به ترتیب مربوط به مقادیر تنش محیطی بر روی خط نیمساز شیار در صفحه‌ی میانی قطعه و همچنین میانگین مقادیر تنش محیطی بر روی خط نیمساز شیار در تمامی صفحات عبور کننده از شیار است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود نتایج تمامی نتایج بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند که نشان دهنده‌ی قابلیت استفاده از هر یک از انواع تحلیل برای مدلسازی قطعه‌ی دیسک برزلی تحت شرایط بارگذاری برشی- فشاری می‌باشد. لازم به ذکر است که همانطوری که در شکل 7 مشاهده می‌شود خط نیمساز شیار تحت تنش‌های محیطی منفی (فشاری) قرار دارد که نشان دهنده‌ی منفی بودن مود I در قطعه می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل 7 و نتیجه‌گیری صورت گرفته از آن برای مدلسازی قطعه در تمامی تحلیل‌های اجزای محدود صورت گرفته از تحلیل دو بعدی تنش صفحه‌ای استفاده شده است.

برای هر یک از دو روش المان محدود توسعه یافته و همچنین روش گام به گام، مدلسازی اجزای محدود جداگانه‌ی صورت گرفته است که در ادامه به بررسی هر یک به صورت جداگانه پرداخته می‌شود.

## ۴-۲- شبیه‌سازی روش گام به گام

برای شبیه‌سازی مسیر رشد ترک از شیار V شکل به روش گام به گام برای هر یک از قطعات یک مدل تنش صفحه‌ای با کمک نرم‌افزار آباکوس ساخته شده است. برای این منظور تعداد 69103 المان مربعی تنش صفحه‌ای از نوع CPS4R مورد استفاده قرار گرفته است. شکل 8 الگوی مش ریخته شده برای قطعات دیسک برزیلی را در گام اول تحلیل نشان می‌دهد. همان‌طوری که در این شکل مشاهده می‌شود، المان‌های موجود در اطراف مرز شیار به دلیل وجود تغییرات بالای تنش بسیار ریز هستند. همچنین یک مختصات قطبی محلی در مرکز انحنای شیار قرار داده شده است و تنش‌های اطراف شیار در این دستگاه مختصات خوانده می‌شوند. همان‌طور که پیشتر ذکر شد، در هر گام از تحلیل، المان‌بندی قطعه تغییر خواهد کرد و متناسب با ترک موجود در آن گام خواهد بود.

برای بررسی استقلال تحلیل‌ها از اندازه و نحوه‌ی چینش المان‌ها، تعداد بسیار زیادی تحلیل اجزای محدود صورت گرفته است، تا نتایج حاصل از مدلسازی‌های اجزا محدود همگرا گردند. جدول 2 تغییرات مقدار تنش محیطی بر روی محل تقاطع مرز شیار با خط نیمساز آن را بر حسب اندازه المان نشان می‌دهد.

جدول ۲ تحلیل همگرایی المان

Table 2 Mesh dependency analysis

شماره ردیف	طول المان (mm)	مقدار تنش محیطی بر روی محل تقاطع مرز شیار با نیمساز (MPa)
1	0.13497	-20.80
2	0.07341	-22.67
3	0.03809	-23.88
4	0.01938	-24.58
5	0.01299	-24.87
6	0.00977	-25.02
7	0.00783	-25.11
8	0.00653	-25.17
9	0.00560	-25.21
10	0.00490	-25.24

