



## تعیین نرخ رهایی انرژی جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی در مواد مرکب لایه‌ای متقارن

محمد رحمانی<sup>1</sup>، امین فرخ آبادی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* صندوق پستی 14115-111، amin-farrokhi@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

دریافت: 96/12/15

پذیرش: 97/2/5

### چکیده

این مقاله با استفاده از روش برپایه انرژی به پیش‌بینی رشد جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی در مواد مرکب لایه‌ای متقارن با لایه چینی عمومی تحت تنش‌های داخل صفحه در حضور تنش‌های پسماند حرارتی پرداخته است. در این پژوهش بر روی دو حالت کلی نامقید و کرنش صفحه‌ای عمومی مطالعه می‌شود. برای هر دو حالت نامقید و کرنش صفحه‌ای عمومی ابتدا فرض بر وجود ترک ماتریسی می‌شود و پس از ایجاد جدایش بین لایه‌ای، افت خواص ناشی از ترک و جدایش محاسبه شده و ماتریس سفتی جدید کاهش یافته برای آن به دست می‌آید. سپس تعدادی ثوابت ترموالاستیک که فقط به خواص ماده‌ی تک لایه‌ها وابسته هستند و خود به نوعی جزو خواص ماده می‌باشند به دست آمده و پس از مرتبط ساختن درایه‌های ماتریس نرمی با یکدیگر توسط این ثوابت، معادله‌ای ساده برای انرژی آزاد گیبس به دست می‌آید. در ادامه با مشتق گرفتن از معادله‌ی انرژی آزاد گیبس نسبت به طول جدایش معادله‌ای بسیار ساده برای تعیین نرخ رهایی انرژی به دست می‌آید که اگر این انرژی از انرژی کرنشی بحرانی آن ماده برابر یا بیشتر باشد جدایش رشد می‌کند. به منظور صحت‌گذاری روابط توسعه داده شده در این مقاله از نرم افزار المان محدود انسیس استفاده شده است. نتایج بدست آمده نشان داد که تطابق قابل قبولی بین روش توسعه یافته و روش المان محدود در پیش‌بینی افت سفتی چندلایه‌های حاوی جاداشدگی وجود دارد.

**کلیدواژگان:**  
 چند لایه‌های متقارن  
 ترک ماتریسی  
 جدایش بین لایه‌ای  
 نرخ رهایی انرژی  
 انرژی کرنشی  
 انرژی کرنشی بحرانی

## Evaluation the energy release rate of induced delamination due to matrix cracking in symmetric composite laminate

Mohamad Rahmani, Amin Farrokhabadi\*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.Box: 14115-111, Tehran, Iran

### Keywords

Composites  
 Matrix cracks  
 Delamination  
 Energy releas rate  
 Strain energy  
 Critical strain energy

### Abstract

In this paper by implementing energy based theory, growth of induced delamination due to matrix cracking have been studied in symmetric composite laminates subjected to constant in-plane stresses and constant thermal stresses. Two unconstrained and generalized plane strain states have been analyzed here. Matrix cracking as a primary assumption has been supposed in both states and the impact of matrix cracking and delamination on the stiffness degradation is calculated. Afterwards some thermoelastic constants, which are only depended on, ply material properties of composite lamina are. Then by relating stiffness matrix elements using these constants, a simple equation due for Gibbs free energy acquired. By differentiating the Gibbs free energy equation for delamination length other simple equation was obtained to compute energy release rate. To verify the obtained results, ANSYS finite element software is used. The obtained results reveal that there is good agreement between the extended and FE approaches.

خوبی برای مطالعات در زمینه‌ی نقاط ضعف این مواد از قبیل ایجاد و رشد خرابی بوده است. مهمترین مکانیزم خرابی در مواد مرکب شامل جدایی بین الیاف و ماتریس، ترک خوردگی ماتریسی، جدایش بین لایه‌ای، پیچ خوردگی الیاف، کماتش الیاف و شکست الیاف می‌باشند. با این وجود در بیشتر موارد اولین مود خرابی در مواد مرکب، ترک خوردگی ماتریسی می‌باشند [1]. ترک

### 1- مقدمه

اهمیت و قابلیت‌های فراوان مواد مرکب بر کسی پوشیده نیست و در حوزه‌های متعددی، این مواد رقیب سرسختی برای مواد سنتی مانند فلزات محسوب می‌شوند. تمایل به استفاده حداکثری از قابلیت‌های مواد مرکب، همواره محرک

### Please cite this article using:

Rahmani, M. and Farrokhabadi, M., "Evaluation the energy release rate of induced delamination due to matrix cracking in symmetric composite laminate ", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 1, pp. 53-68, 2016.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

رشد پیشرونده خرابی ارائه کرد. وی از مدل ترکیبی الاستوپلاستیک آسیب دیده برای محاسبه‌ی پلاستیسیته و اثرات خرابی، و از آن برای نشان دادن پاسخ مکانیکی لایه‌ها و اجرای آن در کد آباکوس<sup>1</sup> استفاده کرد. مدل ناحیه چسبناک توسط المان‌های چسبناک برای شبیه سازی جدایش استفاده شد. مدل به خوبی خرابی جدایش بین لایه‌های را شبیه سازی کرد.

سپس در سال 2015 آقای جی‌آهن با همکاری آقای وانگ وو [5] با استفاده از روش پیشرفته المان محدود به پیش‌بینی شروع، انتشار و اندازه جدایش بین لایه‌ای پرداختند. آنها از تکنیک بسته شدن مجازی ترک<sup>2</sup> برای تحلیل جدایش بین لایه‌ای استفاده کردند. المانها به صورت دوبعدی تعریف شدند به صورتی که جابجایی در داخل صفحه متغیر و در راستای ضخامت ثابت بود و برای تعریف جابجایی از چند جمله‌ای لژاندر استفاده کردند.

### 1-2- روش تجربی

در سال 1991 آقای ابرین به همراه آقای هوپر [6] در یک کار تجربی یک چند لایه را تحت نیروی کششی شبه استاتیکی<sup>3</sup> قرار دادند و مشاهده کردند ترک‌های ماتریسی در لبه‌های آزاد ایجاد شده و جدایش بین لایه‌های نیز از نوک آن ترک‌ها ایجاد می‌شوند. سپس یک تحلیل المان محدود با استفاده از نیروی شبه استاتیکی سه بعدی برای محاسبه تنش مورد نیاز برای به وجود آمدن ترک ماتریسی در لایه‌های خارج از محور انجام دادند. آنها با استفاده از تئوری صفحه-ای چندلایه، تنش فشاری عرضی نرمال را محاسبه کردند. در نتایج المان محدود تنش تسلیم عرضی نرمال نزدیک لبه‌های آزاد بود. در نتایج تجربی نیز ترک ماتریسی در لایه‌های خارج از محور و در نزدیکی لبه‌های آزاد بود. آنها از این نتایج برای محاسبه جدایش بین لایه‌های محلی استفاده کردند.

سپس در سال 1994 آقایان تاکیدا و اگیهارا [7] به صورت تجربی و با انجام تست بارگذاری و باربرداری متناوب و اعمال کرنش، کاهش سختی و در نتیجه رشد جدایش بین لایه‌های را در یک چند لایه بدست آوردند. سپس از یک آنالیز ساده با روش تأخیر برش<sup>4</sup> که حاوی جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک است، برای بدست آوردن کاهش مدول یانگ<sup>5</sup> و نرخ رهایی انرژی مربوط به جدایش استفاده کردند. آنها نتایج تحلیلی را با نتایج تجربی مقایسه کردند. در پایان طول نهایی جدایش را با استفاده از نرخ رهایی انرژی و نتایج تجربی، به عنوان تابعی از اعمال کرنش چندلایه بدست آوردند.

بعد از آن در سال 2015 آقای زوبیلاگا و همکاران [8] یک کار تجربی با تمرکز بر وقوع ترک ماتریسی و جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی انجام دادند. آنها پنج لایه چینی مختلف از کربن اپوکسی<sup>6</sup> را تحت بار کششی آزمایش کردند که منجر به خرابی‌های مختلفی شد. نتایج حاصله با معیارهای شکستی که به تازگی توسعه داده شده اند مقایسه شد و به خوبی بر هم منطبق بودند.

### 1-3- روش تحلیلی

اولین بار در سال 1981 آقای ابرین [9] شروع و رشد جدایش لایه‌ای را به صورت کمی توضیح داد و روشی تحلیلی برای به دست آوردن نرخ رهایی انرژی حاصل از جدایش ارائه کرد. وی با قرار دادن چند لایه در برابر نیروی شبه استاتیکی یک قانون قوی بین انرژی کرنشی<sup>7</sup> و جدایش بین لایه‌های بدست آورد. او یک انرژی کرنشی بحرانی برای شروع جدایش بین لایه‌های مشخص کرد و

های ماتریسی که گاهی به آن‌ها ترک‌های عرضی نیز اطلاق می‌شود، نوعی خرابی درون لایه‌های هستند که در راستای ضخامت لایه و موازی الیاف رشد می‌کنند. این ترک‌ها در نتیجه عدم اتصال صحیح بین الیاف و ماتریس و از به هم گسستن آن‌ها، ایجاد می‌شوند. در اغلب حالات ترک ماتریسی باعث گسیختگی قطعه ساخته شده از مواد مرکب نمی‌شود و یک مود خرابی نهایی نیست و در بارهایی به مراتب پایین تر از بار نهایی قطعه اتفاق می‌افتد؛ ولی با کاهش خواص مکانیکی و حرارتی و همچنین تقویت و تحریک مودهای دیگر خرابی از قبیل جدایش بین لایه‌ای، شکست نهایی سازه را رقم می‌زند.

جدایش بین لایه‌ای، با کاهش سفتی سبب تغییر توزیع تنش در چندلایه می‌شود که چگونگی توزیع این تنش‌ها برای محاسبه مودهای خرابی و مقاومت چندلایه مورد نیاز هستند. پدیده‌های ذکر شده در اثر جدایش بین لایه‌ای در کنار پیچیدگی ذاتی این پدیده نیاز به شناخت دقیق و پیش‌بینی به روز آن را آشکارتر می‌سازد.

مطالعات متنوعی برای بررسی خرابی جدایش بین لایه‌ای در چندلایه‌های کامپوزیتی ارائه شده است که انبوه مطالعات موفق و مورد استقبال در زمینه بررسی جدایش بین لایه‌ای را می‌توان به صورت عمومی به سه گروه مطالعات تجربی، مطالعات تحلیلی در مقیاس ماکرو و مطالعات عددی تقسیم نمود. در روش عددی مدلسازی و تحلیل کامپوزیتها عمدتاً با استفاده از روش اجزاء محدود انجام می‌شود. روش تجربی مبتنی بر انجام تست می‌باشد که بر روی نمونه‌های آزمایشگاهی انجام می‌شود. محدودیت در تعداد نمونه با هندسه و لایه چینی‌های مختلف، محدودیت در اعمال انواع بارگذاری، عدم امکان استفاده از نتایج بدست آمده برای سایر نمونه‌ها و هزینه نسبتاً بالا از معایب این روش می‌باشد. اما روش تحلیلی که روش مورد نظر این مقاله می‌باشد بسیار گسترده‌تر می‌باشد و زیرشاخه‌های فراوانی از جمله روش تأخیر برش، روش انتقال تنش و روش تغییرات را دارد.

### 1-1- روش عددی

در سال 1999 آقایان کامانهو و متیو [1] یک مدل المان محدود سه‌بعدی برای شبیه سازی اتصال بین لایه‌ها در چندلایه‌ها ارائه دادند. آنها از نتایج بدست آمده از المان محدود استفاده کرده و یک نمودار تقریبی برای تعیین تنش در راستای ضخامت بدست آوردند و از این نمودار برای تعیین تنش بین محل تماس لایه‌ها استفاده کردند. پس از بدست آوردن تنش محل تماس لایه‌ها و با توجه به معیار جدایش بین لایه‌ای، شروع جدایش را پیش‌بینی کردند.

سپس در سال 2007 آقایان ویمر و پیترمن [2] یک مدل نیمه تحلیلی-نیمه عددی برای شبیه سازی جدایش بین لایه‌های ارائه دادند. آنها با ترکیبی از معیار رشد ترک و روش المان محدود نوعی حل غیر خطی برای شروع و رشد جدایش بین لایه‌های بدست آوردند.

پس از آن در سال 2008 آقای بلازکو و همکاران [3] با استفاده از روش المان مرزی تنش را در نوک ترک‌های عرضی موجود در لایه‌های 90 درجه و همچنین هنگامی که این ترک‌ها به سطح تماس با لایه‌های 0 درجه می‌رسند را محاسبه کردند. آنها نتایج حاصله را با نتایج حاصله از مکانیک شکست مقایسه کردند.

