



## آنالیز مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی حاوی انحنای هندسی اولیه تحت نیروی فشاری درون صفحه‌ای و فشار جانبی توسط روش ریتز

سید امیر مهدی قناده‌پور<sup>1</sup>، عباس کورکانی بروج<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی و فناوریهای نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، سازه‌های هوایی، دانشکده مهندسی و فناوریهای نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران  
\* صندوق پستی 1983969411، [a\\_ghannadpour@sbu.ac.ir](mailto:a_ghannadpour@sbu.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله به بررسی مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی مربعی حاوی انحنای هندسی اولیه تحت نیروی فشاری درون صفحه‌ای و نیز فشار جانبی سینوسی با استفاده از روش ریتز پرداخته شده است. در این تحقیق از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده که در این روابط خیزها و تغییر شکل‌ها کوچک فرض شده‌اند. این فرضیات باعث می‌شوند که مقاومت نهایی بدست آمده برای صفحات نازک، به دلیل نادیده گرفتن اثرات ترمهای غیرخطی، محتاطانه باشد در صورتی که برای صفحات ضخیم‌تر نتایج قابل قبول خواهد بود. برای بدست آوردن معادلات تعادل صفحه اصل انرژی پتانسیل کمینه به کار رفته است. شرایط مرزی خارج از صفحه، لولایی و برای شرایط مرزی درون صفحه، لبه‌ها به صورت خط مستقیم جابجا می‌شوند. از معیار شکست هشین برای بررسی شکست استفاده شده است. دو نوع مدل کاهش سختی در این مقاله بررسی می‌شود که عبارتند از مدل کاهش سختی کل لایه‌ای که کاهش سختی به کل لایه شکسته شده اعمال می‌شود و مدل کاهش سختی ناحیه‌ای که بعد از شکست فقط سختی همان ناحیه کاهش می‌یابد. کاهش سختی مواد به صورت آنی بوده لذا بلافاصله بعد از شکسته شدن لایه یا ناحیه، سختی آن کاهش می‌یابد. علاوه بر محاسبه بار شکست لایه اول و آخر، تعداد لایه‌های شکسته شده و مختصات نقاط شکست اولین و آخرین لایه شکسته شده ارائه شده است. در آخر نتایج بدست آمده از طریق روش ارائه شده در این تحقیق با نتایج موجود در مراجع دیگر دیگر مقایسه گردیده است.</p>	<p>دریافت: 95/11/3 پذیرش: 96/2/2</p> <p><b>کلیدواژگان:</b> صفحات کامپوزیتی ریتز انحنای هندسی اولیه مقاومت نهایی فشار جانبی معیار خرابی هشین</p>

### Ultimate strength analysis of imperfect composite plates under both in-plane compressive load and lateral pressure using Ritz method

Seyyed Amir Mahdi Ghannadpour\*, Abbas Kurkaani Barvaj

New Technologies and Engineering Department, Shahid Beheshti University, G.C, Tehran, Iran  
\*P.O. B. 1983969411, Tehran, Iran, [a\\_ghannadpour@sbu.ac.ir](mailto:a_ghannadpour@sbu.ac.ir)

**Keywords**  
Composite plates  
Ritz  
Imperfection  
Ultimate strength  
Lateral pressure  
Hashin failure criterion

**Abstract**  
This paper investigates the ultimate strength analysis of imperfect composite plates under both in-plane compressive load and lateral pressure using Ritz method. In this study, the first order shear deformation plate theory has been applied and the small deflection theory is also considered therefore the obtained results for thin plates could be a little bit off however the results for relatively thick plates are more reliable. The formulations are based on the concept of the principle of minimum potential energy. The laminates are simply supported at the loaded ends as well as the unloaded edges. The in-plane lateral expansion is allowed for all edges however they are kept straight. To investigate the failure analysis, Hashin failure criterion has been applied and also two different models for degradation of stiffness has been used. The first model is complete-ply stiffness degradation model that apply the degradation of properties to the whole ply, and the second is regional stiffness degradation model which degrade the properties of that region. The instantaneous degradation of material properties is used for failed ply or region of failed ply. In addition to find the first and last ply failure loads, the number of failed plies and coordinates of failure points in first and last plies has been obtained. Finally, the results obtained by the proposed method have been validated by results available in the literature.

می‌شود. از این رو بررسی ساختار آنها و نیز بررسی خواصشان در شرایط مختلف بسیار حائز اهمیت است. تحلیل مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی معمولاً با روش‌های المان محدود صورت می‌گیرد که این روش‌ها هم پیچیده

**1- مقدمه**  
مواد کامپوزیتی به طور گسترده‌ای در صنایع مختلفی از جمله صنایع هوافضایی، صنایع نظامی، خودروسازی و حتی در ساخت توربین‌های بادی مورد استفاده قرار گرفته‌اند و با گذشت زمان روز به روز کاربردشان گسترده‌تر

**Please cite this article using:**

Ghannadpour, S. A. M. and Kurkaani Barvaj, A., "Ultimate strength analysis of imperfect composite plates under both in-plane compressive load and lateral pressure using Ritz method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 5, No. 1, pp. 1-10, 2018.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

1- بعد از شکست لایه کاهش سختی به کل لایه اعمال شود که به آن مدل کاهش سختی کل لایه‌ای گفته می‌شود.

2- بعد از شکست لایه کاهش سختی فقط به ناحیه‌ای که شکست در آن اتفاق افتاده اعمال شود. که برای این منظور صفحه به 9 ناحیه مختلف تقسیم‌بندی می‌شود. البته یک آنالیز همگرایی برای تعداد نواحی برای تحلیل صفحه نیز انجام شده است.

تحلیل‌ها با استفاده از معیار هشین و با دو نوع مختلف کاهش سختی مواد و توسط روش ریتز<sup>3</sup> مورد بررسی قرار گرفته است و در بخش آخر نتایج بدست آمده با نتایج مراجع موجود تا حد امکان مقایسه شده‌اند.

## 2- معیار شکست هشین

معیار شکست هشین که در سال 1973 توسط آقای هشین ارائه شده است، برای تنش‌های درون صفحه‌ای به شکل زیر می‌باشد [14]:

$$f_1^t = \left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 = 1; f_1^c = \left(\frac{\sigma_1}{X_c}\right)^2 = 1$$

$$f_2^t = \left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1; f_2^c = \left(\frac{\sigma_2}{Y_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

هنگامی که نیروی اعمالی به صفحه به حدی رسید که تنش‌های درون صفحه‌ای، یکی از معیارهای بالا را که هر کدام مربوط به یک مود شکست می‌باشند، اقماع کنند صفحه دچار شکست می‌شود.

