



## ارایه‌ی یک رابطه‌ی صریح جهت تحلیل تنش صفحات دارای گشودگی شبه مربعی و تحت کشش با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه

علی عباس‌نیا<sup>1</sup>، محمد جعفری<sup>2</sup>، عباس روحانی<sup>3\*</sup>

1- دانشجو کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- استادیار، مهندسی مکانیک بیوسیستم، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

\* مشهد، کد پستی 05138796843، [arohani@um.ac.ir](mailto:arohani@um.ac.ir)

### اطلاعات مقاله

دریافت: 96/11/28

پذیرش: 97/2/12

### کلیدواژگان:

ضریب تمرکز تنش

گشودگی شبه مربعی

رگرسیون خطی چندگانه

روش متغیر مختلط

### چکیده

تمرکز تنش در ناپیوستگی‌های هندسی یکی از عوامل شکست سازه می‌باشد. امروزه با توجه به اینکه صفحات دارای گشودگی جزء جدانشدنی طراحی‌ها و قطعات می‌باشند؛ لذا مطالعه در مورد تمرکز تنش ناشی از این گشودگی‌ها جهت جلوگیری از شکست سازه ضروری است. از اینرو طراح برای ارائه‌ی یک طرح بایستی از مقدار تمرکز تنش در گشودگی آگاه باشد و با توجه به آن طرح را پایه ریزی کند. در این پژوهش سعی می‌شود به کمک روش رگرسیون، رابطه‌ای صریح جهت تخمین تمرکز تنش در صفحات ارتوتروپیک دارای گشودگی شبه مربعی، بر حسب خواص مکانیکی ماده و شعاع انحنای گوشه گشودگی ارائه گردد. این رابطه علاوه بر سهولت در استفاده و کنار گذاشتن فرآیند سخت و پیچیده‌ی حل تحلیلی، این امکان را برای طراح فراهم می‌آورد تا با استفاده از روش مدول مؤثر و یا اصل برهم‌نهی بولتزمن، تنش صفحات ویسکوالاستیک دارای گشودگی را نیز محاسبه کند. در ابتدا به کمک حل تحلیلی بر پایه روش لخنیتسکی، مقادیر تنش در بسیاری از صفحات کامپوزیتی دارای گشودگی شبه مربعی محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه، رابطه‌ای صریح برای ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی ارائه می‌گردد. نتایج بیان می‌کند که مدل رگرسیونی قادر به پیش‌بینی تنش محیطی با حداکثر خطای دو درصد می‌باشد.

## Presenting an explicit relation for analyzing stress of plates with quasi-square holes and under tension by using multiple linear regression

Ali Abbasnia<sup>1</sup>, Mohammad Jafari<sup>1</sup>, Abbas Rohani<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

2- Department of Bio Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran

\* P.O.B. 05138796843 Mashhad, Iran, [arohani@um.ac.ir](mailto:arohani@um.ac.ir)

### Keywords

Stress concentration factor

Quasi-square hole

Multiple linear regression

Complex variable method

### Abstract

Stress concentration on the geometric discontinuities is one of the factors of structure failure. Nowadays, plates with holes are inseparable parts of designs and pieces, therefore studying the stress concentration caused by these holes is necessary to prevent structure failure. So the designer for presenting a design must be aware of the stress concentration in the hole and according to it design the basis. In this research, by using the regression method and on the basis of the mechanical properties of the materials and the radius of curvature in the corner of the hole, we try to present an explicit relation for estimating stress concentration in the orthotropic plates with quasi-square hole. This relation, in addition to easing the use and bypassing the hard and complex process of analytical solution, provides designer with the opportunity to calculate stress of perforated viscoelastic plates by using the effective module method or Boltzmann's superposition principle. At first, with analytical solution based on the Lekhnitskii method the stress values are calculated in many composite plates with quasi-square hole. Then, by using multiple linear regression and on the grounds of mechanical properties, is given an explicit relation for the stress concentration coefficient. The results show that the multiple regression model is able to predict the circumferential stress with a maximum error of 2%.

### Please cite this article using:

Abbasnia, A. Jafari, M. and Rohani, A., "Presenting an explicit relation for analyzing stress of plates with quasi-square holes and under tension by using multiple linear regression", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 1, pp. 21-30, 2019.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

## 1- مقدمه

صفحات دارای نقص هندسی در کاربردهای صنعتی و سازه‌های متعددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تمرکز تنش ناشی از ناپیوستگی‌های هندسی یکی از عوامل اصلی شکست قطعات محسوب می‌شود. بنابراین برای طراحی بی‌نقص صفحات دارای گشودگی، بایستی اطلاعات دقیقی درباره‌ی توزیع تنش حول گشودگی در اختیار طراح قرار گیرد. افراد بیشماری در این زمینه فعالیت کرده‌اند اما با توجه به گستردگی مطالب و ارائه‌ی راهکارهای بهتر و آسانتر همچنان پژوهش در این زمینه ادامه دارد.

موشخیلشویلی [1] با تعیین ضریب تمرکز تنش در ورق حاوی گشودگی به کمک محاسبه‌ی دو تابع تحلیلی هولومورفیک، توانست روش متغیر مختلط را برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه کند. همچنین با ترکیب این روش با نگاشت همنا، او توانست در جسم الاستیک دو بعدی، توزیع تنش در ورق حاوی گشودگی‌های غیر دایره‌ای را نیز تحلیل کند. ساوین [2] با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، در مواد همسانگرد تمرکز تنش اطراف گشودگی با اشکال مختلف را ارائه داد و در مواد ناهمسانگرد، تنها گشودگی دایره‌ای و بیضوی را بررسی کرد. او تحلیل‌های خود را برای ورق نامحدود انجام داد. با بسط روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، حلی برای گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود ناهمسانگرد توسط لخنیتسکی [3] ارائه شد. لخنیتسکی از روش سری‌ها برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش استفاده کرد و محاسبات خود را در حالت تنش صفحه‌ای انجام داد.

رضایی پزند و جعفری [4-5] توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مطالعات خود را بر روی مواد همسانگرد و ارتوتروپیک حاوی گشودگی مرکزی انجام دادند. در نهایت حل تحلیلی خود را با روش اجزای محدود مقایسه کردند. ایشان در پژوهش خود نشان دادند که با انتخاب پارامترهای بهینه مؤثر بر تنش می‌توان به میزان قابل توجهی تمرکز تنش ناشی از گشودگی‌ها را کم کرد. آن‌ها همچنین در پژوهش دیگری [6] توزیع تنش صفحات فلزی دارای گشودگی‌های مختلف را نیز تحلیل کردند. ایشان صفحات را بی‌نهایت و تحت کشش در نظر گرفتند و تأثیر پارامترهای مختلفی همچون شعاع انحنای گشودگی، چرخش گشودگی، زاویه‌ی بار را بر توزیع تنش مورد بررسی قرار دادند.