بعدها در سال 2013 آقای جینگ فن‌چن [4] یک مدل المان محدود شامل ترک ماتریسی و جدایش ناشی از ترک ماتریسی برای تجزیه و تحلیل

<sup>5</sup> Young's modulus

<sup>6</sup> Carbon epoxy

<sup>7</sup> Strain energy

<sup>1</sup> ABAQUS

<sup>2</sup> Virtual crack closure technic (VCCT)

<sup>3</sup> Quasi-static

<sup>4</sup> Shear-lag

سپس از آن برای به دست آوردن شروع و رشد جدایش بین لایه‌های استفاده کرد.

سپس در سال 1985 آقای ابرین [10] توانست معادله‌ای برای محاسبه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی مربوط به جدایش بین لایه‌های محلی بدست آورد. او انرژی کرنشی بحرانی را برای جدایش در چندلایه‌ی گرافیت اپوکسی اندازه‌گیری کرده و از آن برای بدست آوردن جدایش محلی در چندلایه‌های مذکور استفاده کرد. سپس یک تکنیک ساده برای بدست آوردن مقدار کرنش نزدیک جدایش ارائه داد. او تأثیر جدایش لبه و جدایش ناشی از ترک را بر روی سفتی و سختی چند لایه مقایسه کرد.

پس از آن در سال 1992 آقای ابرین [11] با استفاده از تئوری صفحه‌های چندلایه‌ها، و در حضور تنش‌های پسماند حرارتی و رطوبتی در یک چندلایه تحت نیروی تک محوری پیدایش ترک ماتریسی را محاسبه کرد. سپس نرخ رهایی انرژی را برای شروع جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی در لایه‌های خارج از محور محاسبه کرد. همچنین وی از نتایج گسترش یافته برای بدست آوردن سهم نسبی تنش‌های مکانیکی، حرارتی و رطوبتی پسماند در نرخ رهایی انرژی استفاده کرد.

همچنین در سال 1992 آقای نارین و آقای هو [12] با استفاده از روش تغییرات، ترک‌های ریز را در یک چندلایه به دست آورده و جدایش لایه‌های ناشی از آن را در لایه‌هایی که زاویه 90 درجه با راستای نیرو دارند، محاسبه کردند. آنها از آنالیز تنش دو بعدی برای بدست آوردن نرخ رهایی انرژی کرنشی کل، برای تغییرات سفتی و ضریب انبساط حرارتی<sup>1</sup> طولی استفاده کردند. سپس از این نتایج برای محاسبه نرخ رهایی انرژی برای شروع و رشد جدایش بین لایه‌های استفاده کردند. مشاهدات تجربی تمامی نتایج بدست آمده را تایید می‌کردند.

در سال 2001 آقای کاشتالیان و همکاران [13] جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی را بررسی کردند. آنها از روش تأخیر برش دوبعدی برای تعیین تنش‌های نوک ترک و جدایش استفاده کردند. برای تعیین نرخ رهایی انرژی کرنشی مربوط به جدایش، لایه‌های آسیب دیده با لایه‌های بدون آسیب با خواص کاهش یافته جایگزین شدند.

در سال 2011 فرخ آبادی و همکاران [14] یک روش میکرومکانیک جدید (از روش تغییرات) برای تحلیل ترک ماتریسی و جدایش بین لایه‌های ناشی از آن ارائه کردند. آنها یک سلول واحد که هم دارای ترک ماتریسی و جدایش باشد در نظر گرفتند، سپس معادلاتی برای توزیع تنش و جابجایی به دست آوردند و از آنها برای تعیین نرخ رهایی انرژی کرنشی استفاده کردند، که به نتایج خوبی رسیدند.

در سال 2012 آقای مک‌کارتنی و همکاران [15] دریچه‌های جدید رو به بررسی جدایش بین لایه‌های در چندلایه‌های کامپوزیتی گشودند. آنها با استفاده از روش تعادل انرژی و تکنیک بسته ماندن ترک در چندلایه‌های متعامد، رشد جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی را تحت بارگذاری پیشرونده به صورت ترکیبی از نیروی دو محوره و تنش پسماند حرارتی، پیش‌بینی کردند. آنها فرضیاتی از قبیل ثابت بودن تنش و دما در طول رشد جدایش بین لایه‌های و میل کردن جدایش به سمت بی‌نهایت، را در نظر گرفتند. بررسی آنها در 4 شرایط گوناگون به شرح زیر انجام شد:

تحلیل برای شرایط نامقید<sup>2</sup>

تحلیل برای شرایط کرنش صفحه‌ای عمومی<sup>3</sup>

تحلیل برای شرایط مقید<sup>4</sup>

تحلیل با روش المان مرزی<sup>5</sup>

مک‌کارتنی از نتایج مقاله سال 2008 خود [3] برای روش المان مرزی استفاده کرد. او همچنین نظریه‌ای بر اساس انرژی برای جدایش بین لایه‌های مطرح کرد و نرخ رهایی انرژی را برای جدایش بدست آورد. پس از اتمام بررسی و مقایسه نتایج حاصله از 4 روش مختلف و نتیجه به دست آمده از معادله‌ای که در سال 1985 آقای ابرین [10] بدست آورده بود مشاهده کرد که تمامی نتایج همدیگر را تأیید می‌کنند و به هم نزدیک هستند.

در سال 2014 آقای زوبیلاگا و همکاران [16] یک معیار شکست برای جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی ارائه کردند. این معیار شکست در چهارچوب قواعد مکانیک شکست ارائه شده و به مقایسه‌ی نرخ رهایی انرژی جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی و سفتی شکست صفحه اتصال پرداخته است. بارگذاری شکست به دست آمده به خوبی با نتایج تجربی آزمایشگاهی منطبق بوده است. بنابراین معرفی این معیار شکست در مجموعه‌ی معیارهای شکست برای طراحی کامپوزیت‌ها مفید می‌باشد.

در سال 2015 آقایان کاشتالیان و سوتیس [17] مدل تحلیلی ترکی که شامل جدایش باشد را به صورت دوبعدی مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش تأخیر برش دوبعدی برای تعیین تنش جهت بدست آوردن نرخ رهایی انرژی کرنشی مربوط به جدایش بین لایه‌های استفاده کردند، همچنین تأثیر این جدایش را بر روی سفتی چند لایه بدست آوردند.

#### 1-4- روش انرژی

روشهای برپایه انرژی، یکی از روش‌های شاخص در میان مطالعات تحلیلی است. با وجود این، ارتباط مستقیم بین دقت در میدانهای تنش مفروض و پیچیدگی ریاضی حاصل از آن باعث شده است که این روش اغلب برای لایه چینی‌های ساده و متعامد توسعه یابد.

هدف اصلی پژوهش حاضر، توسعه ابزاری توانمند و دقیق در تحلیل پیچیده‌تر جدایش بین لایه‌های است که قابلیت تخمین شروع جدایش ناشی از ترک ماتریسی را در سازه‌هایی با لایه چینی متقارن تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای داشته باشد. برای بررسی شروع جدایش ناشی از ترک ماتریسی در چهارلایه‌ی متقارن تحت بارگذاری ثابت داخل صفحه‌ای، چارچوبی عمومی و دقیق که برای اولین بار توسط مک‌کارتنی [15] ارائه شده، مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از میدان تنش محاسبه شده، سفتی طولی برای چندلایه ترک خورده شده قابل محاسبه است.

لازم به ذکر است که در این پژوهش سعی شده است هم به بررسی نرخ رهایی انرژی و هم بررسی افت سفتی طولی برای چندلایه‌های نامتعامد پرداخته شود. روش انجام کار به این صورت است که یک حالت خاص در نظر گرفته می‌شود که در آن توزیع ترک ماتریسی یکنواختی با دانسیته ترک پایین وجود دارد که ترک کاملاً در عرض پیشروی کرده است. به علاوه نوک پیشرونده جدایش بین لایه‌های به اندازه کافی از نوک ترک ماتریسی دور شده است، بنابراین جدایش با ترک ماتریسی تعامل نخواهد داشت.

<sup>4</sup> Constrained

<sup>5</sup> boundary element method (BEM)

<sup>1</sup> Thermal expansion coefficient

<sup>2</sup> Unconstrained

<sup>3</sup> Generalised plane strain

می‌کند. در واقع رشد جدایش در هر سطح تماس به اندازه‌ی  $2c$  می‌باشد. سطح بالا و پایین چندلایه بدون تنش می‌باشد و دما که با  $T$  نشان داده شده در همه جا یکسان است و در طول زمان ثابت می‌باشد. دو حالت نامقید و کرنش صفحه-ای عمومی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در حالت نامقید چندلایه در راستای عرضی و برشی آزاد می‌باشد و می‌تواند به اندازه کافی جابجا شود لذا تنش عرضی و برشی چندلایه صفر می‌باشد. همانگونه که در شکل 2 مشاهده می‌کنید این حالت مربوط به نواحی می‌باشد که نزدیک لبه‌های آزاد است.

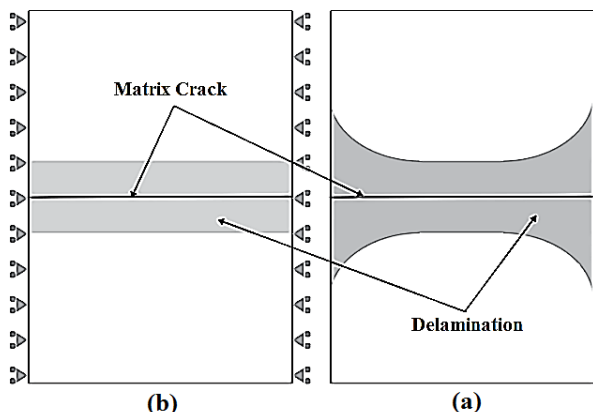


Fig. 2 Different scenarios for induced delamination formation: (a)Unconstrained state, (b)Generalized plane strain state [16]

شکل 2 نواحی مختلف جدایش (الف) جدایش بین لایه‌ای تحت شرایط نامقید (ب) جدایش بین لایه‌ای تحت شرایط کرنش صفحه‌ای عمومی [16]

اما در حالت کرنش صفحه‌ای عمومی، کرنش عرضی مقید می‌باشد و مقدار آن در سراسر چندلایه یکسان است. این حالت وقتی چندلایه به اندازه کافی عریض باشد رخ می‌دهد. در محل  $X = \pm L$  و  $Y = \pm W$  مقدار جابجایی به ترتیب برابر  $\pm \delta_x$  و  $\pm \delta_y$  می‌باشد که در نتیجه کرنش در این نقاط به صورت  $\epsilon_x = \delta_x/L$  و  $\epsilon_y = \delta_y/W$  می‌شود.

به سبب خرابی در چندلایه، توزیع کشش در  $X = \pm L$  و  $Y = \pm W$  یکنواخت نمی‌باشد و پیچیده خواهد بود، بنابراین فرض می‌کنیم تنش موثری (تنش میانگین) که از معادلات زیر به دست می‌آید به آن اعمال می‌شود.

$$\sigma_x = 1/4Wh \int_{-W}^W \int_{-h}^h \sigma_{11}(L, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad (1)$$

$$\sigma_y = 1/4Lh \int_{-L}^L \int_{-h}^h \sigma_{22}(x_1, W, x_3) dx_1 dx_3 \quad (2)$$

$$\tau = 1/4Wh \int_{-W}^W \int_{-h}^h \sigma_{33}(L, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad (3)$$

ماتریس سفتی تک لایه‌ی صفر درجه به صورت زیر می‌باشد که در آن  $E_A$  و  $E_T$  به ترتیب مدول الاستیسیته طولی و عرضی،  $\nu_A$  و  $\nu_T$  به ترتیب ضریب پواسون طولی و عرضی و  $G$  مدول برشی می‌باشد.

برای این حالت تنش و تغییر شکل مورد بررسی آنقدر از نوک جدایش دور هستند که جدایش نتواند بر آنها اثر بگذارد، زیرا رشد جدایش در ناحیه گذار است. اگر ترک ماتریسی کل عرض را فرا گیرد و طول جدایش به اندازه کافی بزرگ باشد، ناحیه گذار همراه با نوک جدایش بین لایه‌ای در طول رشد حرکت می‌کند.

وقتی کرنش عرضی برای چندلایه محاسبه می‌شود، نحوه وارد کردن شرایط مرزی برای عرض در موقع رشد جدایش خیلی مهم است. برای یک چند لایه که تحت بارگذاری یک محوره می‌باشد کرنش عرضی لایه‌ی  $\theta$  و  $90$  درجه در قسمت جدا شده باهم یکسان نمی‌باشد و همچنین کرنش عرضی هر دو با قسمت سالم تفاوت دارد. حال اگر جدایش ناشی از ترک ماتریسی در چندلایه‌های عریض رخ بدهد در نتیجه قسمت زیادی از چند لایه سالم می‌باشد و این باعث می‌شود کرنش عرضی در قسمت جدا شده مقید شود. در این پژوهش مدلی برای جدایش معرفی می‌شود که می‌توان شرایط مهم یاد شده را اعمال کرد. با فرض شرایط کرنش صفحه‌ای عمومی، کرنش عرضی در سراسر قسمت آسیب دیده مقید می‌شود و مقدار آن با قسمت سالم یکسان می‌شود. برای صحت سنجی نتایج بدست آمده از مدل المان محدود در نرم افزار انسیس استفاده شده است که با درصد خطای بسیار کمی نتایج حاصله را تایید می‌کند.