## 2-1- کاهش خواص

هنگامی که هر یک از روابط اشاره شده در معیار هشین به مقدار واحد برسند یعنی صفحه کامپوزیتی دچار شکست می‌شود و بعد از شکسته شدن، خواص این صفحه کاهش می‌یابد. برای توصیف این عمل ماتریس سختی لایه‌ای که شکسته می‌شود به صورت رابطه (2) تغییر می‌کند [9]:

$$R = \begin{bmatrix} (1-d_1)R_{11} & (1-d_1)(1-d_2)R_{12} & 0 \\ sym & (1-d_2)R_{22} & 0 \\ sym & sym & R_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که مقادیر  $d_1$  و  $d_2$  به ترتیب ضرایب شکست مربوط به لیاف و ماتریس است. بقیه پارامترها به صورت زیر می‌باشند [9]:

$$R_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}(1-d_1)(1-d_2)}$$

$$R_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}(1-d_1)(1-d_2)}$$

$$R_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}(1-d_1)(1-d_2)}$$

$$R_{66} = (1-d_1)(1-d_2)G_{12} \quad (3)$$

همانطور که در ابتدا فرض شده بود که شکست بین لایه‌ای اتفاق نمی‌افتد ماتریس سختی برشی عرضی در حین آنالیز تغییر نمی‌کند و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$K = \begin{bmatrix} k_{44} & 0 \\ 0 & k_{55} \end{bmatrix}$$

بوده و هم زمان بر هستند، از این رو پیدا کردن روشی قابل اعتماد و ساده برای تحلیل این صفحات حائز اهمیت است.

تحلیل کمانش و تحلیل‌های غیرخطی هندسی صفحات کامپوزیتی در تحقیقات پیشین و نیز در کتب مختلف بطور گسترده صورت گرفته است [1-3]. این تحقیقات غالباً اثرات انحنای هندسی اولیه را نادیده گرفته‌اند درحالی‌که اخیراً تحلیل چنین صفحاتی بیشتر مورد توجه قرار گرفته است.

برای تحلیل مقاومت نهایی صفحات فلزی تقویت شده و تقویت نشده با تقویتی‌هایی با شکل مقاطع مختلف و نیز شرایط مرزی‌های گوناگون، پروباک و همکاران [4-8] روش‌های مختلفی به کار برده‌اند. تحلیل مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی مستطیلی با انحنای هندسی اولیه اخیراً توسط آقای همین<sup>1</sup> [9] ارائه شده است، که به بررسی صفحات مربعی و مستطیلی با شرایط مرزی لولایی هم با استفاده از تست و هم با استفاده از تحلیل غیرخطی المان محدود پرداخته است.

تحلیل مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی دارای انحنای هندسی اولیه تحت نیروی یکنواخت فشاری درون صفحه‌ای توسط آقای یانگ و همکاران [10] صورت گرفته است. در این تحقیق اثرات ترم‌های غیر خطی نادیده گرفته شده‌اند و نیز مدل‌های مختلف تحلیل با استفاده از روش ریتز ارائه گردیده است و نتایج بدست آمده با نتایج مرجع [9] مقایسه شده‌اند. در سال 2015 آقای شکرپه و همکارانش [11] شروع و پیشروی آسیب در چند لایه‌های کامپوزیتی با سوراخ مرکزی تحت بار کششی را با استفاده از تحلیل اجزا محدود مورد بررسی قرار دادند.

مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی دارای سوراخ تحت فشار در سال 2015 توسط سو و همکارانش [12] با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصله با نتایج تست‌های انجام شده مقایسه گردید. در همین سال آقای لی و همکارانش [13] مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی تحت فشار و دارای سوراخ بیضی شکل را با استفاده از روش المان محدود و نیز انجام تست مورد بررسی قرار دادند.

در مقاله حاضر به بررسی و تخمین مقاومت نهایی صفحات کامپوزیتی با ضخامت‌های مختلف و انحنای هندسی اولیه متفاوت، با استفاده از معیار شکست هشین<sup>2</sup> [13] پرداخته شده است. متفاوت با مراجع دیگر، بارگذاری در این مقاله هم به صورت نیروی یکنواخت فشاری درون صفحه‌ای بوده و هم به صورت فشار جانبی سینوسی می‌باشد. عبارتی مقاومت نهایی صفحات و همچنین بار اولین لایه شکست آنها، تحت بارگذاری‌های توأمان فشاری درون صفحه‌ای و فشار جانبی سینوسی بررسی شده است. برای شرایط مرزی خارج از صفحه‌ای فرض شده که صفحه از چهار طرف به صورت لولایی گرفته شده و از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. همچنین از اثرات تغییر شکل‌های پس از کمانش صرف نظر شده و لذا تغییر شکل‌ها کوچک فرض شده‌اند، معیار شکست محدود به تنش‌های درون صفحه‌ای است بنابراین شکست بین لایه‌ای نیز در نظر گرفته نشده است.

وقتی هر کدام از لایه‌های یک صفحه کامپوزیتی که تحت نیروی فشاری قرار می‌گیرند، دچار شکست می‌شوند سختی مربوط به آن لایه کاهش می‌یابد. بسته به این که کاهش سختی به چه صورت اعمال شود دو روش مورد بررسی قرار گرفته است:

<sup>1</sup> Hayman

<sup>2</sup> Hashin

<sup>3</sup> Ritz

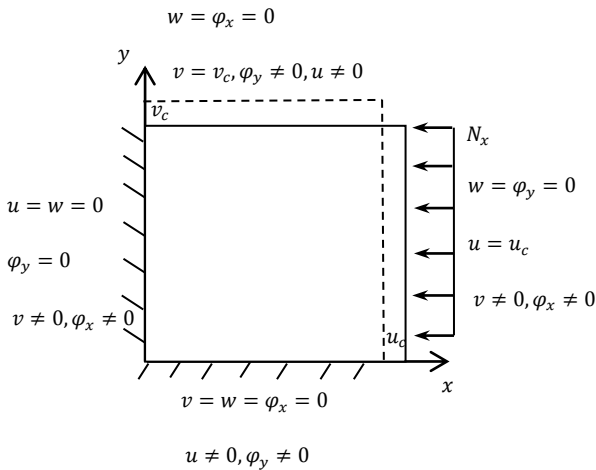


Fig. 2 Plates boundary conditions

شکل 2 شرایط مرزی صفحات

با توجه به شرایط مرزی نشان داده شده در شکل 2، میدان‌های جابجایی به صورت زیر تخمین زده شده است:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{m=1}^{n_t} X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \varphi_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{m=1}^{n_t} Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w_{tot}(x, y) &= \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{m=1}^{n_t} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &\quad + w_i \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{m=1}^{n_t} u_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \frac{u_c x}{a} \\ v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{m=1}^{n_t} v_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \frac{v_c y}{b} \end{aligned} \quad (5)$$

