



نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری کامپوزیت

http://jstc.iust.ac.ir



## رهیافت هیبریدی جدید برای استخراج خواص پلاستیکی به کمک فروروی نانو، تحلیل المان‌های محدود و آنالیز ابعادی اصلاح‌شده

احسان بزّاز<sup>1</sup>، ابوالفضل درویشه<sup>2\*</sup>، مجید علی‌طاوولی<sup>2</sup>، مهدی یارمحمدتوسکی<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، پردیس دانشگاهی، دانشگاه گیلان، رشت

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی تهران جنوب، تهران

\* رشت، صندوق پستی 41668-13949 adarvizeh@guilan.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

بدست آوردن خواص مکانیکی به کمک نتایج حاصل از آزمایش، به عنوان یکی از عمده‌ترین چالش‌ها در زمینه تست‌های فروروی نانو مطرح است. استفاده از روش هیبرید بوسیله ترکیب نتایج تجربی فروروی نانو با آنالیز المان‌های محدود، یکی از راه‌حل‌های مؤثر در این زمینه می‌باشد. لذا به منظور استخراج خواص مکانیکی مواد به کمک نتایج تست فروروی نانو، یک روش صریح مبتنی بر روش اصلاح شده آنالیز ابعادی در این مقاله توسعه داده شده است. مزیت عمده استفاده از این روش نسبت به روش‌های موجود در ارائه جواب‌های منحصر به فرد بدون نیاز به روش‌های تکرار و همچنین کاهش قابل توجه در حجم محاسبات می‌باشد. در این مقاله با اعمال این روش در مورد تیتانیوم خالص، خواص حالت پلاستیک (تنش تسلیم و مدول سخت شوندگی کرنشی) برای یک نمونه محاسبه شده است. برای اولین بار آنالیز ابعادی برای الگوی معادله ساختاری دو خطی (با دو پارامتر بی‌بعد) مورد استفاده قرار گرفت و در تحلیل المان محدود، فرم کلی معادله جانسون-کوک بکار رفت و مهمترین خاصیت حالت پلاستیک یعنی تنش تسلیم با تطابق بسیار خوبی با مقادیر مرجع استخراج گردید. در جریان حل، روش جدیدی در آنالیز خطا بر مبنای محاسبه برآیند خطای کلی و بدست آوردن اکسترمم خطاها در بازه تمام فضای پارامتری با موفقیت توسعه داده شده و به کار گرفته شد. همچنین برای کالیبره نمودن حل به تنظیم شرایط مهم مسئله مانند شعاع نوک فرورونده اقدام شده و نتیجه‌گیری شده است که استفاده از شعاع بالاتر از 200 نانومتر منجر به جواب منطقی‌تری با واقعیت می‌شود.

دریافت: 97/9/3

پذیرش: 97/11/5

### کلیدواژگان:

روش هیبریدی

آنالیز ابعادی

آنالیز ابعادی اصلاح شده

مینیمم برآیند خطا

خواص تیتانیوم

## New hybrid approach in obtaining plastic properties by nanoindentation, finite element method and modified dimensional analysis

Ehsan Bazzaz<sup>1</sup>, Abolfazl Darvizeh<sup>2\*</sup>, Majid AliTavoli<sup>2</sup>, Mehdi Yarmohammad Tooski<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, University Campus, University of Guilan, Rasht, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University south Tehran Branch, Tehran, Iran

\* P.O.B. 41668-13949 Rasht, Iran, adarvizeh@guilan.ac.ir

### Keywords

Hybrid method  
Dimensional analysis  
Modified dimensional analysis  
Minimum resultant error  
Titanium properties

### Abstract

One of the main challenges in nanoindentation tests is to work-out a method in order to obtain the material properties through the test results. Using a hybrid method which combines the experimental results of nanoindentation tests with FEM analysis is considered as one of the main solutions for this problem. In order to calculate the mechanical properties, an explicit method was developed on the basis of modified dimensional analysis method. The main advantage of this method is to provide unique answers without any need for iteration so that it would minimize the calculations significantly. In this paper, the mechanical properties of Titanium sample in plastic phase (yield stress and strain hardening Module) are calculated by utilizing this method. For the first time, the dimensional analysis was used for the bilinear constitutive equation (with two dimensionless parameters), and in the finite element analysis, the general form of the Johnson-Cook equation was utilized. The most important property of plastic state, namely, the yield stress, was extracted in proper agreement with reference values. In the process of solving, a new method for error analysis based on calculating the resultant errors and determining the extremum error in the entire range of parameters was successfully developed and applied. Finally, in order to calibrate the solution, it was also proposed to set up the critical conditions of the problem, such as the indenter tip radius. It was concluded that the use of a radius more than 200 nm leads to a more consistent response to the experiment.

Please cite this article using:

Bazzaz, E. Darvizeh, A. AliTavoli, M and Yarmohammad Tooski, M., "New hybrid approach in obtaining plastic properties by nanoindentation, finite element method and modified dimensional analysis", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 3, pp. 451-464, 2019.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

1- مقدمه

روش‌های اندازه‌گیری بر مبنای فروروی در مقیاس نانو که منحنی پیوسته‌ای از تغییرات نیروی فروروی  $P$  به صورت تابعی از عمق فروروی  $h$  بدست می‌دهند، در سال‌های اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته‌اند. این توجه را می‌توان عمدتاً به غیر مخرب بودن و کاربرد این روش برای لایه‌های پوشش میکرونی نسبت داد که باعث گسترش کاربردهای قابل ملاحظه آن در صنایع مختلف شده است [1]. از طرفی بسیاری از این کاربردها متأثر از محدودیت‌های ناشی از پیچیدگی روش و دشوار بودن ارائه تفسیر روشنی از نتایج تست می‌باشد [2]. یکی از مهمترین کاربردهای این روش در بدست آوردن خواص مکانیکی ماده مورد آزمایش نظیر: مدول الاستیسیته، تنش تسلیم، مدول سخت شونده‌گی کرنشی<sup>1</sup> [3] و توان سخت‌شوندگی کرنشی<sup>2</sup> و به همین ترتیب چقرمگی شکست<sup>3</sup> می‌باشد [4].

در این زمینه مطالعات جامع تحلیلی و محاسباتی زیادی برای توضیح مکانیک تماسی و نحوه تغییر شکل در حین فرآیند فروروی نانو<sup>4</sup> انجام شده که هدف از آن عمدتاً استخراج خواص مکانیکی مواد از منحنی نیرو-عمق فروروی بوده است [5-10]. به عنوان مثال می‌توان سختی و مدول الاستیسیته را با استفاده از ماکزیمم بار و شیب منحنی باربرداری مطابق با روش پیشنهادی اولیور و فار<sup>5</sup> (1992) [5] و دورنر و نیکس<sup>6</sup> (1986) [11] بدست آورد. این راهکارها بر اساس حل تحلیلی ارائه شده توسط اسندون برای مسئله تماس ارائه شده است [12]. پس از دوران اولیه توسعه فرآیند فروروی نانو، روش‌های دیگری در طول دهه 90 و دهه اول قرن حاضر میلادی برای استخراج خواص حالت پلاستیک ابداع شده‌اند که مبنای همه آنها مقایسه نتایج شبیه سازی المان محدود با نتایج حاصل از تست‌های تجربی است. در این روش، پارامترهای مؤثر بر شکل منحنی بارگذاری و باربرداری حاصل از نتایج المان محدود را می‌توان بدست آورد. دانو و همکاران [8] موفق به ارائه مدلی تحلیلی شده‌اند که با استفاده از آن می‌توان ارتباط بین خواص مکانیکی و نتایج تست فروروی نانو را برقرار نمود لیکن این روش به هیچ وجه حالت عمومی نداشته و به سختی همگرا می‌شود. با استفاده از روش ارائه شده توسط جیاناکوپولوس و سورش<sup>7</sup> [9] می‌توان خواص الاستیک و پلاستیک و همچنین با استفاده از روش سورش و جیاناکوپولوس<sup>8</sup> [13] می‌توان تنش پسماند را محاسبه نمود. در ادامه این کار اشتاوس و همکاران [14] از روش آنالیز معکوس<sup>9</sup> برای بدست آوردن رفتار الاستیک-پلاستیک لایه‌های نازک، پوشش‌ها و وسایل میکروالکترومکانیکی استفاده نمودند. با مرتفع نشدن اشکالات ساختاری مربوط به حل این مسئله، تلاش‌ها در این زمینه توسط بسیاری از محققین در دهه اخیر نیز ادامه یافته است.

مطالعات گسترده در مورد روش‌های حل عددی نشان می‌دهد که منطبق ترین روشی که در این زمینه کارائی خود را به اثبات رسانده است روش آنالیز ابعادی است. چنگ و چنگ [2, 6] جزو نخستین محققانی است که موفق به اعمال روش آنالیز ابعادی برای استخراج پارامترهای بی بعد فرآیند فروروی نانو شده‌اند. با وجود اینکه این روش از نظر تئوری قابلیت حل کامل و منحصر به فرد را داراست اما استخراج نتایج دقیق از آن در عمل با مشکل مواجه بوده است. یکی از مهمترین چالش‌ها در این زمینه از منطبق نبودن کامل حل المان محدود با نتایج تجربی به خصوص از نظر شکل منحنی نیرو-فروروی ناشی

می‌شود. تعدادی از محققین با ایجاد تنوع در شرایط آزمایش مانند تغییر در نوع فرورونده سعی نموده‌اند این مشکل را مرتفع نمایند. همچنین برای حل این مشکل ناچار به حل مسائل پیچیده غیر خطی چند مجهولی بوده‌اند که مغایرت‌های مذکور را پدید می‌آورد. برای مثال هاینریش و همکاران [15] موفق به ارائه الگوریتمی به نام الگوریتم آنالیز معکوس برای ایجاد همگرایی در حل و بدست آوردن خواص مکانیکی شده‌اند و این کار توسط گروه سورش و جیاناکوپولوس نیز دنبال شده است. این الگوریتم توسط تعدادی از محققین مانند آنتونس و همکاران [16] بعداً به همین منظور به کار گرفته شده است. لازم به ذکر است که اکثر روش‌های گفته شده بر مبنای تکرار عمل می‌کنند و از تعداد زیادی پارامتر بی بعد برای رسیدن به جواب استفاده می‌کنند لذا در عین حال بایستی شرایط همگرایی را نیز ارضا نمایند.

در کل مشکل استخراج خواص مکانیکی از نتایج فروروی نانو تاکنون با برجا مانده و راه حل قطعی برای این مسئله ارائه نشده است. در این مقاله با استفاده از رویکردی جدید در روش آنالیز ابعادی ابتدا روش را ساده سازی نموده و سپس با انجام حجم قابل قبولی از محاسبات به محاسبه مقادیر پارامترهای رفتار پلاستیک به کمک نتایج تجربی و تحلیل المان محدود پرداخته می‌شود. برای این منظور یک روش هیبرید که نتایج تجربی را با حل المان محدود پیوند می‌دهد توسعه داده شده است. در این روش با اعمال فرضیات جدید در آنالیز ابعادی و مینیمم نمودن تعدادی از خطاهای تعریف شده، جواب‌های قابل اعتماد و منحصر به فردی بدست می‌آید و بدین وسیله راه حلی برای یکی از چالش‌های عمده مکانیک مواد نانو ارائه می‌شود. علاوه بر این تمامی این نتایج بر اساس حداقل داده‌های لازم یعنی یک منحنی نیرو-عمق فروروی بدست آمده از یک نوع فرورونده حاصل خواهد شد.

2- روش آنالیز ابعادی اصلاح شده

روش آنالیز ابعادی متداول در دوران اولیه تحلیل فروروی نانو عمدتاً بر مبنای استفاده از معادله ساختاری توانی پایه گذاری شده است [17]. این رویکرد به دلیل اعتقاد برخی از محققان مبنی بر اینکه این معادله ساختاری نتایج بهتری نسبت معادله دوخطی<sup>10</sup> بدست می‌دهد دنبال شده است [18]. با روش حاضر استفاده از هر دو نوع معادله ساختاری مورد آزمایش قرار گرفته و نشان داده شده است که استفاده از هر دو فرم معادله ساختاری منجر به نتایجی با دقت قابل قبول می‌گردد. با توجه به استفاده از معادله دوخطی برای بیان رفتار مواد خالص در تعداد زیادی از کارهای تحقیقی معتبر مانند کار لیچینیچی [19]، پاتل و کالیدیندی [20]، پلتیه و همکاران [18] و کار بعدی پلتیه [21]، لذا در این مقاله، معادله دوخطی برای بیان مشخصه رفتاری ماده خالص مورد استفاده قرار گرفته است.