ریاح و احمد [7] توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی با اشکال مختلف را مطالعه کردند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلف را بر توزیع تنش بررسی کردند. توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی شبه مربعی تحت کشش یکنواخت نیز توسط رضایی پزند و جعفری [8] انجام شد. آن‌ها با استفاده از حل لخنیتسکی توزیع تنش در صفحات حاوی گشودگی شبه مربعی را محاسبه کردند. آن‌ها نشان دادند در صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی شبه مربعی می‌توان توزیع تنش را با انتخاب پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش همچون: زاویه‌ی الیاف، زاویه‌ی بارگذاری، خواص مواد به شکل قابل توجهی کاهش داد. باتیستا [9] توانست تمرکز تنش حول گشودگی در صفحات نامحدود تحت بارگذاری یکنواخت در بی‌نهایت را تحلیل کند. او با اصلاح روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، توزیع تنش حول گشودگی‌های چندضلعی با هندسه‌های پیچیده در ورق نامحدود تحت بارگذاری کششی را محاسبه کرد. مطالعه بر روی تنش در ورقه‌های متقارن حاوی گشودگی مربعی و مستطیلی نیز توسط رائو و همکاران [10] صورت پذیرفت. آن‌ها گشودگی مربعی و مستطیلی را در ورقه‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی مورد مطالعه قرار دادند. ارکلیگ و یتر [11] نیز توانستند تأثیرات خمش را در صفحات کامپوزیتی

دارای گشودگی بررسی کنند. نتایج آن‌ها نشان داد که زاویه‌ی جهت‌گیری الیاف و ابعاد گشودگی مهمترین پارامترها برای بارگذاری خمشی می‌باشند. کومار و همکاران [12] تأثیر تمرکز تنش در صفحات حاوی گشودگی را مطالعه کردند. آن‌ها ورق را تحت تنش تک‌محوره بررسی کردند. تمرکز تنش در صفحات مستطیلی با سوراخ مربعی، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای توسط پاتیل و کومار [13] مورد تحلیل قرار گرفت. آن‌ها نتایج را با روش اجزای محدود مقایسه کردند. میائو و همکاران [14] با تعمیم اصل بوکرنر، تمرکز تنش اطراف گشودگی مربعی در ورق بی‌نهایت تحت تنش را بررسی کردند. جعفری و موسویان [15] طراحی بهینه‌ای از صفحات کامپوزیتی چند لایه حاوی گشودگی شبه مربعی ارائه دادند. آن‌ها در پژوهش خود با بسط روش لخنیتسکی توزیع تنش را محاسبه کردند و همچنین از الگوریتم‌های مختلف بهینه‌سازی مانند بهینه‌سازی انبوه ذرات (PSO)، الگوریتم ژنتیک (GA) و بهینه‌سازی حرکت مورچگان (ACO) برای دستیابی به این هدف بهره جستند. نتایج نشان داد که الگوریتم PSO زودتر از روش دیگر هماهنگ شده و عملکرد بهتری را دارد. بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش صفحه‌ی غیرهمسانگرد حاوی گشودگی مرکزی و تحت کشش توسط جعفری و رضایی پزند [16] صورت پذیرفت. آن‌ها با بسط حل تحلیلی لخنیتسکی به سایر گشودگی‌های منظم هندسی سعی کردند تأثیر پارامترهای متعددی از جمله جهت‌گیری بریدگی، شکل بریدگی، زاویه‌ی بار، زاویه‌ی فایبر و شعاع انحنای گشودگی بر توزیع تنش حول گشودگی ارائه دهند. آن‌ها نشان دادند که با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان به تمرکز تنشی کمتر از بریدگی دایره‌ای دست یافت. روحانی و جعفری [17] با استفاده از الگوریتم ژنتیک، پارامترهای بهینه‌ی مؤثر بر توزیع تنش صفحات ارتوتروپیک حاوی گشودگی شبه مربعی را تعیین کردند. آن‌ها با بررسی پارامترهای مختلف، نوع ماده را به‌عنوان عامل تأثیرگذار بر تنش کمینه معرفی کردند. تأثیر پارامترهای مختلف در تحلیل تنش صفحات همسانگرد و غیر همسانگرد دارای گشودگی چهارضلعی واقع در مرکز صفحه و تحت تنش برشی توسط جعفری و رحیمی پطردی [18] مورد بررسی قرار گرفت.

ملک‌زاده فرد و همکاران [19] پارامترهای بهینه مؤثر بر صفحه ارتوتروپیک حاوی گشودگی را با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی رقابت استعماری بررسی کردند. آن‌ها برای این منظور از بسط روش تحلیلی لخنیتسکی استفاده نموده و پارامترهایی همچون: زاویه الیاف، زاویه بار، شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه چرخش و جنس صفحه را مورد بررسی قرار دادند. تحلیل خرابی چندلایه‌های کامپوزیتی حاوی گشودگی مرکزی نیز توسط محمدی و همکاران [20] صورت پذیرفت. آن‌ها جهت تحلیل خرابی از مدل خرابی لادووز استفاده کردند. آن‌ها در پژوهش خود نشان دادند که با افزایش قطر سوراخ، استحکام چندلایه کاهش پیدا می‌کند. اسلامی فارسانی و همکاران [21] رفتار مکانیکی کامپوزیت‌های اپوکسی-الیاف کربن تحت بارگذاری عرضی را تحلیل کردند. آن‌ها با بهره‌گیری از سیستم خودترمیمی، موفق به ترمیم آسیب‌های ایجاد شده در یک سازه کامپوزیتی و همچنین میکروتکرک‌ها شدند. تأثیر افزودن نانولوله‌های کربنی چندجداره بر رفتار مکانیکی کامپوزیت‌های اپوکسی-الیاف بازالت تحت بارگذاری‌های کششی و خمشی نیز توسط اسلامی فارسانی و همکاران [22] به‌صورت تجربی مورد بررسی قرار گرفت.

با وجود تحقیقات متعدد صورت گرفته در این حوزه، اما ارائه‌ی یک رابطه‌ی صریح که ارتباط بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی در گشودگی شبه مربعی را مشخص کند؛ به چشم نمی‌خورد. با داشتن این رابطه، می‌توان با استفاده از اصل برهم‌نهی بولتزمن مسأله را به ورق ویسکوالاستیک بسط داد.

### 1-2- روش حل تحلیلی

برای بدست آوردن رابطه ریاضی صریح جهت تخمین ضریب تمرکز تنش صفحات دارای گشودگی بر حسب خواص مکانیکی مواد مختلف از روش حل تحلیلی موشخیلیشویلی استفاده شده است. مقادیر ضریب تمرکز تنش حاصل از حل تحلیلی به عنوان مقادیر واقعی یا متغیر وابسته در تحلیل‌های رگرسیونی استفاده می‌شود.

