



## برداشت انرژی از تیر کامپوزیتی لایه‌ای دارای لایه پیزوالکتریک تحت ارتعاشات اجباری

حسین وحدانی فر<sup>1</sup>، علی حاج نایب<sup>2</sup>، رضا مسلمانی<sup>2\*</sup>، افشین قنبرزاده<sup>2</sup>

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

\* اهواز، صندوق پستی 43337-61357، mosalmani@scu.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

دریافت: 96/04/01

پذیرش: 96/05/22

## کلیدواژگان:

پیزوالکتریک

تیر کامپوزیتی

ارتعاشات اجباری

کوپل الکترومکانیکی

امروزه استفاده از مبدل پیزوالکتریک به دلیل قابلیت تبدیل انرژی محیطی همچون ارتعاشات مکانیکی به انرژی الکتریکی، کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است. در یک سازه دارای لایه پیزوالکتریک، علاوه بر خصوصیات پیزوالکتریک، انتخاب خصوصیات بخش غیرپیزوالکتریک سازه برداشت کننده انرژی نیز از اهمیت بالایی برخوردار است؛ بنابراین در پژوهش حاضر، تولید انرژی الکتریکی از ارتعاشات اجباری تیر کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته است. لذا در ابتدا، با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی، معادلات حرکت سیستم به دست آمده و سپس با استفاده از روش کانتروویچ، روابط ولتاژ خروجی برای یک تیر کامپوزیتی دارای لایه پیزوالکتریک استخراج می‌گردند. جهت صحت‌سنجی، نتایج تحلیلی با نتایج حاصل از مدل‌سازی اجزای محدود مقایسه شده‌اند که خطای نسبی کمی را نشان می‌دهند. در ادامه تأثیر زاویه الیاف و نحوه چیدمان لایه‌های تیر کامپوزیتی دارای لایه پیزوالکتریک بر میزان برداشت انرژی بررسی شده است. مطابق با نتایج به دست آمده، با افزایش مدول الاستیسیته تیر کامپوزیتی و تأثیر آن بر نسبت میرایی سازه، میزان برداشت انرژی به مقدار قابل توجهی بهبود می‌یابد. همچنین در ادامه اثر ابعاد تیر کامپوزیتی، نسبت ضخامت تیر کامپوزیتی به ضخامت لایه پیزوالکتریک، مقدار جرم متمرکز و نسبت میرایی بر میزان برداشت انرژی بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با استفاده از مواد کامپوزیتی و با طراحی مناسب لایه‌چینی و زاویه الیاف در هر لایه، می‌توان مدول الاستیسیته معادل متفاوتی در تیر کامپوزیتی ایجاد نمود که در نتیجه، فرکانس طبیعی سیستم و میزان دامنه ولتاژ خروجی مدار هم تغییر خواهد کرد.

## Energy harvesting from laminated composite beam with a piezoelectric layer under forced vibrations

Hossein Vahdanifar<sup>1</sup> Ali Hajnayeb<sup>1</sup>, Reza Mosalmani<sup>1\*</sup>, Afshin Ghanbarzadeh<sup>1</sup>

1-Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Iran

\* P.O.B. 43337-61357, Ahvaz, Iran, mosalmani@scu.ac.ir

## Keywords

Piezoelectric  
Composite beam  
Forced vibration  
Electromechanical coupling

## Abstract

Nowadays, piezoelectric transducers are widely applied because of their capability to convert environmental energies (e.g. mechanical vibrations) into the electrical energy. In an energy harvester structure, not only piezoelectric characteristics but also properties of the non-piezoelectric part of the energy harvesting structure are highly important. Therefore, in the present research, electrical energy generation from forced vibrations of a composite beam with the piezoelectric layer is considered. For this purpose, firstly, the governing equations of the system are obtained using Euler-Bernoulli beam theory. Then, Kantorovich method was used to calculate the output voltage for a composite beam with the piezoelectric layer. To verify the analytical method, the results were compared to the finite-element modeling results. Furthermore, the effects of fiber orientation angle and layup arrangement in the composite beam with piezoelectric layer on the amount of harvested energy were investigated. According to the obtained results, by increasing the elastic modulus of the composite beam and its effect on the damping ratio of the structure, considerably higher energy is harvested. Then, the effects of composite beam dimensions, the ratio of composite beam thickness to the piezoelectric layer thickness, the concentrated mass, and the damping ratio on the amount of harvested energy were studied. The results show that using the composite materials and by proper design of layup and fiber orientation angle in each layer, it is possible to get different equivalent elastic modulus in the composite beam, and consequently alter natural frequency of the system and output voltage amplitude of the circuit.

Please cite this article using:

Vahdanifar, H. Hajnayeb, A. Mosalmani, R. and Ghanbarzadeh, A., "Energy harvesting from laminated composite beam with a piezoelectric layer under forced vibrations", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 05, No. 02, pp. 227-237, 2018.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

## 1- مقدمه

فرآیند به دست آوردن انرژی از محیط اطراف سیستم و تبدیل آن به انرژی الکتریکی مفید و قابل استفاده را برداشت انرژی می‌نامند. در سال‌های اخیر، با پیشرفت فناوری در زندگی روزمره، تقاضا برای وسایل الکتریکی قابل حمل و کم‌مصرف رو به افزایش است. چون این وسایل قابل حمل می‌باشند، ضروری است که بتوانند منبع ذخیره انرژی خود را نیز حمل کنند. به‌طور سنتی این دستگاه‌ها از باتری به‌عنوان انرژی استفاده می‌کنند و مشکل اصلی استفاده از باتری‌ها این است که عمر محدودی دارند [1]. بسیاری از سازه‌ها مانند بدنه هواپیما و پل‌های معلق، نیاز به پایش دائمی دارند. از سوی دیگر، با توجه به محل قرارگیری حس‌گرهای پایش سلامت سازه، در بسیاری از موارد امکان جایگزینی باتری وجود ندارد. از این‌رو استفاده از یک منبع تولید توان الکتریکی دائمی مانند استفاده از انرژی محیطی همچون انرژی مکانیکی ضرورت دارد. در میان روش‌های مختلفی که برای تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریسیته وجود دارد استفاده از مواد پیزوالکتریک به دلیل دارا بودن خاصیت ذاتی کوپلینگ الکترومکانیکی و همچنین توان بالا، بیش‌ترین توجه را در زمینه برداشت انرژی به خود اختصاص داده است [2].

محققان بسیاری به بررسی استفاده از مواد پیزوالکتریک جهت برداشت انرژی در سازه‌های مکانیکی پرداخته‌اند [3-6]. میسون، [3] از نخستین کسانی بود که مواد پیزوالکتریک را بررسی نمود. وی علاوه بر مطالعه در مورد خواص ذاتی مواد تشکیل‌دهنده پیزوالکتریک به طراحی و ارائه یک مدار معادل جهت برداشت انرژی از مبدل پیزوالکتریک پرداخت. اومدا و همکاران [4] در پژوهش دیگری جهت برداشت انرژی مدل گسسته‌ای را پیشنهاد کردند. مدل ارائه شده توسط آنان از یک جرم، فنر و میرا کننده تشکیل شده بود. لی و همکاران [5] ژنراتورهای الکتریکی کوچک دارای تیرهای خمشی پیزوالکتریک و پایه الاستیک را بررسی کردند. زی و همکاران [6] به برداشت انرژی از تیر بایمورف پرداختند. هدف از برداشت انرژی، تأمین انرژی مصرفی برای حسگرهای پایش سلامت سازه‌ها بود. آنان همچنین به بررسی تأثیر دو جرم متمرکز در انتهای آزاد تیر پرداختند. کومار و همکاران [7] به بررسی و تحلیل عملکرد به‌کارگیری مواد مختلف در ساختار تشکیل‌دهنده پیزوالکتریک جهت افزایش توان خروجی پرداختند. آن‌ها جهت برداشت انرژی از یک تیر یونی مورف با جرم متمرکز متصل به انتهای آزاد آن استفاده کردند. معادلات حاکم بر مدل را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج کردند و سپس با استفاده از روش حل اجزا محدود معادلات حاکم را حل نمودند. دانش یزدی و همکاران [8] به برداشت انرژی از یک تیر با خواص همسانگرد به همراه لایه پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها در تحلیل خود از پیزوالکتریک زمینه پلیمری<sup>1</sup> جهت برداشت انرژی استفاده کردند. آنان جهت حل معادله خود از روش تبدیل فوریه تابع گرین استفاده کردند. استفاده از این روش به آنان کمک کرد تا بتوانند جهت تحریک تیر نیروهای متفاوتی از جمله بار گسترده را به تیر اعمال کنند. همچنین آن‌ها جهت صحت‌سنجی مدل ارائه‌شده، حل تحلیلی را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. حسینی و همکاران [9] به تجزیه و تحلیل ارتعاشات اجباری و آزاد غیرخطی تیر اوپلر برنولی تحت امواج با لایه پیزوالکتریک پرداختند. آنان معادلات خود را از اصل همپلتون استخراج نمودند و با روش گالکین حل کردند. نتایج آنان پاسخ فرکانسی و دامنه ارتعاشات در ناحیه رزونانس برای مد اول سیستم بود. عبدالکافی و همکارانش [10-11] یک برداشت‌کننده

انرژی شامل یک ایرفویل صلب با درجات آزادی پیچشی و رفت و برگشتی را طراحی و مدل‌سازی نمودند. این مدل دارای فنرهای پیچشی و خمشی خطی و غیرخطی بود؛ این فنرها به اتصال‌دهنده پیزوالکتریک با درجات آزادی رفت و برگشتی متصل شده بودند. آن‌ها به‌صورت تحلیلی تأثیر پارامترهای مختلف را بررسی نمودند. آگ بورن [12] در تحقیق خود به بررسی برداشت انرژی الکتریکی در محدوده میکرو تا میلی وات از یک تیر یکسر گیردار با لایه پیزوالکتریک سرامیکی پرداخت سپس نتایج به‌دست‌آمده از حل تحلیلی برای برداشت انرژی الکتریکی از تیر تحت ارتعاشات هارمونیک و اجباری را با نتایج حاصل از نمونه آزمایشگاهی مقایسه و ارائه نمود.