تعریف پارامترهای مجهول به عنوان کاندید برای بی بعدسازی، اساسی ترین مسئله در فرمولسازی روش آنالیز ابعادی است. تقریباً در تمامی کارهای قبلی از سه پارامتر، یکی در ناحیه الاستیک (مدول یانگ) و دو تای دیگر در ناحیه پلاستیک (ضریب سخت شونده‌گی کرنشی و توان سخت شونده‌گی کرنشی) استفاده شده است که اولی با استفاده از منحنی بارگذاری و دو پارامتر بعدی با استفاده از منحنی فاز باربرداری (یا هر دو منحنی) بدست می‌آیند [2, 10]. در شکل 1 نمونه‌ای از منحنی حاصل از فرآیند فروروی نانو نشان داده شده

<sup>6</sup> Doerner and Nix  
<sup>7</sup> Giannakopoulos and Suresh  
<sup>8</sup> Suresh and Giannakopoulos  
<sup>9</sup> Reverse Analysis  
<sup>10</sup> Bilinear Constitutive Equation

<sup>1</sup> Strain hardening module  
<sup>2</sup> Strain hardening exponent  
<sup>3</sup> Fracture toughness  
<sup>4</sup> Nanoindentation  
<sup>5</sup> Oliver and Pharr

اصولا کار استخراج پارامترهای بی بعد به کمک تئوری باکینگهام- $\Pi$  از طریق آنالیز ابعادی انجام می‌شود که در این مقاله برای اولین بار، این تئوری برای معادله ساختاری دوخطی اعمال گردید. طبق قواعد این تئوری دو پارامتر بی‌بعد برای این منظور کافی خواهد بود که یکی از پارامترها وابسته به داده‌های فاز بارگذاری و دیگری وابسته به داده‌های هر دو فاز بارگذاری و باربرداری انتخاب می‌شود. برای انجام این کار ابتدا معادله ساختاری را به فرم کلی دو خطی ذیل می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \text{For } \sigma \leq Y \\ \sigma = D + B\varepsilon & \text{For } \sigma \geq Y \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $\sigma$  و  $\varepsilon$  به ترتیب تنش و کرنش،  $E$  مدول الاستیسیته و  $D$  و  $B$  به ترتیب ضرایب معادله خطی ناحیه پلاستیک می‌باشد. استفاده از این فرم معادلات در نرم افزارهای المان محدود برای آنالیز فرآیند فروروی نانو منجر به تولید منحنی تغییرات نیرو بر حسب عمق فروروی خواهد شد که نشان دهنده تابعی با وابستگی‌های زیر می‌باشد:

$$P = f(D, B, E, h, v, \alpha) \quad (2)$$

که در آن  $P$  نیروی فروروی به عنوان تابع و  $f$  نشان‌دهنده رژیم وابستگی دیگر پارامترها به تابع می‌باشد. پارامترهای  $\alpha$  و  $v, h$  به ترتیب، عمق فروروی، ضریب پواسون و زاویه مخروط فرورونده را نشان می‌دهند. نظر به اینکه در تحلیل حاضر از یک ماده و یک نوع فرورونده استفاده خواهد شد لذا دو پارامتر اخیر مقادیری ثابت خواهند بود و تأثیری در تعیین پارامترهای بی‌بعد نخواهند داشت. بنابراین با استفاده از اصول آنالیز ابعادی و تئوری باکینگهام- $\Pi$  می‌توان پارامترهای زیر را پیشنهاد نمود:

$$\begin{cases} \Pi_1 = E^a h^b P \\ \Pi_2 = E^c h^d D \\ \Pi_3 = E^e h^f B \end{cases} \quad (3)$$

توان‌های  $a, b, c, d, e, f$  را می‌توان با استفاده از قواعد آنالیز ابعادی به گونه‌ای بدست آورد که پارامترهای سه گانه فوق بی‌بعد شوند. پس از حل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Pi_1 = \frac{P}{Eh^2} \\ \Pi_2 = \frac{D}{E} \\ \Pi_3 = \frac{B}{E} \end{cases} \quad (4)$$

و رابطه زیر را می‌توان بین این سه پارامتر نوشت:

$$\Pi_1 = f_1(\Pi_2, \Pi_3, v, \alpha) \quad (5)$$

لذا می‌توان یکی از روابط اصلی را بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\Pi_\alpha \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, v, \theta \right) = \frac{P}{Eh^2} = \frac{C}{E} \quad (6)$$

پارامتر  $C$  به عنوان ضریب منحنی سهمی معادله منحنی بارگذاری به صورت  $P = Ch^2$  می‌باشد. فرم معادله درجه دو در تطابق کامل با نتایج تجربی تعداد زیادی آزمایش قرار دارد و پارامتر  $C$  به عنوان یکی از اساسی‌ترین شاخصه‌های روش آنالیز ابعادی شناخته می‌شود [7, 9]. برای بدست آوردن این پارامتر می‌توان از داده‌های تجربی و آنالیز عددی استفاده نمود و برای این کار روش مینیمم مربعات خطا<sup>3</sup> نتایج خوبی به دست می‌دهد. مطابق با این روش وقتی داده‌های حاصله، با منحنی سهمی ایده آل مقایسه شود مقدار خطا در هر نقطه از رابطه  $e_p = P_i - Ch_i^2$  بدست می‌آید و بنابراین جمع مربعات این مقدار خطا برای کلیه نقاط برابر خواهد بود با:

است. با توجه به اینکه معمولاً منحنی باربرداری و به خصوص نقطه انتهایی این منحنی تفاوت زیادی با نتایج تجربی دارد لذا این مسئله یکی از منابع مهم واگرایی در حل خواهد شد.

در روش اصلاح شده آنالیز ابعادی، مدول الاستیسیته با استفاده از روش‌های متداول که دقت بالایی دارند بدست می‌آید زیرا قبلاً ثابت شده است که این پارامتر را می‌توان با استفاده از شیب ابتدای منحنی باربرداری به طور مستقیم بدست آورد [6]. بنابراین مدول یانگ جزء پارامترهای معلوم مسئله در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب از منحنی‌های بارگذاری و باربرداری برای بدست آوردن دو پارامتر حالت پلاستیک استفاده می‌گردد. منحنی اصلی در ناحیه نگهداری نیرو<sup>1</sup> دچار پدیده خزش می‌شود که این مقدار در محاسبات مربوط به انرژی نباید در نظر گرفته شود و باید از منحنی اصلاح شده با حذف مقدار خزش استفاده نمود.

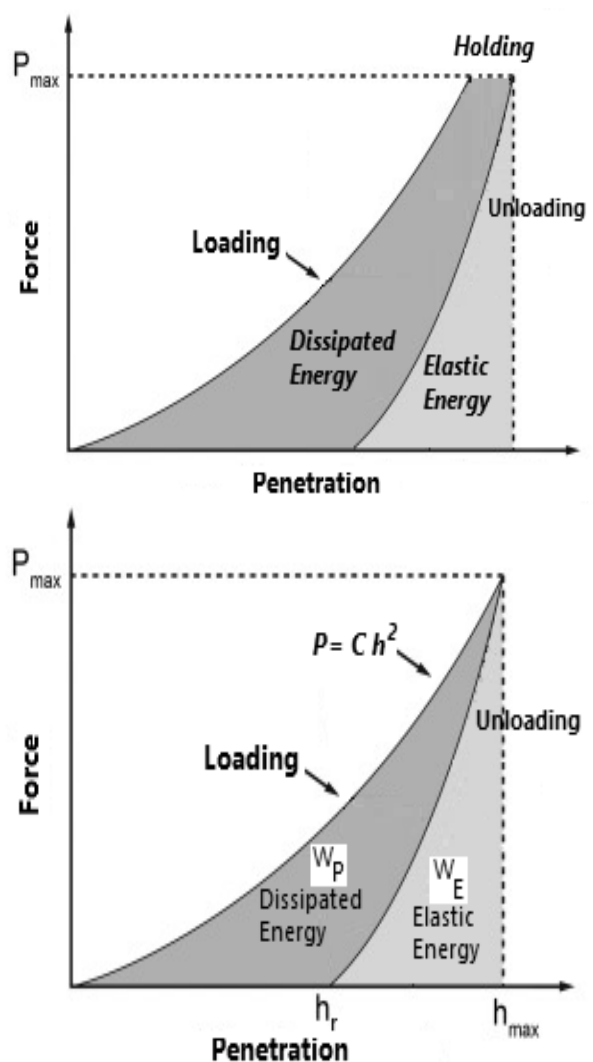


Fig. 1 Nanoindentation loading and unloading curves and energy of each course, with creep (top) and without creep (bottom)

شکل 1 منحنی‌های بارگذاری و باربرداری در فرآیند فروروی نانو و انرژی‌های فاز-های مختلف در حالت با خزش (منحنی بالا) و بدون خزش (منحنی پایین)

<sup>1</sup> Holding course

<sup>2</sup> Buckingham-  $\Pi$  Theorem

<sup>3</sup> Error Least square Method

آنها را با هم برابر در نظر گرفت [8]. با این جایگزینی می‌توان رابطه اخیر را چنین بازنویسی کرد:

$$\Pi_{\omega} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \nu, \theta \right) = \frac{W_T - W_U}{W_T} = \frac{W_P}{W_T} \quad (16)$$

که در آن  $W_T$  انرژی حالت بارگذاری،  $W_U$  انرژی حالت باربرداری و  $W_P$  تفاضل این دو انرژی می‌باشد. لازم به ذکر است که نسبت  $W_P/W_T$  خود برابر با نسبت مساحت‌های محصور بین منحنی‌های رفت و برگشت به مساحت زیر منحنی رفت مطابق با شکل 1 می‌باشد. این مقادیر را می‌توان با انتگرال‌گیری از منحنی P-h به صورت:  $W_U = \int_{Unloading} Pdh$  و  $W_T = \int_{Loading} Pdh$  بدست آورد.

با توجه به اینکه حل همزمان معادلات غیر خطی و فاقد ضابطه مشخص فوق (یعنی معادلات عددی) با روش‌های کلاسیک مستلزم تعداد زیادی تکرار و حجم بسیار بالائی محاسبات می‌باشد لذا از روش آنالیز ابعادی اصلاح شده MDAM<sup>1</sup> برای این منظور استفاده می‌شود. برای این کار دو دسته معادلات زیر باید به طور همزمان حل شوند:

$$\begin{cases} \frac{C}{E} = \left( \frac{C}{E} \right)^{exp.} \\ \Pi_{\alpha} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \nu, \theta \right) = \frac{C}{E} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{W_P}{W_T} = \left( \frac{W_P}{W_T} \right)^{exp.} \\ \Pi_{\omega} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \nu, \theta \right) = \frac{W_P}{W_T} \end{cases} \quad (18)$$

در این معادلات بالانویس exp. نشان‌دهنده داده‌های حاصل از نتایج آزمایش می‌باشد. حل هر یک از دستگاه معادلات فوق از نظر تئوری منجر به بینهایت جواب به صورت زوج‌های (D,B) خواهد شد که می‌توانند شرط برابر بودن  $\Pi_{\alpha}$  یا  $\Pi_{\omega}$  حاصل از تحلیل المان محدود را با مقادیر تجربی برآورده نمایند. بزرگترین چالش در این روش، انتخاب زوجی از پارامترهای معادله ساختاری خواهد بود که نشان‌دهنده خواص واقعی ماده می‌باشد. این زوج جواب، زوجی خواهد بود که به طور همزمان مقادیر  $\Pi_{\alpha}$  و  $\Pi_{\omega}$  برابر با مقادیر متناظر برگرفته از نتایج تجربی را دارا باشد. به عبارت دیگر این زوج، جواب دستگاه معادلات زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \frac{C}{E} = \left( \frac{C}{E} \right)^{exp.}, & \frac{W_P}{W_T} = \left( \frac{W_P}{W_T} \right)^{exp.} \\ \Pi_{\alpha} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \nu, \theta \right) = \frac{C}{E} \\ \Pi_{\omega} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \nu, \theta \right) = \frac{W_P}{W_T} \end{cases} \quad (19)$$