برای تحلیل گشودگی شبه مربعی، در ابتدا بایستی از یک تابع نگاشت  $z = x + sy$  استفاده کرد تا به کمک آن گشودگی شبه مربعی را به یک دایره به شعاع واحد تبدیل کرد. در واقع در تابع نگاشت برای حالت تنش صفحه‌ای  $R_{ij} = S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) که در آن  $R_{ij}$  اعضای ماتریس نرمی می‌باشد و تابعی از خواص مکانیکی مواد است. ابولفتوح [24] رابطه واحدی برای محاسبه  $x$  و  $y$  ارائه کرده است.

$$\begin{aligned} x &= \lambda(\cos\theta + w\cos(3\theta)) \\ y &= -\lambda(c\sin\theta - w\sin(3\theta)) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\lambda$  بزرگی،  $c$  کشیدگی و  $w$  معیار تیزی یا نرمی و انحنا گشودگی می‌باشد. پارامترهای مذکور بنا به هندسه‌ی گشودگی مقادیر مختلفی را اختیار می‌کنند. برای گشودگی شبه مربعی  $0 < w < 1/3$  است. با کاهش  $w$  گشودگی ملایم‌تر می‌شود؛ یعنی شعاع انحنا گوشه‌های گشودگی افزایش می‌یابد. این روند تا تبدیل گشودگی به دایره ( $w=0$ ) ادامه پیدا می‌کند.

محاسبه‌ی تابع تنش با توجه به تئوری الاستیسیته لخنیتسکی در اجسام ناهمسانگرد، وابسته به محاسبه‌ی ضرایب نامعلومی است. این ضرایب نامعلوم با توجه به شرایط مرزی حول گشودگی محاسبه می‌شوند.

اگر  $F(x,y)$  تابع تنش مربوط به مسأله‌ی حاضر باشد؛ با جایگذاری آن در معادله‌ی سازگاری، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم به صورت رابطه‌ی 2 حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} R_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ 2R_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

در واقع معادله‌ی 2، معادله‌ی سازگاری برای ماده‌ی غیرهمسان‌گرد می‌باشد که  $F(x,y)$  تابع تنش و  $R_{ij}$  با توجه به فرض تنش صفحه‌ای اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته می‌باشند. معادله‌ی 2 به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه‌ی اول  $D_k$  به صورت رابطه‌ی 3 ساده می‌شود (لخنیتسکی [3]):

$$\begin{aligned} D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \\ D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3)$$

$\mu_k$  ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی معادله‌ی 2 می‌باشند.

$$\begin{aligned} R_{11}\mu^4 - 2R_{16}\mu^3 + (2R_{12} + R_{66})\mu^2 + 2R_{26}\mu + \\ R_{22} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

معادله‌ی 4 در حالت کلی چهار ریشه‌ی موهومی دارد. لخنیتسکی اثبات کرد که این معادله‌ی مشخصه دارای ریشه‌های دو به دو مزدوج به صورت رابطه- 5 می‌باشند:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \\ \mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2 \end{aligned} \quad (5)$$

بیان کلی تابع تنش  $F$  با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه، به صورت رابطه‌ی 6 خواهد بود:

$$F(x, y) = 2Re[f_1(z_1) + f_2(z_2)] \quad (6)$$

$f_1$  و  $f_2$  توابع دلخواه از متغیر مختلط  $z_k = x + \mu_k y$  برای  $k=1, 2$  می‌باشند. با به‌کارگیری این رویکرد، مسأله محدود می‌شود به تعیین دو تابع

بنابراین در این پژوهش سعی شده به کمک روش رگرسیون، یک رابطه‌ی تحلیلی برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش گشودگی شبه مربعی در صفحات ارتوتروپیک ارائه شود. در ابتدا با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها همچون مدول الاستیک، مدول برشی و ضریب پواسون و به کمک حل تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط، ضریب تمرکز تنش برای تعداد متعددی از این مواد محاسبه شد. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی شبه مربعی رابطه‌ی صریح برای ضریب تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی و انحنا گشودگی ارائه شد. در این پژوهش صفحه تحت کشش در نظر گرفته شده و گشودگی در وسط ورق نامحدود واقع است.

### 2- مجموعه داده

در این مطالعه، سعی شده توزیع تنش در یک ورق ارتوتروپیک نامحدود حاوی گشودگی شبه مربعی مرکزی که تحت بارگذاری محوری قرار گرفته است؛ بررسی شود. تحلیل مسأله با فرض تنش صفحه‌ای صورت می‌گیرد و رفتار ورق در ناحیه‌ی الاستیک خطی بررسی می‌شود. شکل 1 صفحه نامحدود حاوی گشودگی شبه مربعی که تحت کشش قرار گرفته است را نشان می‌دهد. مواد مورد استفاده در این پژوهش شامل 118 ماده مختلف با خواص مکانیکی متفاوت می‌باشند. با استفاده از حل تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط و نگاشت هم‌نوا، ضریب تمرکز تنش صفحات دارای گشودگی شبه مربعی با خواص مکانیکی متفاوت محاسبه می‌شود. داده‌های به‌دست آمده جهت تحلیل رگرسیونی استفاده می‌شود. در جدول 1 خصوصیات مکانیکی برخی از مواد آورده شده است.

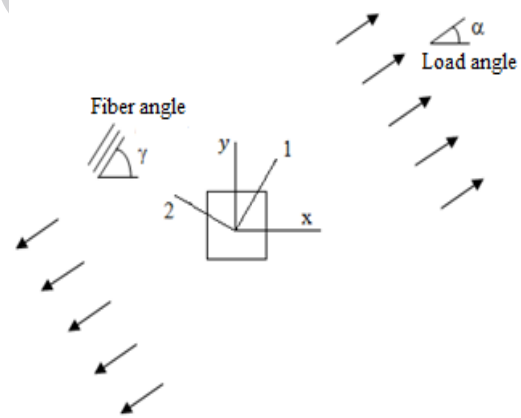


Fig. 1 A plate with a quasi-square cutout under uniaxial tension.

شکل 1 صفحه حاوی گشودگی شبه مربعی تحت کشش یک طرفه

جدول 1 خواص مکانیکی مواد [23]

Table 1 Mechanical properties of materials [23]

ماده	$E_1$ (Gpa)	$E_2$ (Gpa)	$G_{12}$ (Gpa)	$\nu_{12}$
ای-شیشه/اپوکسی	39.0	8.6	3.8	0.28
شیشه با الیاف بافته- شده/اپوکسی	29.7	29.7	5.3	0.17
برون/اپوکسی	201.0	21.7	5.4	0.17
کربن/اپوکسی	142.0	10.3	7.2	0.27
کولار/اپوکسی	87.0	5.5	2.2	0.34
فولاد	207.0	207	79	0.30

در جدول 2،  $\gamma$  ضریب تمرکز تنش محاسبه شده از روش تحلیلی،  $\hat{\gamma}$  پاسخ مدل،  $\bar{\gamma}$  میانگین ضریب تمرکز تنش می‌باشند. پارامترهای  $n$  و  $p$  نیز به ترتیب بیانگر تعداد داده‌ها و پارامترهای مدل هستند.