اومن و همکاران [13] به بیان یک رویکرد جدید در برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک پرداختند. آنان از یک مدار خازنی و یک پل دیود جهت یکسوسازی ولتاژ الکتریکی خروجی استفاده نمودند و همچنین به بهینه‌سازی حداکثر انرژی حاصل برای شبکه‌های وایرلس نیز پرداختند. عزیزی و همکاران [14] یک میکرو تیر پیزوالکتریک بایمورف غیرخطی دوسرگیردار تحت تحریک الکترواستاتیک و پیزوالکتریک را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها در پژوهش خود به بررسی خاصیت عملگری پیزوالکتریک پرداختند. بدین منظور با اعمال ولتاژ به لایه پیزوالکتریک، رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو تیر مورد بررسی قرار گرفت. ارتوک و ایمن [15] یک روش تحلیلی برای کوپل الکترومکانیکی تیر اوپلر برنولی به همراه لایه پیزوالکتریک ارائه نمودند. مدل به‌صورت یک سیستم یک درجه آزادی در نظر گرفته شده است. آن‌ها تأثیر افزایش مقاومت الکتریکی در مدار بر روی پارامترهای خروجی از جمله ولتاژ، شدت جریان و توان خروجی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها سپس در پژوهشی دیگر [16] به برداشت انرژی از تیر بایمورف تحت ارتعاشات اجباری به‌واسطه‌ی جرم متمرکز پرداختند. در تحقیق انجام شده، لایه پیزوالکتریک از لحاظ هندسی بر روی کل سطح تیر قرار گرفته است. باریونی و همکاران [17] بر اساس معیار بیشترین تغییر شکل خمشی تیر با تکیه‌گاه ساده به بهینه‌سازی مکان لایه پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها این معیار را تنها برای شکل مد اول تیر بررسی کردند و طول بهینه عملگر پیزوالکتریک را هم‌اندازه با طول تیر به دست آوردند. روندی و همکاران [18] یک روش تحلیلی برای برداشت انرژی و بهینه‌سازی آن با استفاده از تکنیک مدل جرم و فنر معادل و با استفاده از مدار الکتریکی ارائه نمودند. لوو و همکاران [19] روشی تحلیلی بر مبنای جرم متمرکز بر مقاومت الکتریکی و ثابت الکترومکانیکی و تأثیر آن بر میزان برداشت انرژی ارائه نمودند. متیو و همکاران [20] به طراحی و ارائه مدل پیزوالکتریک قرار گرفته در پاشنه کفش جهت برداشت انرژی الکتریکی پرداختند. کیم و همکاران [21] به تحلیل و بررسی برداشت انرژی الکتریکی از لایه پیزوالکتریک متصل شده به پایه یک پل شبیه‌سازی شده تحت بارگذاری‌های مختلف پرداختند. آنان همچنین در مدل خود شرایط مختلف از جمله وزن خودروهای عبوری در حال حرکت، سرعت عبوری و شرایط ترافیکی را به‌صورت تغییر در دامنه بارگذاری و فرکانس سازه در نظر گرفتند. در مطالعه آن‌ها نتایج ارائه‌شده مبتنی بر حل تحلیلی و تجربی می‌باشد.

عمده پژوهش‌های پیشین، معطوف به برداشت انرژی الکتریکی از یک تیر یکسر گیردار با آلیاژ فلزی که دارای خواص همسانگرد است می‌باشد. از سوی دیگر مواد کامپوزیتی به‌واسطه داشتن خواص مکانیکی منحصربه‌فرد نسبت به مواد همسانگرد، طی سال‌های اخیر به‌طور گسترده‌ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. لذا در این مقاله برداشت انرژی از تیر کامپوزیتی با یک و دو لایه پیزوالکتریک تحت ارتعاشات اجباری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور معادلات حاکم برای تیر کامپوزیتی با لایه

<sup>1</sup> Polyvinylidene Fluoride

$$E_t I = b \left[ \frac{E_s (h_b^3 - h_a^3) + E_p (h_c^3 - h_b^3)}{3} \right] \quad (4)$$

$$m = b(\rho_s h_s + \rho_p h_p) \quad (5)$$

در رابطه (4) و (5)  $E_s$ ،  $\rho_s$ ،  $h_s$  به ترتیب مدول معادل الاستیسیته، چگالی تیر کامپوزیتی و ضخامت آن می‌باشند. همچنین  $E_p$ ،  $\rho_p$  و  $h_p$  به ترتیب مدول الاستیسیته، چگالی و ضخامت لایه پیزوالکتریک هستند. همچنین  $h_a$ ،  $h_c$ ،  $h_b$  فاصله هر لایه تا مرکز تار خنثی و  $b$  عرض تیر می‌باشد. در شکل 2 تصویر شماتیک از محل قرار گیری هر لایه نسبت به تار خنثی قابل مشاهده است.

با توجه به اینکه تیر در نظر گرفته شده از نوع چندلایه کامپوزیتی است جهت محاسبه مدول یانگ معادل  $E_s$  در رابطه (4) نیاز به تعریف درایه‌های ماتریس سختی خمشی  $D_{ij}$  می‌باشد. توسط درایه‌های ماتریس  $D_{ij}$  گشتاورهای  $M_x$ ،  $M_y$  و  $M_{xy}$  وارد بر تیر به انحنای  $k_x$ ،  $k_y$ ،  $k_{xy}$  در راستاهای بارگذاری مربوط می‌شوند. ماتریس  $D_{ij}$  را می‌توان آن از رابطه (6) محاسبه نمود:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^n (\bar{Q}_{ij})_n (z_n^3 - z_{n-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

درجایی که  $z_n - z_{n-1}$  ضخامت لایه  $n$ ام،  $k$  تعداد لایه‌ها و  $\bar{Q}_{ij}$  ماتریس سختی کلی هر لایه می‌باشد. با توجه به اینکه تیر فقط تحت خمش خالص در راستای  $x$  است. مطابق رابطه (7)، برای انحنای به وجود آمده در راستای  $x$  رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k_{11} = D_{11}^{-1} M_x \quad (8)$$

با توجه به رابطه (8)، برای تعیین مدول طولی خمشی مؤثر معادل یک چند لایه متقارن از رابطه (9) استفاده می‌گردد [23]:

$$E_s = \frac{12 M_x}{k_{11} h_s^3} = \frac{12}{h_s^3 D_{11}^{-1}} \quad (9)$$

برای نشان دادن تلفات مکانیکی، دو نوع مختلف میرایی را می‌توان برای سیستم در نظر گرفت: میرایی خارجی (مقاومت هوا) و میرایی داخلی. با وارد کردن ضرایب میرایی در سیستم، معادله حرکت به صورت رابطه (10) حاصل می‌شود [15].

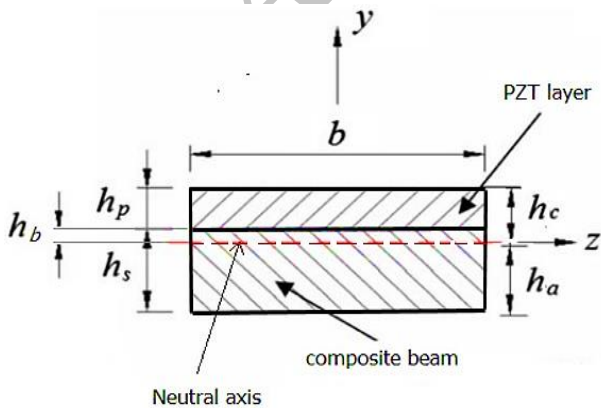


Fig. 2 The schematic view of layers distance from neutral axis

شکل 2 نمای شماتیک از فاصله قرار گیری لایه‌ها از محور خنثی

پیزوالکتریک تحت ارتعاشات اجباری با در نظر گرفتن نسبت‌های میرایی سازه‌ای و خارجی، توسعه داده می‌شوند و در نهایت، تأثیر پارامترهای مؤثر مانند چیدمان لایه‌ها، زاویه الیاف و مشخصات هندسی بر میزان برداشت انرژی بررسی می‌گردند.

## 2- بیان معادلات حاکم

مسئله مورد بررسی در این مقاله برداشت انرژی از یک تیر کامپوزیتی با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگیردار با پیکره‌بندی مستطیل شکل به همراه جرم انتهایی مطابق شکل 1 است. تیر مذکور با پهنای  $b$  و طول  $L$  متشکل از یک‌چند لایه از جنس کربن / اپوکسی با ضخامت  $h_s$  و یک‌لایه پیزوالکتریک سرامیکی با نام اختصاری PZT5A مطابق با مرجع [15] با ضخامت  $h_p$  به‌عنوان لایه‌های برداشت‌کننده انرژی می‌باشد.