دستگاه معادلات فوق از نوع غیر خطی است که باید با استفاده از روش‌های مناسب محاسبات عددی حل شود. وجود جواب برای دستگاه معادلات فوق مستلزم اینست که حل المان محدود باید قادر باشد نتایجی ایجاد نماید که منحنی‌های بارگذاری و باربرداری آنها با نتایج تجربی کاملاً منطبق باشد. از آنجایی که نتایج تعداد زیادی تحلیل و کارهای تحقیقاتی چنین انطباقی را نشان نمی‌دهد لذا دسته جواب‌های دستگاه‌های معادلات فوق غالباً نقطه

$$S_r = \sum_{i=1}^n (P_i - Ch_i^2)^2 \quad (7)$$

با بهینه‌سازی مقدار جمع مربعات خطا (کمینه کردن)، رابطه زیر

$$\frac{dS_r}{dC} = \sum_{i=1}^n -2h_i^2(P_i - Ch_i^2) = 0 \quad (8)$$

حاصل می‌شود و در نتیجه می‌توان مقدار پارامتر C را با شرط مینیمم بودن مقدار خطا از رابطه زیر بدست آورد:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n P_i h_i^2}{\sum_{i=1}^n h_i^4} \quad (9)$$

پس از تعیین پارامتر بی بعد اول نوبت به محاسبه پارامتر بی بعد دوم می‌رسد که به جهت افزایش دقت در حل مسئله باید فاز باربرداری در فرآیند فروروی نانو را نیز در بر گیرد. به روشی مشابه قبل تابعی در نظر گرفته می‌شود که علاوه بر پارامترهای قبلی شامل پارامتر  $h_{max}$  به عنوان نقطه شروع منحنی سهمی باربرداری نیز باشد و خواهیم داشت:

$$P = f(D, B, E, h, h_{max}, \nu, \alpha) \quad (10)$$

اعمال روش آنالیز ابعادی در مورد این تابع ایجاب می‌کند که پارامتر جدیدی با وابستگی جدید به صورت زیر تعریف گردد:

$$\Pi_4 = E^g h^i h_{max} \quad (11)$$

که در آن  $i$  و  $g$  توان‌های لازم برای بی‌بعدسازی است. حل دستگاه معادلات مرتبط به جواب زیر منجر می‌شود و فرم کلی رابطه بی‌بعد جدید به صورت زیر در می‌آید:

$$\Pi_4 = \frac{h}{h_{max}} \quad (12)$$

$$\Pi_{\beta} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \frac{h}{h_{max}}, \nu, \theta \right) = \frac{P}{Eh^2} = \frac{C}{E} \quad (13)$$

بر طبق قواعد موجود در آنالیز ابعادی می‌توان رابطه فوق را معکوس نمود:

$$\Pi_{\gamma} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \frac{P}{Eh^2}, \nu, \theta \right) = \frac{h}{h_{max}} \quad (14)$$

با اعمال شرط مرزی  $h = h_r$  در موقعی که  $P = 0$  می‌باشد می‌توان به رابطه مفید زیر دست یافت:

$$\Pi_{\delta} \left( \frac{D}{E}, \frac{B}{E}, \nu, \theta \right) = \frac{h_r}{h_{max}} \quad (15)$$

با وجود دو پارامتر مجهول در مسئله یعنی D و B می‌توان با در نظر گرفتن دو تابع بی بعد  $\Pi_{\delta}$  و  $\Pi_{\alpha}$  آنها را بدست آورد. از طرفی با محاسبه مقادیر انرژی فازهای بارگذاری و باربرداری نتیجه می‌شود که تناسب خطی بین نسبت‌های  $h_r/h_{max}$  و  $W_P/W_T$  وجود دارد [17] و حتی در بعضی مواقع خاص می‌توان

<sup>1</sup> Modified Dimensional Analysis Method

الماس تا سایز 3 میکرومتر صیقل داده شده است به طوری که صافی متوسط سطح به حد 30 نانومتر رسیده است.

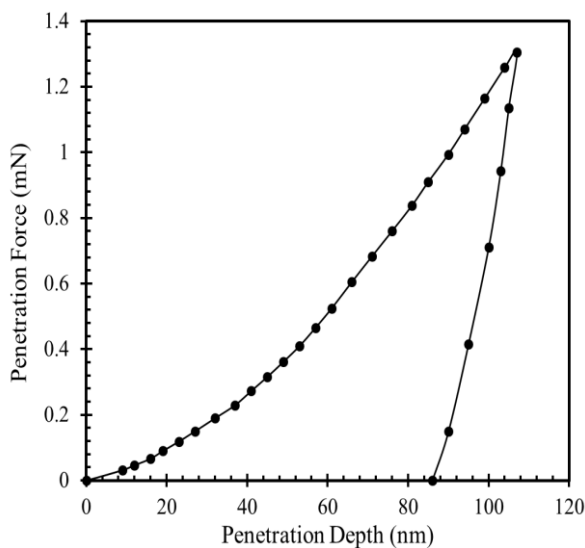


Fig. 2 P-h Diagram obtained from Nanoindentation testing results for a pure Titanium sample in maximum indentation depth of 107 nm based on the experimental data of Pelletier et al. [18]

شکل 2 منحنی نیرو-عمق فروروی حاصل از تست تجربی یک نمونه تیتانیوم خالص با استفاده از نتایج آزمایش فروروی نانو در ماکزیمم عمق فروروی 107 nm بر اساس داده‌های تجربی پلتیه و همکاران [18]

سپس نمونه با روش التراسونیک در استون شسته و تمیز شده است. آزمایش تا عمق 100 نانومتر اسمی انجام شده که در عمل، عمق نهائی در حدود 107 نانومتر بدست آمده است. دقت دستگاه از نظر نیرو در حد 0.3 μN و از نظر عمق در حد 0.16 nm بوده است. برای نمونه حد اقل 10 تست فروروی انجام شده و متوسط نتایج در ترسیم منحنی نیرو-عمق فروروی در نظر گرفته شده است. نتایج تست‌های انجام شده برای ماده تیتانیوم خالص در شکل 2 نشان داده شده است [18].

با توجه به اینکه معمولاً در اندازه گیری فروروی نانو از تعداد 5 فروروی برای هر نمونه استفاده می‌شود لذا با انتخاب تعداد 10 فروروی اتفاقی می‌توان تا حدود زیادی نسبت به حصول نتایج منعکس کننده شرایط مختلف سطح شامل داخل و مرز دانه‌ها اطمینان حاصل نمود [22,21,18].

همچنین با استفاده از داده های تجربی منحنی P-h مقدار مدول الاستیسیته برابر 130 GPa بدست می آید که انطباق خوبی با نتایج حاصل از تست های کشش نشان می دهد. باید توجه داشت که در رسم منحنی شکل 2 از اثر خزش که در نقطه نوک منحنی در اثر ثابت نگهداشتن مقدار نیرو ایجاد می‌شود صرف نظر شده است. با توجه به داده‌های منحنی می‌توان پارامتر C را با روش مینیمم مربعات خطا برابر 123.5 GPa و پارامتر  $W_P/W_T$  را با انتگرال گیری سطوح زیر منحنی برابر 0.7863 بدست آورد. این مقادیر به عنوان مبنا برای حل دستگاه معادلات (19) به کار خواهند رفت.

#### 4- آنالیز المان محدود

برای ایجاد مدل مناسب باید ماده نمونه و فرورونده با رعایت دقت‌های لازم مدلسازی شوند. بسیاری از مدلسازی‌ها در المان محدود با استفاده از فرض

مشترکی بدست نمی‌دهد. لذا برای حل این مشکل و یافتن جواب برای مسئله می‌توان مقدار خطای موجود در نتایج را به کمترین مقدار ممکن محدود نمود. با وجود اینکه این راه حل به جواب قطعی برای مسئله منجر نمی‌شود ولی به بهترین جواب ممکن منتهی خواهد شد که روش‌های حل موجود به سهولت قادر به دستیابی به آن نمی‌باشند. با استفاده از الگوریتم مقدار مینیمم خطای برآیند، مقدار خطاهای دو پارامتر بی‌بعد  $\Pi_\delta$  و  $\Pi_\alpha$  در محدوده تغییرات پارامترهای مجهول محاسبه شده و نقطه جواب نقطه ای خواهد بود که دارای خطای ترکیبی حداقل نسبت به دیگر نقاط باشد. خطای مربوط به انحنای منحنی نسبت به حالت تجربی عبارت است از:

$$e(C/E) = \frac{C_{exp}/E - C_{num}/E}{C_{exp}/E} \quad (20)$$

که در آن  $C_{exp}$  و  $C_{num}$  نماینده ضریب انحنای تجربی و عددی می‌باشند و به همین ترتیب خطای نسبت انرژی‌های مصرف شده برای حالت‌های الاستیک و پلاستیک را می‌توان چنین بدست آورد:

$$e(W_P/W_T) = \frac{\frac{W_P^{exp}}{W_T} - \frac{W_P^{num}}{W_T}}{\frac{W_P^{exp}}{W_T}} \quad (21)$$

بالانویس num. نشان‌دهنده داده‌های حاصل از نتایج حل عددی می‌باشد. با توجه به اینکه اندازه هر یک از مقادیر خطای فوق ممکن است از نظر علامت متفاوت باشد لذا تجمیع اثرات خطاهای فوق باید با در نظر گرفتن مقدار قدر مطلق آنها صورت گیرد. در این راستا به عنوان معیاری قابل قبول برای تجمیع مقادیر خطا می‌توان برآیند کلی خطاهای  $e_{rte}$  را با محاسبه ریشه جمع مربعات آنها در نظر گرفت:

$$e_{rte} = \sqrt{[e(C/E)]^2 + [e(W_P/W_T)]^2} \quad (22)$$

جواب نهائی از محاسبه مینیمم مینیمم‌های مقدار  $e_{rte}$  به ازای تمامی مقادیر (D,B) بدست می‌آید که همان اکستریم مقدار برآیند نقطه‌ای خطا در تمامی فضا می باشد که منجر به رابطه (23) می‌شود.

$$(D, B) = \{(D, B) | e_{rte} = Extrema(e_{rte}(D, B))\} \quad (23)$$

$$Extrema(e_{rte}(D, B)) = Min(Min(e_{ert}(B) | D = cte.))$$

در این مقاله از این روش یا الگوریتم به نام "روش مینیمم برآیند خطا"<sup>2</sup> یا MREM نام برده خواهد شد.

#### 3- تست فروروی نانو

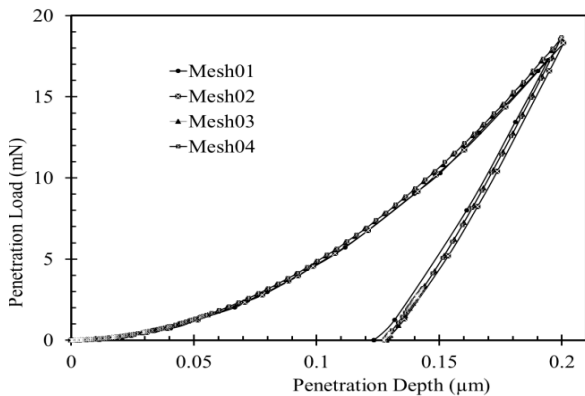
برای بررسی عملکرد روش اصلاح شده آنالیز عددی، یک ماده خالص با خواص مشخص قبلاً مورد آزمایش قرار گرفته و نتایج آن برای استخراج خصوصیات مکانیکی استفاده شده است. ماده تیتانیوم خالص توسط یک دستگاه با مارک Nanoindenter XP با یک فرورونده برکویچ<sup>3</sup> نوک الماسه‌ای مورد آزمایش قرار گرفته است. ابتدا نمونه تا حد آینه‌ای شدن بوسیله محلولی محتوی ذرات

<sup>1</sup> Resultant of Total Errors

<sup>2</sup> Minimum Resultant Error Method

<sup>3</sup> Berkovich





**Fig. 4** The P-h curves produced by FEM for 4 different mesh refinements on the basis of Lichinchi et al. [19] analysis data

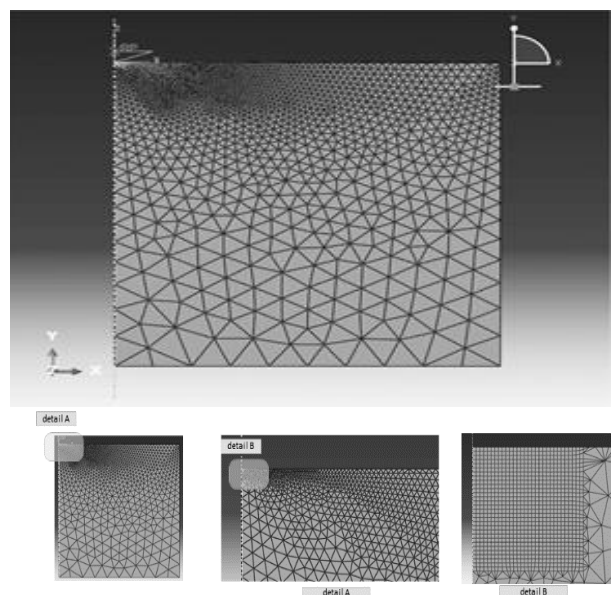
شکل 4 منحنی P-h تولید شده با روش المان محدود برای 4 نوع مش بندی با میزان ریزی مختلف المان‌ها بر اساس داده‌های تحلیلی لیچینچی و همکاران [19]

برای حل مسئله حاضر، چهار نوع مش بندی با ریز شدن تدریجی المان‌ها ایجاد شده است که شکل 4 نمونه‌ای از نتایج حاصل را به صورت منحنی P-h برای همه انواع مش بندی‌ها نشان می‌دهد. برای ارزیابی حل تحلیلی از نتایج تحلیل المان محدود در کار لیچینچی و همکاران [19] که در این زمینه کاملاً شناخته شده و مورد ارجاع عموم محققین می‌باشد استفاده شده است. با حل انجام شده بر اساس این داده‌ها، خطای مقدار نیروی ماکزیمم فروروی به عنوان معیاری برای بررسی همگرایی حل در نمودار شکل 5 رسم شده که نشان می‌دهد با شبکه‌بندی شماره 4 دارای خطائی در حدود 1.1% می‌باشد و بدین دلیل به عنوان مبنا برای محاسبات بعدی می‌تواند استفاده شود. همچنین نمودارهای "نیرو-عمق فروروی" با همین 4 نوع مش بندی با داده‌های مسئله حاضر برای تیتانیوم خالص محاسبه شده و نتایج در شکل 6 نشان داده شده است. در این مدل تعداد المان‌ها 10342، تعداد گره‌ها 8362 و تعداد درجات آزادی 16405 می‌باشد.