که در این معادلات ضرایب  $X_{mn}, Y_{mn}, w_{mn}, u_{mn}, v_{mn}, u_c, v_c$  ضرایب  $n_t$  بیانگر تعداد ترم در هر کدام از میدان‌های جابجایی می‌باشد. شایان ذکر است که شرایط مرزی درون صفحه‌ای در لبه‌ها به صورت لبه‌های مستقیم فرض شده است. میدان‌های کرنش بدون در نظرگیری ترم‌های غیر خطی در روابط، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + z\psi \\ \varepsilon_0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_s &= \begin{bmatrix} \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_{44} &= G_{23} \\ k_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (4)$$

در این مقاله یک صفحه کامپوزیتی در دو مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد، که اولین مدل مربوط به اعمال کاهش سختی به کل لایه می‌باشد و دومین مدل مربوط به اعمال کاهش سختی به ناحیه شکسته شده است. مدل کاهش سختی مواد در این بررسی به صورت آبی بوده و بلافاصله بعد از شکست، سختی ماده به 1 درصد از سختی قبل از شکست کاهش می‌یابد، یعنی اگر در یک لایه، ماتریس دچار شکست شود  $d_2$  در معادله 2 برابر 0.99 می‌شود، و اگر الیاف دچار شکست شوند  $d_1$  برابر 0.99 می‌شود.

### 3- مدل کاهش سختی مواد در کل لایه

صفحه مورد بررسی از چهار طرف به صورت لولایی گرفته شده و ابعاد آن 500×500 میلی‌متر مربع است و نیز دارای یک تغییر شکل اولیه سینوسی شکل است که مقدار آن در وسط صفحه با  $w_i$  نشان داده می‌شود که در شکل 1 آورده شده است. البته صفحات بدون انحای هندسی اولیه نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند که در این صورت  $w_i$  برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. بار فشاری یکنواخت درون صفحه‌ای از طرف محور طولی به صفحه وارد می‌شود. تغییر شکل خارج از صفحه‌ای کل به صورت جمع انحای هندسی اولیه و تغییر شکل خود صفحه بخاطر اعمال نیرو می‌باشد که به صورت  $w_{tot} = w + w_i$  نشان داده می‌شود. بمنظور استفاده از روش حل ریتز و برای اقتناع شرایط مرزی لولایی صفحه و با فرض اینکه صفحه از دو طرف گرفته شده و از یک سمت نیرو اعمال می‌شود شرایط مرزی در شکل 2 نشان داده شده است.

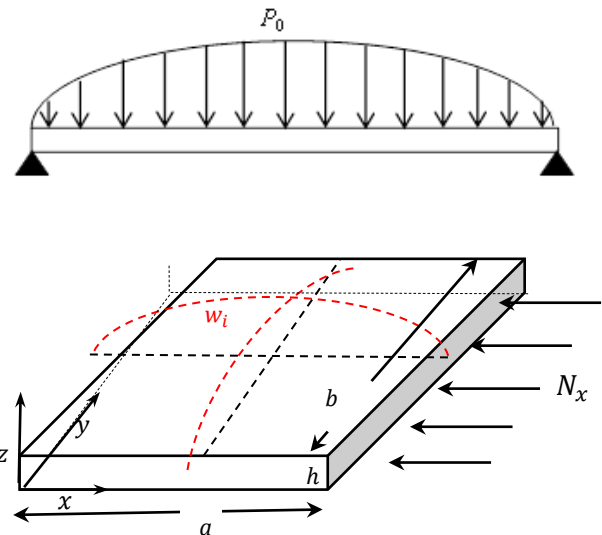


Fig. 1 Schematic representation of a plate with imperfection under in-plane load and lateral pressure  
شکل 1 نمایش شماتیک یک صفحه با شکل انحای هندسی اولیه تحت نیروهای محوری و فشار جانبی

$$\begin{aligned}
 &+2D_{16} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 &+2D_{26} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 &+D_{66} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 dx dy
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_s^T A_s \varepsilon_s dA \\
 &= \frac{1}{2} k_s \int_0^b \int_0^a A_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
 &+ A_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy
 \end{aligned} \quad (12)$$

انرژی پتانسیل نیروهای خارجی نیز از طریق روابط زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N_x \left( \frac{\partial w_{tot}}{\partial x} \right)^2 dx dy \\
 &+ \int_0^b \int_0^a N_x \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dx dy \\
 &- \int_0^b \int_0^a p_0 \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) w dx dy
 \end{aligned} \quad (13)$$

در رابطه انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای برشی ضریب  $k_s$  ضریب اصلاح برشی بوده و برابر  $\frac{5}{6}$  می‌باشد. با قراردادن میدانهای جابجایی در روابط انرژی پتانسیل مذکور و کمینه کردن آن بر حسب ضرایب نامعلوم و حل دستگاه خطی بدست آمده می‌توان ضرایب مجهول را استخراج نمود. با یافتن ضرایب مجهول در میدانهای جابجایی می‌توان کرنش و تنش در راستای  $x$  و  $y$  را برای هر لایه با استفاده از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

که در رابطه (14) ماتریس  $[R]$  همان ماتریس سختی ارائه شده در رابطه 2 می‌باشد.

حال می‌توان با انتقال میدان تنش با استفاده از ماتریس انتقال، تنش در راستای اصلی مواد که در معیار شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد را برای هر نقطه مورد بررسی در صفحه بدست آورد.

برای تحلیل مدل کاهش سختی ناحیه‌ای ابتدا یک آنالیز همگرایی برای تعداد نواحی به کار گرفته شده در صفحه نیاز است. برای این کار شکل 3 نشانگر تحلیل مقاومت نهایی یک صفحه 24 لایه با انحنای اولیه 5 میلی‌متر و بدون فشار جانبی می‌باشد که در آن تحلیل‌ها با 9، 25 و 49 ناحیه انجام شده است که ابعاد تمام نواحی با یکدیگر برابر می‌باشد. همچنین در این شکل نقاط شکست اولین و آخرین لایه نیز مشخص شده است.