## 2- روش تحقیق

در این بخش یک روش تحلیلی برای تخمین نرخ رهایی انرژی حاصل از جدایش بین لایه‌ای در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد و یا غیر متعامد با لایه چینی متقارن تحت بارگذاری داخل صفحه‌ی دلخواه پرداخته می‌شود، که در دو نوع مختلف شرایط مرزی و بارگذاری می‌باشند.

### 2-1- هندسه و بارگذاری

فرض کنید همانند شکل 1، یک چهارلایه  $[\theta/90]_s$  داشته باشیم که دارای پراکنندگی منظمی از ترک ماتریسی در لایه  $90$  درجه به طول  $2L$  باشد. محور مختصات کارترین برای این حالت فرض شده که در آن  $x$  در راستای طولی و  $y$  در راستای عرضی و  $z$  در راستای ضخامت می‌باشد.

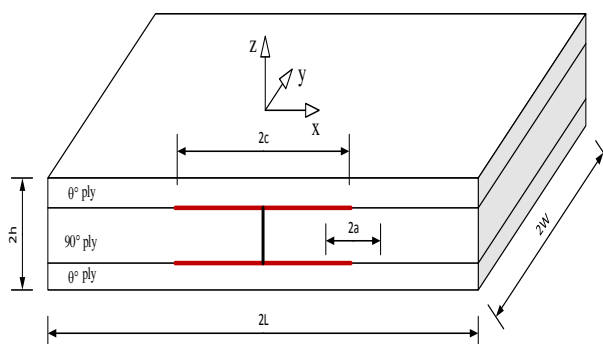


Fig. 1 Schematic of  $[\theta/90]_s$  composite laminate

شکل 1 طرح چند لایه‌ی کامپوزیت  $[\theta/90]_s$

ضخامت لایه‌های  $\theta$  و  $90$  درجه به ترتیب با  $h^{(\theta)}$  و  $h^{(90)}$  نشان داده شده است. بنابراین ضخامت کل چندلایه به صورت  $2h = 2(h^{(90)} + h^{(\theta)})$  بوده و عرض آن  $2W$  و طول آن  $2L$  است. جدایش از نوک ترک ماتریسی شروع شده و در هر  $2$  سطح تماس بین لایه‌های  $\theta$  و  $90$  به اندازه‌ی  $c$  از دو طرف رشد

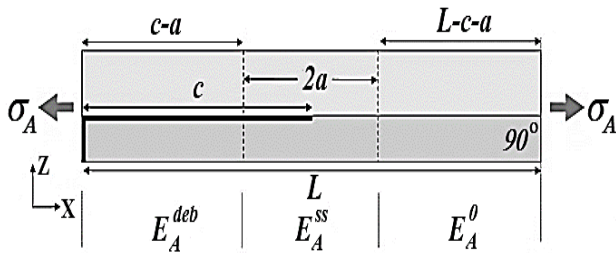


Fig. 3 Laminate areas in unconstrained state [15]

شکل 3 نواحی مختلف چندلایه در حالت نامقید [15]

## 2-1-2- ناحیه کاملاً سالم

ناحیه کاملاً سالم در قسمت  $c + a < x < L$  قرار دارد و دارای طول  $L - a - c$  است و در آن توزیع تنش و کرنش در تمام لایه‌ها یکنواخت است.

معادله‌ی تنش-کرنش طولی برای این ناحیه به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_x^0 = a_{11}^0 \sigma_x + a_{12}^0 \sigma_y + a_{13}^0 \tau + \alpha_x^0 \Delta T \quad (13)$$

## 2-2-2- ناحیه کاملاً جداشده

حال ناحیه  $0 < x < c - a$  را در نظر بگیرید که طول  $c - a$  دارد و در این ناحیه لایه‌ها کاملاً جدا از هم می‌باشند. در این ناحیه نیز توزیع تنش و کرنش در هر لایه یکنواخت می‌باشد. هر دو لایه  $\theta$  و  $90$  درجه دارای تنش عرضی  $\sigma_y$  یکسان می‌باشند در حالی که لایه  $\theta$  دارای تنش طولی  $\sigma_x$  و تنش برشی  $\tau$  است ولی تنش طولی و برشی در لایه  $90$  درجه صفر می‌باشد، لذا داریم:

$$\sigma_x^{(90)} = 0, \quad \sigma_x^{(\theta)} = \frac{h}{h(\theta)} \sigma_x \quad (14)$$

$$\sigma_y^{deb} = \sigma_y^{(90)} = \sigma_y^{(\theta)} \quad (15)$$

$$\tau^{(90)} = 0, \quad \tau^{(\theta)} = \frac{h}{h(\theta)} \tau \quad (16)$$

همچنین در این ناحیه کرنش طولی لایه  $90$  درجه صفر می‌باشد و کرنش طولی چند لایه برابر با کرنش لایه  $\theta$  می‌شود، پس برای کرنش طولی نیز خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x^{deb} = \varepsilon_x^{(\theta)} \quad (17)$$

بنابراین معادله‌ی تنش-کرنش طولی این ناحیه نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_x^{deb} = \varepsilon_x^{(\theta)} = \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h(\theta)} \sigma_x + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \sigma_y + \bar{S}_{13}^{(\theta)} \frac{h}{h(\theta)} \tau + \alpha_x^{(\theta)} \Delta T \quad (18)$$

## 2-2-3- ناحیه گذار

ناحیه  $c - a < x < c + a$  را که دارای طول  $2a$  است در نظر بگیرید. توزیع تنش و کرنش در این ناحیه غیر یکنواخت است ولی شکل توزیع آنها با افزایش طول جدایش تغییر نمی‌کند و ثابت است و با نوک جدایش حرکت می‌کند. این ناحیه به شرایط مرزی آن در  $x = c - a$  و  $x = c + a$  وابسته است و توزیع تنش و کرنش در آن پیچیده می‌باشد ولی نیازی به محاسبه آن نیست و خواص این ناحیه به صورت میانگین محاسبه می‌شود و به صورت  $[a^{ss}]$  نمایش داده می‌شود.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{E_A}{1 - \nu_A \nu_T} & \frac{\nu_T E_A}{1 - \nu_A \nu_T} & 0 \\ \frac{\nu_A E_T}{1 - \nu_A \nu_T} & \frac{E_T}{1 - \nu_A \nu_T} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4)$$

ماتریس سفتی برای تک لایه‌ی عمومی  $\theta$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[\bar{Q}] = [T_1]^{-1} * [Q] * [T_2] \quad (5)$$

که در آن  $T_1$  و  $T_2$  نیز ماتریس‌های انتقال از مختصات محلی به مختصات

عمومی می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

ماتریس نرمی نیز برای یک تک لایه‌ی عمومی  $\theta$  به صورت زیر به دست

می‌آید:

$$[\bar{S}] = [\bar{Q}]^{-1} \quad (8)$$

در چند لایه‌ی مورد نظر ما که لایه چینی آن متقارن است ماتریس سفتی

برای چندلایه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[A] = \sum_{p=1}^N \frac{h_p}{h} * [\bar{Q}_p] \quad (9)$$

و ماتریس نرمی نیز به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$[a] = [A]^{-1} \quad (10)$$

در حالت کلی روابط تنش-کرنش برای چند لایه آسیب دیده به صورت

زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_s \end{bmatrix} * \Delta T \quad (11)$$

همچنین روابط تنش-کرنش موثر برای چندلایه سالم به صورت زیر

می‌باشد، که در آن بالانویس 0 نشان دهنده خواص قسمت سالم چندلایه می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \\ \alpha_s^0 \end{bmatrix} * \Delta T \quad (12)$$

## 2-2- تحلیل شرایط نامقید

فرض کنید حالتی داریم که در آن تنش‌های داخل صفحه به چندلایه وارد می‌شود. وقتی که طول و عرض اختلاف زیادی باهم ندارند. همچنین در قسمت جدا شده لایه  $90$  درجه می‌تواند در راستای الیاف خودش نامقید شود، در این حالت کرنش عرضی در این لایه مقدار یکنواختی دارد و مقدار آن با کرنش عرضی قسمت جدا شده‌ی لایه  $90$  درجه و هم چنین قسمت سالم چندلایه متفاوت است. در این شرایط چندلایه مانند شکل 3، به 3 قسمت تقسیم می‌شود.

4-2-2- روابط تنش- کرنش

$$\tau^{(90)} = 0, \quad \tau^{(\theta)} = \frac{h}{h^{(\theta)}} \tau \quad (26)$$

حال 3 ناحیه مشخص شده توضیح داده شد.

در ناحیه کاملاً سالم رابطه جابجایی به صورت زیر است:

$$(L - c - a)(a_{11}^0 \sigma_x + a_{12}^0 \sigma_y + a_{13}^0 \tau + \alpha_x^0 \Delta T) \quad (19)$$

و در ناحیه کاملاً جدا شده نیز به صورت زیر است:

$$(c - a)(a_{11}^{deb} \sigma_x + a_{12}^{deb} \sigma_y + a_{13}^{deb} \tau + \alpha_x^{deb} \Delta T) \quad (20)$$

در ناحیه گذار نیز رابطه جابجایی طولی اینگونه خواهد بود:

$$2a(a_{11}^{ss} \sigma_x + a_{12}^{ss} \sigma_y + a_{13}^{ss} \tau + \alpha_x^{ss} \Delta T) \quad (21)$$

حال اگر طول چندلایه به بینهایت میل کند  $L \rightarrow \infty$  و با قرار دادن  $c = \eta L$  برای کرنش طولی میانگین متعلق به چندلایه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = (1 - \eta)(a_{11}^0 \sigma_x + a_{12}^0 \sigma_y + a_{13}^0 \tau + \alpha_x^0 \Delta T) \\ + \eta(a_{11}^{deb} \sigma_x + a_{12}^{deb} \sigma_y + a_{13}^{deb} \tau + \alpha_x^{deb} \Delta T) \end{aligned} \quad (22)$$

بنابراین درایه‌ی سطر و ستون اول ماتریس نرمی برای چندلایه در حالت نامقید به صورت زیر می‌باشد:

$$a_{11} = (1 - \eta)a_{11}^0 + \eta \frac{\bar{S}_{11}^{(\theta)}}{h^{(\theta)}} \quad (23)$$

3-2- تحلیل شرایط کرنش صفحه‌ای عمومی

حال شرایطی را در نظر بگیرید که در آن قید عرضی وجود دارد که باعث می‌شود کرنش عرضی در تمام چند لایه یکسان بوده و برابر با  $\varepsilon_y^0$  باشد. در این حالت چندلایه آسیب دیده‌ای که دارای جدایش است نیز مانند شکل 4، به 3 قسمت تقسیم می‌شود.

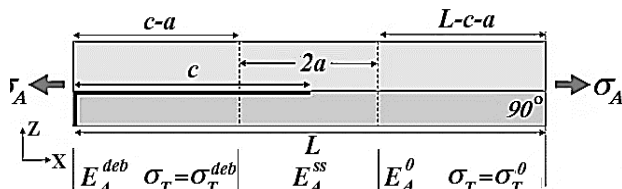


Fig. 4 Laminate areas in generalized plane strain state [15]

شکل 4 نواحی مختلف چندلایه در حالت کرنش صفحه‌ای عمومی [15]

1-3-2- ناحیه کاملاً سالم

این ناحیه شبیه ناحیه سالم حالت نامقید می‌باشد و معادله‌ی (13) برای این ناحیه صادق می‌باشد.