در نهایت برای ارزیابی مدل رگرسیون خطی چندگانه، کل داده‌ها به شکل تصادفی به دو گروه کالیبراسیون و تست تقسیم شدند. سهم 80 به 20 برای داده‌های کالیبراسیون و تست از کل مجموعه داده‌ها در نظر گرفته شد. روش  $k$ -fold نیز برای نشان دادن بهتر قابلیت مدل MLR به کار گرفته شد. در این روش با  $k=5$ ، پنج مجموعه داده مختلف برای کالیبراسیون و ارزیابی مدل ایجاد شد. با تکرار بیست بار این روش، 100 مجموعه داده‌ی مختلف ایجاد گردید. برای این مجموعه داده‌ها نمودار ضریب تبیین ( $R^2$ ) رسم شد و از بین آن‌ها بهترین مجموعه که بیشترین نزدیکی بین مقادیر کالیبراسیون و تست را دارا بودند؛ انتخاب شد. برای مجموعه‌ی انتخاب شده میانگین خطای مدل<sup>5</sup> و انحراف معیار خطای مدل<sup>6</sup> گزارش شد.

### 3- نتایج و بحث

#### 3-1- انتخاب متغیرها و شکل مدل

در جدول 3 میانگین خطای مدل و انحراف معیار خطاهای مدل برای سنجش مدل رگرسیون خطی چندگانه با چهار متغیر در سه مرحله کالیبراسیون، تست و کل آورده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده متغیرهای  $\frac{E_1}{G_{12}}$ ،  $\frac{E_2}{E_1}$  و  $v_{12}$  و  $w$  منجر به کمترین مقدار برای خطای مدل و انحراف معیار خطای مدل شدند. بنابراین جهت تخمین تمرکز تنش در گشودگی شبه مربعی از آن‌ها به عنوان بهترین متغیرهای مدل رگرسیون خطی چندگانه استفاده شد.

پس از آن تمامی مدل‌های رگرسیونی (روابط 8-11) مورد ارزیابی قرار گرفتند. ارزیابی‌ها توسط روش‌های گام به گام و  $k$ -fold صورت پذیرفت. میانگین و انحراف معیار مدل‌ها در جدول 4 آمده است. با توجه به نتایج جدول 4 مدل درجه دوم با میانگین درصد خطای کل 4.03 به عنوان بهترین مدل رگرسیون خطی چندگانه انتخاب شد. علاوه بر ارزیابی مدل‌ها، انواع تبدیلات نیز برای دستیابی به بهترین نتیجه، مورد ارزیابی قرار گرفت که نتایج آن در جدول 5 گزارش شده است.  $\ln$  با میانگین درصد خطای کل 1.3 به عنوان بهترین تبدیل انتخاب شد.

#### جدول 2 تجزیه واریانس مدل رگرسیونی

Table 2 Analysis of variance table for the regression model

متوسط	مجموع مربعات	درجه	منبع
مربعات		آزادی	تغییرات
$MS_R = \frac{SS_R}{p-1}$	$SS_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$p-1$	رگرسیون
$MS_E = \frac{SS_E}{n-p}$	$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n-p$	باقی مانده
-	$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	$n-1$	کل

$f_1$  و  $f_2$  به گونه‌ای که شرایط مرزی لبه‌ی گشودگی را ارضا کند. ازینرو تنش‌ها از رابطه‌ی 7 تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)] \\ \sigma_y &= 2Re[f_1'(z_1) + f_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2Re[\mu_1 f_1''(z_1) + \mu_2 f_2''(z_2)] \end{aligned} \quad (7)$$

در صورتی که از دستگاه مختصات دکارتی استفاده شود هر سه تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  در مرز گشودگی وجود خواهند داشت که در این صورت باید از تنش معادل فون میسر استفاده کرد. ازینرو با توجه به مرز گشودگی بهتر است تنش‌های فوق در دستگاه مختصات قطبی ارائه شوند. چون در این دستگاه در مرز گشودگی تنش‌های برشی و شعاعی ( $\tau_{r\theta} = \sigma_r = 0$ ) صفر خواهند بود و تنها تنش باقیمانده تنش محیطی ( $\sigma_\theta$ ) است. بنابراین ضریب تمرکز تنش به صورت بیشترین تنش محیطی اطراف گشودگی  $\sigma_{\theta max}$  به تنش اعمالی تعریف می‌شود.

#### 2-2- تحلیل رگرسیونی

به کمک تحلیل رگرسیون خطی چندگانه<sup>1</sup> کلیه ضرایب مدل رگرسیون و اثرات متقابل فاکتورها ارزیابی و تبیین می‌شود. برای پیش‌بینی ضریب تمرکز تنش از مدل‌های مختلف رگرسیون استفاده شده است. همان‌طور که بیان شد؛ ضریب تمرکز تنش در صفحات حاوی گشودگی شبه مربعی، تابعی از پنج متغیر  $E_1$ ،  $E_2$ ،  $G_{12}$ ،  $v_{12}$  و  $w$  می‌باشد. جهت بی‌بعد سازی متغیرها، خواص  $E_1$ ،  $E_2$  و  $G_{12}$  را با یکدیگر ترکیب شده است. بنابراین در نهایت چهار متغیر مستقل جهت تخمین ضریب تمرکز تنش به دست آمد. مدل‌های رگرسیونی شامل: مدل خطی<sup>2</sup>، مدل با اثرات متقابل<sup>3</sup> (2FI)، مدل درجه دوم<sup>4</sup> و مدل درجه دوم کاهش یافته<sup>5</sup> که این مدل‌ها برای چهار متغیر مستقل، به ترتیب در روابط 8 الی 11 بسط داده شده‌اند.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \varepsilon \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \\ &+ b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 \\ &+ b_{24} x_2 x_4 \\ &+ b_{34} x_3 x_4 + \varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \\ &+ b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 \\ &+ b_{24} x_2 x_4 \\ &+ b_{34} x_3 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + \varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{11} x_1^2 \\ &+ b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + \varepsilon \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط فوق  $\gamma$ ، متغیر وابسته،  $x_1$ - $x_4$  متغیرهای مستقل،  $b_0$ ، ضریب ثابت،  $b_1$ - $b_4$  اثرات خطی،  $b_{12}$ ،  $b_{13}$ ،  $b_{14}$ ،  $b_{23}$ ،  $b_{24}$  و  $b_{34}$  اثرات درجه دوم،  $b_{11}$ ،  $b_{22}$ ،  $b_{33}$  و  $b_{44}$  اثرات متقابل و  $\varepsilon$  نیز خطای مدل می‌باشند. علاوه بر بی‌بعد سازی متغیرهای مستقل، جهت بی‌بعد سازی تنش نیز از نسبت  $\frac{\sigma_{\theta max}}{\sigma_0}$  استفاده شد. این نسبت ضریب تمرکز تنش نامیده می‌شود که در آن  $\sigma_0$  تنش اعمالی در مرز ورق بوده و مقدار آن 1 Pa می‌باشد. در مدل رگرسیونی مجموع تغییرات کل (SST) به دو عامل مجموع مربعات رگرسیون (SSR) و مجموع مربعات خطا (SSE) تجزیه می‌شود. جدول 2 شکل کلی تجزیه واریانس مدل رگرسیون خطی چندگانه را نشان می‌دهد.