همچنین سائز المان‌ها در مجاورت نوک فرورونده در حد  $1 \text{ nm} \times 1 \text{ nm}$  انتخاب شده که در مقایسه با عمق فروروی، تغییرات هندسی و گرادیان کرنش نسبت بسیار خوبی را نشان می‌دهد. فرورونده برکوییچ در واقع دارای شکل یک هرم چهار وجهی با زاویه نیم رأسی برابر 65.27 درجه می‌باشد ولی در مدل متقارن محوری به صورت یک مخروط کامل با زاویه نیم رأس 70.3 درجه شبیه سازی می‌شود به گونه‌ای که تابع سطح تصویر شده به عمق آن برابر با فرورونده برکوییچ اصلی است [19]. فرورونده معمولاً به صورت یک جسم کاملاً صلب در نظر گرفته می‌شود بدین معنی که تغییر شکل آن در حین فرآیند قابل صرف نظر کردن است. اگرچه در بعضی از کارهای تحقیقاتی، فرورونده به صورت یک جسم تغییرشکل پذیر در نظر گرفته شده اما تفاوت ناچیزی از نظر جواب در مقایسه با شبیه سازی با فرورونده صلب مشاهده شده است [30, 31]. از نقطه نظر کار تحلیلی می‌توان نوک فرورونده را به صورت کاملاً تیز در نظر گرفت ولی حساسیت جواب‌ها نسبت به تغییرات شعاع نوک فرورونده بسیار زیاد می‌باشد. نتایج محاسبات گسترده به کمک المان محدود نشان می‌دهد که در نظر گرفتن مقدار کمی شعاع برای نوک فرورونده منجر به نتایج واقعی‌تری می‌شود. یک فرورونده برکوییچ معمولاً پس از مدتی کارکرد، حالت نوک تیز خود را از دست داده و دارای گردی در لبه خود خواهد شد.

تقارن محوری و به صورت دو بعدی انجام می‌شوند [14, 23-25]. با وجود این تعداد کمی از محققین از مدل‌های سه بعدی نیز استفاده نموده‌اند [26-29]. در کار لیچینچی<sup>1</sup> و همکاران (1998) و همچنین در اغلب کارهای تحقیقاتی بعدی ثابت شده است که تفاوت بسیار کمی بین نتایج این دو نوع تحلیل خصوصاً برای فرورونده برکوییچ وجود دارد [19].

برای تحلیل المان محدود از نرم افزار ABAQUS استفاده شده است. با توجه به اینکه فرآیند فروروی نانو به صورت شبه استاتیکی انجام می‌شود لذا می‌توان مسئله را به صورت دینامیکی صریح یا ضمنی و نیز به صورت شبه استاتیکی با لحاظ پارامتر زمان حل نمود. لذا تحلیل حاضر در حالت استاتیکی نرم افزار ABAQUS انجام شده است که در آن برای لحاظ شدن تغییرات جابجائی فرورونده در طول فرآیند از تابع توزیع مثلثی<sup>2</sup> استفاده شده است. بدین ترتیب اثرات زمان به صورت شبه استاتیکی در نظر گرفته شده است. در مدلسازی متقارن محوری از ترکیبی از المان‌های چهار گوش و مثلثی که قابلیت فوق العاده‌ای در ریز نمودن شبکه المان‌ها دارد استفاده شده است تا بتوان همگرایی زودهنگام در حل را بوجود آورد. سائز المان‌ها در ایجاد همگرایی بهتر و کاهش خطای ناشی از حل عددی بسیار مؤثر است به خصوص اگر سائز المان‌ها با تغییرات شکل قابل مقایسه باشد. المان‌ها در مجاورت نوک فرورونده باید دارای سائز کوچک‌تر باشند تا بتوان گرادیان شدید تغییرات تنش و کرنش در این ناحیه را با دقت شبیه‌سازی نمود. در شکل 3 شبکه بندی المان‌ها برای بلوکی به ابعاد  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$  متناسب با عمق فروروی تا حد نانو در مجاورت نوک فرورونده نشان داده شده است.



**Fig. 3** Meshing of the pure bulk material and element arrangement in gradient variation so that the refinement of the mesh is maximum at the vicinity of indenter tip contact

شکل 3 نحوه مش بندی ماده خالص با تنظیم تراکم المان‌ها به صورت گرادیانی که در آن ریزی المان‌های واقع در محل تماس نوک فرورونده و اطراف آن به حد اکثر می‌رسد.

<sup>2</sup> Ramp

<sup>1</sup> M. Lichinchi

در نظر گرفتن اصطکاک بین فرورونده و ماده مورد آزمایش در بسیاری از کارهای قبلی مرسوم بوده است [27,19]. گاهی مقدار ضریب اصطکاک برابر 0.2 [35] و گاهی برابر 0.6 [25] در نظر گرفته شده است. وجود اصطکاک در این ناحیه باعث جلوگیری از لغزش ماده در سطوح جانبی فرورونده شده و منجر به کاهش مقدار برجستگی<sup>۲</sup> لبه‌های حفره فروروندگی می‌شود [36]. از طرفی از نقطه نظر محاسبه خواص مکانیکی ماده که وابستگی زیادی به منحنی نیرو-عمق فروروی دارد تاثیر ضریب اصطکاک بسیار محدود می‌باشد [37] لذا در بسیاری از کارهای قبلی و به خصوص برای مواد خیلی صلب مقدار آن صفر در نظر گرفته شده است [19, 38]. البته باید توجه داشت که استفاده از گزینه بدون اصطکاک<sup>۳</sup> در نرم افزار ABAQUS باعث اعمال نوعی از شرایط قیدی می‌شود که از جدا شدن سطوح تماس فرورونده و جسم در مواقع ضروری جلوگیری می‌کند که این وضعیت نماینده رفتار واقعی نمی‌باشد. در شکل 7 نتایج تحلیل با مقادیر مختلف ضریب اصطکاک برای یک حالت نمونه نشان داده شده که در آن همه منحنی‌ها روی هم منطبق بوده و در بیشترین حالت دارای اختلافی کمتر از 0.4% می‌باشند. در کار حاضر با توجه به اینکه مقدار ضریب اصطکاک در نتایج عددی تاثیر زیادی ندارد ولی تاثیر مثبتی بر نحوه تغییر شکل پلاستیک می‌گذارد لذا از مقدار 0.6 در تحلیل عددی استفاده شده است.

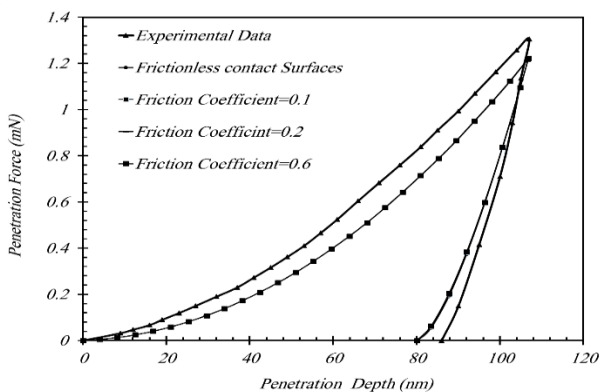


Fig. 7 P-h Graph for different friction coefficients as proposed by different research works which shows little difference via different values

شکل 7 نمودار نیرو بر حسب عمق فروروی برای ضرایب مختلف اصطکاک پیشنهاد شده در کارهای تحقیقاتی قبلی که تفاوت نامحسوسی برای مقادیر مختلف نشان می‌دهد.

سطوح خارجی اجسام در حال تماس به صورت سطوح لغزنده با المان‌های تماسی<sup>۴</sup> در نرم افزار ABAQUS در نظر گرفته شده‌اند به نحوی که سطح خارجی فرورونده به عنوان سطح مرجع<sup>۵</sup> و سطح روئی نمونه به عنوان سطح وابسته<sup>۶</sup> تعریف شده است. این قابلیت در کنار الگوریتم‌های قدرتمند تحلیل با جابجائی‌های بزرگ<sup>۷</sup>، مزیت فراوانی برای این نرم افزار نسبت به نرم افزارهای تحلیل المان محدود دیگر بوجود آورده است [19, 39]. جهت حرکت رویه تماس از سطح فرورونده به سمت نمونه تعریف شده که بازگوکننده این واقعیت است که فقط سطح مرجع قابلیت فرو رفتن در سطح وابسته را دارا می‌باشد (شرط صلب بودن فرورونده).

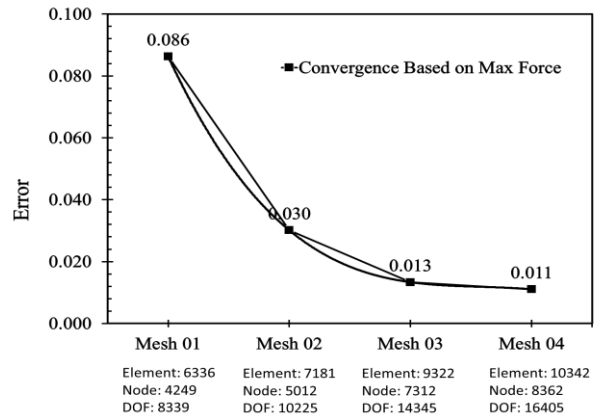


Fig. 5 Graph of maximum penetration force error versus the type of mesh refinement in order to assess the convergence of the model. Number of elements, nodes and DOF are mentioned for each mesh refinement type.

شکل 5 نمودار مقدار خطای نیروی ماکزیمم نسبت به نوع مش بندی به عنوان معیاری برای سنجش همگرایی مدل المان محدود که در آن تعداد المان، تعداد گره و تعداد درجات آزادی برای هر یک از انواع مش درج شده است.

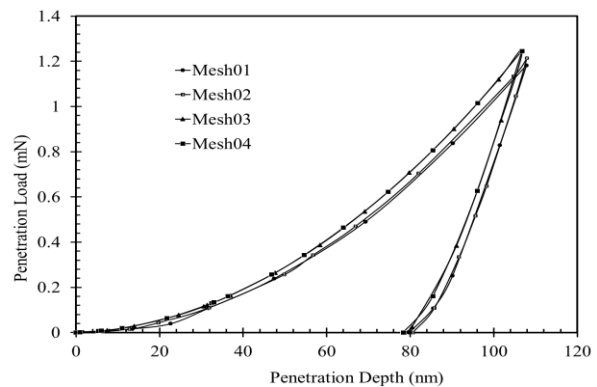


Fig. 6 The P-h curves produced by FEM for 4 different mesh refinements on the basis of Pelletier et al. [18] analysis data

شکل 6 منحنی P-h تولید شده با روش المان محدود برای 4 نوع مش بندی با میزان ریزی مختلف المان‌ها بر اساس داده های تحلیلی پلنتیه و همکاران [18]

لیچینیچی و همکاران (1998) به عنوان پیشگام تحلیل المان محدود فرآیند فروروی نانو، مقادیر انحنای مختلف را در تحلیل خود در نظر گرفتند [19]. گربریج<sup>۱</sup> و همکاران (1998) نشان داده‌اند که انحنائی به اندازه 100-200 نانومتر برای یک فرورونده برکوییچ با نیم زاویه راس 65 درجه واقع بینانه است در صورتی که برای فرورونده برکوییچ نرمال، شعاع نوک بین 100-400 نانومتر به واقعیت نزدیک‌تر است [32]. مطابق با استاندارد ISO 14577Part 2 & 3 عنوان شده که فرورونده برکوییچ می‌تواند انحنای استاندارد در محدوده 150-200 nm داشته باشد [25, 33]. بنابراین برای جستجوی جواب بهینه میزان شعاع انحنای در محدوده 50-200 nm انتخاب مناسبی برای تحلیل حاضر خواهد بود.