که در روابط بالا  $\varepsilon_0$  کرنشهای محوری،  $\psi$  کرنشهای انحنای  $\varepsilon_s$  کرنشهای برشی می‌باشند. انرژی پتانسیل کل صفحه که به دو بخش انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای خارجی تقسیم می‌شود، به صورت زیر است.

$$\Pi = U + W \quad (7)$$

انرژی کرنشی به چهار بخش انرژی کرنشی محوری، انرژی کرنشی کوپلینگ خمشی-محوری، انرژی کرنشی خمشی و انرژی کرنشی برشی تقسیم می‌شود که با جایگذاری میدانهای کرنش داخل انرژی پتانسیل به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV + \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_s^T \sigma_s dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^T Q \varepsilon dz dA + \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_s^T Q_s \varepsilon_s dz dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_0^T A \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0^T B k + k^T D k + \varepsilon_s^T A_s \varepsilon_s) dA \\
 &= U_m + U_c + U_b + U_s
 \end{aligned} \quad (8)$$

ترم‌های مربوط به هر یک از بخش‌های انرژی کرنشی در ذیل بصورت کامل آورده شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 U_m &= \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_0^T A \varepsilon_0 dA = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \\
 &+ 2A_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \\
 &+ 2A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
 &+ 2A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
 &+ A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 dx dy
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 U_c &= \frac{1}{2} \int_A 2\varepsilon_0^T B k dA = \int_0^b \int_0^a B_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \\
 &+ B_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + B_{16} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{26} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{26} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) dx dy
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 U_b &= \frac{1}{2} \int_A k^T D k dA = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D_{11} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)^2 \\
 &+ 2D_{12} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right)^2
 \end{aligned}$$

5- هندسه و خواص مواد

همانطور که گفته شد، صفحات مورد بررسی به صورت مربعی بوده و از هر چهارطرف به صورت لولایی گرفته شده‌اند که خواص مادی آنها در زیر آورده شده است:

$$E_1 = 49627 \text{ MPa}, E_2 = 15430 \text{ MPa}, \nu_{12} = 0.272$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4800 \text{ MPa}$$

$$X_t = 968 \text{ MPa}, X_c = 968 \text{ MPa}, Y_t = 24 \text{ MPa},$$

$$Y_c = 118 \text{ MPa}$$

صفحات مورد بررسی در لبه  $x = 0$  در جهت  $x$  گرفته شده‌اند و بار یکنواخت فشاری  $N$  در لبه  $x = a$  به آنها وارد می‌شود.

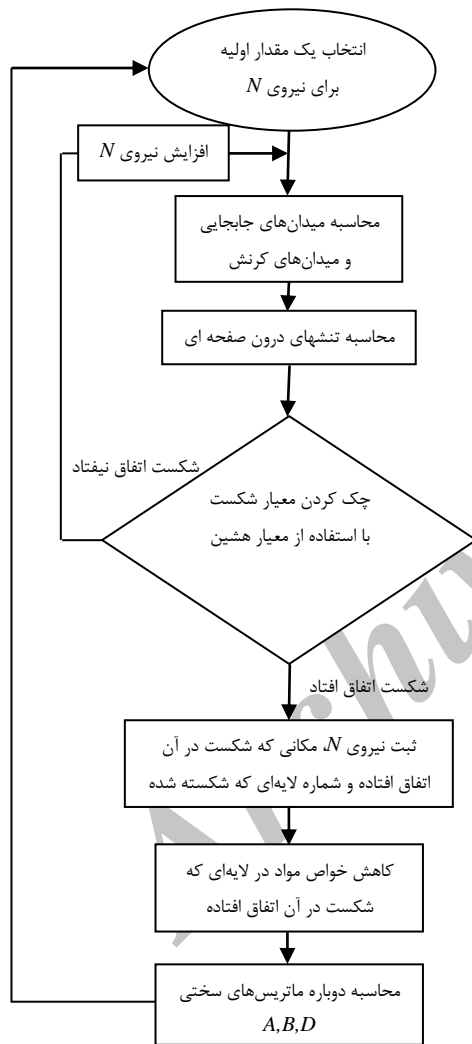


Fig. 5 The process of failure analysis

شکل 5 روند تحلیل شکست

لایه چینی صفحات به صورت  $[0/45/90/-45]_{X,S}$  است که ضخامت هر لایه برابر 1 میلی متر فرض می‌شود و  $h$  ضخامت صفحه، با افزایش مقدار  $X$  افزایش می‌یابد که در این مقاله مقادیر  $X$  برای صفحات با ضخامت‌های مختلف بصورت  $X = 1,3,6$  تغییر می‌یابد و نیز لایه شماره 1 در سمت مقعر

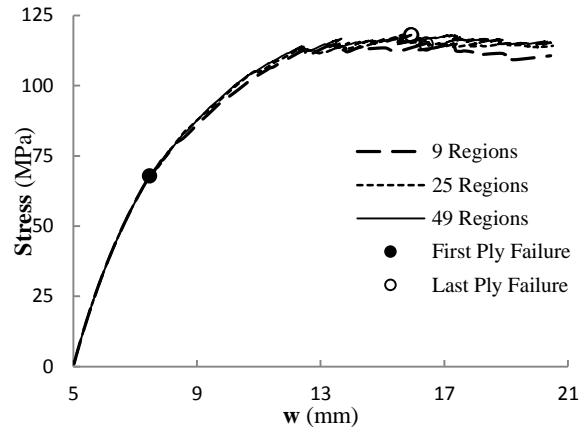


Fig. 3 Convergence study with regard to number of regions for laminate with 24 layers and  $w_0 = 5 \text{ mm}$

شکل 3 آنالیز همگرایی نسبت به تعداد نواحی برای صفحه 24 لایه با انحنای هندسی 5 میلی‌متر

همانطور که از شکل 3 مشاهده می‌شود بار اولین لایه شکست در تمامی تحلیل‌ها با نواحی مختلف یکسان است و این امر بدین دلیل است که قبل از اینکه هیچکدام از نواحی دچار شکست شوند تفاوتی بین تحلیل‌ها وجود ندارد و نیز مشاهده می‌شود که تفاوت زیادی در بار نهایی حاصل از تحلیل‌ها با 9، 25 و 49 ناحیه مشاهده نمی‌شود از طرفی با افزایش تعداد نواحی زمان انجام تحلیل‌ها افزایش می‌یابد از این رو برای تمامی تحلیل‌ها با مدل کاهش سختی ناحیه‌ای، 9 ناحیه اتخاذ شده است.