همچنین فرض شده است که الکترودها تمام سطح لایه پیزوالکتریک را پوشانده و لایه پیزوالکتریک نسبت به تیر لغزشی ندارد. بنابراین می‌توان حرکت کلی تیر کامپوزیتی تحت ارتعاشات اجباری شامل حرکت پایه تیر کامپوزیتی و جابه‌جایی‌های عرضی آن را به‌صورت رابطه (1) بیان نمود [15].

$$w(x, t) = w_b(x, t) + w_r(x, t) \quad (1)$$

که در آن  $w_b(x, t)$  حرکت پایه تیر و  $w_r(x, t)$  جابه‌جایی عرضی تیر نسبت به انتهای گیردار است. همچنین حرکت پایه تیر به‌صورت رابطه (2) تعریف می‌شود.

$$w_b(x, t) = g(t) + xh(t) \quad (2)$$

$g(t)$  حرکت عرضی تیر در جهت  $y$  و  $h(t)$  چرخش تیر حول محور  $z$  است. معادله ارتعاشات صفحه‌ای تیر کامپوزیتی با استفاده از تئوری تیر اویلر - برنولی و اثر جرم انتهایی تیر در صفحه  $x - y$  را به‌صورت معادله (3) می‌توان نوشت [15]:

$$E_t I \frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} = -[m + M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

در رابطه فوق  $E_t$  مدول الاستیسیته تیر کامپوزیتی،  $I$  ممان اینرسی سطح مقطع،  $M_t$  جرم متمرکز انتهایی تیر و  $m$  جرم بر واحد طول تیر است. حاصل ضرب مدول یانگ در ممان اینرسی تیر کامپوزیتی و همچنین جرم سازه را می‌توان به‌صورت رابطه (4) و (5) بیان نمود [15]:

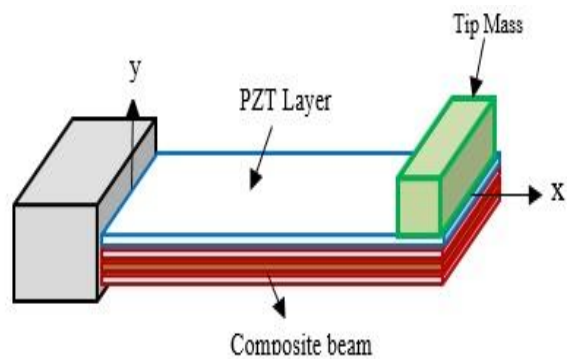


Fig. 1 Composite beam with piezoelectric layer and Tip mass

شکل 1 تیر کامپوزیتی به همراه لایه پیزوالکتریک و جرم انتهایی

در رابطه (19)  $D_3$  جابه‌جایی الکتریکی،  $\epsilon_{33}^T$  ظرفیت الکتریکی در تنش ثابت و  $E_3$  میدان الکتریکی است. مقادیر مربوط به جریان  $i(t)$  و ولتاژ  $V(t)$  را می‌توان با توجه به بار الکتریکی  $q(t)$  به صورت روابط (20) و (21) محاسبه نمود [12]:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = - \int_{x=0}^L d_{31} E_p h_{pc} b \frac{\partial^3 w_r(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx - \frac{\epsilon_{33}^s b L}{h_p} \frac{dV(t)}{dt} \quad (20)$$

$$V(t) = -R \left( \int_{x=0}^L d_{31} E_p h_{pc} b \frac{\partial^3 w_r(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx - \frac{\epsilon_{33}^s b L}{h_p} \frac{dV(t)}{dt} \right) \quad (21)$$

در روابط (20) و (21)  $\epsilon_{33}^s$  معرف ثابت پیزوالکتریک در کرنش ثابت،  $h_{pc}$  فاصله مرکز لایه پیزوالکتریک تا محور خنثی و  $R$  میزان مقاومت الکتریکی مدار می‌باشد.

### 3- حل معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم بر سیستم، جابه‌جایی عرضی تیر را می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت رابطه (22) تعریف نمود [15]:

$$w_r(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (22)$$

در رابطه (22)،  $\phi_r(x)$  نماینده تابع شکل مود و  $\eta_r(t)$  مختصات تعمیم‌یافته تیر می‌باشد. در ادامه با قرار دادن رابطه (22) در (21) رابطه (23) به دست می‌آید:

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{h_p}{R \epsilon_{33}^s b L} V(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(x) \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (23)$$

درجایی که [15]:

$$\varphi_r(x) = - \frac{d_{31} E_p h_{pc} h_p}{\epsilon_{33}^s L} \int_{x=0}^L \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} dx = - \frac{d_{31} E_p h_{pc} h_p}{\epsilon_{33}^s L} \left. \frac{d\phi_r(t)}{dx} \right|_{x=L} - \frac{-1}{x=0} \quad (24)$$

حل معادله (23) با ضرب فاکتور انتگرال  $\mu = e^{\frac{-t}{\tau_c}}$  در آن ممکن می‌شود. که به فرم (25) بازنویسی می‌گردد:

$$V(t) = e^{\frac{-t}{\tau_c}} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r \int \frac{d\eta_r(t)}{dt} dt \right] \quad (25)$$

برای تعیین رابطه (25) نیاز به دانستن رابطه مختصات تعمیم‌یافته<sup>1</sup>  $\eta_r(t)$  است. از آنجا که فرض بر آن است که سیستم دارای میرایی تناسبی است، مقدار  $\phi_r(x)$  در رابطه (24) برای تیر کامپوزیتی یونی مورف به صورت رابطه (26) قابل تعریف است:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 w_r(x,t)}{\partial t^2} + C_s I(x) \frac{\partial^5 w_r(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + C_a \frac{\partial w_r(x,t)}{\partial t} = -[m + M_t \delta(x-L)] \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

در رابطه (10)،  $M(x,t)$  تابع زمانی ممان خمشی در راستای  $x$ ،  $C_a$  ضریب میرایی ویسکوز ناشی از مقاومت هوا و  $C_s I(x)$  ضریب میرایی سازهای (میرایی داخلی) برای سطح مقطع کامپوزیتی است. با استفاده از روابط ساختاری پیزوالکتریک [15]، ممان خمشی  $M(x,t)$  به صورت رابطه (11) محاسبه خواهد شد.

$$M(x,t) = - \int_{h_a}^{h_b} T_1^s b y dy - \int_{h_a}^{h_b} T_1^p b y dy \quad (11)$$

که در رابطه (11)،  $b$  عرض تیر،  $T_1^s$  تنش در تیر کامپوزیتی و  $T_1^p$  تنش در لایه پیزوالکتریک است که از روابط (12) تا (15) به دست می‌آیند:

$$T_1^s = E_s S_1^s \quad (12)$$

$$S_1^s = \frac{M(x)z}{b} (\bar{Q}_{11}^{(k)} D_{11}^{-1} + \bar{Q}_{12}^{(k)} D_{12}^{-1} + \bar{Q}_{16}^{(k)} D_{16}^{-1}) \quad (13)$$

$$T_1^p = E_p (S_1^p - d_{31} E_3) \quad (14)$$

$$S_1^p = S_{11}^E T_1^p + d_{31} E_3 \quad (15)$$

$d_{31}$  ضریب پیزوالکتریک در تنش ثابت،  $E_3$  میدان الکتریکی،  $S_1^s$  کرنش در تیر کامپوزیتی،  $S_1^p$  کرنش در لایه پیزوالکتریک و  $S_{11}^E$  ماتریس نرمی پیزوالکتریک است. رابطه (11) را می‌توان به صورت رابطه (16) بازنویسی نمود:

$$M(x,t) = E_t I \frac{\partial^2 w_r(x,t)}{\partial x^2} + \vartheta V(t) \quad (16)$$

در رابطه (16)  $V(t)$  معرف تابع ولتاژ است. رابطه کوپل الکترومکانیکی با فرض سری بودن مدار الکتریکی خروجی به صورت (17) تعریف می‌شود [15]:

$$\vartheta = - \frac{E_p b d_{31}}{2 h_p} (h_c^2 - h_p^2) \quad (17)$$

معادله تیر اویلر برنولی تحت ارتعاشات اجباری با اثر جرم متمرکز در انتها تیر به همراه ضرایب میرایی به شکل رابطه (18) بازنویسی می‌شود [16]:

$$E_t I \frac{\partial^4 w_r(x,t)}{\partial x^4} + C_s I(x) \frac{\partial^5 w_r(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + C_a \frac{\partial w_r(x,t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w_r(x,t)}{\partial t^2} + \vartheta V(t) \left[ \frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = -[m + M_t \delta(x-L)] \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - C_a \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \quad (18)$$

معادله (18) بیان‌کننده معادله حرکت مکانیکی با کوپلینگ الکتریکی است. برای به دست آوردن معادله مدار الکتریکی و مکانیکی نیاز به تعریف رابطه ساختاری پیزوالکتریک است که به صورت رابطه (19) بیان می‌گردد:

$$D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3 \quad (19)$$

<sup>1</sup> Generalized coordinates

که در آن  $\omega$  فرکانس تحریک سازه می‌باشد همچنین:

$$\gamma_r^w = \int_{x=0}^L \phi_r(x) dx \quad (35)$$

$$\gamma_r^\theta = \int_{x=0}^L x \phi_r(x) dx \quad (36)$$

درجایی که نیروی مکانیکی و نیروی ناشی از میرایی سازه به ترتیب با استفاده از  $\gamma_r^w$  و  $\gamma_r^\theta$  بدست می‌آیند. حال جهت ساده‌سازی عبارت‌های جابه‌جایی عرضی  $h(t)$  چرخش کوچک  $g(t)$  و ولتاژ  $v(t)$  به صورت روابط (37) فرض می‌شوند [15]:

$$h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$$

$$g(t) = Y_0 e^{j\omega t}$$

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (37)$$

در روابط (37)،  $\theta_0$  دامنه چرخش،  $Y_0$  دامنه حرکت عرضی در جهت  $y$  و  $V_0$  دامنه ولتاژ عبوری از مقاومت الکتریکی است.