<sup>1</sup> Gerberich  
<sup>2</sup> Pile up  
<sup>3</sup> Frictionless  
<sup>4</sup> Contact Element

<sup>5</sup> Master  
<sup>6</sup> Slave  
<sup>7</sup> Large Deformation

مهمترین خاصیت مدول الاستیسیته است که می‌توان آن را با استفاده از شیب منحنی باربرداری بدست آورد و عبارت است از:

$$E = (1 - \nu^2) \left[ \frac{E_i E_r}{E_r(1 - \nu_i^2) - E_i} \right] \quad (25)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته ماده مورد تست می‌باشد و  $E_i$  و  $E_r$  به ترتیب مدول‌های الاستیسیته مؤثر و فرورونده می‌باشند. همچنین  $\nu_i$  و  $\nu$  به ترتیب ضرایب پواسون مربوط به فرورونده و نمونه آزمایش می‌باشد. مدول الاستیسیته مؤثر را می‌توان از منحنی باربرداری بر اساس روش اولیویه و فار (1992) [5] و روش تحلیلی استندون<sup>3</sup> [12] از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$E_r = \frac{S\sqrt{\pi}}{2\sqrt{A_c}} \quad (26)$$

در این رابطه  $A_c$  سطح تماس تصویر شده و  $S$  عبارت است از شیب منحنی باربرداری در بخش آغازی این منحنی می‌باشد یعنی:

$$S = \frac{dP}{dh} \quad (27)$$

هنگامی که فرورونده به صورت جسم صلب در نظر گرفته می‌شود مدول الاستیسیته آن به سمت بینهایت میل می‌کند و در نتیجه رابطه (25) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$E = (1 - \nu^2) E_r \quad (28)$$

با توجه به رابطه فوق مقادیر مدول الاستیسیته برای حالاتی که فرورونده به صورت صلب یا تغییر شکل پذیر می‌باشد محاسبه شده و در جدول 1 درج شده است. مثلاً برای ماده تیتانیوم خالص که  $E=130$  GPa و ضریب پواسون برابر 0.34 باشد و فرورونده به صورت ماده‌ای ارتجاع پذیر از جنس الماس در نظر گرفته شود می‌توان مدول الاستیسیته معادل برای فرورونده صلب را برابر 115.23 GPa بدست آورد. در جدول 1 این محاسبات برای دو مقدار مدول الاستیسیته اولیه انجام شده است.

**جدول 1** مقادیر مدول الاستیسیته معادل برای حالاتی که فرورونده به صورت تغییر شکل پذیر و صلب باشد.

نوع فرورونده	$E_i$	$E_r$	$\nu$	$\nu_i$	$E$
فرم پذیر	1141	130.29	0.34	0.07	130.00
صلب	بینهایت	130.29	0.34	0	115.23
فرم پذیر	1141	121.33	0.34	0.07	120.00
صلب	بینهایت	121.33	0.34	0	107.30

در ناحیه پلاستیک می‌توان رابطه تنش و کرنش را در فرم کلی با یک معادله خطی-توانی نمایش داد:  $\sigma = D + B\varepsilon^n$  که این رفتار به طور ترسیمی در شکل 8 نشان داده شده است. اگر یکی از نقاط این منحنی مانند نقطه ای با کرنش مشخص (معمولاً 0.29 یا 0.33 و ...) معلوم باشد مختصات این نقطه  $\sigma_{0.29}$  و  $\varepsilon_{0.29} = 0.29 + (\sigma_{0.29}/E)$  خواهد بود لذا با در نظر گرفتن نقطه تسلیم، دو نقطه از منحنی معلوم خواهد بود که منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\sigma_{0.29} = D + B \left( 0.29 + \frac{\sigma_{0.29}}{E} \right)^n \quad (29)$$

$$\sigma_y = D + B \left( \frac{\sigma_y}{E} \right)^n$$

شرایط مرزی مفروض در این مدل عبارت است از: گره‌های جسم مورد آزمایش واقع در کف مدل معمولاً به صورت کاملاً مقید در امتدادهای موازی و عمود بر امتداد نیروی خارجی تعریف می‌شوند. این فرض به دلیل وجود تکیه گاه در کف نمونه و مقید بودن آن در نظر گرفته شده است. گره‌های واقع روی محور تقارن نیز به طور خودبخود در امتداد عمود بر نیروی فرورونده مقید می‌شوند. در شکل 8 نمای شماتیک مدل در حالت سه بعدی با شرایط تکیه-گاهی مربوطه نشان داده شده است.

فازهای بارگذاری و باربرداری را می‌توان با استفاده از دو روش کنترل نیرو و کنترل جابجائی ایجاد نمود. روش دوم به طور نسبی به جواب صریح‌تری منتهی می‌شود زیرا امکان اعمال کنترل بر مقیاس ابعادی فروروی (مثلاً میکرو یا نانو) وجود خواهد داشت. عمق فروروی توسط نرم افزار ABAQUS به تعدادی گام تقسیم می‌شود که در هر یک از آنها، محاسبات با تعدادی تکرار انجام می‌گردد تا سطح یا نرخ قابل قبولی از همگرایی بدست آید [39]. همچنین به کمک قابلیت‌های نرم افزار می‌توان بر اندازه گام‌های حل و در نتیجه میزان دقت جواب کنترل‌های لازم را اعمال نمود.

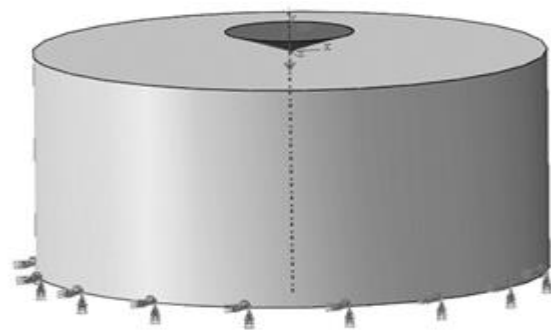


Fig. 8 Boundary conditions for nanoindentation model of bulk material under axisymmetric conditions

شکل 8 شرایط مرزی برای مدل جسم یکدست در فرآیند فروروی نانو با فرض حالت متقارن محوری

### 5- معادله ساختاری

ماده جسم تحت آزمایش به پیروی از شرایط واقعی به صورت کاملاً همگن و ایزوتروپیک در نظر گرفته می‌شود. برای بیان خواص رفتاری ماده در مدل المان محدود معمولاً از تعریف مواد الاستیک-پلاستیک استفاده می‌شود [37]. معادلات بکار رفته برای بیان سخت شوندهگی کرنشی در بسیاری از کارهای تحقیقی و محاسباتی به فرم دوخطی یا توانی [37] می‌باشد که این دو فرم پر استفاده‌ترین فرم‌های موجود برای بیان رفتار پلاستیک در اکثر مواد و به خصوص مواد فلزی می‌باشند. لذا فرم کلی معادلات ساختاری را می‌توان به صورت دو ضابطه‌ای زیر نوشت:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ for } \sigma \leq \sigma_y$$

$$\sigma = D + B\varepsilon^n \text{ for } \sigma \geq \sigma_y \quad (24)$$

که در آن مطابق شکل 9،  $E$  مدول الاستیسیته و  $D$  مقدار تنش به ازای کرنش صفر یا عرض از مبدأ معادله ناحیه پلاستیک است.  $B$  و  $n$  نیز خصوصیات سختی کرنشی به نام استحکام و توان سختی کرنشی می‌باشند. این فرم با مقداری تغییر در ضرایب، می‌تواند طیفی از معادلات ساختاری توانی مانند معادلات جانسون-کوک<sup>1</sup> و رامبرگ-اوزگود<sup>2</sup> را پوشش دهد. در ناحیه الاستیک،

<sup>3</sup> Sneddon

<sup>1</sup> Johnson-cook Constitutive Equation

<sup>2</sup> Ramberg-Osgood Relationship



اساسی در حل بر جستجوی مینیمم خطا به ازای تمامی ترکیبات ممکن از پارامترهای معادله ساختاری مبتنی است. برای این کار مقادیر مختلفی برای پارامتر D انتخاب می‌شود و به ازای هر یک از آنها پارامتر B به صورت پلکانی تغییر داده می‌شود. دامنه تغییرات دارای کران بالایی برابر مدول الاستیسیته است ولی مسلماً مقدار جواب از این کران بسیار کوچک‌تر خواهد بود. مقدار پارامتر D دارای کران بالای مشخصی نمی‌باشد ولی می‌توان آن را با مقدار تنش تسلیم محدود نمود. برای تنش تسلیم می‌توان محدوده یک صدم مدول الاستیسیته یعنی  $\sigma_y < 0.01E$  را به عنوان حد اکثر بازه تغییرات برای ماده تیتانیوم خالص (بر اساس داده‌های تجربی) در نظر گرفت. البته در حین حل عوامل محدود کننده دیگری بوجود خواهد آمد که این بازه را از این هم محدودتر می‌کند.

برای شروع حل پارامتر D در محدوده 100-700 MPa تغییر داده شده و به ازای هر گام تغییرات مقدار پارامتر B در مقیاس 100 برابر یعنی در فاصله 10000-70000 MPa انتخاب می‌گردد. به ازای هر جفت مقادیر (D,B) معادله ساختاری را تعیین نموده و تحلیل المان محدود انجام می‌شود در نتیجه در این مرحله 49 تحلیل برای این رویکرد مورد نیاز است. برای مثال نمونه‌ای از نتایج حل به ازاء گروه  $D=400$  MPa در شکل 10 ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که هیچیک از منحنی‌ها با منحنی تجربی انطباق کاملی ندارند ولی روند تغییرات مثبت و منفی آنها نشان می‌دهد که می‌توان یک منحنی پیدا کرد که نسبت به بقیه تطابق بهتری داشته باشد. از طرفی شکل انحنای منحنی‌ها و مقادیر آنها در محدوده الاستیک نشان می‌دهد که با دقت بسیار بالایی از فرم معادله درجه دو پیروی می‌کنند و همین موضوع تبعیت آنها را از معیار بی بعد C/E راحت تر و مؤثرتر می‌نماید. منحنی برگشت (باربرداری) نیز به جز در قسمت کوچکی از آن انطباق خوبی با منحنی تجربی دارد که این مسئله منجر به منطبق‌تر شدن پارامتر  $W_p/W_T$  می‌شود.

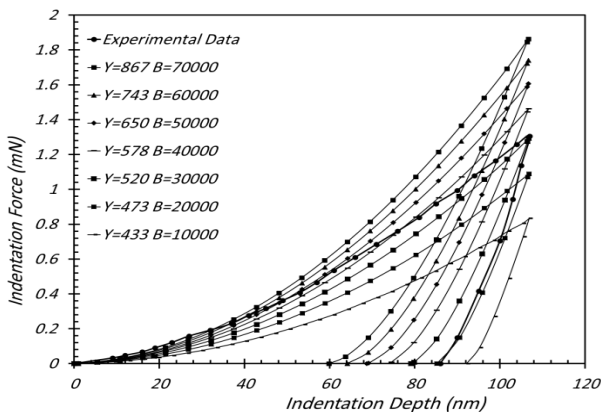


Fig. 10 Nanoindentation curves for  $D=400$  MPa against  $B=10000$ - $70000$  MPa for pure Titanium obtained by FEM analysis for 50 nm tip radius

شکل 10 منحنی‌های نیرو-عمق فروروی برای تیتانیوم خالص با  $D=400$  Mpa و مقادیر متغیر  $B=10000$ - $70000$  MPa بدست آمده از تحلیل المان محدود برای شعاع فرورونده 50 nm

نتایج حل نشان می‌دهد که الگوی توزیع تنش در ماده تیتانیوم بدین صورت است که ابتدا تنش ماکزیمم در نقطه‌ای در مجاورت نوک فرورونده اتفاق می‌افتد ولی با افزایش عمق فروروی، این نقطه ماکزیمم به داخل جسم منتقل می‌شود که این مسئله با نتایج اندازه‌گیری‌های تجربی تطابق کامل دارد (شکل 11) [41].