4- مدل کاهش سختی ناحیه‌ای

در این روش نیز میدان‌های جابجایی مثل قبیل تخمین زده می‌شوند و انرژی پتانسیل صفحه نیز مانند گذشته محاسبه می‌شود فقط با این تفاوت که طبق شکل 4 صفحه به 9 ناحیه تقسیم می‌شود (طبق آنالیز همگرایی انجام پذیرفته در بخش قبل) و در هر ناحیه که شکست اتفاق می‌افتد، فقط خواص مربوط به آن ناحیه کاهش می‌یابد.

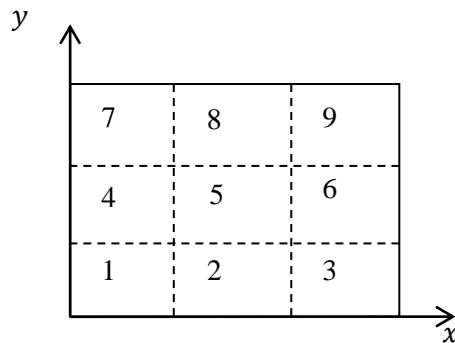
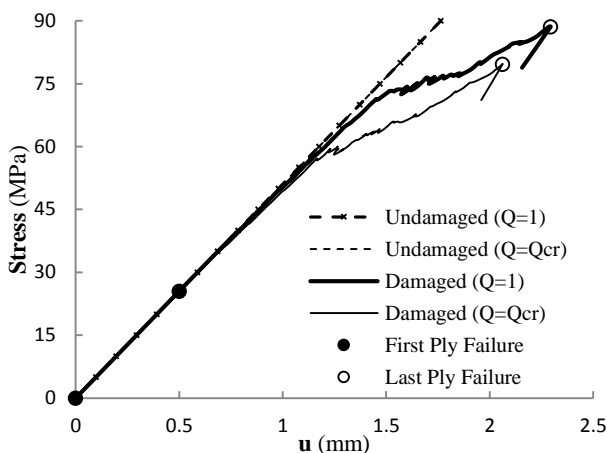


Fig. 4 Divide the plate into different areas

شکل 4 تقسیم صفحه به ناحیه‌های مختلف

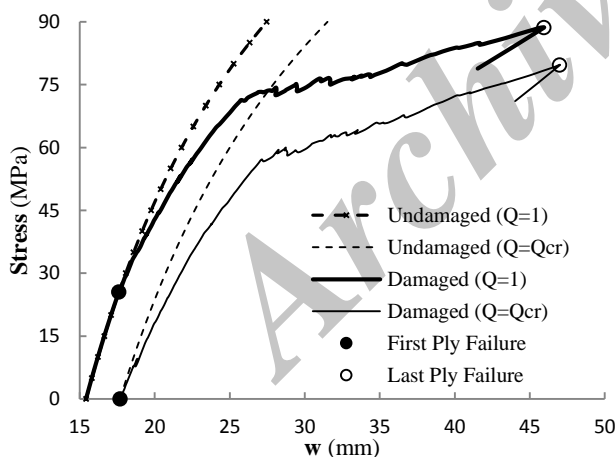
برای دستیابی به اهداف مقاله حاضر و بدست آوردن مقاومت نهایی صفحات طبق روندی که در شکل 5 نشان داده شده است، عمل می‌شود. این روند تا جایی ادامه داده می‌شود که دیگر نتوان نیرو را افزایش داد که در این صورت بار نهایی حاصل می‌شود.

فشارهای جانبی با فاکتور فشار 1 و فشار بحرانی آورده شده است و نیز نقاط توپر نمایانگر شکست اولین لایه و نقاط تو خالی نشان دهنده آخرین لایه شکست شده می باشد.



**Fig. 6** Load-longitudinal displacement behavior for laminate with 24 layers and with central initial imperfection 15 mm under sinusoidal lateral pressure with pressure load factor 1 and critical pressure and ply region degradation model.

شکل 6 نتایج بار بر حسب جابجایی لایه صفحه برای یک صفحه 24 لایه با انحنای هندسی اولیه 15 میلی متر تحت فشار جانبی سینوسی با استفاده از مدل کاهش سختی ناحیه ای



**Fig. 7** Load-deflection behavior for laminate with 24 layers and with central initial imperfection 15 mm under sinusoidal lateral pressure with pressure load factor 1 and critical pressure and ply region degradation model.

شکل 7 نتایج بار بر حسب جابجایی وسط صفحه برای یک صفحه 24 لایه با انحنای هندسی اولیه 15 میلی متر تحت فشار جانبی سینوسی با استفاده از مدل کاهش سختی ناحیه ای با فاکتور فشار 1 و فشار بحرانی.

صفحه قرار دارد. مقادیر انحنای هندسی اولیه برای صفحات مورد بررسی 0.5، 5 و 15 میلی متر می باشد.

بنابراین تمامی تحلیل ها با 49 ترم برای هر کدام از میدان های جابجایی یعنی  $n_x = 7$  صورت گرفته است. همچنین برای مدل کاهش سختی ناحیه ای ابعاد نواحی 1 و 3 و 7 و 9 برابر  $160 \times 160$  بوده و نواحی 2 و 8 برابر  $180 \times 160$  و ناحیه های 4 و 6،  $160 \times 180$  و ناحیه 5،  $180 \times 180$  فرض شده اند.