در نهایت با قرار دادن  $\eta_r(t)$  در رابطه (31) میزان دامنه ولتاژ خروجی برحسب مقاومت الکتریکی بدست می‌آید. در رابطه (38) تعمیم آن برای تعیین ولتاژ خروجی دو سر مقاومت به ازای بی‌نهایت مد ارتعاشی با ورودی هارمونیک قابل مشاهده است:

$$V(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j m \omega \phi_r (\gamma_r^w Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j 2 \xi_r \omega_r \omega}}{\left( \frac{1 + j \omega \tau_c}{\tau_c} \right) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j \omega \phi_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j 2 \xi_r \omega_r \omega}} \quad (38)$$

#### 4- بیان معادلات حاکم برای تیر کامپوزیتی بایمورف

در این بخش به برداشت انرژی از تیر کامپوزیتی با دو لایه پیزوالکتریک (تیر کامپوزیتی بایمورف) تحت ارتعاشات اجباری به همراه جرم متمرکز در انتهای تیر پرداخته شده است. نمای شماتیک مدل در شکل 3 قابل مشاهده می‌باشد.

در اینجا، معادله ارتعاشی (18) به صورت زیر برای ارتعاشات اجباری تیر بایمورف تحت اثر جرم متمرکز بازنویسی می‌شود [16]:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} + C_s I(x) \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + C_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + \vartheta V(t) \left[ \frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = -[m + M_t \delta(x-L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (39)$$

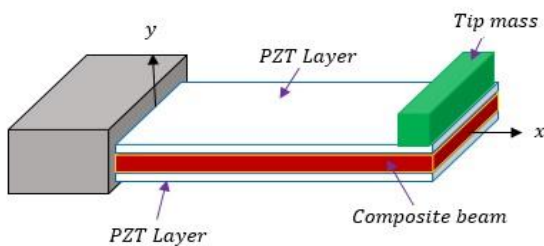


Fig. 3 Composite beam with two piezoelectric layers and Tip mass

شکل 3 تیر کامپوزیتی بایمورف به همراه دو لایه پیزوالکتریک و جرم انتهایی

$$\phi_r(x) = A_r \left( \cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \times \left( \sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right) \quad (26)$$

که در آن  $A_r$  مقدار ثابت عددی معادله می‌باشد که با اعمال شرط عمود بودن مودها قابل محاسبه است. همچنین می‌توان  $\zeta_r$  را از رابطه (27) محاسبه نمود:

$$\zeta_r = \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)}{\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r - \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r)} \quad (27)$$

و پارامتر  $\lambda_r$  معرف مقدار ویژه بی‌بعد فرکانسی است. جهت نرمال‌سازی تابع شکل مود با اعمال شرط عمود بودن مودها برای معادله (26)، روابط (28) الی (30) به دست می‌آیند:

$$\int_{x=0}^L m \phi_s(x) \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[ \frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = \delta_{rs} \quad (28)$$

$$\int_{x=0}^L E_t I \phi_s(x) \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} dx + \left[ \frac{d\phi_s(x)}{dx} E_t I \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (29)$$

$$1 + \cos \lambda_r \lambda_r \cosh \lambda_r + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_r \sinh \lambda_r - \sin \lambda_r \cosh \lambda_r) - \frac{\lambda_r^3 I_t}{mL^3} (\cosh \lambda_r \sin \lambda_r + \sinh \lambda_r \cos \lambda_r) + \frac{I_t M_t \lambda_r^4}{m^2 L^4} (1 - \cos \lambda_r \cosh \lambda_r) = 0 \quad (30)$$

با قرار دادن رابطه (22) در معادله حرکت و با اعمال شروط عمود بودن مودها می‌توان حل قسمت زمانی آن را به صورت (31) تعریف نمود:

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2 \xi_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) + \chi_r V(t) = f_r(t) \quad (31)$$

در رابطه (31)،  $\omega_r$  فرکانس طبیعی سازه،  $\xi_r$  نسبت میرایی،  $f_r(t)$  ترم نیروهای مکانیکی و  $\chi_r$  ترم کوپلینگ مودال است [15]. فرکانس طبیعی و نسبت میرایی سازه را با استفاده از روابط (32) و (33) محاسبه می‌شوند:

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{E_t I}{mL^4}} \quad (32)$$

$$\xi_r = \frac{c_s I(x) \omega_r}{2 E_t I(x)} + \frac{c_a}{2 m(x) \omega_r} \quad (33)$$

با حل معادله (31) مختصات تعمیم‌یافته  $\eta_r(t)$  به صورت رابطه (34) به دست می‌آید.

$$\eta_r(t) = \frac{[m(x) \omega^2 (\gamma_r^w Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) - \chi_r V_0 e^{j\omega t}]}{\omega_r^2 - \omega^2 + j 2 \xi_r \omega_r \omega} \quad (34)$$

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\xi_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) + \chi_r V(t) = f_r(t) \quad (48)$$

در رابطه (48) معرف تابع نیروی های مکانیکی است. با حل معادله مربوط به تابع پاسخ زمانی  $\eta_r(t)$  می‌توان ولتاژ دو سر مقاومت را برای یک تیر بایمورف به صورت (49) تعریف نمود:

$$V(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \phi_r (\gamma_r^W \gamma_0 + \gamma_r^{\theta} \theta_0) \cdot e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega}}{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \phi_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega} + \frac{1}{R_1} + j\omega \frac{C_p}{2}} \quad (49)$$

رابطه (49) به فرم سری نوشته شده است. این بدین منظور است که از آن میتوان برای محاسبه بی نهایت مد ارتعاشی استفاده نمود.

### 5- مدل سازی اجزاء محدود

در این تحقیق از نرم افزار تجاری کامسول<sup>1</sup> جهت صحنه سنجی نتایج تحلیلی استفاده شده است. برای مدل سازی در این پژوهش، از المان دستگاه های پیزوالکتریک<sup>2</sup> و همچنین المان مدار الکتریکی<sup>3</sup> استفاده شده است. هر گر در المان پیزوالکتریک دارای سه درجه آزادی انتقالی در سه جهت اصلی است. در مدل سازی از المان مدار الکتریکی جهت ایجاد یک مدار بسته متشکل از مقاومت الکتریکی به عنوان مصرف کننده انرژی استفاده شده است. جهت اعمال مقاومت الکتریکی باید سطوح بالا و پایین لایه پیزوالکتریک به عنوان الکترود تعریف شوند. در مدل سازی سه بعدی برای اعمال تحریک و جهت اعمال شرط مرزی یکسرگیردار به پایه تیر مرکب، پایه مدل به صورت یک جسم صلب در نظر گرفته می شود. با توجه به اینکه در نرم افزار کامسول امکان تعریف زاویه ییاف برای لایه های یک چندلایه کامپوزیتی وجود ندارد، لذا چندلایه به صورت یک تک لایه معادل با خواص ارتوتروپیک تعریف شده است. بدین منظور بعد از ایجاد هندسه تیر، جهت تعریف خواص مکانیکی چند لایه کامپوزیتی، خواص مکانیکی لایه ارتوتروپیکی معادل محاسبه می شوند. خواص مکانیکی معادل در اینجا براساس مرجع [23] محاسبه شده اند. همچنین در ادامه نیروی تحریک به جسم صلب اعمال گردیده است. مدل شبکه بندی شده در نرم افزار کامسول در شکل 4 نشان داده شده است.

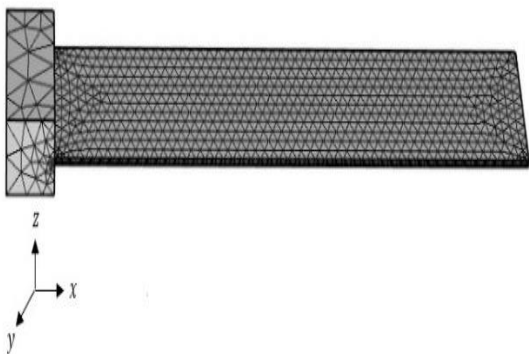


Fig. 4 finite element model

شکل 4 مدل اجزاء محدود

که در آن  $M_t$  جرم متمرکز انتهای تیر،  $m$  جرم سازه بر واحد طول و  $M(x, t)$  گشتاور خمشی می باشد که به صورت زیر با استفاده از تابع تنش در لایه های تیر کامپوزیتی قابل محاسبه می باشد [16]:

$$M(x, t) = -b \left( \int_{-h_p - h_s/2}^{-h_s/2} T_1^p y dy + \int_{-h_s/2}^{h_s/2} T_1^s y dy + \int_{h_s/2}^{h_p + h_s/2} T_1^p y dy \right) \quad (40)$$

این در حالی است که عبارت های  $\vartheta$  و  $E_t I$  از رابطه (41) و (42) حاصل می شوند:

$$\vartheta = \frac{e_{31} b}{2h_p} \left[ \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \frac{h_s^2}{4} \right] \quad (41)$$

$$E_t I = \frac{2b}{3} \left\{ E_x \frac{h_s^3}{8} + C_{11}^E \left[ \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right] \right\} \quad (42)$$

که در آن  $C_{11}^E$  معرف مدول سفتی لایه پیزوالکتریک است.