2-3-2- ناحیه کاملاً جدا شده

در این ناحیه نیز هر دو لایه  $\theta$  و  $90$  درجه دارای تنش عرضی می‌باشند در حالی که لایه  $\theta$  دارای تنش طولی  $\sigma_x$  و تنش برشی  $\tau$  است ولی تنش طولی و برشی در لایه  $90$  درجه صفر می‌باشد، لذا داریم:

$$\sigma_x^{(90)} = 0, \quad \sigma_x^{(\theta)} = \frac{h}{h^{(\theta)}} \sigma_x \quad (24)$$

$$h \sigma_y = h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + h^{(90)} \sigma_y^{(90)} \quad (25)$$

همچنین در این ناحیه کرنش طولی و برشی لایه‌ی  $90$  درجه صفر می‌باشد و کرنش طولی و برشی چند لایه برابر با کرنش لایه‌ی  $\theta$  می‌شود و کرنش هم در سراسر چندلایه یکسان است بنابراین خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x^{deb} = \varepsilon_x^{(\theta)}, \quad \varepsilon_y^{deb} = \varepsilon_y^{(90)} = \varepsilon_y^{(\theta)} = \varepsilon_y^{(90)} \quad (27)$$

کرنش‌های عرضی  $\varepsilon_y^{(90)}$  و  $\varepsilon_y^{(\theta)}$  نیز با توجه به روابط (24) و (26) به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^0 = \varepsilon_y^{(\theta)} = \bar{S}_{12}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} \sigma_x + \bar{S}_{22}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} \tau \\ + \alpha_y^{(\theta)} \Delta T \end{aligned} \quad (28)$$

$$\varepsilon_y^0 = \varepsilon_y^{(90)} = \bar{S}_{22}^{(90)} \sigma_y^{(90)} + \alpha_y^{(90)} \Delta T \quad (29)$$

لذا با توجه به معادلات بالا تنش‌های عرضی لایه‌های  $\theta$  و  $90$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_y^{(\theta)} = \frac{\varepsilon_y^0}{\bar{S}_{22}^{(\theta)}} - \frac{\bar{S}_{12}^{(\theta)} h}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} h^{(\theta)}} \sigma_x - \frac{\bar{S}_{23}^{(\theta)} h}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} h^{(\theta)}} \tau - \frac{\alpha_y^{(\theta)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)}} \Delta T \quad (30)$$

$$\sigma_y^{(90)} = \frac{\varepsilon_y^0}{\bar{S}_{22}^{(90)}} - \frac{\alpha_y^{(90)}}{\bar{S}_{22}^{(90)}} \Delta T \quad (31)$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله‌ی (25) تنش عرضی چند لایه در قسمت جدا شده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{h^{(\theta)} \varepsilon_y^0}{h \bar{S}_{22}^{(\theta)}} - \frac{\bar{S}_{12}^{(\theta)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)}} \sigma_x - \frac{\bar{S}_{23}^{(\theta)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)}} \tau - \frac{h^{(\theta)} \alpha_y^{(\theta)}}{h \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \Delta T + \frac{h^{(90)} \varepsilon_y^0}{h \bar{S}_{22}^{(90)}} \\ - \frac{h^{(90)} \alpha_y^{(90)}}{h \bar{S}_{22}^{(90)}} \Delta T \end{aligned} \quad (32)$$

و با مرتب کردن معادله بر اساس  $\varepsilon_y$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^{deb} = \varepsilon_y^0 = \frac{h \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)}}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \sigma_x \\ + \frac{h \bar{S}_{22}^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)}}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \sigma_y \\ + \frac{h \bar{S}_{23}^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)}}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \tau \\ + \frac{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} \alpha_y^{(\theta)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)} \alpha_y^{(90)}}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \Delta T \end{aligned} \quad (33)$$

برای کرنش طولی چندلایه نیز خواهیم داشت:

$$\int \varepsilon_x d\sigma_x = \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 + a_{12} \sigma_x \sigma_y + a_{13} \sigma_x \tau + \sigma_x \alpha_x \Delta T + d \quad (38)$$

$$\int \varepsilon_y d\sigma_y = a_{12} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 + a_{23} \sigma_y \tau + \sigma_y \alpha_y \Delta T + d \quad (39)$$

$$\int \gamma d\tau = a_{13} \sigma_x \tau + a_{23} \sigma_y \tau + \frac{1}{2} a_{33} \tau^2 + \tau \alpha_s \Delta T + d \quad (40)$$

و با اجتماع آنها معادله انرژی آزاد گیبس بر واحد حجم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{G} = & -\frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 - \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 - \frac{1}{2} a_{33} \tau^2 - a_{12} \sigma_x \sigma_y - a_{13} \sigma_x \tau \\ & - a_{23} \sigma_y \tau - \sigma_x \alpha_x \Delta T - \sigma_y \alpha_y \Delta T - \tau \alpha_s \Delta T + \bar{G} \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن  $\bar{G}$  انرژی آزاد گیبس بر واحد حجم است در حالتی که چندلایه بدون بار مکانیکی باشد. مقدار  $\bar{G}$  اگر چه به تنش‌های  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و  $\tau$  وابسته نیست ولی به تنش‌های حرارتی وابسته می‌باشد. لذا با فرض ثابت بودن دما در طول رشد جدایش میتوان به نوعی آن را جزو خواص ماده دانست و برای حذف آن از معادله اگر فرض کنیم در شرایط بسته بودن ترک فقط تنش طولی به چندلایه وارد شود داریم:

$$\sigma_x = \sigma_x^c, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = 0 \quad (42)$$

و با جایگذاری این تنش‌ها در معادله انرژی آزاد گیبس خواهیم داشت:

$$\bar{G} = \sigma_x^c \left( \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^c + \alpha_x \Delta T \right) + G_c \quad (43)$$

که مقدار  $G_c$  به آسیب دیدگی وابسته نیست و به راحتی قابل محاسبه است، اگر چه اصلاً نیازی به محاسبه آن نیست. لذا با جایگذاری معادله بالا در معادله (41) یک معادله کلی برای انرژی آزاد گیبس به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{G} = & -\frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 - \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 - \frac{1}{2} a_{33} \tau^2 - a_{12} \sigma_x \sigma_y - a_{13} \sigma_x \tau \\ & - a_{23} \sigma_y \tau - \sigma_x \alpha_x \Delta T - \sigma_y \alpha_y \Delta T - \tau \alpha_s \Delta T \\ & + \sigma_x^c \left( \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^c + \alpha_x \Delta T \right) + G_c \end{aligned} \quad (44)$$

انرژی آزاد گیبس بر واحد حجم وقتی چندلایه سالم می‌باشد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} G_0 = & -\frac{1}{2} a_{11}^0 \sigma_x^2 - \frac{1}{2} a_{22}^0 \sigma_y^2 - \frac{1}{2} a_{33}^0 \tau^2 - a_{12}^0 \sigma_x \sigma_y \\ & - a_{13}^0 \sigma_x \tau - a_{23}^0 \sigma_y \tau - \sigma_x \alpha_x^0 \Delta T - \sigma_y \alpha_y^0 \Delta T - \tau \alpha_s^0 \Delta T \\ & + \sigma_x^c \left( \frac{1}{2} a_{11}^0 \sigma_x^c + \alpha_x^0 \Delta T \right) + G_c \end{aligned} \quad (45)$$

بنابراین برای حذف  $G_c$  از معادله روش زیر را اجرا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \bar{G} - G_0 = & -\frac{1}{2} \sigma_x^2 (a_{11} - a_{11}^0) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 (a_{22} - a_{22}^0) \\ & - \frac{1}{2} \tau^2 (a_{33} - a_{33}^0) - \sigma_x \sigma_y (a_{12} - a_{12}^0) - \sigma_x \tau (a_{13} - a_{13}^0) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{deb} = \varepsilon_x^{(\theta)} = & \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} \sigma_x + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{13}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} \tau \\ & + \alpha_x^{(\theta)} \Delta T \end{aligned} \quad (34)$$

با جایگذاری معادلات (30) و (33) در معادله‌ی بالا برای کرنش طولی نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{deb} = & \left( \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} - \frac{h (\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} + \frac{h (\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2 \bar{S}_{22}^{(90)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} (h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)})} \right) \sigma_x \\ & + \frac{h \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)}}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \sigma_y \\ & + \left( \bar{S}_{13}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} - \frac{h \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)}}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} + \frac{h \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} (h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)})} \right) \tau \\ & + \left( \alpha_x^{(\theta)} - \frac{\bar{S}_{12}^{(\theta)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)}} \alpha_y^{(\theta)} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{S}_{12}^{(\theta)} (h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} \alpha_y^{(\theta)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)} \alpha_y^{(90)})}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} (h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)})} \right) \Delta T \end{aligned} \quad (35)$$

بنابراین همانند شرایط نامقید در این بخش نیز ضرایب تنش‌ها در معادلات تنش-کرنش، درایه‌های ماتریس نرمی بخش کاملاً جدا شده می‌باشند.

### 2-3-3- ناحیه گذار

این ناحیه نیز دقیقاً همانند ناحیه گذار حالت نامقید می‌باشد و همان شرایط برای آن برقرار است.

### 2-3-4- روابط تنش-کرنش

برای حالت کرنش صفحه‌ای عمومی نیز معادله‌ی (22) صادق می‌باشد و نشان-دهنده کرنش چندلایه می‌باشد. بنابراین درایه‌ی سطر و ستون اول ماتریس نرمی برای چندلایه در حالت کرنش صفحه‌ای عمومی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} a_{11} = & (1 - \eta) a_{11}^0 + \eta \left( \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} - \frac{h (\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2}{h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(\theta)}} \right. \\ & \left. + \frac{h (\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2 \bar{S}_{22}^{(90)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} (h^{(\theta)} \bar{S}_{22}^{(90)} + h^{(90)} \bar{S}_{22}^{(\theta)})} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

### 2-4- محاسبه انرژی آزاد گیبس

طبق روابط موجود در مقاله مک کارتنی [1] حاصل مشتق انرژی آزاد گیبس نسبت به تنش‌های داخل صفحه، کرنش‌های داخل صفحه می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial \bar{G}}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial \bar{G}}{\partial \sigma_y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \bar{G}}{\partial \tau} \quad (37)$$

لذا با گرفتن انتگرال از معادلات کرنش خواهیم داشت:

$$\gamma^c = \gamma^{(\theta)} = 0 = \bar{S}_{13}^{(\theta)} \frac{h\sigma_x^c}{h^{(\theta)}} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{33}^{(\theta)} \tau^{(\theta)} + \alpha_s^{(\theta)} \Delta T \quad (58)$$

$$\varepsilon_x^c = \varepsilon_x^{(90)} = -\bar{S}_{12}^{(90)} \frac{h^{(90)}}{h^{(90)}} \sigma_y^{(\theta)} + \alpha_x^{(90)} \Delta T \quad (59)$$

$$\varepsilon_y^c = \varepsilon_y^{(90)} = -\bar{S}_{22}^{(90)} \frac{h^{(90)}}{h^{(90)}} \sigma_y^{(\theta)} + \alpha_y^{(90)} \Delta T \quad (60)$$

حال با برابر قرار دادن معادله‌ی (56) و (59) و جایگذاری  $\tau^{(\theta)}$  از معادله‌ی (58) داریم:

$$\sigma_y^{(\theta)} = \frac{\left( \left( \bar{S}_{13}^{(\theta)} \right)^2 - \bar{S}_{11}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} \right) h^{(90)} h}{\left( \bar{S}_{12}^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{13}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(90)} h^{(90)} \right) h^{(\theta)} \sigma_x^c} + \frac{h^{(90)} \left( \alpha_x^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} - \alpha_x^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} \right)}{\left( \bar{S}_{12}^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{13}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(90)} h^{(90)} \right)} \Delta T \quad (61)$$

همچنین با برابر قرار دادن معادله‌ی (57) و (59) و جایگذاری معادله‌ی (61) در آن خواهیم داشت:

$$\sigma_x^c = -k_1 \Delta T \quad (62)$$

که در واقع داریم:

$$k_1 = - \left( \frac{A4 \times A5 - A3 \times A6}{A1 \times A6 - A2 \times A5} \right) \frac{h^{(\theta)}}{h} \quad (63)$$

و مقادیر A1 تا A6 در پیوست مشخص شده است.

#### 2-1-4-2- حالت اعمال تنش عرضی

حالتی را در نظر بگیرید که چندلایه فقط تحت تنش عرضی میانگین  $\sigma_y^c$  باشد و هرکدام از لایه‌ها کرنش طولی و عرضی و برشی یکسان  $\bar{\varepsilon}_x^c$  و  $\bar{\varepsilon}_y^c$  داشته باشند و شرایط بسته بودن ترک و جدایش برقرار باشد. در این شرایط تعادل مکانیکی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x^{(90)} = \sigma_x^{(\theta)} = 0 \quad (64)$$

$$h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + h^{(90)} \sigma_y^{(90)} = h \sigma_y^c \rightarrow \sigma_y^{(90)} = \frac{h \sigma_y^c - h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)}}{h^{(90)}} \quad (65)$$

$$\tau^{(90)} = 0 \quad (66)$$

حال اگر معادلات (64) تا (66) را در معادلات (47) و (48) جاگذاری کنیم برای لایه  $\theta$  و  $90$  درجه خواهیم داشت:

$$\bar{\varepsilon}_x^c = \varepsilon_x^{(\theta)} = \bar{S}_{12}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{13}^{(\theta)} \tau^{(\theta)} + \alpha_x^{(\theta)} \Delta T \quad (67)$$

$$\bar{\varepsilon}_y^c = \varepsilon_y^{(\theta)} = \bar{S}_{22}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \tau^{(\theta)} + \alpha_y^{(\theta)} \Delta T \quad (68)$$

$$\gamma^c = \gamma^{(\theta)} = 0 = \bar{S}_{23}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{33}^{(\theta)} \tau^{(\theta)} + \alpha_s^{(\theta)} \Delta T \quad (69)$$

$$\bar{\varepsilon}_x^c = \varepsilon_x^{(90)} = \bar{S}_{12}^{(90)} \frac{h \sigma_y^c - h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)}}{h^{(90)}} + \alpha_x^{(90)} \Delta T \quad (70)$$

$$-\sigma_y \tau (a_{23} - a_{23}^0) - \sigma_x (\alpha_x - \alpha_x^0) \Delta T - \sigma_y (\alpha_y - \alpha_y^0) \Delta T - \tau (\alpha_s - \alpha_s^0) \Delta T + \sigma_x^c \left( \frac{1}{2} \sigma_x^c (a_{11} - a_{11}^0) + (\alpha_x - \alpha_x^0) \Delta T \right)$$

حال جهت محاسبه‌ی نرخ رهایی انرژی نیاز به مشتق‌گیری از معادله‌ی فوق نسبت به طول جدایش می‌باشد، اما به خاطر وجود تمامی ترم‌های ماتریسی نرمی در معادله این کار تقریباً غیر ممکن است لذا جهت ساده سازی آن از شرایط بسته شدن ترک استفاده می‌کنیم.