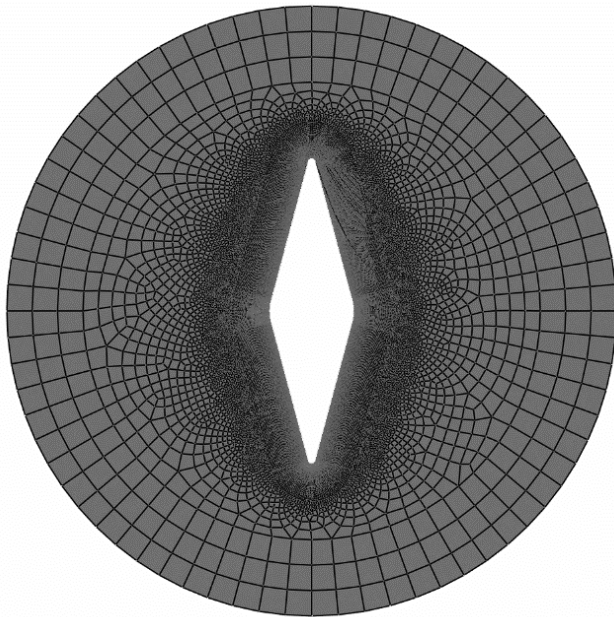


Fig. 8 Sample meshed RV-BD specimen

شکل ۸ نمونه‌ی دیسک برزیلی دارای شیار V شکل مش خورده

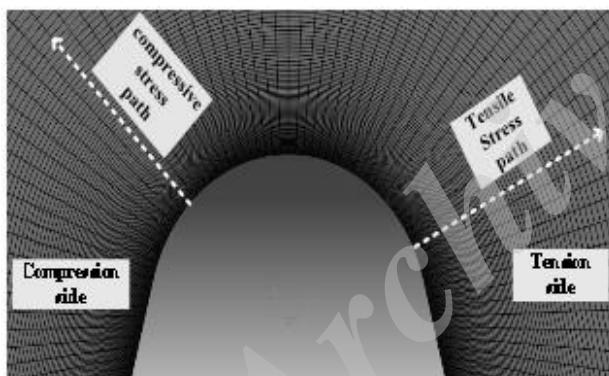


Fig. 9 Sample contours of tangential stresses at the vicinity of notch border

شکل ۹ یک نمونه از کانتورهای تنش محیطی در اطراف شیار

همان‌طور که ذکر شد، درحالی‌که سمت راست مرز شیار تحت تنش‌های کششی قرار دارد، سمت چپ آن تنش‌های فشاری را تحمل می‌کند. بنابراین یک رقابت بین تنش‌های فشاری و کششی حول شیار برای شکستن قطعه وجود دارد.

ترابی و همکاران [23] با استفاده از مفهوم فاصله‌ی بحرانی در معیار حداکثر تنش محیطی برای تنش‌های فشاری و کششی نشان دادند که در این حالت، علی‌رغم اینکه میزان تنش‌های فشاری بسیار بیشتر از تنش‌های کششی می‌باشد اما به دلیل بحرانی‌تر بودن تنش‌های کششی شکست از ناحیه‌ی کششی مرز شیار رخ می‌دهد.

لازم به ذکر است در صورتی که مود ترکیبی فشاری- برشی به گونه‌ای باشد که نزدیک به مود فشاری خالص باشد در آن صورت شکست شیار ناشی

با توجه به جدول 2 مشاهده می‌شود که از ردیف 4 به بعد تغییرات نتایج بسیار کم می‌باشد. در این پژوهش برای افزایش دقت از ردیف 7 المان استفاده شده است. سایر شرایط مرزی و نحوه‌ی بارگذاری مانند مدلسازی صورت گرفته برای روش المان محدود توسعه یافته می‌باشد. به گونه‌ای که نقطه‌ای که در زیر بار خارجی اعمالی قرار می‌گیرد تنها می‌تواند در راستای شعاعی حرکت داشته باشد و همچنین نقطه‌ی مقابل آن در دیسک برزیلی نیز به صورت کامل مقید شده است. همچنین بار خارجی اعمالی به گونه‌ای است که راستای آن با نیمساز شیار زاویه‌ی  $\beta$  را خواهد داشت.