### 4-1- تابع شکل مود و ولتاژ خروجی

برای دانستن تابع شکل مود معادله (39) همانند روش استفاده شده در بخش 3 تابع شکل مود تحت اثر جرم متمرکز طبق رابطه (43) در نظر گرفته می شود [16]:

$$\phi_r(x) = C_r \left[ \cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x - \zeta_r \left( \sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (43)$$

که در آن:

$$\zeta_r = \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)}{\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r - \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r)} \quad (44)$$

جهت نرمال سازی تابع شکل مود با اعمال شرط عمود بودن مودها برای معادله (43) به دست می آید [16]:

$$\int_{x=0}^L m \phi_s(x) \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[ \frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = \delta_{rs} \quad (45)$$

$$\int_{x=0}^L E_t I \phi_s(x) \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} dx - \left[ \phi_s(x) E_t I \frac{d^3 \phi_r(x)}{dx^3} \right] + \left[ \frac{d\phi_s(x)}{dx} E_t I \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} \right] = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (46)$$

با جایگذاری تابع مکان در شرایط مرزی حاکم، معادله مشخصه سیستم به شکل زیر به دست می آید [16]:

$$1 + \cos \lambda_r \cosh \lambda_r + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_r \sinh \lambda_r - \sin \lambda_r \cosh \lambda_r) - \frac{\lambda_r^3 I_t}{mL^3} (\cosh \lambda_r \sin \lambda_r + \sinh \lambda_r \cos \lambda_r) + \frac{\lambda_r^4 M_t I_t}{m^2 L^4} \times (1 - \cos \lambda_r \cosh \lambda_r) = 0 \quad (47)$$

با قرار دادن تابع شکل مود در معادله حرکت و همچنین استفاده از شروط عمود بودن مودها و حل قسمت زمانی آن، معادله (48) به صورت زیر تعریف می گردد:

<sup>1</sup> comsol

<sup>2</sup> Piezoelectric Devices

<sup>3</sup> Electrical Circuit

6- نتایج و بحث

در مقاله حاضر، حل معادلات خطی حاکم بر تیر کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک به همراه شرط مرزی یکسر گیردار و جرم متمرکز با استفاده از روش جداسازی متغیرها انجام پذیرفت. کامپوزیت لایه‌ای در تیر مورد مطالعه از نوع کربن/اپوکسی و لایه پیزوالکتریک از نوع سرامیکی PZT5A [15] می‌باشد. خواص مکانیکی و ابعاد هندسی مدل در جداول 1 الی 3 نشان داده شده‌اند.

6-1- اعتبار سنجی تحلیلی

برای اعتبار سنجی روش تحلیلی ارائه شده جهت تعیین ولتاژ خروجی، نتایج تحلیلی یک تیر کامپوزیتی با سه نوع لایه‌چینی متداول و نتایج حاصل از نرم‌افزار اجزا محدود مقایسه خواهند شد. در این بخش نتایج برای سه نوع لایه‌چینی  $[0/90]_s$ ،  $[45/-45]_s$  و  $[0/\pm 45/90]_s$  و به ازای سه مود اول ارتعاشی ارائه و مقایسه شده‌اند. ابعاد تیر کامپوزیتی مطابق با جدول 1 انتخاب شده‌اند. مقاومت الکتریکی در نظر گرفته شده 1000 اهم و بازه فرکانس تحریک در محدوده 0 تا 100 هرتز می‌باشد. نتایج حاصل از روش تحلیلی و اجزا محدود برای لایه‌چینی  $[0/90]_s$  در جدول 4 نشان داده شده است.

با توجه به جدول 4 مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از مدل‌سازی اجزا محدود در مقایسه با روش تحلیلی ارائه شده دارای دقت قابل قبول و خطای نسبی کمتر از 9 درصد می‌باشند. خطای ایجاد شده میان پاسخ تحلیلی و عددی را می‌توان ناشی از تفاوت در مدلسازی دو بعدی حل تحلیلی و سه بعدی شبیه‌سازی عددی به علت برخی محدودیت المان‌های نرم‌افزار کامسول در برداشت انرژی، محدودیت تعریف چندلایه کامپوزیتی در نرم‌افزار و استفاده از لایه معادل و نحوه ایجاد و اعمال تحریک در ارتعاشات اجباری دانست. از طرفی می‌توان دریافت که بیشترین برداشت انرژی در مود اول ارتعاشی است زیرا دامنه ارتعاش در این مود، بیشترین مقدار خود را دارد. لذا با توجه به اهمیت این موضوع در ادامه صرفاً به بررسی میزان برداشت انرژی به ازای مود اول پرداخته می‌شود. در شکل‌های 5 و 6 نتایج خروجی برای دو چیدمان متداول  $[45/-45]_s$  و  $[0/\pm 45/90]_s$  قابل مشاهده می‌باشد.

جدول 3 خواص مکانیکی لایه پیزوالکتریک [15]

Table 3 The mechanical properties of piezoelectric layer [15]

مقدار	واحد	کمیت
7800	kg/m <sup>3</sup>	چگالی پیزوالکتریک ( $\rho_p$ )
66	GPa	مدول یانگ پیزوالکتریک ( $E_p$ )
$1.32 \times 10^{-8}$	F.m <sup>-1</sup>	ظرفیت الکتریکی ( $\epsilon_{33}^s$ )
-190	pm.V <sup>-1</sup>	ثابت پیزوالکتریک ( $d_{31}$ )

جدول 4 ماکزیمم ولتاژ خروجی نسبت به دامنه تحریک  $[V \cdot \text{sec}^2/m]$  به ازای 3 مود

اول ارتعاشی برای چیدمان  $[0/90]_s$  از روش‌های تحلیلی و عددی

Table 4 The Maximum output voltage ratio excitation amplitude  $[V \cdot \text{sec}^2/m]$  for first three vibrational modes for layup  $[0/90]_s$  by analytical and numerical methods

روش عددی	روش تحلیلی	مود ارتعاشی
0.823	0.88	مود اول
0.0064	0.007	مود دوم
$5.86 \times 10^{-4}$	$6.42 \times 10^{-4}$	مود سوم

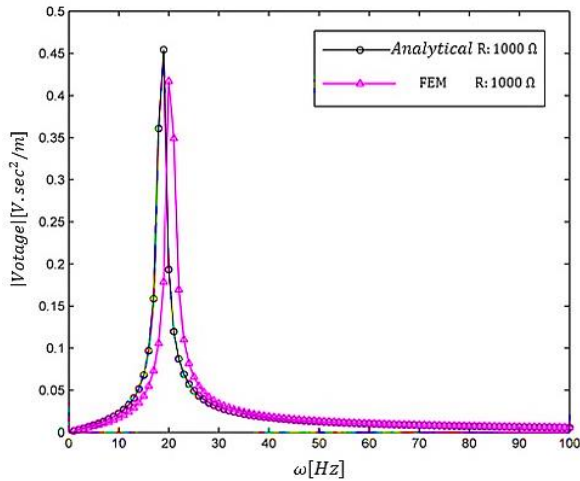


Fig. 5 The output voltage circuit based on frequency for  $[45/-45]_s$  layup

شکل 5 ولتاژ خروجی مدار برحسب فرکانس برای لایه‌چینی  $[45/-45]_s$

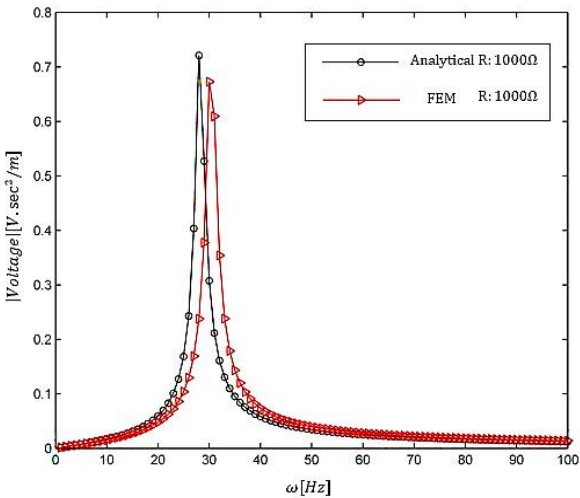


Fig. 6 The output voltage circuit based on frequency for  $[0/\pm 45/90]_s$  layup

شکل 6 ولتاژ خروجی مدار برحسب فرکانس برای لایه‌چینی  $[0/\pm 45/90]_s$

جدول 1 ابعاد هندسی

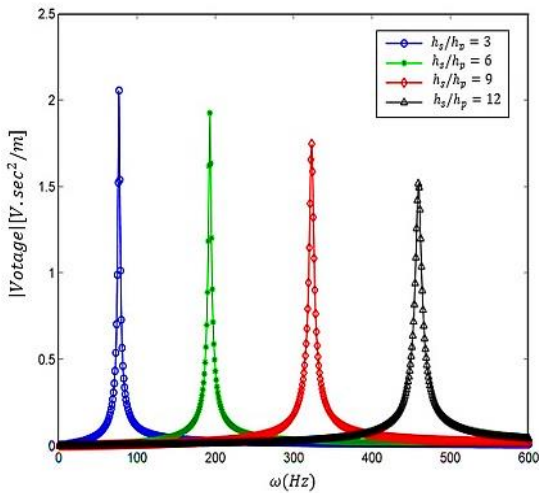
Table 1 Geometry dimensions

مقدار	واحد	کمیت
100	mm	طول تیر ( $L$ )
20	mm	عرض تیر ( $b$ )
0.5	mm	ضخامت تیر ( $h_s$ )
0.4	mm	ضخامت پیزوالکتریک ( $h_p$ )
7	g	جرم متمرکز ( $M_c$ )

جدول 2 خواص مکانیکی کامپوزیت کربن/اپوکسی [22]