با حل همزمان این دو معادله پارامترهای ثابت معادله بدست می‌آید:

$$B = \frac{\sigma_{0.29} - \sigma_y}{\left[ \left( 0.29 + \frac{\sigma_{0.29}}{E} \right)^n - \left( \frac{\sigma_y}{E} \right)^n \right]} \quad (30)$$

$$D = \sigma_y - \frac{\sigma_{0.29} - \sigma_y}{\left[ \left( 0.29 + \frac{\sigma_{0.29}}{E} \right)^n - \left( \frac{\sigma_y}{E} \right)^n \right]} \left( \frac{\sigma_y}{E} \right)^n$$

برای معادله ساختاری دوخطی مقدار توان سخت شوندگی کرنشی:  $n = 1$  می‌باشد لذا مقادیر فوق به صورت زیر در می‌آیند:

$$B = \frac{\sigma_{0.29} - \sigma_y}{0.29 + \frac{\sigma_{0.29} - \sigma_y}{E}} \quad (31)$$

$$D = \sigma_y - \frac{\sigma_{0.29} - \sigma_y}{0.29 + \frac{\sigma_{0.29} - \sigma_y}{E}} \left( \frac{\sigma_y}{E} \right)$$

که اگر بین آنها مقدار  $\sigma_{0.29}$  حذف گردد مقدار تنش تسلیم بر حسب ثابت‌های معادله ساختاری بدین صورت بدست می‌آید:

$$\sigma_y = \frac{D}{\left( 1 - \frac{B}{E} \right)} \quad (32)$$

وقتی در تحلیل المان محدود از فرم معادله ساختاری جانسون-کوک به صورت  $\sigma = (A + B\varepsilon^n)(1 + C \ln \varepsilon^*) (1 - T^{*m})$  استفاده گردد [39] باید مقدار تنش تسلیم را به جای A در این معادله جایگزین کرد [40]. همچنین با توجه به نبود تغییرات دما و وارد شدن نیرو به صورت شبه استاتیکی (صفر بودن نرخ کرنش)، ثابت‌های معادله چنین خواهند بود:

$$A = \sigma_y, B \neq 0, n = 1, C = 0, T^* = 0 \quad (33)$$

لذا معادله نهایی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma = \frac{D}{\left( 1 - \frac{B}{E} \right)} + B\varepsilon \quad (34)$$

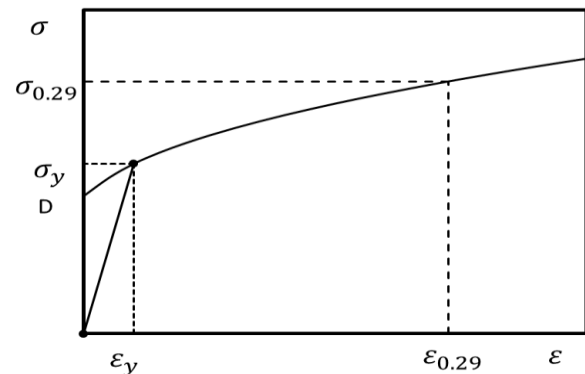


Fig. 9 Elastic-Plastic behavior diagram in the linear-power law general form of constitutive equation with intercept D  
شکل 9 منحنی رفتار الاستیک-پلاستیک به صورت قانون خطی-توانی مطابق با حالت کلی معادله ساختاری که در آن عرض از مبدأ D می‌باشد.

## 6- نتایج و بررسی

مدل المان محدود با استفاده از فرض معادله ساختاری دوخطی و فرورونده صلب با شعاع نوک  $R_t = 50$  nm و ضریب اصطکاک  $\mu = 0.6$  ایجاد می‌گردد. با استفاده از روش اصلاح شده آنالیز ابعادی (MDAM) و سپس الگوریتم مینیمم خطای برآیند (MREM)، خواص مکانیکی ماده تیتانیوم خالص به کمک نتایج تست تجربی فروروی نانو و المان محدود قابل محاسبه است. رویکرد

محاسبات عددی به طور مؤثر استفاده نمود. برای این منظور می‌توان مسیر مینیمم خطا را با تعیین نقاط مینیمم به ازای هر مقدار  $D$  و رسم آنها در یک منحنی جداگانه، بدست آورد. نمودار شکل 15 تغییرات مقادیر مینیمم برآیند کلی خطا را نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل مشاهده می‌شود روند تغییرات مقدار هر یک از خطاهای  $\Pi_\alpha$  و  $\Pi_\delta$  دارای روند یکسانی نمی‌باشد. ولی افزایش مقادیر یکی توأم با کاهش مقدار دیگری خواهد بود لذا پیدا کردن نقطه بهینه پاسخ از روی هر یک از آنها به طور جداگانه بسیار دشوار است و همین مسئله استفاده از معیار ترکیبی برآیند خطاها را توجیه پذیر می‌سازد.

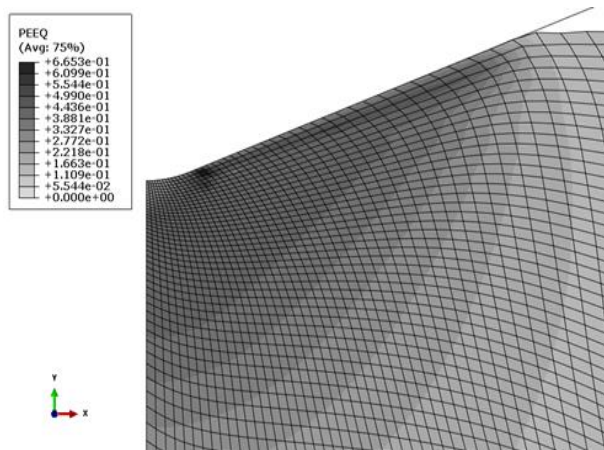


Fig. 12 PEEQ strain distribution for  $D=425$  MPa against  $B=24000$  MPa for pure Titanium at the end of the loading course

شکل 12 کرنش معادل PEEQ در شرایط  $B=24000$  MPa و  $D=425$  Mpa برای تیتانیوم خالص در پایان فاز بارگذاری

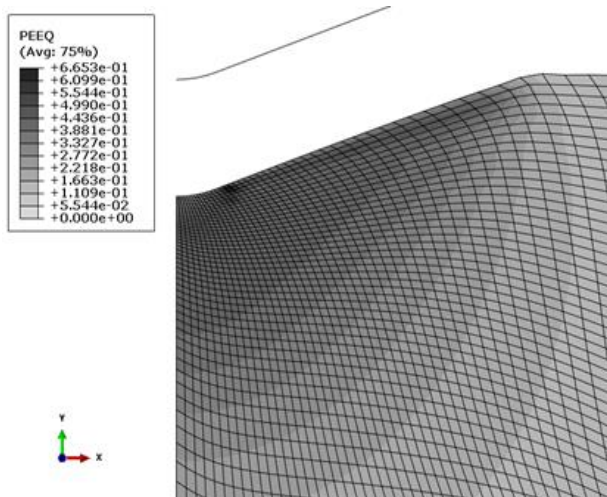


Fig. 13 PEEQ strain distribution for  $D=425$  MPa against  $B=24000$  MPa for pure Titanium at the end of the unloading course

شکل 13 کرنش معادل PEEQ در شرایط  $B=24000$  MPa و  $D=425$  Mpa برای تیتانیوم خالص در پایان فاز باربرداری

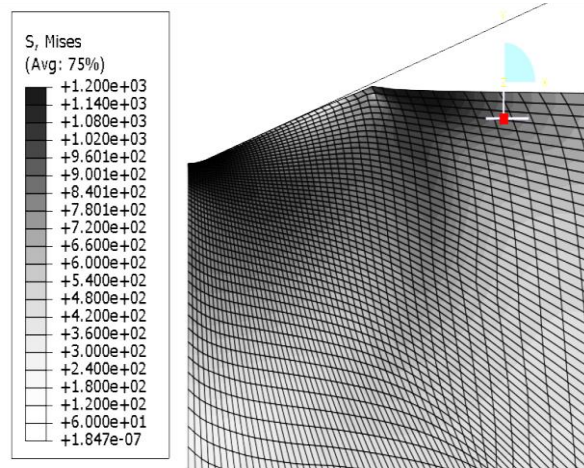


Fig. 11 Stress distribution for  $D=400$  MPa against  $B=30000$  MPa for pure Titanium at the end of loading course

شکل 11 توزیع تنش در شرایط  $B=30000$  MPa و  $D=400$  Mpa برای تیتانیوم خالص در انتهای فاز بارگذاری

مقادیر تنش‌های ماکزیمم حکایت از آن دارد که ناحیه قابل توجهی در اطراف فرورونده وارد محدوده پلاستیک می‌شود که پس از اتمام فرآیند فروروی باعث ایجاد حفره فروروی در جسم می‌شود. همچنین در این حالت با صرفنظر از مقدار ضریب اصطکاک مقداری برجستگی در انتهای سطح تماس مشاهده می‌شود. در انتهای این مرحله، عمق فروروی به اندازه ماکزیمم از پیش تعریف شده رسیده و توزیعی از کرنش (کرنش‌های پلاستیک معادل<sup>1</sup> PEEQ) مطابق شکل 12 ایجاد می‌نماید. در این وضعیت ماکزیمم عمق فروروی  $h_{max} = 107$  nm خواهد بود.

در مرحله باربرداری، فروروی به تدریج کاهش یافته و با جدا شدن فرورونده از جسم مقداری تنش و کرنش پسماند در جسم باقی می‌ماند (شکل 13). توزیع کرنش‌های پسماند از نظر شکل از توزیع کرنش‌های ماکزیمم تبعیت نموده و از فرم کلی تئوری تحلیلی مکانیک تماس تبعیت می‌کند. لازم به ذکر است که پروفیل تغییر شکل به مقدار اصطکاک و نحوه نمایش خواص ماده وابستگی زیادی دارد. همچنین از نتایج تحلیل مقادیر جابجائی، پارامتر حائز اهمیت عمق فروروی پسماند، به ازای شرایط مختلف بدست می‌آید. به عنوان نمونه عمق فروروی پسماند  $h_r = 94.8$  nm برای شرایط تحلیل  $D=425$  Mpa و  $B=24000$  MPa بدست آمده‌است.

بر اساس یافته‌های روش آنالیز ابعادی پارامترهای بی‌بعد مورد نیاز برای انطباق همان  $\Pi_\alpha$  و  $\Pi_\delta$  می‌باشند لذا باید این مقادیر را برای هر یک از منحنی‌ها بدست آورده و آنها را با مقادیر متناظر تجربی مقایسه نمود. بر اساس روش مینیمم خطای برآیند، پس از محاسبه مقادیر پارامترهای مذکور و خطای آنها نمودار تغییرات برآیند کلی خطا نسبت به پارامترهای  $D$  و  $B$  در شکل 14 رسم شده است. در این منحنی تغییرات برآیند خطا به طور تجمعی نشان‌دهنده روند کاهش معنی‌داری در ناحیه مشخصی از تغییرات پارامترهای  $D$  و  $B$  می‌باشد. در این ناحیه نقطه‌ای وجود دارد که حوض این منحنی را تشکیل می‌دهد که بنا به روش آنالیز ابعادی اصلاح‌شده، بهترین ترکیب برای این پارامترها می‌باشد و معادله ساختاری را نتیجه می‌دهد که می‌تواند نشان‌دهنده رفتاری نزدیک به رفتار واقعی جسم باشد. برای پیدا کردن این نقطه می‌توان از روش‌های متداول

<sup>1</sup> Equivalent Plastic Strain

جدول 2 خواص مکانیکی تیتانیوم خالص طبق مراجع مختلف

Table 2 Mechanical properties of pure Titanium according to different references

مرجع	E (GPa)	$\nu$	$\sigma_y$ (MPa)	روش حصول
پلتیه و همکاران [18]	120	0.34	230-460	تست کشش
	130	0.34	600	حل عددی
ژائوهوئی و سورش [42]	120	0.34	200-400	تست کشش
	128	0.34	700	حل عددی
برسان و همکاران [41]	134	0.25	300	تست کشش
پرزینسکی و همکاران [43]	-	-	387	تست کشش
بویور و همکاران [44]	-	-	655	تست کشش

با بررسی نتایج تحلیلی و داده های مرجع، به عنوان یک نکته اساسی ملاحظه می شود که خطاهای ایجاد شده عمدتاً ناشی از عدم تطابق کامل منحنی های حاصل از حل المان محدود با منحنی های تجربی می باشد لذا تلاش برای نزدیک نمودن این نتایج به یکدیگر عاملی تعیین کننده در دقیق سازی حل به حساب می آید.