شکل 9 یک نمونه از کانتورهای تنش محیطی در اطراف شیار را نشان می‌دهد که زاویه‌ی بار اعمالی آن بین  $\beta_{II}$  و  $\beta_c$  بوده است. همان‌طوری که گفته شد در این محدوده‌ی بارگذاری، شیار V شکل تحت بارگذاری مود ترکیبی I و II با مود I منفی (برشی- فشاری) قرار دارد. این کانتورها دو نوع تنش را در اطراف شیار نشان می‌دهند. در سمت راست خط نیمساز شیار تنش‌های کششی حضور دارند، در صورتی که بر روی این خط و در سمت چپ آن تنش‌های فشاری حضور دارند. به دلیل اینکه در تمامی آزمون‌های

در شکل ۱۰ مسیرهای شکست پیش‌بینی شده به وسیله‌ی روش‌های المان محدود توسعه یافته و گام به گام به همراه نتایج تجربی نشان داده شده است.

بر خلاف روش گام به گام، در روش المان محدود توسعه یافته با توجه به غنی بودن المان‌ها در این روش، تمام مسیر رشد ترک با استفاده از یک مرحله تحلیل به دست می‌آید.

البته به دلیل حل غیرخطی، زمان تحلیل به روش المان محدود توسعه یافته بسیار طولانی‌تر از هر مرحله‌ی حل در روش گام به گام است، اما از مجموع زمان مورد نیاز در روش گام به گام کمتر است. لازم به ذکر است که روش المان محدود توسعه یافته نیازمند مهارت بیشتر در حل به روش المان محدود است و نسبت به روش گام به گام حساسیت‌های زیادی دارد.

از جمله‌ی این حساسیت‌ها می‌توان به حساس بودن این روش به پارامترهای ناحیه‌ی چسبناک، نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی، المان‌بندی صحیح قطعه به ویژه در ناحیه‌ی گسترش ترک و همچنین پیچیده‌تر بودن شرایط همگرایی جواب اشاره کرد.

بنابراین می‌توان با در نظر گرفتن ویژگی‌های هر یک از دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام به انتخاب روش مناسب پرداخت. توصیه می‌شود در صورت وجود مهارت کم نسبت به مکانیک شکست، از روش گام به گام و در صورت شناخت کافی نسبت به عوامل مؤثر در حوزه‌ی مکانیک شکست، از روش المان محدود توسعه یافته استفاده شود.

در پایان می‌توان اشاره کرد مطابق با بررسی‌های صورت گرفته، تحقیقات منتشر شده بر روی شیارها تحت بارگذاری فشاری بسیار کم و محدود به سال‌های اخیر است و آن نیز مختص به مود فشاری خالص می‌باشد و تاکنون بر روی مود ترکیبی فشاری- برشی پژوهشی صورت نگرفته است.

در این پژوهش رفتار شیارهای V شکل تحت بارگذاری مود ترکیبی فشاری- برشی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین تحقیقات صورت گرفته برای پیش‌بینی مسیر رشد ترک نیز عموماً مربوط به مسیر رشد ترک از پیش ترک‌های موجود در قطعه است و در این پژوهش مسیر رشد ترک از شیارها پیش‌بینی شد. در این پژوهش همچنین نشان داده شد که اگرچه خط نیمساز شیار تحت بارگذاری فشاری قرار دارد و تحت این نوع بارگذاری دهانه‌ی شیار بسته می‌شود اما ترک اولیه و همچنین تمامی مسیر رشد ترک در اثر تنش-های کششی می‌باشد.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مسیر رشد ترک‌های شروع شده از شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا با انجام آزمایش‌های شکست بر روی این شیارها مسیر تجربی رشد ترک در شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری به دست آمد. سپس، با معرفی دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام، مسیر رشد ترک پیش‌بینی شد. در ادامه با بررسی میزان تطابق بین مسیرهای پیش‌بینی شده توسط هر دو روش با نتایج تجربی نشان داده شد که هر دو روش به خوبی می‌توانند مسیر رشد ترک از شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری را تخمین بزنند. در پایان با ذکر نقاط قوت و ضعف هر یک از دو روش توصیه‌هایی به سایر محققان در ارتباط با انتخاب روش مناسب ارائه شده است.