#### 2-1-4-2- شرایط بسته شدن ترک برای تک لایه

یک چندلایه‌ی سالم را در نظر بگیرید که در آن هر دو لایه  $\theta$  و  $90$  از یک نوع ماده ساخته شده باشند. تنش در راستای ضخامت صفر می‌باشد. روابط تنش-کرنش برای لایه  $\theta$  و  $90$  درجه به ترتیب به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(\theta)} \\ \varepsilon_y^{(\theta)} \\ \gamma^{(\theta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11}^{(\theta)} & \bar{S}_{12}^{(\theta)} & \bar{S}_{13}^{(\theta)} \\ \bar{S}_{21}^{(\theta)} & \bar{S}_{22}^{(\theta)} & \bar{S}_{23}^{(\theta)} \\ \bar{S}_{31}^{(\theta)} & \bar{S}_{32}^{(\theta)} & \bar{S}_{33}^{(\theta)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_x^{(\theta)} \\ \sigma_y^{(\theta)} \\ \tau^{(\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_x^{(\theta)} \\ \alpha_y^{(\theta)} \\ \alpha_s^{(\theta)} \end{bmatrix} * \Delta T \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(90)} \\ \varepsilon_y^{(90)} \\ \gamma^{(90)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11}^{(90)} & \bar{S}_{12}^{(90)} & 0 \\ \bar{S}_{21}^{(90)} & \bar{S}_{22}^{(90)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_{33}^{(90)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_x^{(90)} \\ \sigma_y^{(90)} \\ \tau^{(90)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_x^{(90)} \\ \alpha_y^{(90)} \\ \alpha_s^{(90)} \end{bmatrix} * \Delta T \quad (48)$$

#### 2-1-4-2- حالت اعمال تنش طولی

حالتی که در آن چند لایه فقط تحت تنش طولی میانگین  $\sigma_x^c$  باشد را در نظر بگیرید و شرایط به گونه‌ای باشد که هرکدام از لایه‌های  $\theta$  و  $90$  مقدار یکسان  $\varepsilon_x^c$  و  $\varepsilon_y^c$  و  $\gamma^c$  که به ترتیب کرنش طولی و عرضی و برشی است را داشته باشند و دما به صورتی اعمال شود که تنش طولی لایه‌ی  $90$  درجه به خاطر وجود ترک ماتریسی صفر باشد. تمام این شرایط در حالتی می‌باشد که ترک ماتریسی و جدایش بین لایه بسته بمانند. برای این مورد تعادل مکانیکی زیر برقرار است:

$$\varepsilon_x^c = \varepsilon_x^{(90)} = \varepsilon_x^{(\theta)} \quad (49)$$

$$\varepsilon_y^c = \varepsilon_y^{(90)} = \varepsilon_y^{(\theta)} \quad (50)$$

$$\gamma^c = \gamma^{(90)} = \gamma^{(\theta)} = 0 \quad (51)$$

$$\sigma_x^{(90)} = 0 \quad (52)$$

$$\sigma_x^{(\theta)} = \frac{h}{h^{(\theta)}} \sigma_x^c \quad (53)$$

$$h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + h^{(90)} \sigma_y^{(90)} = 0 \rightarrow \sigma_y^{(90)} = - \frac{h^{(\theta)}}{h^{(90)}} \sigma_y^{(\theta)} \quad (54)$$

$$\tau^{(90)} = 0 \quad (55)$$

حال اگر معادلات (49) تا (55) را در معادلات (47) و (48) جاگذاری کنیم برای لایه  $\theta$  و  $90$  درجه خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x^c = \varepsilon_x^{(\theta)} = \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h \sigma_x^c}{h^{(\theta)}} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{13}^{(\theta)} \tau^{(\theta)} + \alpha_x^{(\theta)} \Delta T \quad (56)$$

$$\varepsilon_y^c = \varepsilon_y^{(\theta)} = \bar{S}_{22}^{(\theta)} \frac{h \sigma_x^c}{h^{(\theta)}} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \tau^{(\theta)} + \alpha_y^{(\theta)} \Delta T \quad (57)$$



$$\bar{\varepsilon}_y^c = \varepsilon_y^{(90)} = -\bar{S}_{22}^{(90)} \frac{h^{(\theta)}}{h^{(90)}} \sigma_y^{(\theta)} + \alpha_y^{(90)} \Delta T \quad (82)$$

حال با برابر قرار دادن معادله (78) و (81) داریم:

$$\sigma_y^{(\theta)} = \frac{\left( \bar{S}_{11}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} - \left( \bar{S}_{13}^{(\theta)} \right)^2 \right) h^{(90)} h}{\left( \bar{S}_{12}^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{11}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} h^{(90)} \right) h^{(\theta)}} \tau^c + \frac{h^{(90)} \left( \alpha_x^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} - \alpha_x^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(90)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{11}^{(\theta)} \right)}{\left( \bar{S}_{12}^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{11}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} h^{(90)} \right)} \Delta T \quad (83)$$

همچنین با برابر قرار دادن معادله (79) و (82) و جایگذاری معادله (83)

در آن خواهیم داشت:

$$\tau^c = -k_3 \Delta T \quad (84)$$

که در واقع خواهیم داشت:

$$k_3 = - \left( \frac{A8 \times A9 - A7 \times A10}{A2 \times A9 - A1 \times A10} \right) \frac{h^{(\theta)}}{h} \quad (85)$$

و مقادیر A1 تا A10 در پیوست مشخص شده است.

#### 2-4-2- شرایط بسته شدن ترک برای چند لایه

حالی را فرض کنید که در آن چند لایه هم دارای ترک ماتریسی و هم دارای جدایش بین لایه‌های می‌باشد. اگر به چندلایه بارگذاری مناسبی اعمال شود تا در آن تمام ترک‌ها بسته بماند و به صورتی باشد که سطوح ترک باهم تماس بدون اصطکاک و بدون تنش داشته باشند و دما طوری اعمال شود که تنش طولی لایه‌ی 90 درجه صفر شود شرایط زیر برقرار است.

#### 1-2-4-2 حالت اعمال تنش طولی

حال برای چندلایه در حالی که تنش طولی به آن وارد می‌شود و چندلایه دارای کرنش طولی و عرضی و برشی یکسان هم در قسمت آسیب دیده و هم در قسمت سالم باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \sigma_x^c, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = 0 \quad (86)$$

حال برای قسمت آسیب دیده داریم:

$$\varepsilon_x^c = a_{11} \sigma_x^c + \alpha_x \Delta T \quad (87)$$

$$\varepsilon_y^c = a_{12} \sigma_x^c + \alpha_y \Delta T \quad (88)$$

$$\gamma^c = a_{13} \sigma_x^c + \alpha_s \Delta T \quad (89)$$

همچنین برای قسمت سالم نیز داریم:

$$\varepsilon_x^c = a_{11}^0 \sigma_x^c + \alpha_x^0 \Delta T \quad (90)$$

$$\varepsilon_y^c = a_{12}^0 \sigma_x^c + \alpha_y^0 \Delta T \quad (91)$$

$$\gamma^c = a_{13}^0 \sigma_x^c + \alpha_s^0 \Delta T \quad (92)$$

$$\bar{\varepsilon}_y^c = \varepsilon_y^{(90)} = \bar{S}_{22}^{(90)} \frac{h \sigma_y^c - h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)}}{h^{(90)}} + \alpha_y^{(90)} \Delta T \quad (71)$$

حال با برابر قرار دادن معادله‌ی (67) و (70) و جایگذاری  $\tau^{(\theta)}$  از معادله‌ی

(69) داریم:

$$\sigma_y^{(\theta)} = \frac{\bar{S}_{33}^{(\theta)} \bar{S}_{12}^{(90)} h}{\bar{S}_{33}^{(\theta)} \bar{S}_{12}^{(\theta)} h^{(90)} - \bar{S}_{13}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} h^{(90)} + \bar{S}_{33}^{(90)} \bar{S}_{12}^{(\theta)} h^{(\theta)}} \sigma_y^c + \frac{h^{(90)} \left( \alpha_x^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} - \alpha_x^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{11}^{(\theta)} \right)}{\bar{S}_{33}^{(\theta)} \bar{S}_{12}^{(\theta)} h^{(90)} - \bar{S}_{13}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} h^{(90)} + \bar{S}_{33}^{(90)} \bar{S}_{12}^{(\theta)} h^{(\theta)}} \Delta T \quad (72)$$

همچنین با برابر قرار دادن معادله (68) و (71) و جایگذاری معادله (72)

در آن خواهیم داشت:

$$\sigma_y^c = -k_2 \Delta T \quad (73)$$

که در واقع خواهیم داشت:

$$k_2 = - \left( \frac{A4 \times A5 - A3 \times A6}{\bar{S}_{12}^{(90)} \times A6 - \bar{S}_{22}^{(90)} \times A5} \right) \frac{h^{(90)}}{\bar{S}_{33}^{(\theta)} h} \quad (74)$$

و مقادیر A1 تا A6 در پیوست مشخص شده است.

#### 3-1-4-2 حالت اعمال تنش برشی

حالی که در آن چند لایه فقط تحت تنش برشی میانگین  $\tau^c$  باشد را در نظر بگیرد و هرکدام از لایه‌های مقدار یکسان  $\bar{\varepsilon}_x^c$  و  $\bar{\gamma}_y^c$  و  $\bar{\tau}^c$  که به ترتیب کرنش طولی و عرضی و برشی است را داشته باشند و دما طوری اعمال شود که تنش برشی لایه 90 درجه به خاطر وجود ترک ماتریسی صفر باشد و تمام این شرایط در حالی می‌باشد که ترک ماتریسی و جدایش بین لایه بسته بمانند. برای این مورد تعادل مکانیکی زیر برقرار است:

$$\sigma_x^{(90)} = 0 \quad (75)$$

$$h^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + h^{(90)} \sigma_y^{(90)} = 0 \rightarrow \sigma_y^{(90)} = - \frac{h^{(\theta)}}{h^{(90)}} \sigma_y^{(\theta)} \quad (76)$$

$$\tau^{(90)} = 0 \text{ \& } \tau^{(\theta)} = \frac{h}{h^{(\theta)}} \tau^c \quad (77)$$

حال اگر معادلات (75) تا (77) را در معادلات (47) و (48) جاگذاری کنیم

برای لایه  $\theta$  و 90 درجه خواهیم داشت:

$$\bar{\varepsilon}_x^c = \varepsilon_x^{(\theta)} = \bar{S}_{11}^{(\theta)} \sigma_x^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{13}^{(\theta)} \frac{h \tau^c}{h^{(\theta)}} + \alpha_x^{(\theta)} \Delta T \quad (78)$$

$$\bar{\varepsilon}_y^c = \varepsilon_y^{(\theta)} = \bar{S}_{12}^{(\theta)} \sigma_x^{(\theta)} + \bar{S}_{22}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \frac{h \tau^c}{h^{(\theta)}} + \alpha_y^{(\theta)} \Delta T \quad (79)$$

$$\gamma^{(\theta)} = 0 = \bar{S}_{13}^{(\theta)} \sigma_x^{(\theta)} + \bar{S}_{23}^{(\theta)} \sigma_y^{(\theta)} + \bar{S}_{33}^{(\theta)} \frac{h \tau^c}{h^{(\theta)}} + \alpha_s^{(\theta)} \Delta T \quad (80)$$

$$\bar{\varepsilon}_x^c = \varepsilon_x^{(90)} = -\bar{S}_{12}^{(90)} \frac{h^{(\theta)}}{h^{(90)}} \sigma_y^{(\theta)} + \alpha_x^{(90)} \Delta T \quad (81)$$

$$\bar{\varepsilon}_x^c = a_{13}^0 \tau^c + \alpha_x^0 \Delta T \quad (107)$$

$$\bar{\nu}^c = a_{33}^0 \tau^c + \alpha_s^0 \Delta T \quad (108)$$

که در این معادلات تنش برشی و  $\bar{\varepsilon}_x^c$  و  $\bar{\varepsilon}_y^c$  و  $\bar{\nu}^c$  به ترتیب کرنش طولی و عرضی و برشی در شرایط بسته بودن ترک در حالت اعمال تنش برشی هستند. حال با برابر قرار دادن معادلات (103) با (106) و (104) با (107) و (105) با (108) خواهیم داشت:

$$\tau^c = -\frac{\alpha_x - \alpha_x^0}{a_{13} - a_{13}^0} \Delta T = -\frac{\alpha_y - \alpha_y^0}{a_{23} - a_{23}^0} \Delta T = -\frac{\alpha_s - \alpha_s^0}{a_{33} - a_{33}^0} \Delta T = -k_3 \Delta T \quad (109)$$