برای بی بعد کردن مقدار فشار جانبی اعمالی بر صفحه نیز از رابطه زیر استفاده شده است:

$$Q = \frac{np_0 a^3}{8D_{22}} \quad (15)$$

### 6- نتایج مدل کاهش سختی کل لایه ای

همانطور که پیشتر گفته شد در مرجع [10] صفحات کامپوزیتی با انحنای هندسی اولیه تحت نیروی یکنواخت فشاری درون صفحه ای مورد بررسی قرار گرفته است. برای اطمینان از صحت نتایج بدست آمده در این مقاله نتایج حاصل شده برای صفحات با انحنای هندسی اولیه و بدون فشار جانبی با نتایج این مرجع مقایسه گردیده و در جدول 1 آورده شده اند. در این جدول علاوه بر نتایج مرجع [10] نتایج استخراج شده توسط مرجع [9] نیز که در آن تحلیل ها با استفاده از روش المان محدود انجام شده، مقایسه گردیده است. نتایج مدل کاهش سختی کل لایه ای برای ضخامت های مختلف و مقادیر تغییر شکل اولیه وسط صفحه ای مختلف در جدول 2 آورده شده است. در جدول مذکور نیروی اولین لایه شکسته شده و شماره آن لایه و مختصات نقطه شکست، نیرو و شماره آخرین لایه شکسته شده و نیز مختصات آن به ازای انحنای هندسی اولیه های صفر، 5 و 15 میلی متر و نیز با فشارهای جانبی با فاکتورهای فشار 1، 2 و 3 واحد آورده شده است. همچنین در این جدول برای صفحات مختلف با انحنای هندسی های مختلف نتایج مربوط به فشاری که به ازای آن، بدون اعمال بار فشاری درون صفحه ای، اولین لایه شکسته می شود، آورده شده است که به آن فشار بحرانی گفته می شود که در این حالت بدون اعمال بار محوری فشاری درون صفحه ای، صفحه دچار شکست می شود یعنی بار اولین لایه شکست در این حالت صفر می شود. لازم به ذکر است که تنش های اولین لایه شکست و بار نهایی گفته شده در جداول همان تنش های درون صفحه ای محوری اعمال شده بر صفحه می باشد.

### 7- نتایج مدل کاهش سختی ناحیه ای

برای این مدل نیز نتایج در جدول 3 مانند مدل قبل برای ضخامت های مختلف و مقادیر گوناگون تغییر شکل اولیه وسط صفحه و نیز فشار جانبی های مختلف ارائه شده است. نیروی شکست اولین و آخرین لایه و شماره آنها و همچنین مختصات نقاط شکست در جدول ارائه شده است. تعداد نواحی که در هر صفحه دچار شکست ماتریس و شکست الیاف شده اند نیز آورده شده است. همچنین شکل 6 و 7 نمایشگر نتایج بار بر حسب جابجایی لایه صفحه و بار بر حسب جابجایی خارج از صفحه ای در وسط صفحه برای یک صفحه 24 لایه با انحنای هندسی اولیه 15 میلی متر با وجود فشار جانبی و مدل کاهش سختی ناحیه ای می باشد. در این اشکال هم منحنی های بدون در نظرگیری خرابی و هم با در نظرگیری خرابی برای

## 8- بررسی نتایج

گرفته شد. از دو مدل اعمال کاهش سختی به لایه شکسته شده استفاده شد یکی اعمال کاهش سختی به کل لایه و یکی اعمال کاهش سختی به ناحیه شکسته شده. در مدل کاهش سختی ناحیه‌ای آنالیز همگرایی نسبت به تعداد نواحی صورت پذیرفت. همانطور که مشاهده شد بار اولین لایه شکست در تمامی تحلیل‌ها با نواحی مختلف یکسان بود و این امر بدین دلیل بود که قبل از اینکه هیچکدام از نواحی دچار شکست شوند تفاوتی بین تحلیل‌ها وجود نداشت و جواب استخراج شده با جواب مدل کاهش سختی لایه‌ای نیز یکسان بود. همچنین آنالیز همگرایی نشان از همگرا شدن نتایج صفحه با 9 ناحیه داشت ولذا تمامی تحلیل‌ها با این تعداد ناحیه انجام پذیرفت. مشاهده گردید که نتایج تحلیل صفحات ضخیم نیازی به در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی کرنش ندارند و تحلیل‌های خطی برای این صفحات کفایت دارد. همچنین مشاهده گردید که در بیشتر صفحات تحت فشار جانبی، لایه آخر (یعنی لایه صفر درجه) بعنوان اولین لایه شکسته می‌شود.

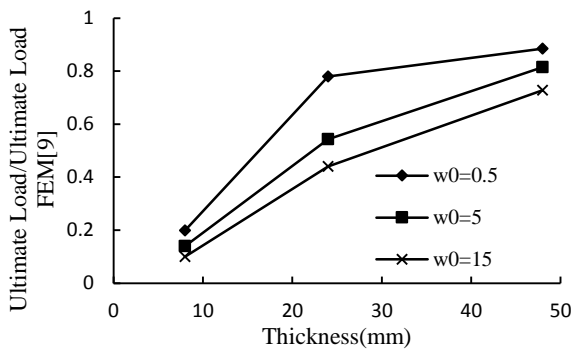


Fig. 8 Comparison of the results obtained with the results of finite element [9]

شکل 8 مقایسه نتایج استخراج شده با نتایج المان محدود [9]

اولین لایه شکست شده در صفحات به جز در دو مورد معمولاً لایه آخر یعنی لایه  $(0^\circ)$  می‌باشد که آن دو حالت نیز مربوط به ضخیم‌ترین صفحات با کمترین تغییر شکل وسط صفحه‌ای می‌باشد. همانطور که از جدول 1 مشاهده می‌شود در حالتی که صفحه دارای کمترین انحنای هندسی اولیه و بیشترین ضخامت باشد، نتایج تحلیل‌ها نسبت به نتایج صفحات دیگر به نتایج المان محدود [9] نزدیکتر هستند که این امر از شکل 8 نیز مشهود می‌باشد که این شکل نشان دهنده نتایج بار نهایی حاصل از تحلیل‌های صورت گرفته در این مقاله نسبت به بار نهایی حاصل از تحلیل المان محدود مرجع [9] برای صفحات با ضخامت‌های 8، 24 و 48 میلی‌متر با انحنای اولیه 0.5، 5 و 15 میلی‌متر می‌باشد. برای استخراج نتایج این شکل فشار جانبی به صفحات وارد نشده است در واقع این شکل نتایج بار نهایی جدول 1 را نسبت به نتایج المان محدود مرجع [9] نشان می‌دهد. چنانچه مشاهده می‌شود نتایج برای صفحه با ضخامت 48 میلی‌متر و انحنای اولیه 0.5 میلی‌متر تقریباً 89 درصد نتایج استخراج شده با روش المان محدود [9] می‌باشد. در صورتیکه تحلیل صفحه با ضخامت 8 میلی‌متر و انحنای اولیه 15 میلی‌متر نتایج بسیار کمتر و محافظه کارانه‌تری نسبت به المان محدود بدست می‌دهد که برای این صفحه این نسبت تقریباً برابر 10 درصد است و همچنین مشاهده که این نسبت با افزایش ضخامت یا کاهش انحنای اولیه افزایش می‌یابد. در واقع این نشان دهنده این امر است که نادیده گرفتن ترم‌های غیرخطی در تحلیل‌ها بیشتر روی صفحات نازک یا با انحنای هندسی اولیه زیاد تأثیرگذار می‌باشد و هرچه صفحه ضخیم‌تر شده یا انحنای هندسی کم می‌شود در واقع میزان تغییر شکل صفحه کم‌تر بوده و اثرات ترم‌های غیرخطی کم‌رنگ‌تر می‌شوند.