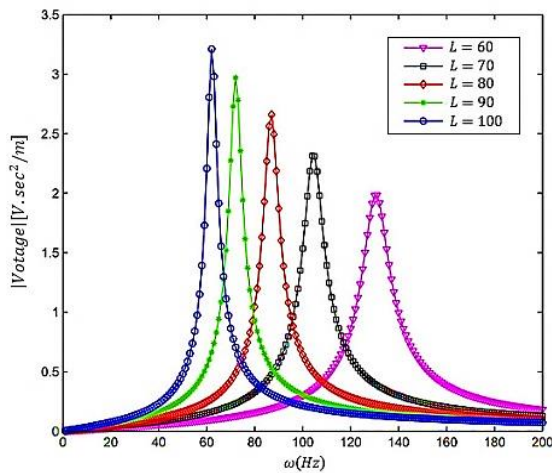
Table 2 The mechanical properties of Graphite/Epoxy composite [22]

مقدار	واحد	کمیت
1600	kg/m <sup>3</sup>	چگالی ( $\rho_s$ )
185	GPa	مدول یانگ طولی ( $E_1$ )
10.5	GPa	مدول یانگ عرضی ( $E_2$ )
0.28	-	نسبت پواسون



**Fig. 8** The effect layer thickness on the output voltage for  $[0/90]_s$  layup

شکل 8 تأثیر نسبت ضخامت لایه بر میزان ولتاژ خروجی برای لایه‌چینی  $[0/90]_s$



**Fig. 9** The effect of beam length [mm] on the output voltage for  $[0/90]_s$  layup

شکل 9 تأثیر طول تیر [mm] بر ولتاژ خروجی به دامنه تحریک برای لایه‌چینی  $[0/90]_s$

همان‌طور که از رابطه (37) انتظار می‌رود و با توجه به نتایج ارائه شده در شکل‌های 7 و 9، با افزایش مقاومت، افزایش ولتاژ خروجی از مدار نتیجه می‌شود. از طرفی با توجه به اینکه مدار الکتریکی در نظر گرفته شده بسته است لذا با افزایش مقاومت الکتریکی میزان جریان خروجی مدار کاهش می‌یابد.

### 3-6- نسبت میرایی و جرم متمرکز

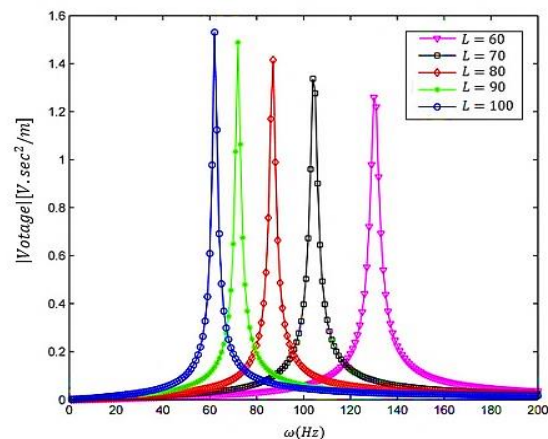
یکی از مهم‌ترین پارامترهای تأثیرگذار بر برداشت انرژی الکتریکی نسبت میرایی می‌باشد. در مواد کامپوزیتی نسبت میرایی وابسته به زاویه الیاف در نظر گرفته شده برای تیر کامپوزیتی می‌باشد. نسبت میرایی برای سازه‌های کامپوزیتی را می‌توان با استفاده از رابطه (33) محاسبه نمود. تأثیر افزایش این پارامتر در شکل 10 قابل مشاهده می‌باشد. مشاهده می‌شود که کاهش نسبت میرایی سازه باعث افزایش برداشت ولتاژ می‌گردد. در ادامه تأثیر افزایش جرم متمرکز بر برداشت انرژی مورد بررسی قرار گرفته است که نتایج آن در شکل 11 قابل مشاهده است.

همان‌طور که در شکل‌های 5 و 6 مشاهده می‌گردد، نتایج تحلیلی بدست آمده دارای دقت مناسبی در مقایسه با حل اجزا محدود می‌باشند. از مقایسه نتایج بدست آمده برای لایه‌چینی‌های فوق، می‌توان دریافت که دامنه ولتاژ خروجی در چیدمان لایه  $[0/90]_s$  نسبت به دو لایه‌چینی دیگر بیشتر است. دلیل این امر بالاتر بودن مدول الاستیسیته معادل در راستای  $x$  در این چیدمان و تأثیر آن بر ضریب میرایی مطابق رابطه (33) می‌باشد. از طرفی افزایش مدول الاستیسیته باعث افزایش فرکانس طبیعی سازه می‌گردد. پارامترهای متعددی بر میزان برداشت انرژی از سازه تأثیرگذار هستند. از جمله آن‌ها می‌توان به طول تیر، میزان جرم متمرکز، نسبت میرایی، نسبت ضخامت تیر به ضخامت لایه پیزوالکتریک، زاویه الیاف و نوع چیدمان لایه‌ها اشاره نمود. در ادامه با استفاده از حل تحلیلی، پارامترهای تأثیرگذار بر تیر کامپوزیتی با چیدمان  $[0/90]_s$  بررسی خواهند شد.

### 2-6- تأثیر مشخصات هندسی تیر

در شکل 7 نتایج خروجی برای تأثیر افزایش طول تیر کامپوزیتی بر برداشت انرژی به ازای ضخامت تیر  $h_s = 1\text{mm}$  با فرض ثابت بودن دیگر پارامترها ارائه شده است. شکل 7 تأثیر افزایش طول تیر یونی مورف بر ولتاژ خروجی از مدار را برای مود اول ارتعاشی نشان می‌دهد. با توجه به روند نمودار، مشاهده می‌شود که افزایش طول باعث افزایش برداشت انرژی الکتریکی می‌گردد. این نتیجه با توجه به رابطه (26) (تابع شکل مود) و رابطه 38 که معرف ولتاژ خروجی مدار است قابل توجیه است. از طرفی با استناد به رابطه (32) که بیان‌کننده فرکانس طبیعی سازه است؛ می‌توان مشاهده نمود که افزایش طول باعث کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌گردد. در ادامه نتایج خروجی به ازای نسبت‌های مختلف ضخامت تیر به ضخامت لایه پیزوالکتریک و تأثیر آن بر میزان برداشت انرژی در شکل 8 قابل مشاهده است.

در شکل 8 مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت تیر کامپوزیتی به ضخامت لایه پیزوالکتریک میزان برداشت انرژی کاهش می‌یابد. از طرفی برداشت انرژی برای مود اول ارتعاشی نیازمند تحریک ورودی بیشتری خواهد بود. در شکل 9 تأثیر افزایش مقاومت به 5000 اهم بر ولتاژ خروجی مدار برای چیدمان  $[0/90]_s$  ارائه گردیده است.



**Fig. 7** The effect of beam length [mm] on the output voltage for  $[0/90]_s$  layup

شکل 7 تأثیر طول تیر [mm] بر ولتاژ خروجی به دامنه تحریک برای لایه‌چینی  $[0/90]_s$



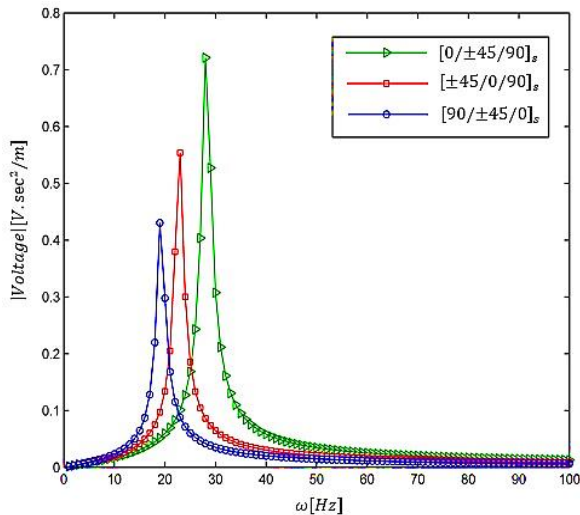


Fig. 12 The effect of layment on the energy harvesting amount for  $[0/\pm 45/90]_s$  layup.

شکل 12 تاثیر نوع چیدمان بر میزان برداشت انرژی برای حالت‌های مختلف لایه‌چینی  $[0/\pm 45/90]_s$

#### 5-6- برداشت انرژی از تیر بایمورف

در این بخش برداشت انرژی از تیر کامپوزیتی با خواص کرن/اپوکسی که دارای دو لایه پیزوالکتریک است، بررسی می‌شود. ابعاد هندسی در نظر گرفته شده جهت تحلیل در جدول 5 ارائه شده‌اند. در شکل 13 برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از روش تحلیلی، نتایج تحلیلی با نتایج عددی مقایسه شده‌اند.