یکی از روش های پیشنهادی استفاده از مضرب میزان خطای کلی می باشد. در صورتی که میزان خطای تنش تسلیم با میزان خطای برآیند یکسان در نظر گرفته شود و این مقدار روی این نتیجه اعمال گردد، تنش تسلیم در محدوده  $\sigma_y = 444 - 595$  MPa تغییر خواهد نمود که با محدوده بدست آمده از تست های تجربی همپوشانی دارد.

باید توجه داشت که شرایط حل و به تبع آن جواب های بدست آمده با وجود تعداد زیادی از عوامل مؤثر می تواند تغییرات قابل توجهی داشته باشد. یکی از راهکارهای مؤثر در نزدیک سازی نتایج، استفاده از شرایط واقعی تر می باشد که در این خصوص با توجه به یافته های محققین مختلف می توان به اندازه شعاع نوک فرورونده توجه نمود.

با استفاده از این پارامتر می توان حالت های ناپایداری و مشکلات واگرایی در حل المان محدود را به نحو چشمگیری کاهش داد [41]. به عنوان مثال برای مدل فعلی با ماده تیتانیوم نتایج تحلیل به صورت منحنی نیرو بر حسب عمق فروروی برای شعاع های نوک فرورونده 0، 50، 100، 200، 400 nm شکل 16 نشان داده شده است.

اگرچه در کار پلتیه و همکاران (2000) برای ماده تیتانیوم خالص عنوان شده که نیاز به در نظر گرفتن شعاع فرورونده به اندازه 400 نانومتر می باشد تا نتایج تحلیل با نتایج تجربی منطبق شود [18] ولی در شکل 16 مشاهده می شود که تفاوت فاحشی در نتایج با در نظر گرفتن این فرض ایجاد می شود. لذا یکی از اقدامات مهم کالیبره کردن حل بر اساس این پارامتر برای حصول نتایج منطبق تر با واقعیت خواهد بود.

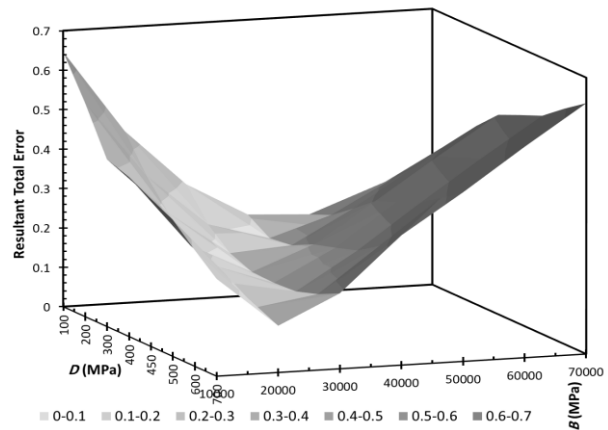


Fig. 14 Resultant Total Error versus variation of D and B parameters over full range domain for bulk Ti

شکل 14 منحنی تغییرات مقدار برآیند کلی خطا نسبت به تغییرات پارامترهای D و B در دامنه کامل مقادیر پارامترها برای ماده تیتانیوم خالص

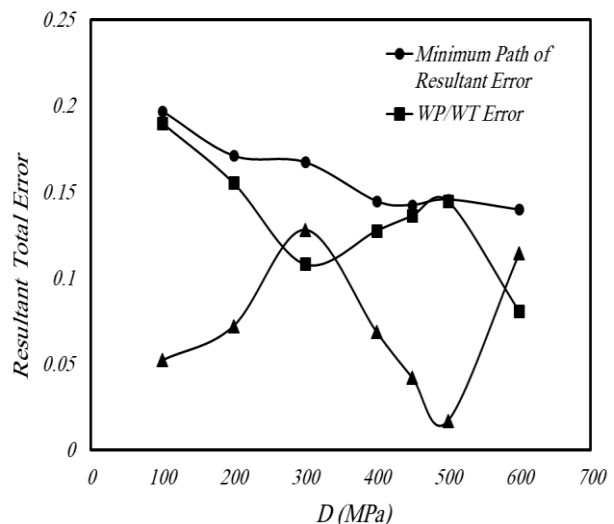


Fig. 15 Resultant Total Error, error of plastic to total energy ratio versus variation of D for tip radius of 50 nm

شکل 15 نمودارهای تغییرات خطای برآیند کلی، خطای پارامتر ضریب انحنای خطای نسبت انرژی پلاستیک به انرژی کل نسبت به تغییرات پارامتر D برای شعاع نوک فرورونده 50 nm

با بررسی منحنی شکل 15 جواب نهائی به ازای  $D = 400$  MPa بدست می آید که تنش تسلیم متناظر با آن  $\sigma_y = 520$  MPa و سخت شوندگی کرنشی آن  $B = 30000$  MPa خواهد بود.

این جواب با خطای 6.8% برای پارامتر بی بعد ضریب انحنای منحنی (C/E)، 12.7% برای پارامتر نسبت انرژی پلاستیک به انرژی کلی ( $W_P/W_T$ ) و خطای برآیند 14.47% بدست آمده است. این خواص حالت پلاستیک نسبت به یافته های بدست آمده از کارهای عددی قبلی کمتر و نزدیک تر به واقعیت شده ولی نسبت به مقادیر موجود در متون مرجع کمی بالاتر می باشند.

در جدول 2 مقایسه خواص مکانیکی در مراجع مختلف آمده است که نشان می دهد حل المان های محدود به مقادیری بیشتر از نتایج تست فشار منجر می شود و مقدار بدست آمده از ترکیب روش های اصلاح شده آنالیز ابعادی با مینیمم برآیند خطا به نتایجی بین حل عددی و تست تجربی منتهی می شود.

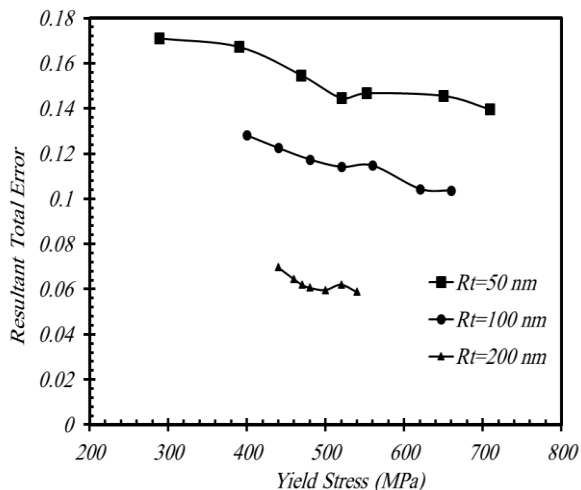


Fig. 17 Path of minimum resultant error versus Ti yield stress for different indenter tip radius: Rt= 50, 100, 200 nm

شکل 17 مسیر مینیمم خطای برآیند بر حسب مقدار تنش تسلیم تیتانیوم خالص به ازای اندازه‌های مختلف شعاع نوک فرورونده: Rt=50, 100, 200 nm

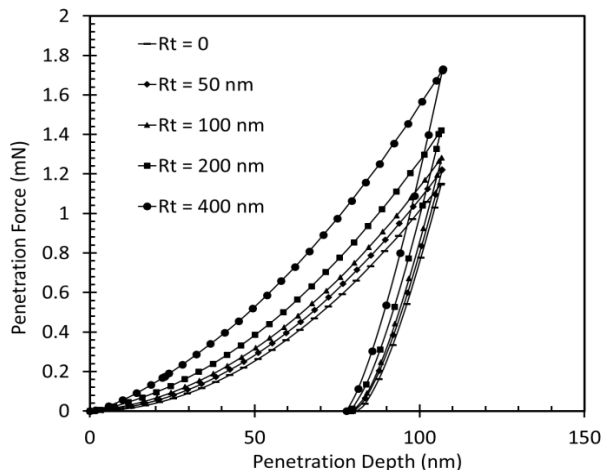


Fig. 16 Nanindentation curves obtained by FEM analysis for bulk Titanium via different tip radius of Berkovich indenter: Rt=0, 50, 100, 200, 400 nm

شکل 16 منحنی‌های فروروندگی نانو بدست آمده به روش المان محدود برای تیتانیوم خالص بر حسب شعاع های مختلف نوک فرورونده برکوویچ: Rt=0, 50, 100, 200, 400 nm

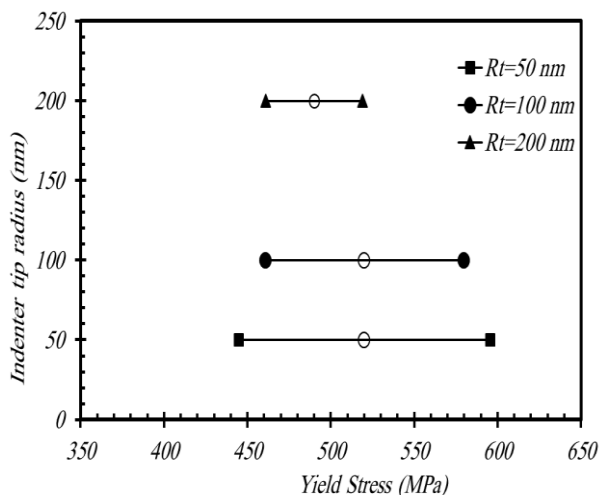


Fig. 18 Interval of pure Titanium yield stress variation for different indenter tip radius: Rt= 50, 100, 200 nm by considering the resultant error values

شکل 18 محدوده تغییرات تنش تسلیم تیتانیوم خالص برای اندازه‌های مختلف شعاع نوک فرورونده: Rt=50, 100, 200 nm با در نظر گرفتن میزان خطای برآیند

برای کالیبره کردن حل همان روش قبلی مینیمم برآیند خطا با شعاع‌های انحناء نوک فرورونده 100 nm و 200 nm به کار برده می‌شود. در اینجا مراحل حل کمتر خواهد بود به دلیل اینکه محدوده جستجوی جواب از مرحله قبلی مشخص بوده و می‌توان مقادیر اولیه را با دقت بیشتری انتخاب نمود. با تغییر مقادیر پارامترهای تنش تسلیم و ضریب سخت‌شوندگی کرنشی مقادیر خطای برآیند محاسبه شده و اکسترمم آنها بدست می‌آید. در شکل 17 منحنی تغییرات مینیمم خطای برآیند یا مسیر مینیمم خطا بر حسب تنش تسلیم برای هر یک از شعاع‌های انحناء رسم شده است. در این شکل یافته اصلی اینست که با افزایش شعاع نوک فرورونده میزان کلی خطای برآیند به نحو چشمگیری کاهش می‌یابد ( به ترتیب برای شعاع‌های 50 nm ، 100 nm و 200 nm ، میزان خطا در نقطه جواب برابر 14.47% ، 11.4% و 5.9% می‌باشد) و این مسئله رسیدن به دقت‌های بالا را امکان پذیر می‌سازد. دلیل این موضوع را می‌توان به تاثیر افزایش انحنای نوک فرورونده در بالا بردن مقادیر نیرو در منحنی ها نسبت داد که منجر به جبران کاهش حاصل از اعمال روش المان محدود می‌شود.

مقدار تنش تسلیم به ازای شعاع 100 نانومتر تغییر محسوسی پیدا نکرده ولی مدول سخت‌شوندگی کرنشی به 27000 MPa رسیده است. به ازای شعاع 200 نانومتر مقدار تنش تسلیم محاسبه شده با طی روند بهبود محسوسی از 520 MPa به 487 MPa کاهش می‌یابد و به تبع آن ضریب سخت‌شوندگی کرنشی به 21000 MPa نیز تنزل پیدا می‌کند. با در نظر گرفتن مقدار خطا می‌توان محدوده‌های جواب را به صورت نمودار شکل 18 نشان داد. این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش مقدار شعاع نوک فرورونده محدوده تغییرات جواب همزمان با کاهش خطا برای تنش تسلیم کوچک‌تر و نزدیک‌تر به واقعیت شده و به پاسخ دقیق‌تر نزدیک می‌شود. از شکل 18 ملاحظه می‌شود که محدوده تغییرات تنش تسلیم برای شعاع 200 نانومتر به صورت  $\sigma_y = 456 - 514$  MPa بدست می‌آید که با محدوده تغییرات تنش تسلیم در برخی مراجع همپوشانی کامل دارد (جدول 2).