<sup>5</sup> Reduce Quadratic

<sup>6</sup> MAPE

<sup>7</sup> RMSE

<sup>1</sup> MLR

<sup>2</sup> Linear

<sup>3</sup> Two Factor Interaction

<sup>4</sup> Quadratic

جدول 3 میانگین و انحراف معیار خطای مدل رگرسیون خطی چندگانه به ازای متغیرهای مختلف

Table 3 Mean and standard deviation of MLR model for different variables

کل		تست		کالیبراسیون		متغیرها
RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	
2.30±0.00	17.06±0.18	2.32±0.11	17.16±1.23	2.30±0.02	17.03±0.27	$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, w$
2.73±0.00	18.92±0.25	2.74±0.17	19.04±1.74	2.72±0.04	18.89±0.32	$\frac{E_1}{E_2}, \frac{G_{12}}{E_1}, v_{12}, w$
2.17±0.00	16.59±0.20	2.17±0.12	16.66±1.34	2.16±0.03	16.57±0.29	$\frac{E_2}{E_1}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, w$
3.45±0.00	24.41±0.26	3.47±0.21	24.67±2.05	3.45±0.05	24.35±0.40	$\frac{E_2}{E_1}, \frac{G_{12}}{E_1}, v_{12}, w$
3.40±0.00	23.78±0.26	3.41±0.21	23.95±1.88	3.40±0.05	23.38±0.74	$\frac{E_2}{E_1}, \frac{E_2}{G_{12}}, v_{12}, w$
3.48±0.00	24.37±0.25	3.50±0.20	24.53±1.87	3.48±0.05	24.33±0.33	$\frac{E_2}{E_1}, \frac{G_{12}}{E_2}, v_{12}, w$

جدول 4 نتیجه ارزیابی مدل‌های مختلف رگرسیون خطی چندگانه

Table 4 The result of evaluating various MLR models

کل		تست		کالیبراسیون		مدل
RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	
2.17±0.00	16.59±0.20	2.17±0.12	16.66±1.34	2.16±0.03	16.57±0.29	خطی
1.33±0.00	9.10±0.08	1.34±0.05	9.20±0.36	1.33±0.01	9.08±0.09	اثرات متقابل
1.79±0.00	13.66±0.16	1.81±0.11	13.80±1.06	1.79±0.02	13.62±0.23	درجه دوم کاهش یافته
0.54±0.00	4.03±0.04	0.55±0.02	4.12±0.36	0.54±0.00	4.01±0.07	درجه دوم

جدول 5 نتایج ارزیابی تبدیلات مختلف مدل رگرسیون خطی چندگانه

Table 5 The result of conversions various MLR models

کل		تست		کالیبراسیون		مدل
RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	
0.21±0.00	1.30±0.01	0.22±0.01	1.33±0.07	0.21±0.00	1.30±0.02	$\ln(y) = f(x)$
1.43±0.00	10.72±0.13	1.45±0.09	10.93±0.92	1.43±0.02	10.68±0.21	$y = f(\ln(x))$
0.65±0.00	3.41±0.01	0.65±0.04	3.45±0.10	0.65±0.00	3.40±0.03	$\ln(y) = f(\ln(x))$
0.86±0.00	6.74±0.07	0.87±0.04	6.87±0.53	0.85±0.01	6.71±0.13	$y = f(\sqrt{x})$
0.49±0.00	2.98±0.02	0.49±0.03	3.03±0.16	0.49±0.00	2.97±0.04	$\sqrt{y} = f(\sqrt{x})$
1.19±0.00	3.06±0.07	1.20±0.22	3.11±0.24	1.19±0.04	3.04±0.09	$\frac{1}{y} = f(x)$
0.42±0.01	1.72±0.02	0.42±0.05	1.75±0.09	0.42±0.01	1.72±0.03	$\frac{1}{\sqrt{y}} = f(x)$

### 3-2- ارزیابی اعتبار و تجزیه واریانس مدل رگرسیون

همانطور که قبلاً بیان شد؛ با توجه به کارایی بهتر مدل درجه دوم از آن برای تخمین ضریب تمرکز تنش استفاده شد؛ که نتایج ارزیابی اعتبار این مدل در مرحله‌ی کالیبراسیون در شکل 2 مشاهده می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود، خطاهای مدل از توزیع نرمال تبعیت می‌کنند (شکل 2 (a و c)). شکل 2 (b) نیز نشان می‌دهد که، خطاها دارای توزیع تقریباً یکنواختی هستند. همچنین عدم وجود خود همبستگی بین خطاهای مدل رگرسیونی در شکل 2 (d) قابل مشاهده است. بنابراین با نتایج حاصل شده می‌توان به تخمین‌های مدل پیشنهاد شده اعتماد کرد.

برای مدل درجه دوم تحلیل واریانس<sup>1</sup> نیز صورت پذیرفت و نتایج آن در جدول 6 گزارش شده است. در روش رگرسیون گام به گام، عامل‌های مدل درجه دوم انتخاب شده در سطح معنی داری یک درصد معنی دار شده‌اند (p-value=0.00). لازم به ذکر است تنها عامل  $x_3x_4$  به دلیل  $p\text{-value} > 0.05$  از مدل حذف گردید. در جدول 6 مشاهده می‌شود که مقدار ضریب تبیین ( $R^2$ ) و ضریب تبیین تصحیح شده ( $R^2_{adj}$ ) مدل برابر با یکدیگر هستند. بنابراین می‌توان گفت که عامل‌های مدل درجه دوم جهت تخمین ضریب تمرکز تنش کفایت می‌کنند. همچنین مدل رگرسیونی توانسته 99.88 درصد تغییرات ضریب تمرکز تنش را به کمک عامل‌های مدل تبیین کند. ازینرو می‌توان به مدل پیشنهادی اعتماد کرد.

<sup>1</sup> ANOVA



شبه مربعی به همراه مقادیر p-value در دو مرحله‌ی کالیبراسیون و تست در جدول 7 گزارش شده است. اختلاف ناچیز نتایج بین ویژگی‌های آماری توصیفی مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست، حاکی از آن است که محاسبه ضرایب مدل رگرسیونی به خوبی انجام شده است. در ادامه نتایج حاصل از مدل ریاضی ارائه شده با برخی از نتایج ارائه شده در مقالات مختلف مقایسه شده است (جدول 8). خواص مکانیکی مواد مورد استفاده به شرح جدول 8 است.