جدول 5 ابعاد هندسی تیر بایمورف

Table 5 The geometry dimensions of the bimorph beam

مقدار	واحد	کمیت
60	mm	طول تیر ( $L$ )
30	mm	عرض تیر ( $b$ )
0.5	mm	ضخامت تیر ( $h_s$ )
0.1	mm	ضخامت هر لایه پیزوالکتریک ( $h_p$ )
7	g	جرم متمرکز ( $M_c$ )

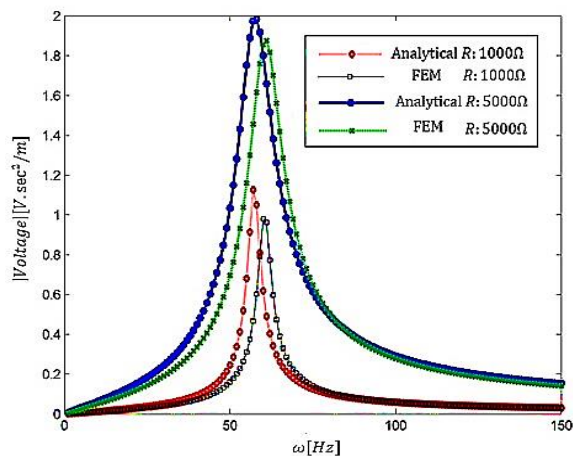


Fig. 13 The output voltage of bimorph composite beam with  $[0/90]_s$  layup

شکل 13: برداشت انرژی از تیر کامپوزیتی بایمورف با چیدمان  $[0/90]_s$

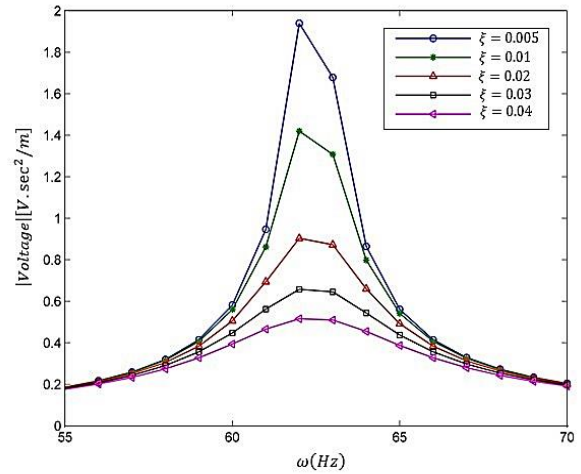


Fig.10 The effect of damping coefficient on output voltage for  $[0/90]_s$  layup

شکل 10 تاثیر ضریب میرایی بر ولتاژ خروجی برای لایه‌چینی  $[0/90]_s$

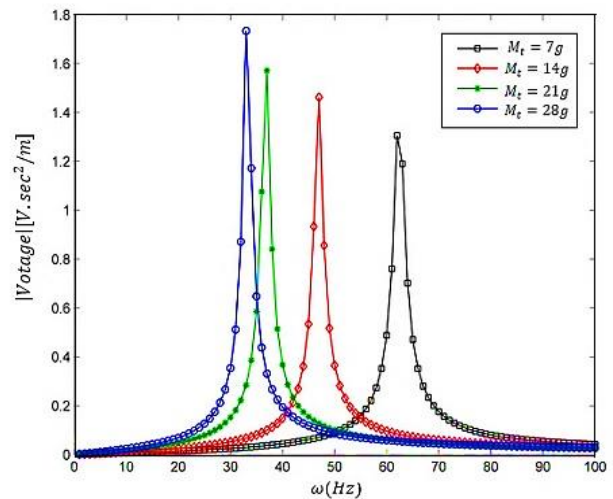
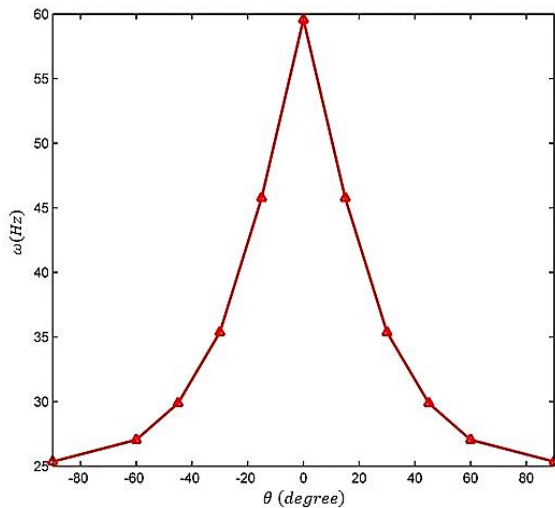


Fig. 11 The effect of concerted mass on the output voltage for  $[0/90]_s$  layup

شکل 11 تاثیر جرم متمرکز بر میزان ولتاژ خروجی برای لایه‌چینی  $[0/90]_s$  مطابق با شکل 11، مشاهده می‌شود که با افزایش میزان جرم متمرکز، برداشت انرژی بیشتری را با تحریک ورودی کمتر می‌توان حاصل نمود. از طرفی با توجه به رابطه (32) که معرف فرکانس طبیعی است ضریب بی‌بعد  $\lambda$  وابسته به میزان جرم متمرکز است؛ لذا افزایش جرم متمرکز باعث کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌گردد.

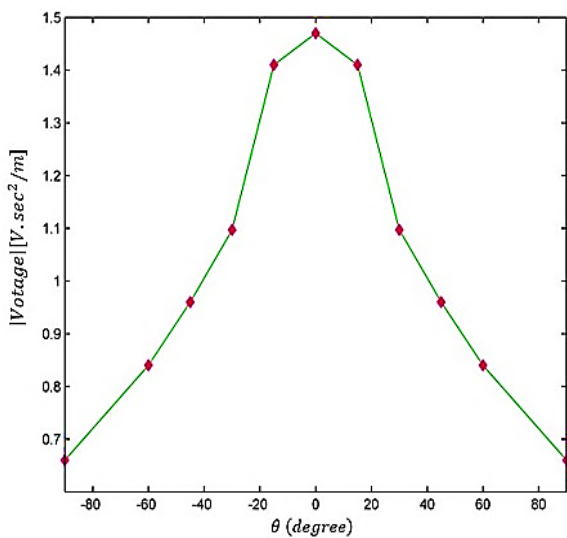
#### 4-6- تاثیر نوع لایه‌چینی

در این بخش تاثیر نوع لایه‌چینی بر برداشت انرژی از یک تیر کامپوزیتی بررسی شده است. چیدمان در نظر گرفته شده  $[0/\pm 45/90]_s$  می‌باشد. نتایج حاصل در شکل 12 قابل مشاهده است. در شکل 12 تاثیر نوع چیدمان و زاویه الیاف بر میزان برداشت انرژی خروجی مدار قابل مشاهده می‌باشد. مشاهده می‌شود که با تغییر نوع چیدمان به دلیل تاثیر مستقیم آن بر میزان مدول الاستیسیته معادل و نسبت میرایی سازه، میزان برداشت انرژی تغییر خواهد نمود. این نتیجه با توجه به روابط (9) و (33) قابل توجیه است.



**Fig. 15** The effect of fiber angle on the first natural frequency mode of a composite lamina

شکل 15 تأثیر زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی مد اول یک تک لایه کامپوزیتی



**Fig. 16** The effect of angle fiber on voltage harvested from a single of a composite lamina

شکل 16 تأثیر زاویه الیاف بر ولتاژ برداشت شده از یک تک لایه کامپوزیتی

با مشاهده نتایج خروجی برای ولتاژ و فرکانس طبیعی بر حسب زاویه الیاف در شکل 15 و 16 می‌توان دریافت که با استفاده از لایه صفر درجه در مقایسه با دیگر زاویه‌های الیاف، برداشت انرژی بیشتر خواهد داشت. این نتیجه به علت سفتی خمشی بیشتر لایه صفر درجه و کمتر بودن ضریب میرایی آن می‌باشد.

#### 7- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر یک روش تحلیلی برای تعیین میزان برداشت انرژی از یک تیر کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک تحت ارتعاشات آزاد توسعه داده شد و پارامترهای مختلف مؤثر بر میزان برداشت انرژی مطالعه شدند. برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از روش تحلیلی، برخی نتایج بدست آمده برای سه لایه‌چینی متداول با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مقایسه شده و تطابق خوبی میان آنها بدست آمد.

مطابق با نتایج بدست آمده یکی از تأثیرگذارترین پارامترها در برداشت انرژی نسبت میرایی سازه برای مودهای ارتعاشی می‌باشد. در این پژوهش دو

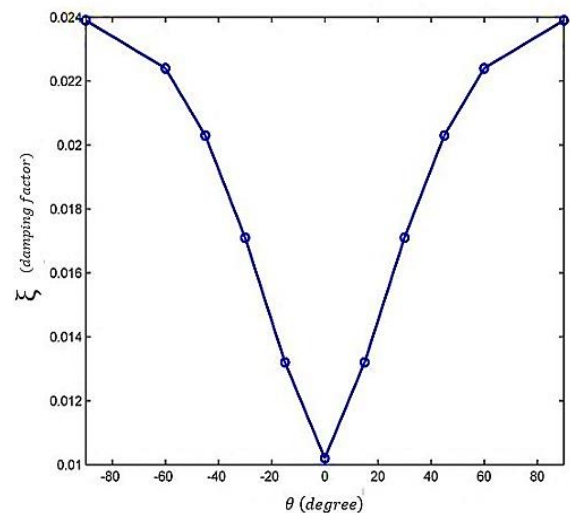
با توجه به شکل 13 می‌توان دریافت که روش تحلیلی در پیش‌بینی میزان برداشت انرژی از یک تیر کامپوزیتی بایمورف دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. همچنین مقایسه نتایج بدست آمده در جدول 4 و شکل 13، نشان می‌دهند که برای طول ثابت تیر علیرغم کاهش ضخامت لایه پیزوالکتریک تیر کامپوزیتی بایمورف در مقایسه با تیر یونی‌مورف، میزان برداشت انرژی افزایش یافته است. لازم به ذکر است که با توجه به شکل 8، با افزایش نسبت ضخامت تیر به ضخامت لایه پیزوالکتریک، میزان برداشت انرژی کاهش می‌یابد بنابراین با مقایسه نتایج بدست آمده نشان داده می‌شود که در تیر بایمورف برای طول تیر و ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک برابر، برداشت انرژی بیشتری را نسبت به تیر یونی‌مورف می‌توان انتظار داشت.