حال با توجه به روابطی که برای ثوابت ترموالاستیک  $k_1$  و  $k_2$  و  $k_3$  به دست آمده، برای چند لایه خواهیم داشت:

$$k = \frac{k_1}{k_2} = \frac{a_{12} - a_{12}^0}{a_{11} - a_{11}^0} = \frac{a_{22} - a_{22}^0}{a_{12} - a_{12}^0} = \frac{a_{23} - a_{23}^0}{a_{13} - a_{13}^0} = \frac{\alpha_y - \alpha_y^0}{\alpha_x - \alpha_x^0} \quad (110)$$

$$(k)^2 = \frac{a_{22} - a_{22}^0}{a_{11} - a_{11}^0} \quad (111)$$

$$\dot{k} = \frac{k_1}{k_3} = \frac{a_{13} - a_{13}^0}{a_{11} - a_{11}^0} = \frac{a_{23} - a_{23}^0}{a_{12} - a_{12}^0} = \frac{a_{33} - a_{33}^0}{a_{13} - a_{13}^0} = \frac{\alpha_s - \alpha_s^0}{\alpha_x - \alpha_x^0} \quad (112)$$

$$(\dot{k})^2 = \frac{a_{33} - a_{33}^0}{a_{11} - a_{11}^0} \quad (113)$$

لازم به ذکر است که قبلاً توسط روابط (63) و (74) و (85) مقدار ثوابت  $k_1$  و  $k_2$  و  $k_3$  مشخص شده است

### 2-4-3- ساده سازی معادله انرژی آزاد گیبس

با جایگذاری معادلات (110) تا (113) در معادله (46) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{G} - G_0 = & -\frac{1}{2} \sigma_x^2 (a_{11} - a_{11}^0) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 k^2 (a_{11} - a_{11}^0) \\ & - \frac{1}{2} \tau^2 \dot{k}^2 (a_{11} - a_{11}^0) \\ & - \sigma_x \sigma_y k (a_{11} - a_{11}^0) \\ & - \sigma_x \tau \dot{k} (a_{11} - a_{11}^0) \\ & - \sigma_y \tau \dot{k} k (a_{11} - a_{11}^0) \\ & - \sigma_x k_1 (a_{11} - a_{11}^0) \Delta T \\ & - \sigma_y k_1 k (a_{11} - a_{11}^0) \Delta T \\ & - \tau k_1 \dot{k} (a_{11} - a_{11}^0) \Delta T \\ & - \frac{1}{2} (k_1 \Delta T)^2 (a_{11} - a_{11}^0) \end{aligned} \quad (114)$$

که با ساده کردن معادله بالا به یک معادله با فرم بسیار ساده‌ای برای محاسبه انرژی آزاد گیبس بر واحد حجم می‌رسیم:

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} (a_{11} - a_{11}^0) [\sigma_x + k \sigma_y + \dot{k} \tau + k_1 \Delta T]^2 + G_0 \quad (115)$$

که در این معادلات تنش طولی و  $\varepsilon_x^c$  و  $\varepsilon_y^c$  و  $\nu^c$  به ترتیب کرنش طولی و عرضی و برشی در شرایط بسته بودن ترک در حالت اعمال تنش طولی هستند. حال با برابر قرار دادن معادلات (87) با (90) و (88) با (91) و (89) با (92) خواهیم داشت:

$$\sigma_x^c = -\frac{\alpha_x - \alpha_x^0}{a_{11} - a_{11}^0} \Delta T = -\frac{\alpha_y - \alpha_y^0}{a_{12} - a_{12}^0} \Delta T = -\frac{\alpha_s - \alpha_s^0}{a_{13} - a_{13}^0} \Delta T = -k_1 \Delta T \quad (93)$$

### 2-2-4-2- حالت اعمال تنش عرضی

حال برای چندلایه حالتی را در نظر بگیرید که فقط تنش عرضی به آن وارد می‌شود و چندلایه دارای کرنش طولی و عرضی و برشی یکسان هم در قسمت آسیب دیده و هم در قسمت سالم باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \sigma_y^c, \quad \tau = 0 \quad (94)$$

بنابراین برای قسمت آسیب دیده داریم:

$$\bar{\varepsilon}_x^c = a_{12} \sigma_y^c + \alpha_x \Delta T \quad (95)$$

$$\bar{\varepsilon}_y^c = a_{22} \sigma_y^c + \alpha_y \Delta T \quad (96)$$

$$\bar{\nu}^c = a_{23} \sigma_y^c + \alpha_s \Delta T \quad (97)$$

همچنین برای قسمت سالم نیز خواهیم داشت:

$$\bar{\varepsilon}_x^c = a_{12}^0 \sigma_y^c + \alpha_x^0 \Delta T \quad (98)$$

$$\bar{\varepsilon}_y^c = a_{22}^0 \sigma_y^c + \alpha_y^0 \Delta T \quad (99)$$

$$\bar{\nu}^c = a_{23}^0 \sigma_y^c + \alpha_s^0 \Delta T \quad (100)$$

که در این معادلات تنش طولی و  $\bar{\varepsilon}_x^c$  و  $\bar{\varepsilon}_y^c$  و  $\bar{\nu}^c$  به ترتیب کرنش طولی و عرضی و برشی در شرایط بسته بودن ترک در حالت اعمال تنش عرضی هستند. حال با برابر قرار دادن معادلات (95) با (98) و (96) با (99) و (97) با (100) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_y^c = & -\frac{\alpha_x - \alpha_x^0}{a_{12} - a_{12}^0} \Delta T = -\frac{\alpha_y - \alpha_y^0}{a_{22} - a_{22}^0} \Delta T \\ = & -\frac{\alpha_s - \alpha_s^0}{a_{23} - a_{23}^0} \Delta T = -k_2 \Delta T \end{aligned} \quad (101)$$

### 2-2-4-2- حالت اعمال تنش برشی

حالتی را در نظر بگیرید که فقط تنش برشی به چندلایه وارد شده و چند لایه دارای کرنش طولی و عرضی و برشی یکسان هم در قسمت آسیب دیده و هم در قسمت سالم باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = \tau^c \quad (102)$$

برای قسمت آسیب دیده داریم:

$$\bar{\varepsilon}_x^c = a_{13} \tau^c + \alpha_x \Delta T \quad (103)$$

$$\bar{\varepsilon}_y^c = a_{23} \tau^c + \alpha_y \Delta T \quad (104)$$

$$\bar{\nu}^c = a_{33} \tau^c + \alpha_s \Delta T \quad (105)$$

همچنین برای قسمت سالم نیز داریم:

$$\bar{\varepsilon}_x^c = a_{13}^0 \tau^c + \alpha_x^0 \Delta T \quad (106)$$

$$ERR = \frac{1}{2} h [\sigma_x + k\sigma_y + k\tau + k_1\Delta T]^2 \left( \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} + \frac{h (\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2 \bar{S}_{22}^{(90)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} (\bar{S}_{22}^{(90)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{22}^{(\theta)} h^{(90)})} - \frac{(\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2 h}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} h^{(\theta)}} - a_{11}^0 \right) \quad (121)$$

## 7-2- تحلیل المان محدود

برای صحت سنجی روابط بالا از مدل المان محدود استفاده شده است. به این صورت که خواص ماده ارتوتروپ در نرم افزار انسیس به صورت جدول 1 وارد شده است.

جدول 1 خواص ماده‌ی ارتوتروپ ساخته شده از کربن اپوکسی

$E_A$ (GPa)	$E_T = E_t$ (GPa)	$\nu_A = \nu_a$	$\nu_T$	$\mu_A = \mu_a$ (GPa)	$\mu_T$ (GPa)	$\alpha_A$ (1/°C)	$\alpha_T$ (1/°C)
141.3	9.58	0.3	0.32	5	3.629	-1	2.6
						$\times 10^{-6}$	$\times 10^{-5}$

سپس یک لایه 4 لایه‌چینی با لایه‌چینی  $[\theta/90]_s$  مدل شده، که برای استفاده از شرایط تقارن از 4 لایه‌ی مربوطه تنها 2 لایه‌ی بالای آن مانند شکل 5 مدل شده است و در محل صفحه‌ی تقارن قیدی در راستای ضخامت گذاشته شده است.

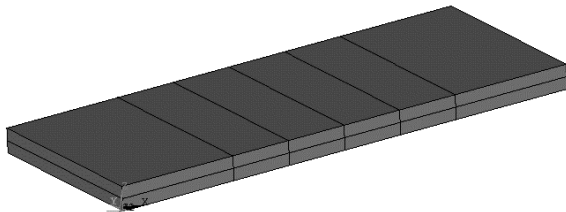


Fig. 5 Finite element geometry

شکل 5 هندسه‌ی المان محدود

در این تحلیل دانسیته جدایش نسبت طول جدایش بین لایه‌ای به طول چند لایه می‌باشد، و دانسیته ترک نسبت تعداد ترک بر یک میلی‌متر می‌باشد. از آنجا که مدل اولیه با ترک ماتریسی فرض شده و اثرات ترک ماتریسی در آن نادیده گرفته شده، لذا برای اینکه ترک ماتریسی اثرات منفی بر روی نتایج مورد بحث ما نگذارد ابتدا با دانسیته ترک 0.01 که در آن طول چندلایه 100 میلی‌متر می‌باشد مدل را ایجاد کرده و در ادامه شروع به افزایش دانسیته ترک می‌کنیم که در دانسیته ترک 0.1 که در آن طول چند لایه به 10 میلی‌متر می‌رسد هنوز هم نتایج خوبی حاصل می‌شود لذا مدل را با دانسیته‌ی ترک 0.1 که کوچکترین اندازه چندلایه را دارا می‌باشد و المان کمتری خواهد داشت ایجاد می‌کنیم. بنابراین برای مدل کردن حالت نامقید ابعاد به این صورت است که طول و عرض و ضخامت به ترتیب 10 و 4 و 1 میلی‌متر می‌باشند، که هر لایه دارای 0.25 میلی‌متر ضخامت می‌شود. برای مدل کردن حالت کرنش صفحه‌ای عمومی چون فرض بر یکسان بودن کرنش عرضی می‌باشد لذا عرض خیلی بزرگتر در نظر گرفته می‌شود به این صورت که طول و عرض و ضخامت به

## 5-2- محاسبه نرخ رهایی انرژی کرنشی برای حالت نامقید

در این حالت فرض بر این است که تنش‌های ثابت  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و  $\tau$  به ترتیب در راستای طولی و عرضی و برشی وارد می‌شود، اما کرنش چندلایه در راستای عرضی و برشی نامقید می‌باشد. با توجه به معادله‌ی مقاله مک کارتنی [1] برای نرخ رهایی انرژی کرنشی چندلایه داریم:

$$\frac{16\gamma W}{V} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial c} = 0 \quad (116)$$

که در آن با توجه به مدلی که ما فرض کرده‌ایم مقدار حجم  $V = 8LWh$  می‌شود. لذا با جایگذاری آن در رابطه بالا داریم:

$$2\gamma + Lh \frac{\partial \hat{G}}{\partial c} = 0 \quad (117)$$

که  $\gamma$  همان نرخ رهایی انرژی است. پس بنابراین برای محاسبه نرخ رهایی انرژی داریم:

$$ERR = -Lh \frac{\partial \hat{G}}{\partial c} = \frac{1}{2} Lh [\sigma_x + k\sigma_y + k\tau + k_1\Delta T]^2 \frac{\partial}{\partial c} (a_{11}) \quad (118)$$

و در نهایت با محاسبه مشتق  $a_{11}$  نسبت به طول جدایش رابطه ساده زیر برای محاسبه نرخ رهایی انرژی در حالت نامقید به دست می‌آید:

$$ERR = \frac{1}{2} h [\sigma_x + k\sigma_y + k\tau + k_1\Delta T]^2 \left( \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} - a_{11}^0 \right) \quad (119)$$

که در آن  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و  $\tau$  تنش‌های میانگین وارد شده به چندلایه و  $\Delta T = T_0 - T$  می‌باشد.  $k$  و  $k_1$  و  $k$  ثابت ترموالاستیک می‌باشند و به نوعی جزو خواص چندلایه هستند و از روابط (63) و (109) و (111) به دست می‌آیند.  $h^{(\theta)}$  و  $h$  به ترتیب ضخامت لایه  $\theta$  و ضخامت چندلایه می‌باشند.  $\bar{S}_{11}^{(\theta)}$  و  $a_{11}^0$  نیز به ترتیب درایه‌ی سطر و ستون اول ماتریس نرمی لایه  $\theta$  و ماتریس نرمی چندلایه سالم می‌باشند.