همچنین در شکل 4 نیز تأثیر شعاع انحنای گوشه گشودگی بر تمرکز تنش در مطالعه‌ی حاضر و مراجع [4-5] برای مواد فوق مورد مقایسه قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از مدل حاضر با نتایج به دست آمده در سایر مقالات انطباق خوبی با یکدیگر دارند.

### 4-3- قابلیت تعمیم پذیری مدل رگرسیون

ابتدا برای ارزیابی مدل، 80 درصد تمام داده‌ها را به صورت تصادفی برای تخمین ضرایب مدل و 20 درصد باقی مانده را برای تست مدل استفاده شده است. در ادامه برای نشان دادن قابلیت تعمیم پذیری مدل رگرسیون اقدام به کاهش درصد مجموعه کالیبراسیون کرده و مقدار آن را تا 20 درصد کاهش داده می‌شود (جدول 9). در جدول 9 مشاهده می‌شود که مقادیر میانگین خطاهای مدل برای حالات مختلف تقریباً برابر هم بوده و حتی در کمترین حالت یعنی برای 20 درصد مجموعه داده‌های کالیبراسیون نیز برابر با 1.34 درصد می‌باشد؛ که تأییدی بر قابلیت تعمیم پذیری خوب مدل رگرسیونی است. با پایین بودن مقدار انحراف معیار خطاها نیز می‌توان بیان کرد که مدل از خاصیت پایداری پیش بینی خوبی برخوردار است.

با توجه به تمامی ارزیابی‌های صورت گرفته می‌توان مدل رگرسیونی را قابل اعتماد دانست. ازینرو مدل نهایی جهت محاسبه ضریب تمرکز تنش گشودگی شبه مربعی به صورت رابطه‌ی 12 ارائه می‌گردد.

$$\ln\left(\frac{\sigma_{\theta max}}{\sigma_0}\right) = 1.42 - 0.90x_1 + 0.02x_2 + 0.77x_3 + 4.15x_4 + 0.02x_1x_2 - 0.96x_1x_3 - 0.67x_1x_4 - 0.01x_2x_3 + 0.005x_2x_4 + 0.57x_1^2 - (9.54 * 10^{-5})x_2^2 - 0.64x_3^2 + 9.60x_4^2 \quad (12)$$

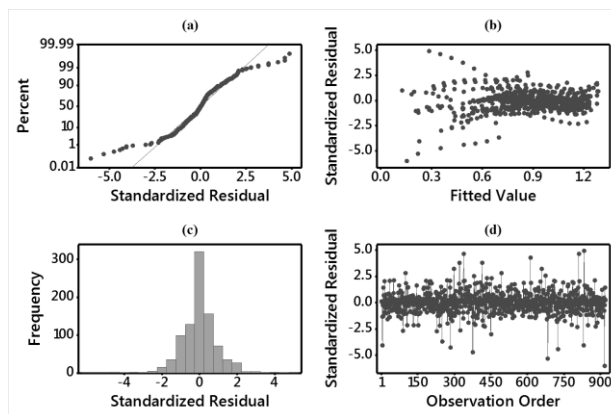


Fig. 2 The results of validation of the MLR regression model

شکل 2 نتایج ارزیابی اعتبار مدل رگرسیون خطی چندگانه

جدول 6 نتیجه تجزیه واریانس مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه

Table 6 The result of the variance analysis of the quadratic MLR models					
P-value	F-value	MS	SS	DF	
0.00	58629	18.69	243.00	13	مدل
0.00	275272	87.76	87.76	1	$x_1\left(\frac{E_2}{E_{11}}\right)$
0.00	92428	29.47	29.47	1	$x_2\left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)$
0.00	69	0.02	0.02	1	$x_3(v_{12})$
0.00	381975	121.78	121.78	1	$x_4(w)$
0.00	1090.41	0.35	0.35	1	$x_1x_2$
0.00	4.26	0.00	0.00	1	$x_1x_3$
0.00	592.92	0.19	0.19	1	$x_1x_4$
0.00	832.50	0.27	0.27	1	$x_2x_3$
0.00	41.70	0.01	0.01	1	$x_2x_4$
0.00	6208.61	1.98	1.98	1	$x_1^2$
0.00	1436.26	0.46	0.46	1	$x_2^2$
0.00	45.53	0.01	0.01	1	$x_3^2$
0.00	2188.23	0.70	0.70	1	$x_4^2$
		0.00	0.29	906	خطا
			243.29	919	کل
$R^2 = R_{adj}^2 = 99.88\%$					

### 3-3- سنجش آماری و پایداری مدل رگرسیون

مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش‌بینی شده در مراحل کالیبراسیون مدل و تست، برابر با 0.99 است. همچنین شیب و عرض از مبدأ خط رگرسیونی ما بین دو مجموعه داده تقریباً برابر با یک و نزدیک به صفر است. این نتایج در شکل 3 قابل مشاهده است.

آزمون‌های آماری t-test، فیشر و کولموگروف-اسمیرنو برای مقایسه‌ی میانگین<sup>1</sup>، واریانس<sup>2</sup> و توزیع آماری در سطح معنی داری 5 درصد استفاده شده است. ویژگی‌های آمار توصیفی شامل میانگین، واریانس، چولگی<sup>3</sup> و کشیدگی<sup>4</sup> دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش‌بینی شده از ضریب تمرکز تنش گشودگی

<sup>3</sup> Skewness  
<sup>4</sup> Kurtosis

<sup>1</sup> Mean  
<sup>2</sup> Variance

جدول 7 ارزیابی آماری عملکرد پیش بینی مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه

Table 7 Statistical evaluation of the prediction function of the quadratic MLR models

تست				کالیبراسیون				
Kur.	Ske.	Var.	Mean	Kur.	Ske.	Var.	Mean	
3.63	1.04	44.11	12.66	3.87	1.06	46.82	13.23	واقعی
3.60	1.04	43.99	12.67	3.84	1.05	46.71	13.23	پیش بینی شده
	0.99	0.98	0.99		0.99	0.97	0.99	p-value