در هر دو مدل کاهش سختی صفحات، لایه‌های  $(0^\circ)$  و  $(90^\circ)$  معمولاً در وسط صفحه دچار شکست می‌شوند و لایه‌های 45 و 45- در نقاط گوشه صفحه می‌شکنند. در مدل کاهش سختی ناحیه‌ای در هر لایه معمولاً ابتدا ناحیه 5 شکسته می‌شود و سپس نواحی روبرو به هم مانند 1، 9، 3 و 7، 2 و 8، 4 و 6، معمولاً با هم دچار شکست می‌شوند. به جز ناحیه 5 که معمولاً در وسط دچار شکست می‌شود، در مابقی نواحی شکست در گوشه‌ها اتفاق می‌افتد. همانطور که از این جداول و اشکال مشاهده می‌شود با افزایش انحنای هندسی اولیه یا افزایش فشار جانبی بار اولین لایه شکست و نیز بار نهایی کاهش می‌یابد و همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش انحنای هندسی اولیه و یا فشار جانبی، فاصله بین بار اولین لایه شکست و آخرین لایه شکست افزایش می‌یابد.

با توجه به نتایج بدست آمده با استفاده از مدل کاهش سختی ناحیه‌ای معمولاً مقدار نیروی نهایی بدست آمده بیشتر از مقدار مدل کاهش سختی کل لایه‌ای است، در صورتیکه همانطور که انتظار می‌رود نیروهای اولین لایه شکست در هر دو مدل یکی است.

## 9- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی صفحات کامپوزیتی تحت نیروی فشاری درون صفحه‌ای و فشار جانبی سینوسی توسط روش ریتز پرداخته شد. صفحات با ضخامتهای متفاوت و دارای انحنای هندسی مختلف بودند. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تحلیل مورد استفاده قرار گرفت و فرضیات براساس جابجایی‌های کوچک بود و از اثرات ترم‌های غیر خطی در معادلات صرف نظر شد. صفحات با شرایط مرزی لولایی بودند که لبه‌ها به صورت خط مستقیم جابجا می‌شدند. معیار شکست هشین برای بررسی صفحات بکار

جدول 1 نتایج تحلیل مقاومت نهایی بدون وجود فشار جانبی بر اساس مدل کاهش سختی کل لایه‌ای

Table. 1 The results of ultimate strength analysis based on Complete Ply Degradation Model without lateral pressure

تغییر شکل هندسی اولیه (mm)	ضخامت صفحه (mm)	تنش اولین لایه شکست (MPa)	شماره اولین لایه شکسته شده (مکان نقطه شکست)	تنش نهایی (MPa)	شماره آخرین لایه شکسته شده (مکان نقطه شکست)	تعداد لایه‌های شکسته شده	تنش نهایی مرجع [10]	تنش نهایی حاصل از تحلیل المان محدود [9]
				20.84	8(250,250)	1	20.94	105
0.5	8	166.10	24(250,250)	167.54	20(250,250)	2	167.71	215
	48	203.92	3(250,250)	300.35	1(250,250)	37	298.88	340
	8	13.88	8(250,250)	14.91	2(50,450)	4	15.48	107
5	24	67.73	24(250,250)	113.87	1(250,250)	19	113.67	210
	48	145.05	48(250,250)	245.11	1(250,250)	43	244.79	302
	8	8.00	8(250,250)	11.50	2(450,50)	4	11.79	115
15	24	30.24	24(250,250)	90.17	1(250,250)	18	89.84	205
	48	61.92	48(250,250)	188.33	1(250,250)	44	187.50	260

جدول 2 نتایج تحلیل مقاومت نهایی با وجود فشار جانبی و مدل کاهش سختی کل لایه‌ای

Table. 2 The results of ultimate strength analysis with lateral pressure and Complete Ply Degradation Model

ضخامت صفحه (mm)	تغییر شکل هندسی اولیه (mm)	فاکتور فشار (Q)	تنش اولین لایه شکست (MPa)	شماره اولین لایه شکسته شده (مکان نقطه شکست)	تنش نهایی (MPa)	شماره آخرین لایه شکسته شده (مکان نقطه شکست)	تعداد لایه‌های شکسته شده
			19.24	8(250,250)	19.24	48(250,250)	1
	0	2	16.42	8(250,250)	16.42	48(250,250)	1
		3	13.62	8(250,250)	15.01	2(50,450)	4
		7.99	0.00	8(250,250)	11.24	7(500,500)	8
		1	12.12	8(250,250)	14.22	2(50,450)	4
	5	2	10.37	8(250,250)	13.52	2(50,450)	4
8		3	8.62	8(250,250)	12.82	2(50,450)	4
		7.99	0.00	8(250,250)	10.79	7 (0, 0)	8
		1	7.00	8(250,250)	11.22	7 (500,500)	8
	15	2	5.99	8(250,250)	11.05	7 (0, 0)	8
		3	4.99	8(250,250)	10.87	7 (500,500)	8
		7.99	0.00	8(250,250)	10.00	7 (500,500)	8
		1	164.57	24(250,250)	166.71	20 (250,250)	2
	0	2	128.43	24(250,250)	151.58	3 (250,250)	3
		3	95.57	24(250,250)	141.37	3 (250,250)	3
		6.4	0.00	24(250,250)	114.68	1(250,250)	18
		1	56.88	24(250,250)	111.44	1(250,250)	18
	5	2	46.13	24(250,250)	109.04	1(250,250)	18
24		3	35.48	24(250,250)	106.68	1(250,250)	18
		6.4	0.00	24(250,250)	98.92	1(250,250)	18
		1	25.49	24(250,250)	88.48	1(250,250)	18
	15	2	20.75	24(250,250)	86.80	1(250,250)	18
		3	16.02	24(250,250)	85.13	1(250,250)	18
		6.4	0.00	24(250,250)	79.55	1(250,250)	18
		1	200.27	3(250,250)	297.78	1(250,250)	38
	0	2	191.97	3(250,250)	285.86	1(250,250)	41
		3	183.89	3(250,250)	276.37	1(250,250)	42
		6.13	0.00	3(250,250)	250.54	1(250,250)	43
		1	120.66	48(250,250)	239.04	1(250,250)	43
	5	2	96.56	48(250,250)	233.12	1(250,250)	43
48		3	72.74	48(250,250)	227.34	1(250,250)	43
		6.13	0.00	48(250,250)	212.59	1(250,250)	43
		1	51.75	48(250,250)	184.57	1(250,250)	44
	15	2	41.61	48(250,250)	180.84	1(250,250)	44
		3	31.49	48(250,250)	177.15	1(250,250)	44
		6.13	0.00	48(250,250)	164.78	9(500,500)	45