## 6-2- محاسبه نرخ رهایی انرژی کرنشی برای حالت کرنش صفحه‌ای عمومی

با توجه به رابطه (118) با مشتق گیری از درایه‌ی  $a_{11}$  حالت کرنش صفحه‌ای عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial c} (a_{11}) = \bar{S}_{11}^{(\theta)} \frac{h}{h^{(\theta)}} + \frac{h (\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2 \bar{S}_{22}^{(90)}}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} (\bar{S}_{22}^{(90)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{22}^{(\theta)} h^{(90)})} - \frac{(\bar{S}_{12}^{(\theta)})^2 h}{\bar{S}_{22}^{(\theta)} h^{(\theta)}} - a_{11}^0 \quad (120)$$

و با جایگذاری معادله فوق در معادله‌ی (118) نرخ رهایی انرژی برای حالت کرنش صفحه‌ای عمومی از معادله (121) به دست می‌آید.

## 3-7-2- محاسبه سفتی طولی

درایه‌های ماتریس نرمی چندلایه به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{\eta_{xz}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{yz}}{E_y} \\ \frac{\eta_{xz}}{E_x} & \frac{\eta_{yz}}{E_y} & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (123)$$

و انرژی کرنشی چندلایه نیز از معادله زیر به دست می‌آید:

$$SE = \frac{1}{2} \int [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} dV \quad (124)$$

با فرض ثابت ماندن حجم چندلایه در طول پروسه بارگذاری، و با توجه به رابطه‌ی (123) معادله‌ی بالا به صورت زیر می‌شود:

$$SE = \frac{V}{2} [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau] \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{\eta_{xz}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{yz}}{E_y} \\ \frac{\eta_{xz}}{E_x} & \frac{\eta_{yz}}{E_y} & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} \quad (125)$$

حال اگر چندلایه را فقط تحت تنش کششی طولی قرار دهیم و انرژی کرنشی آن را ثابت کنیم، با توجه به معادله‌ی بالا برای انرژی کرنشی داریم:

$$SE = \frac{V}{2 \times E_x} \sigma_x^2 \quad (126)$$

با مرتب کردن معادله بر حسب مدول الاستیسیته طولی داریم:

$$E_x = \frac{V \sigma_x^2}{2 \times SE} \quad (127)$$

که این همان معکوس درایه‌ی سطر و ستون اول ماتریس نرمی است.

## 3- نتایج

## 1-3- نرخ رهایی انرژی

در شکل 7 نتایج نرخ رهایی انرژی برای دو مدل تحلیلی و المان محدود در دو حالت نامقید و کرنش صفحه‌ای عمومی مقایسه شده است که با درصد خطای بسیار کمی (زیر 4 درصد) ثبت شده و همانطور که مشاهده می‌شود با تغییر زاویه لایه‌ی بیرونی در یک بارگذاری ثابت نرخ رهایی انرژی با شیب بسیار زیادی افزایش پیدا می‌کند و این امر نشان دهنده اهمیت بسیار زیاد نحوه لایه‌چینی در کامپوزیت‌ها می‌باشد. همچنین اگر توجه شود در حالت کرنش صفحه‌ای عمومی با شرایط بارگذاری یکسان نسبت به حالت نامقید نرخ رهایی انرژی بیشتر می‌باشد که این امر حاکی از آن است که جدایش ابتدا در لبه‌های آزاد که حالت نامقید دارن شروع شده و به سمت وسط چند لایه که حالت کرنش صفحه‌ای عمومی دارد نفوذ می‌کند.

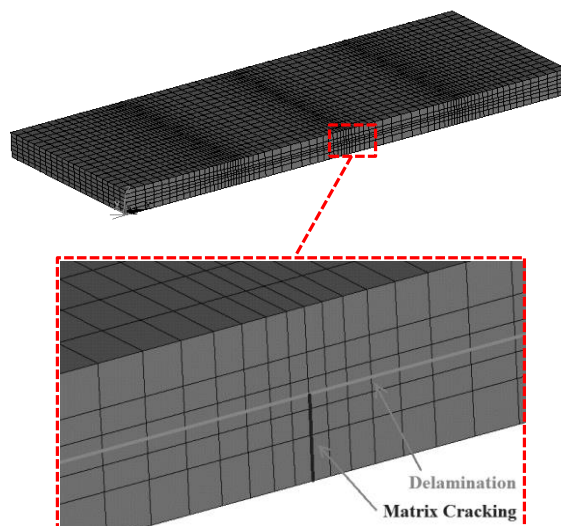


Fig. 6 Laminates mesh layout

شکل 6 نحوه‌ی شبکه بندی چند لایه

ترتیب 10 و 65 و 1 میلی‌متر می‌باشند سپس بعد از تکمیل ران عددی تنها نتایج 5 میلی‌متر وسط از عرض چندلایه استخراج می‌شود. محل چسبیدن لایه-ها به همدیگر گلو شده است و پس از ایجاد جدایش بین لایه‌های در مدل برای صفحات حاضر در محل جدایش قید کانتکت بدون اصطکاک تعریف شده است تا از تو رفتگی صفحات در همدیگر جلوگیری شود. بارگذاری نیز به صورت تنش می‌باشد.

## 1-7-2- استقلال شبکه بندی

برای شبکه بندی مدل همانطور که در شکل 6 مشاهده می‌کنید، از المان Solid 185 استفاده شده است. برای نحوه‌ی شبکه بندی چون تغییرات تنش ترک ماتریسی، در حالتی که فقط ترک ماتریسی وجود دارد، و تغییرات تنش نوک جدایش بین لایه‌های زیاد می‌باشد، لذا مدل به صورتی شبکه بندی شده است که در محل‌های یاد شده المان‌ها ریزتر باشد و هرچه از محل یاد شده دور می‌شویم المان‌ها درشت‌تر می‌شود تا المان کمتری استفاده شود. برای استقلال شبکه بندی مدل المان محدود از تعداد کم المان شروع کرده و با افزایش تعداد المان‌ها نرخ رهایی انرژی را با مقدار مرجع مقایسه کرده و نهایتاً در حالتی که 9600 المان وجود دارد بهترین نتیجه حاصل شده، که در این حالت مدل در راستای ضخامت دارای 6 المان در راستای عرض دارای 20 المان و در راستای طول دارای 80 المان می‌باشد.

## 2-7-2- محاسبه نرخ رهایی انرژی

نرخ رهایی انرژی به این صورت محاسبه می‌شود که ابتدا یک مدل که تنها دارای ترک ماتریسی می‌باشد ایجاد شده و بعد از اعمال تنش مورد نظر انرژی کرنشی آن ثبت می‌شود و سپس در مدل جدایش ایجاد می‌شود و مجدد تحت بارگذاری قبلی قرار گرفته و انرژی کرنشی آن نیز ثبت می‌شود، از تفاضل انرژی کرنشی 2 حالت قبلی تقسیم بر مساحت سطح جدایش نرخ رهایی انرژی به دست می‌آید.

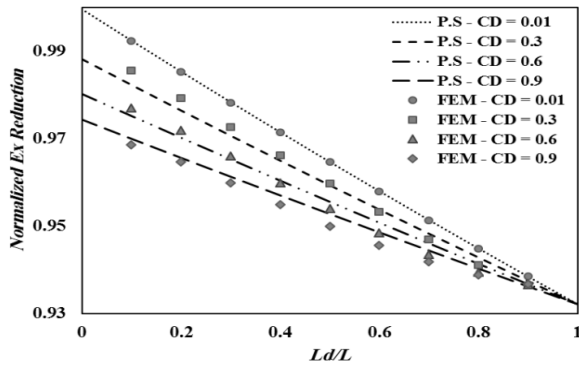
$$ERR = \frac{SE_{Damaged} - SE_{Undamaged}}{A_{Delamination}} \quad (122)$$

### 3-3- افت سفتی ناشی از دانسیته‌ی ترک

اگر نتایج مقاله فرخ آبادی و همکاران [18] در کد این پژوهش اعمال شود و نتایج افت سفتی طولی نسبت به دانسیته‌ی جدایش بین لایه‌های برای دانسیته ترک‌های مختلف در لایه‌چینی  $[0/90]_s$  ثبت شود، شکل 9 حاصل می‌شود که در آن به مقایسه نتایج تحلیلی و المان محدود پرداخته شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود افت سفتی طولی با دانسیته‌ی جدایش برای این لایه چینی رابطه‌ی کاملاً خطی دارد و با افزایش دانسیته ترک نیز افت سفتی رخ میدهد، اما با افزایش دانسیته‌ی جدایش رفته رفته تأثیر دانسیته ترک بر افت سفتی کم می‌شود و سفتی طولی به یک نقطه همگرا می‌شود.

### 3-4- پیش‌بینی شروع رشد جدایش بین لایه‌ای

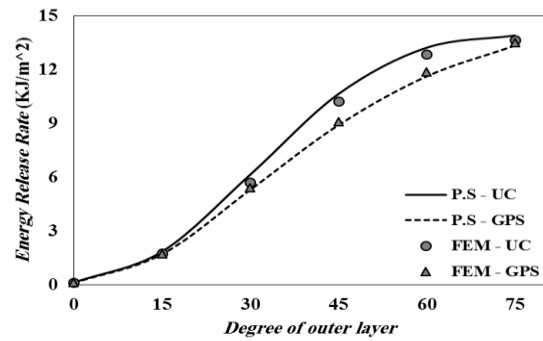
برای پیش‌بینی شروع رشد جدایش بین لایه‌های برای حالت نامقید ابتدا انرژی کرنشی بحرانی 286 ژول بر متر مربع را که در مرجع [17] مطرح شده و تقریباً بسیار نزدیک به خواص مورد بررسی این مقاله می‌باشد مقیاس و معیار قرار داده میشود. حال برای لایه چینی‌های مختلف مشخص می‌شود که تحت چه مقدار بارگذاری، جدایش بین لایه‌های رخ می‌دهد که نتایج در جدول 2 برای لایه چینی‌های با ضخامت مختلف ارائه شده است.



**Fig. 9** Modifications of normalized longitudinal elasticity modulus in the different delamination density in unconditional mode for various crack density

شکل 9 تغییرات مدول الاستیسیته طولی بی بعد شده در دانسیته‌ی جدایش بین لایه‌ای مختلف در حالت نامقید برای دانسیته‌ی ترک مختلف

همانطور که مشاهده میشود مقدار تنش مورد نیاز جهت شروع جدایش در لایه چینی متعامد با ضخامت هر لایه 0.25 میلی‌متر در محدوده 1 گیگاپاسکال می‌باشد که بلافاصله بعد از نامتعامد شدن آن به مقدار 0.1 گیگاپاسکال کاهش می‌یابد و پس از آن با تغییر زاویه‌ی لایه‌ی بیرونی، تغییرات تنش بسیار کمتر می‌باشد، که این امر نشان دهنده مقاومت بالای لایه چینی‌های متعامد نسبت به نامتعامد در برابر جدایش بین لایه‌ای می‌باشد و علت این امر نبود همبستگی بین کشش و برش در لایه چینی‌های متعامد می‌باشد. با توجه به اینکه در اینکده در لایه چینی متعامد تنش 1 گیگاپاسکال میتواند منجر به شکست الیاف قبل از شروع جدایش گردد، نتایج تنش شروع جدایش برای لایه چینی‌های با ضخامت بیشتر مورد محاسبه قرار گرفته و در جدول 2 ارائه گردیده است. همانگونه که در جدول مشاهده میشود اگر ضخامت چندلایه دوبرابر شود در لایه چینی متعامد، تنش بحرانی شروع جدایش به 275 مگاپاسکال کاهش می‌یابد و اگر در همان ضخامت دوبرابر برای کل چندلایه، نسبت ضخامت لایه 90 درجه، 3 برابر لایه صفر درجه باشد تنش بحرانی به 186 مگاپاسکال کاهش می‌یابد و این امر نشان دهنده تأثیر زیاد ضخامت در پیدایش انواع مودهای

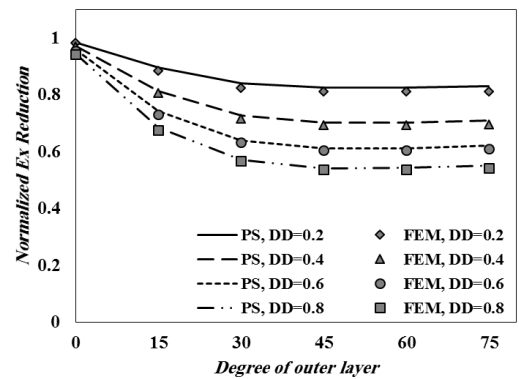


**Fig. 7** Changing the energy release rate for change the angle of the outer layer

شکل 7 تغییرات نرخ رهایی انرژی نسبت به تغییر زاویه‌ی لایه‌ی بیرونی

### 3-2- افت سفتی طولی

با توجه به روابط (23) و (127) که در بخش 2 ارائه شده در شکل 8 مدول الاستیسیته طولی بی بعد شده‌ی حاصل از روش تحلیلی با روش المان محدود برای لایه چینی‌های مختلف در دانسیته‌ی جدایش بین لایه‌های مختلف مقایسه شده است.