از تنش‌های فشاری موجود در اطراف آن خواهد بود که در دیسک برزیلی با توجه به وجود شیارهای جانبی امکان نزدیک شدن به ناحیه‌ی فشار خالص وجود ندارد و همواره شکست از سمت کششی اطراف شیار رخ می‌دهد. شکست شیار از سمت دارای تنش‌های کششی رخ می‌دهد. در نتیجه طبق معیار حداکثر تنش محیطی، ترک اولیه از شیار از سمت راست آن آغاز می‌شود. ضمناً راستای شروع اولین ترک از مرز شیار در جهت عمود بر بیشترین تنش محیطی کششی می‌باشد.

پس از ایجاد اولین ترک بر روی قطعه، گام‌های بعدی تحلیل المان محدود بر روی قطعه‌ی ترک دار صورت می‌گیرد. در هر مرحله زاویه‌ی ایجاد ترک بعدی بر اساس معیار حداکثر تنش محیطی به دست می‌آید. نحوه‌ی محاسبه‌ی این زاویه در معیار حداکثر تنش محیطی مطابق با رابطه‌ی است که پیشتر توسط اردگان و سیه [33] ارائه شده است.

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (4) در هر مرحله با به دست آوردن ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  مربوط به ترک موجود با استفاده از تحلیل اجزا محدود، زاویه‌ی رشد ترک بعدی به دست خواهد آمد. لازم به ذکر است که در این پژوهش میزان رشد ترک در هر مرحله 1 میلی‌متر است و این فرآیند گام به گام تا آنجایی ادامه پیدا می‌کند که ترک تا مرزهای خارجی قطعه رشد کند و قطعه به صورت کامل به دو بخش تقسیم شود.

در بخش بعدی، پیش‌بینی مسیر رشد ترک به دست آمده با استفاده از هر دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام ارائه و با نتایج تجربی حاصل از آزمون‌های شکست مقایسه می‌شوند.

#### ۵- نتایج و بحث

مسیرهای پیش‌بینی شده‌ی شکست شیارهای V شکل تحت بارگذاری برشی- فشاری توسط دو روش المان محدود توسعه یافته و همچنین روش گام به گام در کنار نتایج تجربی به دست آمده از آزمایش‌های شکست در شکل 9 قابل مشاهده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود هر دو روش المان محدود توسعه یافته و روش گام به گام به خوبی می‌توانند نتایج تجربی حاصل از آزمایش‌ها را پیش‌بینی کنند.

با توجه به اینکه روش گام به گام یک روش رشد ترک مرحله‌ای می‌باشد، علی‌رغم ساده بودن هر محله‌ی آن، در مجموع بسیار زمان‌بر و نیازمند حضور فیزیکی کاربر در طول زمان بررسی رشد ترک است. به عنوان مثال در تحلیل‌های صورت گرفته که نتایج آن در شکل 9 قابل مشاهده است، با توجه به اینکه در هر مرحله از رشد ترک به روش گام به گام 1 میلی‌متر به طول ترک اضافه شده است، حدود 25 الی 30 تحلیل برای پیش‌بینی کامل هر مسیر شکست صورت گرفته است. با توجه به اینکه هر یک از این 25 الی 30 مرحله نیازمند المان بندی مجدد قطعه و تحلیل کامل آن است، در نتیجه 25 الی 30 تحلیل برای پیش‌بینی مسیر شکست به روش گام به گام مورد نیاز است، که امری زمان‌بر است. البته می‌توان با افزایش میزان رشد ترک در هر مرحله از مجموع تحلیل‌های لازم کم کرد، اما این امر موجب فاصله گرفتن دقت نتایج از میزان مطلوب آن خواهد بود.