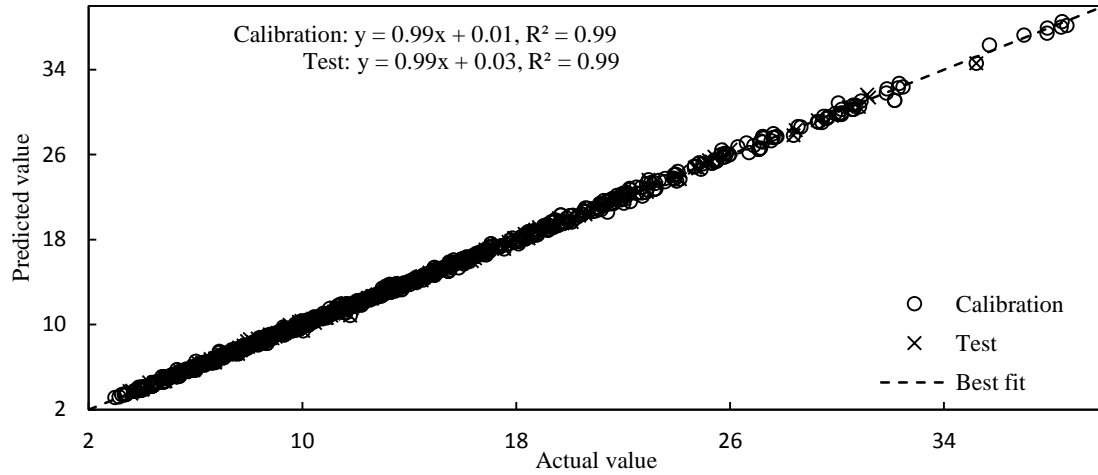


Fig. 3 Validation of the values of the realistic and predicted stress concentration coefficient by the MLR model

شکل 3 ارزیابی توافقی مقادیر ضریب تمرکز تنش واقعی و پیش بینی شده توسط مدل رگرسیون خطی چندگانه

جدول 8 مقایسه مقادیر تنش به دست آمده از مطالعه‌ی حاضر و مراجع [4,25-26]

مطالعه حاضر	مراجع [4,25-26]	w	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_1$ (GPa)	نام ماده
4.9799	4.9583	0.04	0.26	7	16.2	47.4	شیشه/اپوکسی
5.4895	5.4755	0.06	0.26	7	16.2	47.4	شیشه/اپوکسی
6.8501	6.7758	0.1	0.26	7	16.2	47.4	شیشه/اپوکسی
13.5698	13.4403	0.2	0.26	7	16.2	47.4	شیشه/اپوکسی
7.4300	7.4708	0.02	0.3	7.17	10.3	181	گرافیت/اپوکسی
9.0896	9.2576	0.06	0.3	7.17	10.3	181	گرافیت/اپوکسی
14.0902	15.0489	0.14	0.3	7.17	10.3	181	گرافیت/اپوکسی
16.9799	17.3321	0.16	0.3	7.17	10.3	181	گرافیت/اپوکسی

Table 8 Comparison of stress values in the present study and Ref. [4,25-26]

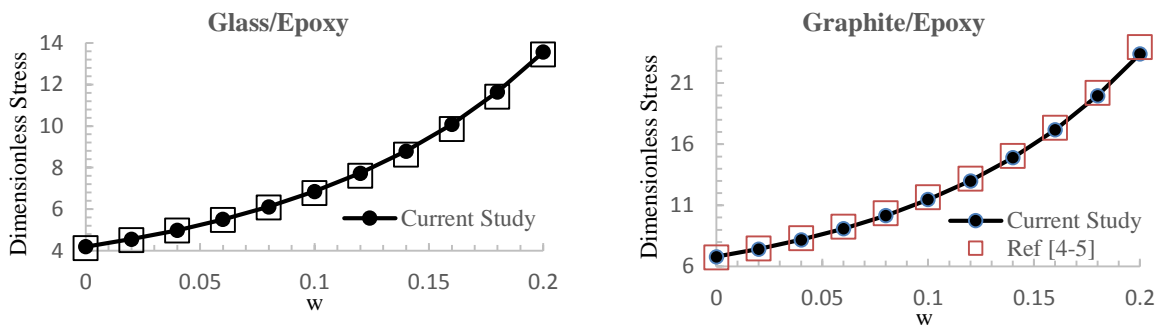


Fig. 4 Comparison effect of w on stress concentration in the present study and Ref. [4-5] in different materials

شکل 4 مقایسه‌ی تأثیر شعاع انحنای گشودگی بر تمرکز تنش مطالعه‌ی حاضر و مراجع [4-5] در مواد مختلف

جدول 9 ارزیابی قابلیت تعمیم پذیری مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه

Table 9 Evaluation of the MLR quadratic model's generalizability

کل		تست		کالیبراسیون		TS <sup>(*)</sup> (%)
MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	
1.31	0.22					100
1.30±0.01	0.21±0.00	1.33±0.07	0.22±0.01	1.30±0.02	0.21±0.00	$\bar{x} \pm std$
1.29	0.21	1.34	0.21	1.28	0.21	Best
1.31±0.02	0.21±0.00	1.33±0.04	0.22±0.01	1.29±0.04	0.21±0.00	$\bar{x} \pm std$
1.30	0.21	1.35	0.21	1.26	0.21	Best
1.31±0.02	0.21±0.00	1.34±0.03	0.22±0.01	1.28±0.06	0.21±0.01	$\bar{x} \pm std$
1.26	0.20	1.34	0.20	1.14	0.19	Best
1.34±0.04	0.22±0.01	1.37±0.04	0.23±0.01	1.23±0.12	0.20±0.02	$\bar{x} \pm std$
1.34	0.20	1.38	0.20	1.17	0.20	Best

(\*) اندازه‌ی داده‌های انتخاب شده در مرحله‌ی کالیبراسیون

#### 4- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش رگرسیون خطی چندگانه، رابطه‌ای صریح برای محاسبه‌ی تمرکز تنش در صفحات ارتوتروپیک حاوی گشودگی شبه مربعی برحسب خواص مکانیکی ارائه شد. ارزیابی‌های صورت گرفته به علاوه مقایسه نتایج مطالعه‌ی حاضر با حل سایر مقالات صحت و دقت مدل ریاضی ارائه شده را به اثبات رساند. این رابطه، برای صفحات نامحدود تحت کشش یک طرفه به دست آمد. برای این منظور ابتدا با استفاده از یک روش حل تحلیلی بر پایه‌ی روش متغیر مختلط، توزیع تنش برای تعداد زیادی از صفحات ارتوتروپیک دارای گشودگی شبه مربعی محاسبه شد؛ سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه، رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی ارائه شد.

میانگین درصد خطای کل 1.3 و همچنین برابری مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش بینی شده در مراحل کالیبراسیون مدل و تست (برابر با 0.99) حل پیشنهادی ارائه شده را قابل اعتماد می‌سازد. رابطه‌ی ارائه شده از روش رگرسیون این امکان را فراهم می‌آورد تا با استفاده از روش مدول مؤثر و یا اصل برهمه‌ی بولتزمن، تنش صفحات ویسکوالاستیک را نیز محاسبه کرد. همچنین با کنار گذاشتن روند طولانی حل تحلیلی، همراه با دقت بالا در زمان نیز صرفه جویی می‌کند.