**Fig. 8** Modifications of normalized longitudinal elasticity modulus to change the angle of the outer layer in the different delamination density in unconditional mode

شکل 8 تغییرات مدول الاستیسیته طولی بی بعد شده نسبت به تغییر زاویه‌ی لایه‌ی بیرونی در دانسیته‌ی جدایش بین لایه‌ای مختلف در حالت نامقید

همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش زاویه‌ی لایه‌ی بیرونی تا 30 درجه درصد افت سفتی نسبت به سفتی اولیه تغییرات زیادی دارد ولی پس از آن شیب آن ملایم شده و پس از 45 درجه مقداری رو به افزایش است و در زاویه 45 درجه بیشترین درصد افت سفتی اتفاق می‌افتد و علت آن بیشتری اختلاف مدول برشی لایه‌های بیرونی با لایه‌های درونی در این لایه چینی می‌باشد. همچنین همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش دانسیته جدایش درصد افت سفتی کاهش می‌یابد و در دانسیته‌های جدایش پایین افت سفتی بیشتری رخ میدهد. این نمودار متعلق به حالت نامقید می‌باشد و نمودار حالت کرنش صفحه‌ای عمومی نیز دقیقاً شکلی این چنین دارد ولی با درصد بسیار کمی اختلاف که جهت جلوگیری از تکرار ارائه نشده است.

$$A9 = \bar{S}_{12}^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{11}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} h^{(90)} \quad (9\bar{1})$$

$$A10 = \bar{S}_{22}^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{22}^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} h^{(90)} \quad (10\bar{1})$$

## 6- مرجع

- [1] Camanho, P. and Matthews, F., "Delamination Onset Prediction in Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates" Journal of Composite Materials, Vol. 33, No. 10, pp. 906-927, 1999.
- [2] Wimmer, G. and Pettermann, H., "A Semi-Analytical Model for the Simulation of Delamination in Laminated Composites" Composites Science and Technology, Vol. 68, No. 12, pp. 2332-2339, 2008.
- [3] Blázquez, A., Mantić, V., Paris, F. and McCartney, L., "Stress State Characterization of Delamination Cracks in [0/90] Symmetric Laminates by Bem" International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, No. 6, pp. 1632-1662, 2008.
- [4] Chen, J.-F., Morozov, E. V. and Shankar, K., "Simulating Progressive Failure of Composite Laminates Including in-Ply and Delamination Damage Effects" Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 61, pp. 185-200, 2014.
- [5] Ahn, J. S. and Woo, K. S., "Delamination of Laminated Composite Plates by P-Convergent Partial Discrete-Layer Elements with Vcct" Mechanics Research Communications, Vol. 66, pp. 60-69, 2015.
- [6] O'Brien, T. K. and Hooper, S. J., "Local Delamination in Laminates with Angle Ply Matrix Cracks, Part I: Tension Tests and Stress Analysis" in: *Composite Materials: Fatigue and Fracture, Fourth Volume*, Eds.: ASTM International, 1993.
- [7] Takeda, N. and Ogiwara, S., "Initiation and Growth of Delamination from the Tips of Transverse Cracks in Cfrp Cross-Ply Laminates" Composites science and technology, Vol. 52, No. 3, pp. 309-318, 1994
- [8] Zubillaga, L., Turon, A., Renart, J., Costa, J. and Linde, P., "An Experimental Study on Matrix Crack Induced Delamination in Composite Laminates" Composite Structures, Vol. 127, pp. 10-17, 2015.
- [9] O'Brien, T. K., "Characterization of Delamination Onset and Growth in a Composite Laminate" in: *Damage in Composite Materials: Basic Mechanisms, Accumulation, Tolerance, and Characterization*, Eds.: ASTM International, 1982.
- [10] O'Brien, T. K., "Analysis of Local Delaminations and Their Influence on Composite Laminate Behavior" in: *Delamination and Debonding of Materials*, Eds.: ASTM International, 1985.
- [11] O'Brien, T., "Residual Thermal and Moisture Influences on the Analysis of Local Delaminations" Journal of Composites, Technology and Research, Vol. 14, No. 2, pp. 86-94, 1992.
- [12] Nairn, J. and Hu, S., "The Initiation and Growth of Delaminations Induced by Matrix Microcracks in Laminated Composites" International Journal of Fracture, Vol. 57, No. 1, pp. 1-24, 1992.
- [13] Kashtalyan, M. and Soutis, C., "Analysis of Local Delaminations in Composite Laminates with Angle-Ply Matrix Cracks" International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 6, pp. 1515-1537, 2002.
- [14] Farrokhhabadi, A., Hosseini-Toudeshky, H. and Mohammadi, B., "A Generalized Micromechanical Approach for the Analysis of Transverse Crack and Induced Delamination in Composite Laminates" Composite Structures, Vol. 93, No. 2, pp. 443-455, 2011.
- [15] McCartney, L., Blázquez, A. and Paris, F., "Energy-Based Delamination Theory for Biaxial Loading in the Presence of Thermal Stresses" Composites Science and Technology, Vol. 72, No. 14, pp. 1753-1766, 2012.
- [16] Zubillaga, L., Turon, A., Maimí, P., Costa, J., Mahdi, S. and Linde, P., "An Energy Based Failure Criterion for Matrix Crack Induced Delamination in Laminated Composite Structures" Composite Structures, Vol. 112, pp. 339-344, 2014.
- [17] Kashtalyan, M. and Soutis, C., "19 - Analysis of Delamination in Laminates with Angle-Ply Matrix Cracks: Onset of Damage and Residual Stiffness Properties" in: *Structural Integrity and Durability of Advanced Composites*, Eds., pp. 479-512: Woodhead Publishing, 2015.
- [18] Farrokhhabadi, A., Mohammadi, B. and Hosseini-Toudeshky, H., "A Simplified Micromechanics Model for Predicting the Stiffness

خرابی می‌باشد. لازم به ذکر است که در این زمینه نویسندگان موفق به یافتن نتیجه آزمایشگاهی جهت مقایسه نتایج خود با آن نشدند ولی نتیجه لایه چینی متعامد با مرجع [15] که مقاله ای معتبر می‌باشد کاملا همخوانی دارد.

جدول 2 تنش اعمالی جهت شروع رشد جدایش بین لایه‌های در لایه چینی‌های مختلف

Table 2 Applicable tension to begin the delamination in different layers

لایه چینی	[60/90] <sub>s</sub>	[60/90] <sub>s</sub>	[45/90] <sub>s</sub>	[30/90] <sub>s</sub>	[0/90] <sub>s</sub>
تنش (GPa) (hθ=0.25mm)	0.105	0.108	0.12	0.158	1.091
تنش (GPa) (hθ=0.5mm)	0.061	0.063	0.07	0.09	0.275
تنش (GPa) (hθ=0.75mm)	0.04	0.041	0.046	0.059	0.186

## 4- جمع بندی

در این مقاله با استفاده از روش برپایه انرژی به پیش‌بینی رشد جدایش بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی در مواد مرکب لایه‌ای متقارن با لایه چینی عمومی تحت تنش‌های داخل صفحه مورد مطالعه قرار گرفت. بدین منظور برای جدایش دو حالت کلی نامقید و کرنش صفحه‌ای عمومی در نظر گرفته شد و افت سفتی ناشی از وجود ترک ماتریسی و جدایش بین لایه‌های بصورت همزمان محاسبه و سفتی طولی کاهش یافته برای آن به دست آمد. همچنین، تعدادی ثوابت ترموالاستیک که فقط به خواص ماده‌ی تک لایه‌ها وابسته هستند و خود به نوعی جزو خواص ماده می‌باشند به دست آمده و پس از مرتبط ساختن درایه‌های ماتریس نرمی با یکدیگر توسط این ثوابت، معادله‌های ساده برای انرژی آزاد گیبس و نرخ رهایی انرژی ناشی از رشد جدایش استخراج گردید و جهت اطمینان از صحت روابط توسعه یافته در این مقاله، از نرم افزار المان محدود استفاده گردید. نتایج بدست آمده نشان داد که تطابق قابل قبولی بین روش توسعه یافته و روش المان محدود در پیش‌بینی افت سفتی و نرخ رهایی انرژی چندلایه‌های حاوی جدایش وجود دارد.

## 5- پیوست

$$A1 = \left( \bar{S}_{13}^{(\theta)} \right)^2 - \bar{S}_{11}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} \quad (1\bar{1})$$

$$A2 = \bar{S}_{13}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} - \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} \quad (2\bar{1})$$

$$A3 = \alpha_x^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} - \alpha_x^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} \quad (3\bar{1})$$

$$A4 = \alpha_y^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} - \alpha_y^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} \quad (4\bar{1})$$

$$A5 = \bar{S}_{12}^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{12}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} h^{(90)} - \bar{S}_{13}^{(\theta)} \bar{S}_{23}^{(\theta)} h^{(90)} \quad (5\bar{1})$$

$$A6 = \bar{S}_{22}^{(90)} \bar{S}_{33}^{(\theta)} h^{(\theta)} + \bar{S}_{22}^{(\theta)} \bar{S}_{33}^{(90)} h^{(90)} - \left( \bar{S}_{23}^{(\theta)} \right)^2 h^{(90)} \quad (6\bar{1})$$

$$A7 = \alpha_x^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{11}^{(\theta)} - \alpha_x^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} \quad (7\bar{1})$$

$$A8 = \alpha_y^{(90)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} + \alpha_s^{(\theta)} \bar{S}_{12}^{(\theta)} - \alpha_y^{(\theta)} \bar{S}_{13}^{(\theta)} \quad (8\bar{1})$$

- Degradation in Symmetric Composite Laminates“ *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 38, No. 11, pp. 1334-1346, 2015.
- [19] McCartney, L., “Model to Predict Effects of Triaxial Loading on Ply Cracking in General Symmetric Laminates“ *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 12, pp. 2255-2279, 2000.
- [20] McCartney, L., “Physically Based Damage Models for Laminated Composites“ *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, Vol. 217, No. 3, pp. 163-199, 2003.
- [21] Farrokhhabadi, A., Hosseini-Toudeshky, H. and Mohammadi, B., “Damage Analysis of Laminated Composites Using a New Coupled Micro-Meso Approach“ *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 33, No. 7, pp. 420-435, 2010.
- [22] McCartney, L. N., “Mechanics for the Growth of Bridged Cracks in Composite Materials: Part I. Basic Principles“ *Journal of Composites, Technology and Research*, Vol. 14, No. 3, pp. 133-146, 1992.
- [23] McCartney, L., “Energy-Based Prediction of Failure in General Symmetric Laminates“ *Engineering fracture mechanics*, Vol. 72, No. 6, pp. 909-930, 2005.
- [24] Paris, F. and Cañas, J., “Boundary Element Method: Fundamentals and Applications“, Oxford University Press, USA, 1997.
- [25] Tong, J., Guild, F., Ogin, S. and Smith, P., “On Matrix Crack Growth in Quasi-Isotropic Laminates—I. Experimental Investigation“ *Composites Science and Technology*, Vol. 57, No. 11, pp. 1527-1535, 1997.
- [26] McCartney, L., “Generalised Framework for the Prediction of Ply Cracking in Any Symmetric Laminate Subject to General in-Plane Loading“ *National Physical Laboratory(UK)*, pp. 40, 1996.
- [27] Nairn, J. A., “Fracture Mechanics of Composites with Residual Thermal Stresses“ *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No. 4, pp. 804-810, 1997.
- [28] Schoeppner, G. and Pagano, N., “Stress Fields and Energy Release Rates in Cross-Ply Laminates“ *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 11, pp. 1025-1055, 1998.
- [29] McCartney, L., “Theory of Stress Transfer in a 0—90—0 Cross-Ply Laminate Containing a Parallel Array of Transverse Cracks“ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 40, No. 1, pp. 27-68, 1992.
- [30] Nairn, J. A., “The Strain Energy Release Rate of Composite Microcracking: A Variational Approach“ *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, No. 11, pp. 1106-1129, 1989
- [31] Raju, L., Crews, J. and Aminpour, M., “Convergence of Strain Energy Release Rate Components for Edge-Delaminated Composite Laminates“ *Engineering fracture mechanics*, Vol. 30, No. 3, pp. 383-396, 1988.

Archive