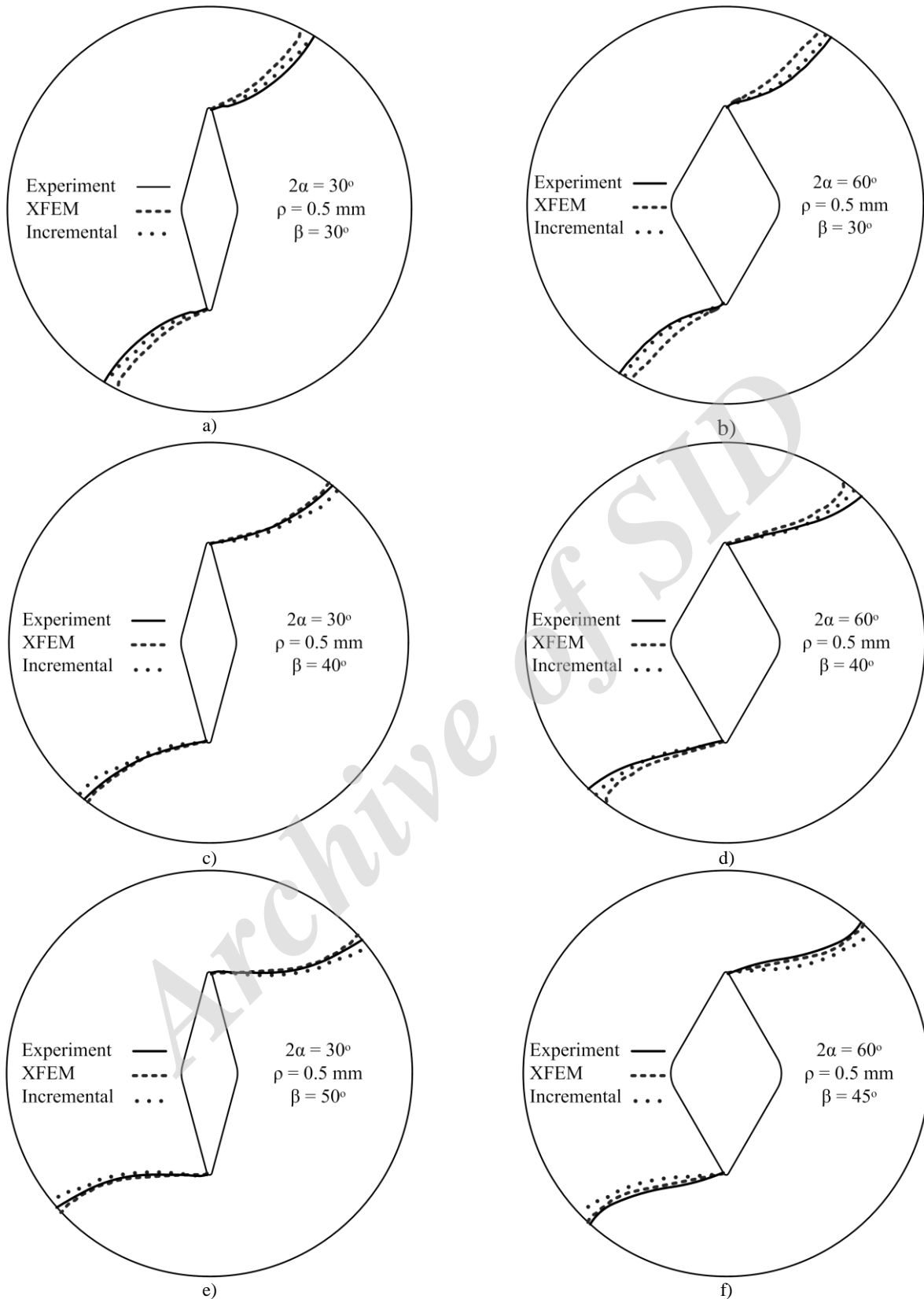


Fig. 10 Predicted fracture trajectory by means of XFEM and incremental methods together with the experimental results