#### 5- فهرست علائم

ضریب ثابت	$b_0$
اثرات درجه دوم	$b_{ij}$ ( $i = 1 - 4,$ $j = 2 - 4,$ $i \neq j$ )
اثرات متقابل	$b_i$ ( $i=1-4$ )
کشیدگی گشودگی	$c$
مدول الاستیک طولی ( $Nm^{-2}$ )	$E_1$
مدول الاستیک عرضی ( $Nm^{-2}$ )	$E_2$
مدول برشی ( $Nm^{-2}$ )	$G_{12}$
تابع تنش ( $Nm^{-2}$ )	$F$
تعداد داده‌ها	$n$
پارامترهای مدل	$p$
ماتریس نرمی	$R_{ij}$

$w$  انحنا‌ی گشودگی

$x_i$  ( $i=1-5$ ) متغیر مستقل

$y$  ضریب تمرکز تنش محاسبه شده از روش تحلیلی ( $Nm^{-2}$ )

$\hat{y}$  ضریب تمرکز تنش محاسبه شده توسط مدل ( $Nm^{-2}$ )

$\bar{y}$  میانگین ضریب تمرکز تنش ( $Nm^{-2}$ )

$v_{12}$  نسبت پواسون

$\sigma_0$  تنش اعمالی ( $Nm^{-2}$ )

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  اجزای تنش در مختصات کارتزین ( $Nm^{-2}$ )

$\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$  اجزای تنش در مختصات قطبی ( $Nm^{-2}$ )

$\epsilon$  خطای مدل

$z$  تابع نگاشت

$\lambda$  بزرگی گشودگی

#### 6- مراجع

- [1] Muskhelishvili, NI., "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity" Second ed., Netherlands, Noordhoff, 1962.
- [2] Savin, GN., "Stress Concentration Around Holes" Pergamon Press, New York, 1961.
- [3] Lekhnitskii, SG., "Anisotropic Plates" Second ed., Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968.
- [4] Rezaeepazhand, J. and Jafari, M., "Stress Analysis of Perforated Composite Plates" Composite Structures, Vol. 71, pp. 463-468, 2005.
- [5] Rezaeepazhand, J. and Jafari, M., "Stress Analysis of Composite Plates with Non-Circular Cutout" Key Engineering Materials, Vols. 385-387, pp. 365-368, 2008.
- [6] Rezaeepazhand, J. and Jafari, M., "Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout" International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 52, pp. 96-102, 2010.
- [7] Riyah, NK. and Ahmed, NE., "Stress Analysis of Composite Plates with Different Types of Cutouts" Anbar Journal of Engineering Sciences, Vol. 2, No. 1, pp. 11-29, 2009.
- [8] Rezaeepazhand, J. and Jafari, M., "Stress Analysis of Composite Plates with a Quasi-Square Cutout Subjected to Uniaxial Tension" Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 29, No. 13, pp. 2015-2026, 2010.
- [9] Batista, M., "On the Stress Concentration Around a Hole in an Infinite Plate Subject to a Uniform Load at Infinity" International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, pp. 254-261, 2011.



- [10] Rao, DKN. and Babu, MR. and Reddy, KRN. and Sunil D., "Stress Around Square and Rectangular Cutouts in Symmetric Laminates" Composite Structures, Vol. 92, pp. 2845–2859, 2010.
- [11] Erklig, A. and Yeter, E., "The Effects of Cutouts on Buckling Behavior of Composite Plates" Science and Engineering of Composite Materials, Vol. 19, pp. 323–330, 2012.
- [12] Kumar, MM. and Rajesh, S. and Yogesh, H. and Yeshaswini, BR., "Study on the Effect of Stress Concentration on Cutout Orientation of Plates with Various Cutouts and Bluntness" International Journal of Modern Engineering Research, Vol. 3, No. 3, pp. 1295-1303, 2013.
- [13] Patil, RD. and Kumar, B., "Stress Analysis of Perforated Tube Sheet Used for Pressure Vessel having Square Pitch Hole Pattern" International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, Vol. 4, No. 1, pp. 18899- 18906, 2015.
- [14] Miao, C. and Wei, Y. and Yan, X., "Stress Concentration of Periodic Collinear Square Holes in an Infinite Plate in Tension" Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 137, pp. 51201-51208, 2015.
- [15] Jafari, M. and Moussavian, M., "Optimum Design of Laminated Composite Plates Containing a Quasi-Square Cutout" Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 55, No. 1, pp. 141–154, 2016.
- [16] Jafari, M. and Rezaeepazhand, J., " Investigation of the Effect of Different Parameters on Stress Distribution of Non-Axial Plate with Central and Traction Shear" 17th Annual (International) Conference on Mechanical Engineering, 2009. (In Persian)
- [17] Rohani, A. and Jafari, M., "Determination of Optimum Parameters Effect on Stress Distribution in Orthotropic Plates with Quasi-Square Cut out Using Genetic Algorithm" Journal of Solid and Fluid Mechanics, Vol. 4, No. 4, pp. 87-99, 2015. (In Persian)
- [18] Jafari, M. and Rahimi-Petroudi, A., "A Study of the Effect of Various Parameters on the Stress Analysis of Isotropic and Anisotropic Plates Containing a Central Rectangular Hole Subjected to Shear Stress" Journal of Solid and Fluid Mechanics, Vol. 5, No. 1, pp. 101-114, 2015. (In Persian)
- [19] Malekzadeh Fard, K. and Bayati Chaleshtari, MH. and Jafari, M. and Pourmoayed, AR., "Determination of Optimal Parameters for Orthotropic Plates with Pentagonal Cutout by Imperialist Competitive Algorithm" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 2, pp. 161-170, 2017. (In Persian)
- [20] Mohammadi, B. and Kazemi, A. and Ghasemi, R., "Damage Analysis of Holed Composite Laminates Using Continuum Damage Mechanics" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 23-34, 2015. (In Persian)
- [21] Eslami-Farsani, R. and Sari, A. and Khosravi, H., "Mechanical Properties of Carbon Fibers/Epoxy Composite Containing Anhydride Self-Healing Material under Transverse Loading" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 3, pp. 285-290, 2016. (In Persian)
- [22] Eslami-Farsani, R. and Khosravi, H. and Ebrahimnezhad-Khaljiri, H., "An Experimental Study on Mechanical Properties of Epoxy/Basalt/Carbon Nanotube Composites under Tensile and Flexural Loadings" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 2, pp. 187-194, 2016. (In Persian)
- [23] I. M. Daniel, O. Ishai, "Engineering Mechanics of Composite Materials" pp. 34-35, 1994.
- [24] Abulfoutouh, NM., "Preliminary Design of Unstiffend Composite Shells" Symposium of 7th Technical Conference of ASC: 693-786, 1993.
- [25] Jafari, M., "Stress Analysis of Isotropic and Orthotropic Plates with the Non-Circular Opening under Uniaxial Tension, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering" Iran University of Ferdowsi, Mashhad, 2009. (In Persian)
- [26] Asmar, GH. and Jabbour, TG., "Stress Analysis of Anisotropic Plates Containing Rectangular Holes" International journal of mechanics and solids, Vol. 2, No. 1, pp. 59-84, 2007.