جدول 3 نتایج تحلیل مقاومت نهایی با وجود فشار جانبی و مدل کاهش سختی ناحیه‌ای

Table 3. The results of ultimate strength analysis with lateral pressure and Ply Region Degradation Model

تعداد لایه‌های شکسته شده	شماره آخرین لایه شکسته شده (مکان نقطه شکست)	تنش نهایی (MPa)	شماره اولین لایه شکسته شده (مکان نقطه شکست)	تنش اولین لایه شکست (MPa)	فاکتور فشار (Q)	تغییر شکل هندسی اولیه (mm)	ضخامت صفحه (mm)
0	1	19.24	8(250,250)	19.24	1		
0	1	16.42	8(250,250)	16.42	2	0	
0	29	15.31	8(250,250)	13.62	3		
0	36	12.21	8(250,250)	0.00	7.99		
0	29	14.60	8(250,250)	12.12	1		
0	29	14.00	8(250,250)	10.37	2	5	
0	29	13.42	8(250,250)	8.62	3		8
0	38	11.08	8(250,250)	0.00	7.99		
0	36	11.94	8(250,250)	7.00	1		
0	38	11.57	8(250,250)	5.99	2	15	
0	38	11.20	8(250,250)	4.99	3		
2	63	10.11	8(250,250)	0.00	7.99		
0	7	168.40	24(250,250)	164.57	1		
0	17	152.06	24(250,250)	128.43	2	0	
0	26	141.67	24(250,250)	95.57	3		
0	65	116.07	24(250,250)	0.00	6.4		
1	150	111.63	24(250,250)	56.88	1		
0	152	109.20	24(250,250)	46.13	2	5	
1	154	106.82	24(250,250)	35.48	3		24
1	160	99.03	24(250,250)	0.00	6.4		
0	160	88.58	24(250,250)	25.49	1		
1	160	86.89	24(250,250)	20.75	2	15	
1	160	85.22	24(250,250)	16.02	3		
1	160	79.64	24(250,250)	0.00	6.4		
1	325	298.34	3(250,250)	200.27	1		
1	356	286.09	3(250,250)	191.97	2	0	
1	365	276.52	3(250,250)	183.89	3		
1	370	250.60	3(250,250)	0.00	6.13		
1	374	239.11	48(250,250)	120.66	1		
1	376	233.15	48(250,250)	96.56	2	5	
1	378	227.35	48(250,250)	72.74	3		48
1	379	212.59	48(250,250)	0.00	6.13		
1	382	186.97	48(250,250)	51.75	1		
1	383	183.26	48(250,250)	41.61	2	15	
1	383	179.66	48(250,250)	31.49	3		
1	389	167.13	48(250,250)	0.00	6.13		

Considering Simultaneous Effects of Interlaminar and Intralaminar Damage Mechanisms” Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 2, pp. 1-8, 2015. (In Persian)

- [12] Su ZC, Tay TE, Ridha M, Chen BY. Progressive damage modeling of open-hole composite laminates under compression. Composite Structures, Vol. 30; 122:507-17, 2015.
- [13] Li X, Gao W, Liu W. Post-buckling progressive damage of CFRP laminates with a large-sized elliptical cutout subjected to shear loading. Composite Structures, Vol. 15, 128, 313-21, 2015.
- [14] Hashin, Z. Rotem, A., “A Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Materials.” J Compos Mater, Vol. 7, 448-464, 1973.

## 10- مراجع

- [1] Agarwal, B. D. Broutman, L. J. Chandrashekhara, K., “Analysis and Performance of Fiber Composites.” 3rd ed. USA, Wiley, 2006.
- [2] Reddy, J. N., “Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells.” 2<sup>nd</sup> ed. USA, CRC Press, 2004.
- [3] Turvey G. J. and Marshall, I. M., “Buckling and Postbuckling of Composite Plates.” 1<sup>st</sup> ed. UK, Chapman & Hall, 1995.
- [4] Brubak, L. Hellesland, J. Steen, E., “Semi-analytical Buckling Strength Analysis of Plates with Arbitrary Stiffener Arrangements” J Constr Steel Res, Vol. 63(4):532-543, 2007.
- [5] Brubak, L. Hellesland, J., “Approximate Buckling Strength Analysis of Arbitrarily Stiffened and Stepped Plates” Eng struct, Vol. 29(9):2321-2333, 2007.
- [6] Brubak, L. Hellesland, J., “Semi-analytical Postbuckling and Strength Analysis of Arbitrarily Stiffened Plates in Local and Global Bending” Thin-Walled Struct, Vol. 45(6):620-633, 2007.
- [7] Brubak, L. Hellesland, J., “Strength Criteria in Semi-analytical and Large Deflection Analysis of Stiffened Plates in Local and Global Bending” Thin-Walled Struct, Vol. 46(12):1382-1390, 2008.
- [8] Brubak, L. Hellesland J., “Semi-analytical Postbuckling Analysis of Stiffened Imperfect Plates with a Free or Stiffened Edge” Comput Struct, Vol. 89: 1574-1585, 2011.
- [9] Hayman, B. Berggreen, C. Lundsgaard-Larsen, C. Delarche, A. Toftegaard, H. Dow, R. S. and et al., “Studies of the Buckling of Composite Plates in Compression” Ships Offshore Struct; Vol. 6(1-2): 81-92, 2011.
- [10] Yang, Q. J. Hayman, B. Osnes, H., “Simplified Buckling and Ultimate Strength Analysis of Composite Plates in Compression” Composites Part B: Engineering, Vol. 54, 343-352, 2013.
- [11] Shokrieh, M. M. Ghajar, M. Salamattalab, M. and Madoliat, R., “Progressive Damage Modeling of Laminated Composites by

Archive of SID