شکل ۱۰ مسیرهای شکست پیش‌بینی شده به وسیله‌ی روش‌های المان محدود توسعه یافته و گام به گام به همراه نتایج تجربی

## ۷-مراجع

- International Journal of Fracture, Vol. 141, No. 1, pp. 291–312, 2006.
- [21] Ayatollahi, M. R. and Torabi, A. R., "Investigation of Mixed Mode Brittle Fracture In Rounded-tip V-notched Components" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, No. 16, pp. 3087–3104, 2010.
- [22] Torabi, A. R. and Amininejad, SH., "Experimental and Theoretical Fracture Analysis of Quasi-brittle Polymer Components Containing V-notches With End Holes Under Combined Tensile-shear loading" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 2, pp. 41-54, 2015. (In Persian)
- [23] Torabi, A. R. Bahrami, B. and Ayatollahi, M. R., "Mixed Mode I/II Brittle Fracture In V-notched Brazilian Disk Specimens Under Negative Mode I Conditions" Physical Mesomechanics, Vol. 19, No. 3, pp. 332–348, 2016.
- [24] Ayatollahi, M. R. Torabi, A. R. and Bahrami, B., "On The Necessity Of Using Critical Distance Model In Mixed Mode Brittle Fracture Prediction of V-notched Brazilian Disk Specimens Under Negative Mode I Conditions" Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 84, pp. 38–48, 2016.
- [25] Akbaridoost, J. Mohajerani, S. M. H. and Torabi, A. R., "Investigation of Fracture Trajectory In Blunt V-notched Specimens Under Mixed Mode I/II Loading" Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 3, pp. 161–172, 2016. (In Persian)
- [26] Aliha, M. R. M. Ayatollah, M. R. Smith, D. J. and Pavier, M. J., "Geometry And Size Effects On Fracture Trajectory In A Limestone Rock Under Mixed Mode Loading" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, No. 11, pp. 2200–2212, 2010.
- [27] Belytschko, T. and Black, T., "Elastic Crack Growth In Finite Elements With Minimal Remeshing" International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1998.
- [28] Barenblatt, G. I., "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks In Brittle Fracture" Advances in Applied Mechanics, Vol. 7, pp. 55–129, 1962.
- [29] Ayatollahi, M. R. and Torabi, A. R., "A Criterion For Brittle Fracture In U-notched Components Under Mixed Mode Loading" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 76, No. 12, pp. 1883–1896, 2009.
- [30] Ayatollahi, M. R. Torabi, A. R. and Azizi, P., "Experimental And Theoretical Assessment of Brittle Fracture In Engineering Components Containing A Sharp V-notch" Experimental mechanics, Vol. 51, No. 6, pp. 919–932, 2011.
- [31] Ayatollahi, M. R. and Aliha, M. R. M., "Mixed Mode Fracture In Soda Lime Glass Analyzed By Using The Generalized MTS Criterion" International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, No. 2, pp. 311–321, 2009.
- [32] Irwin, G. R., "Analysis Of Stresses And Strains Near The End of A Crack Traversing A Plate." Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 361–364, 1957.
- [33] Aliha, M. R. M. Ayatollahi, M. R. Smith, D. J. and Pavier, M. J., "Geometry and Size Effects on Fracture Trajectory in A Limestone Rock Under Mixed Mode Loading" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, No. 11, pp. 2200–2212, 2010.
- [1] Williams, M. L., "Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions" Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No. 4, pp. 526–528, 1952.
- [2] Lazzarin, P. and Tovo, R., "A Unified Approach To The Evaluation Of Linear Elastic Stress Fields In The Neighborhood Of Cracks And Notches" International Journal of Fracture, Vol. 78, No. 1, pp. 3–19, 1996.
- [3] Filippi, S. Lazzarin, P. and Tovo, R., "Developments of Some Explicit Formulas Useful To Describe Elastic Stress Fields Ahead of Notches In Plates" International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 17, pp. 4543–4565, 2002.