با توجه به اینکه در مواد کامپوزیتی بی‌نهایت چیدمان و زاویه الیاف وجود دارد، لذا جهت تعیین و پیدا نمودن زاویه الیاف که به ازای آن برداشت انرژی از سازه ماکزیمم یا مینیمم می‌گردد در بخش بعدی برداشت انرژی از یک تک لایه کامپوزیتی با زوایای مختلف مطالعه می‌شود.

#### 6-6- برداشت انرژی از یک تک لایه

با مشاهده نتایج بدست آمده برای تأثیر نوع لایه‌چینی می‌توان دریافت که زاویه الیاف بر روی ضریب میرایی سازه، سفتی خمشی، فرکانس طبیعی و در نهایت برداشت انرژی تأثیر به سزایی دارد. در شکل‌های 14 الی 16 به ترتیب تأثیر زاویه الیاف بر ضریب میرایی، فرکانس طبیعی و ماکزیمم ولتاژ خروجی به دامنه تحریک برای مود اول به ازای یک تک لایه با زاویه الیاف متفاوت نشان داده شده است.

شکل 14 تأثیر زاویه الیاف بر ضریب میرایی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که کمترین مقدار ضریب میرایی مختص زاویه صفر درجه و بیشترین آن به ازای استفاده از الیاف با زاویه 90 درجه می‌باشد. دلیل این موضوع وابستگی مدول الاستیسیته معادل تیر کامپوزیتی به زاویه الیاف و ضریب میرایی آن است. در ادامه تأثیر زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی و ولتاژ برای مود اول ارتعاشی ارائه شده است.



**Fig. 14** The effect of fiber orientation angle on the amount of damping coefficient of a composite lamina

شکل 14 تأثیر زاویه جهت‌گیری الیاف بر میزان ضریب میرایی یک تک‌لایه کامپوزیتی

- [8] Yazdi, D.N. Elvin, A.H. Andreopoulos, Y., "Green 's Function Method for Piezoelectric Energy Harvesting Beams", Sound and Vibration, Vol. 333, pp. 3092-3108, 2014.
- [9] Hosseini, S.M. Kalthori, H. Shooshtari, A. Mahmoodi, S.N., "Analytical Solution for Nonlinear Forced Response of a Viscoelastic Piezoelectric Cantilever Beam Resting on a Nonlinear Elastic Foundation to an External Harmonic Excitation," Composites Part B: Engineering, Vol. 67, pp. 464-471, 2014.
- [10] Abdelkefi, A. Nayfeh, A. Hajj, M., "Design of Piezo aeroelastic Energy Harvesters," Nonlinear Dynamics, Vol. 68, pp. 519-530, 2012.
- [11] Abdelkefi, A. Nayfeh, A. Hajj, M., "Enhancement of Power Harvesting from Piezo aeroelastic Systems," Nonlinear Dynamics, Vol. 68, pp. 531-541, 2012.
- [12] Eggborn, T. "Analytical Models to Predict Power Harvesting with Piezoelectric Materials", Master thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.
- [13] Ottman, G. K. Hofmann, H. F. Bhatt, A. C. Lesieutre, G. A. , "Adaptive Piezoelectric Energy Harvesting Circuit for Wireless Remote Power Supply," IEEE Transactions on power electronics, Vol. 17, pp. 669-676, 2002.
- [14] Azizi, M. R. Ghazavi, G. Rezaadeh, I. Ahmadian, C., "Tuning the Primary Resonances of a Micro Resonator, using Piezoelectric Actuation," Nonlinear Dynamics, Vol. 76, pp. 839-852, 2014.
- [15] Erturk, A. and D. J. Inman, "A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters," Vibration and Acoustics, Vol. 130, pp. 1435-1450, 2008.
- [16] Erturk, A. and Inman, D.J., "An Experimentally Validated Bimorph Cantilever Model for Piezoelectric Energy Harvesting from Base Excitations", Smart Materials and Structures, Vol. 18, pp. 2128-2146, 2009.
- [17] Barboni, R. Mannini, A. Fantini, E. Gaudenzi, P., "Optimal placement of PZT actuators for the control of beam dynamics," Smart Materials and Structures, Vol. 9, pp. 110-119, 2000.
- [18] Roundy, S. and Wright, P. K., "A Piezoelectric Vibration Based Generator for Wireless Electronics," Smart Materials and Structures, Vol. 13, pp. 1131-1143, 2004.
- [19] Lu, F. Lee, H. Lim, S., "Modeling and Analysis of Micro Piezoelectric Power Generators for Micro-Electromechanical-Systems Applications," Smart Materials and Structures, Vol. 13, pp. 57-69, 2003.
- [20] Mateu, L. and Moll, F., "Optimum Piezoelectric Bending Beam Structures for Energy Harvesting using Shoe Inserts," Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 16, pp. 835-845, 2005.
- [21] Kim, S. H. Ahn, J. H. Chung H.M. Kang, H.W., "Analysis of Piezoelectric Effects on Various Loading Conditions for Energy Harvesting in a Bridge System," Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 167, pp. 468-483, 2011.
- [22] Xing, Y. Liu, B., "New Exact Solutions for Free Vibrations of Thin Orthotropic Rectangular Plates," Composite Structures, Vol. 89, pp. 567-578, 2009.
- [23] Kaw, A. K., "Mechanics of composite materials", CRC press, pp.357-367, 2005.

نوع میرایی هوا (میرایی خارجی) و میرایی سازه (میرایی داخلی) در نظر گرفته شد. نسبت میرایی داخلی سازه در مواد کامپوزیتی وابسته به فرکانس طبیعی سازه، جرم سازه و از همه مهم‌تر میزان سفتی خمشی سازه می‌باشد. نتایج بیان شده نشان داد که استفاده از زاویه الیاف صفر درجه در لایه چینی باعث کاهش نسبت میرایی می‌گردد و به تبع آن برداشت انرژی از تیر کامپوزیتی افزایش می‌یابد. نتایج بدست آمده همچنین نشان می‌دهند که با در نظر گرفتن شرایط میرایی سازه‌ای و میرایی هوا:

- نحوه زاویه جهت‌گیری الیاف و لایه چینی تأثیر به‌سزایی بر میزان برداشت انرژی دارد. از نتایج بدست‌آمده می‌توان دریافت که اگر چیدمان لایه‌ها و زاویه الیاف آن‌ها به صورتی باشد که میزان مدول الاستیسیته معادل چندلایه در راستای بارگذاری کاهش یابد، به نسبت آن فرکانس طبیعی و میزان برداشت انرژی از سیستم نیز کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در صورت استفاده از لایه‌های با زاویه صفر درجه می‌توان برداشت انرژی را به مقدار زیادی بهبود داد.
- افزایش طول سازه باعث افزایش برداشت انرژی از لایه پیزوالکتریک می‌گردد؛ از طرفی فرکانس طبیعی سازه نیز کاهش خواهد یافت. مقدار افزایش برداشت انرژی با توجه به نتایج ارائه‌شده برای افزایش طول تیر از 60 میلی‌متر به 100 میلی‌متر، حدوداً 30 درصد است.
- افزایش مقاومت الکتریکی باعث افزایش ولتاژ خروجی و به تبع آن کاهش جریان عبوری از مدار می‌گردد. با مشاهده نتایج ارائه شده برای تیرهای یونی‌مورف و بایمورف، با افزایش مقاومت الکتریکی از 1000 به 5000 اهم، ولتاژ خروجی از مدار تقریباً دو برابر شده است.
- مطابق با نتایج بدست آمده، افزایش نسبت ضخامت تیر کامپوزیتی به لایه پیزوالکتریک ( $h_p/h_c$ ) باعث افزایش فرکانس طبیعی سازه و تا 30 درصد کاهش ولتاژ الکتریکی مدار می‌گردد. افزایش جرم متمرکز در انتهای تیر باعث افزایش برداشت انرژی می‌شود. از طرفی می‌توان با افزایش میزان جرم متمرکز برداشت انرژی را در محدوده پایین‌تری از تحریک ورودی انجام داد.

#### 8-مراجع

- [1] Kim, H.S. Kim, J.H. Kim, J., "A Review of Piezoelectric Energy Harvesting Based on Vibration," International Precision Engineering and Manufacturing, Vol. 12, pp. 1129-1141, 2011.
- [2] Vijaya, M., "Piezoelectric Materials and Devices," Applications in Engineering and Medical Sciences, CRC Press, 2012.
- [3] Mason, W.P. Jaffe, H., "Methods for Measuring Piezoelectric, Elastic, and Dielectric Coefficients of Crystals and Ceramics", Proceedings of the IRE., Vol. 42, pp.921-930, 1954.
- [4] Umeda, M. Nakamura, K. Ueha, S., "Analysis of the Transformation of Mechanical Impact Energy to Electric Energy using Piezoelectric Vibrator," Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 35, pp. 32-67, 1996.
- [5] Li, W. Liu, T. Hsiao, C., "A Miniature Generator using Piezoelectric Bender with Elastic Base," Mechatronics, Vol. 21, pp. 1183-1189, 2011.
- [6] Xie, X.D. Wu, N. Yuen, K.V. Wang, Q., "Energy Harvesting from High-Rise Buildings by a Piezoelectric Coupled Cantilever with a Proof Mass", International Engineering Science, Vol. 72, pp.98-106, 2013.
- [7] Kumar, A. Sharma, A. Kumar, R. Vaish, R. Chauhan, D., "Finite Element Analysis of Vibration Energy Harvesting using Lead-Free Piezoelectric Materials", Asian Ceramic Societies, Vol. 2, pp.138-143,2014.