- [4] Strandberg, M., "A Numerical Study of The Elastic Stress Field Arising From Sharp And Blunt V-notches In A SENT-Specimen" International Journal of Fracture, Vol. 100, pp. 329–342, 2000.
- [5] Saporta, A. A. Brik, C. and Song, C., "Computation of Three-dimensional Fracture Parameters at Interface Cracks and Notches by the Scaled Boundary Finite Element Method" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 148, pp. 213–242, 2015.
- [6] Ayatollahi, M. R. Torabi, A. R. and Bahrami, B., "Comprehensive Notch Shape Factors For V-notched Brazilian Disk Specimens Loaded Under Mixed Mode I/II From Pure Opening Mode To Pure Closing Mode" Archive of Applied Mechanics, pp. 1–15, 2016.
- [7] Ayatollahi, M. R. and Nejati, M., "Determination of NSIFs And Coefficients of Higher Order Terms For Sharp Notches Using Finite Element Method" International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, No. 3, pp. 164–177, 2011.
- [8] Yu, T. and Shi, L., "Determination of Sharp V-notch Stress Intensity Factors Using The Extended Finite Element Method" The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol. 47, No. 2, pp. 95–103, 2012.
- [9] Seweryn, A. and Łukaszewicz, A., "Verification of Brittle Fracture Criteria For Elements With V-shaped Notches" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 69, pp. 1487–1510, 2002.
- [10] Treifi, M. Olutunde Oyadiji, S., "Strain Energy Approach to Compute Stress Intensity Factors For Isotropic Homogeneous and Bi-Material V-Notches" International Journal of Solids and Structures, Vol. 50, No. 14-15, pp. 2196–2212, 2013.
- [11] Ayatollahi, M. R. and Nejati, M., "Experimental Evaluation of Stress Field Around The Sharp Notches Using Photoelasticity" Materials & Design, Vol. 32, No. 2, pp. 561–569, 2011.
- [12] Yadegari Dehnavi, M. R. Eshraghi, I. and Soltani, N., "Investigation of Fracture Parameters of Edge V-notches in A Polymer Material Using Digital Image Correlation" Polymer Testing, Vol. 32, No. 4, pp. 778–784, 2013.
- [13] Yao, X. F. Yeh, H. Y. and Xu, W., "Fracture Investigation At V-notch Tip Using Coherent Gradient Sensing (CGS)" International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, No. 5, pp. 1189–1200, 2006.
- [14] Dunn, M. L. Suwito, W. and Cunningham, S. J., "Fracture Initiation At Sharp Notches: Correlation Using Critical Stress Intensities" International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, No. 29, pp. 3873–3883, 1997.
- [15] Lazzarin, P. and Zambardi, R., "A Finite-volume-energy Based Approach To Predict The Static and Fatigue Behavior of Components With Sharp V-shaped Notches" International Journal of Fracture, Vol. 112, pp. 275–298, 2001.
- [16] Ayatollahi, M. R. and Torabi, A. R., "Tensile Fracture In Notched Polycrystalline Graphite Specimens" Carbon, Vol. 48, No. 8, pp. 2255–2265, 2010.
- [17] Cendon, D. A. Torabi, A. R. and Elices, M., "Fracture Assessment of Graphite V-notched and U-notched Specimens by Using the Cohesive Crack Model" Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 38, No. 5, pp. 563–573, 2015.
- [18] Dunn, M. L. and Suwito, W., "Fracture Initiation At Sharp Notches Under Mode I, Mode II, and Mild Mixed Mode Loading" International Journal of Fracture, Vol. 84, pp. 367–381, 1997.
- [19] Priel, E. Yosibash, Z. and Leguillon, D., "Failure Initiation At A Blunt V-notch Tip Under Mixed Mode Loading" International Journal of Fracture, Vol. 149, pp. 143–173, 2008.
- [20] Yosibash, Z. Priel, E. and Leguillon, D., "A Failure Criterion For Brittle Elastic Materials Under Mixed-mode Loading"