### 7- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش هیبرید بوسیله ترکیب نتایج تجربی فروروی نانو با آنالیز المان‌های محدود، خواص مکانیکی نمونه ای با جنس تیتانیوم خالص محاسبه شد. نتیجه کلی برگرفته از متدولوژی ارائه شده و محاسبات گسترده مرتبط بر آن اینست که علیرغم کاستی‌های موجود در روش متداول آنالیز ابعادی می‌توان با اعمال تغییراتی بر این روش، از آن به عنوان روشی کارا برای بدست آوردن خواص مکانیکی حالت پلاستیک استفاده نمود. در اینجا با اعمال ساده‌سازی مناسب و ارائه معیار جدیدی برای پیدا کردن نقطه جواب، خواص مورد نظر استخراج شد. روش جدید به نام روش اصلاح شده آنالیز ابعادی (MDAM) با معلوم فرض نمودن خواص حالت الاستیک و انتخاب پارامترهای حالت پلاستیک به عنوان متغیرهای اصلی در فرآیند بی‌بعدسازی، ابتدا به ساده‌سازی فرمولاسیون حل می‌پردازد و سپس با انتخاب معیار خطای برآیند



[8] Dao, M., Chollacoop, N., Van Vliet, K. J., Venkatesh, T.A. and Suresh, S., "Computational Modeling of the Forward and Reverse Problems in Instrumented Shrms Indentation ", *Acta mater.*, Vol. 49, PP. 3899-3918, 2001 .

[9] Giannakopoulos, A. E. and Suresh, S., "Determination of Elastoplastic Properties by Instrumented sharp Indentation ", *Scripta Materialia*, Vol. 40, No. 10, pp. 1191-1198, 1999 .

[10] Suresh, S., Giannakopoulos, A. E. and Alcala, J., "Spherical Indentation of Compositionally Graded Materials: Theory and Experiments ", *Acta materialia*, Vol. 45, No. 4, pp. 1307-1321, 1997 .

[11] Doerner, M.F. and Nix, W.D., "A Method for Interpreting the Data From Depth-Sensing Indentation Instruments ", *J. Mater. Res.*, Vol. 1, pp.601, 1986 .

[12] Sneddon, I.N., "The relation Between Load and Penetration in the Axisymmetric Bousinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile ", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 3, pp. 47-57, 1965 .

[13] Suresh, S. and Giannakopoulos, A. E., "Report Inst-2/98 ", *Massachusetts Institute of Technology*, 1998 .

[14] Stauss, S., Schwaller, P., Bucaille, JL., Rabe, R. and Rohr, L., "Determining the Stress-Strain Behaviour of Small Devices by Nanoindentation in Combination with Inverse Methods ", *Microelectron Eng.*, Vol. 67-68, pp. 818-825, 2003 .

[15] Heinrich, C., Waas, A.M. and Wineman, A.S., "Determination of Material Properties Using Nanoindentation and Multiple Indenter Tips ", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 364-376, 2009 .

[16] Antunes, J. M., Fernandes, J. V., Menezes, L. F. and Chaparro, B. M., "A New Approach for Reverse Analyses in Depth-Sensing Indentation Using Numerical Simulation ", *Acta Materialia*, Vol. 55, pp. 69-81, 2007 .

[17] Fischer-Cripps, A.C., "Nanoindentation", Third ed., New York: Springer, 2011 .

[18] Pelletier, H., Krier, J., Cornet, A. and Mille, P., "Limits of Using Bilinear Stress strain Curve for Finite Element Modeling of Nanoindentation Response on Bulk Materials ", *Thin Solid Films*, Vol. 379, pp. 147-155, 2000 .

[19] Lichinchi, M., Lenardi, C., Haupt, J. and Vitali, R., "Simulation of Berkovich Nanoindentation Experiment on Thin Films Using the Finite Element Method ", *Thin Solid Films*, Vol. 312, pp. 240-248, 1998 .

[20] Patel, D.K. and Kalidindi, S.R., "Correlation of Spherical Nanoindentation Stress-Strain Curves to Simple Compression Stress-Strain Curves for Eelastic-Plastic Isotropic Materials Using Finite Element Models ", *Acta Materialia*, Vol. 112, pp. 295-302, 2016 .

[21] pelletier, H., "Predictive Model to Estimate the Stress-Strain Curves of Bulk Metals Using Nanoindentation ", *Tribology International* Vol. 39, pp.593-606, 2006 .

[22] Guillonneau, G., Kermouche, G., Bec, S. and Loubet, J., "Determination of Mechanical Properties by Nanoindentation Independently of Indentation Depth Measurement ", *Journal of Materials Research*, Cambridge University Press (CUP), Vol. 27, pp.2551-2560, 2012 .

[23] Su, C. and Anand, L., "Plane Strain Indentation of a Zr Based Metallic Glass: Experiments and Numerical Simulation ", *Acta Mater.*, Vol. 54, pp. 179-189, 2006 .

و جستجوی اکستریم موضعی آن در تمام بازه تغییرات متغیرهای اصلی، آن را به عنوان جواب معرفی می‌نماید. استفاده از تعریف خطای برآیند باعث دخالت دادن همزمان هر دو پارامتر بی بعد در انتخاب جواب شده و روش جدید را تکمیل می‌کند. اعمال این روش در خصوص تیتانیوم خالص منجر به حصول نتایج منطبق با نتایج تحلیل‌های قبلی و نزدیک به مقادیر مندرج در مراجع معتبر شده‌است.

بررسی مراحل حل نشان می‌دهد که استفاده از فرض‌های مدل دو بعدی متقارن محوری، فرورونده صلب، اصطکاک متناسب بین سطوح تماسی و سطح مخروطی ناقص برای فرورونده منجر به نتایج قابل قبولی می‌شود. معادله ساختاری دوخطی نیز به جهت سادگی و انطباق با رفتار واقعی، برای بیان رفتار حالت پلاستیک با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته و مقدار تنش تسلیم با انطباق قابل قبولی با مقادیر مرجع بدست آمده است. اگرچه معیار قابل قبولی برای سنجش مقدار مدول سخت شوندگی در دست نمی‌باشد ولی مقدار بدست آمده با نتایج تحلیل‌های قبلی انطباق خوبی نشان می‌دهد.

در کنار این مطالب تغییر مقدار شعاع نوک فرورونده منجر به کاهش خطای حل عددی و نزدیک شدن منحنی نیرو-عمق فروروی به منحنی تجربی می‌شود به نحوی که دو برابر شدن این شعاع در هر بار به کاهش حدودی چهار درصدی در خطا می‌انجامد. با انتخاب شعاعی برابر 200 nm، سطح خطا به مقدار حدودی 5.9% نسبت به نتایج تجربی می‌رسد که نشان‌دهنده بهبود قابل توجهی در دقت می‌باشد. لذا انتخاب شعاع فرورونده برابر 200 nm یا عددی نزدیک به آن علاوه بر اینکه با استاندارد و کارهای قبلی هماهنگی کامل دارد منجر به نتایج بسیار خوبی در محاسبات عددی می‌شود. لازم به ذکر است که رسیدن به این میزان دقت در تحلیل المان محدود با مقیاس نانو بسیار دشوار بوده و نسبت به کارهای انجام شده قبلی، حاکی از سطح دقت بسیار خوبی می‌باشد.

#### 8- مراجع

[1] Sanjabi, S., "Study of TiNi Thin Film Mechanical Properties by Nanoindentation Mehod ", In Persian, 7th Iranian Seminar on Surface Engineering ,Isfahan, IRAN, 2006 .

[2] Cheng, Y.T. and Cheng, C. M., "Can Stress-Strain Relationships be Obtained From Indentation Curves Using Conical and Pyramidal Indenter", *J. MATERIALS RESEARCH*, Vol. 14, pp. 9, 1999 .

[3] Ashrafi, H. and Shariyat, M., "Modeling of Viscoelastic Properties for Polymeric Thin Solid Layers using a Contact Nanoindentation Approach", In Persian ,Iranian Journal of Surface Science and Technology, Vol. 14, pp. 17-26, 2011 .

[4] Lawn, B.R., *Fracture of Brittle Solids*, 2nd edn., Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993 .

[5] Olivier, W.C. and Pharr, W.C., "An Improved Technique for Determining Hardness and Elastic Modulus Using Load and Displacement Sensing Indentation Experiments " *Journal of Materials Research*, Vol. 7. pp. 1564-1583, 1992 .

[6] Cheng, Y. T. and Cheng, C. M., "Scaling, Dimensional Analysis, and Indentation Measurements. ", *Materials Science and Engineering*, Vol. 44. pp. 91-149, 2004 .

[7] Giannakopoulos, A. E., Larsson, P. L. and Vester, R., "Analysis of Vickers Indentation ", *Int. j. Solids Structures*, Vol. 31, No. 19, pp. 2679-2708, 1994 .



- [40] Stoppel, M. and Skibicki, D., "Determination of Johnson-Cook Model Constants by Measurement of Strain Rate by Optical Method", AIP Conference Proceedings 1780, 060003, 2016.
- [41] Bressan, J.D., Tramontin, A. and Rosa, C., "Modelling of Nanoindentation of Bulk and Thin Film by Finite Element Method", Wear, Vol. 258, pp. 115-122, 2005.
- [42] Zhaohui, S. and Suresh, S., "Elastic-Plastic Characterization of Thin Films Using Nanoindentation Technique", Thin Solid Films, Vol. 437, pp. 176-182, 2003.
- [43] PERZYNSKI, K., MAJOR, L., KOPERNIK, M. and MADEJ, L., "Analysis of the Stress Distribution in the Nanogrid Coatings Based on Digital Representation of the Structure", Inżynieria Materiałowa, Vol. 31, pp. 735, 2010.
- [44] Boyer, R., Welsch, G. and Codings, E.W., "Materials Properties Handbook: Titanium Alloys, Section II: Titanium Data Sheets, 4th printing," USA, ASM International, Materials park, p. 165., 2004
- [24] Misra, RDK., Venkatsurya, P., Wu, KM. and Karjalaine, LP., "Ultra-high Strength Martensite-Austenite Dual-Phase Steels with Ultrafine Structure: the Response to Indentation Experiments", Mater. Sci. Eng. A, Vol. 560, pp. 693-699, 2013.
- [25] Karimzadeh, A., Ayatollahi, M. R. and Alizadeh, M., "Finite Element Simulation of Nano-Indentation Experiment on Aluminum 1100", Computational Materials Science, Vol. 81, pp. 595-600, 2014.
- [26] Vaidyanathan, R., Dao, M., Ravichandran, G. and Suresh, S., "Study of Mechanical Deformation in Bulk Metallic Glass Through Instrumented Indentation", Acta Mater., Vol. 49, pp. 3781-3789, 2001.
- [27] Kang, JJ., Becker, AA. and Sun, W., "Determining Elastic-plastic Properties From Indentation Data Obtained From Finite Element Simulations and Experimental Results", Int. J. Mech. Sci., Vol. 62, pp. 34-46, 2012.
- [28] Antunes, JM., Menezes, LF. and Fernandes, JV., "Three-Dimensional Numerical Simulation of Vickers Indentation Tests", Int. J. Solids Struct., Vol. 43, pp. 784-806, 2006.
- [29] Ashrafi, H., Meraji, M. and Farid, M., "A Three Dimensional Finite Element Modeling of Nanoindentation for Solid Surfaces and Thin Films", In Persian, 10th Iranian Seminar on Surface Engineering, Isfahan, IRAN, 2009.
- [30] J. Malzbender, "Indentation Load-displacement Plastic Deformation, and Energy", J. Mater. Res., Vol. 17, pp. 502-511, 2002.
- [31] Sakharova, NA., Fernandes, JV., Antunes, JM. and Oliveira, M., "Comparison Between Berkovich, Vickers and Conical Indentation Tests: a Three-Dimensional Numerical Simulation Study", Int. J. Solids Struct., Vol. 46, pp. 1095-1104, 2009.
- [32] Gerberich, W.W., Yu, W., Bahr, D., Nelson, J., Lilleodden, E., Kramer, D. and Strojny, A., "Elastic Loading and Elastoplastic Unloading from Nanometer Level Indentations for Modulus Determinations", Journal of Materials Research, Vol. 13, No. 1, pp. 421-436, 1998.
- [33] ISO-14577, in: Part 2 & 3, Geneva, Switzerland, 2002.
- [34] Li, W., Huang, C., Yu, M. and Liao, H., "Investigation on Mechanical Property of Annealed Copper Particles and Cold Sprayed Copper Coating by a Micro-Indentation Testing", Mater. Des., Vol. 46, pp. 219-226, 2013.
- [35] Shariyat, M. and Ashrafi, H., "Numerical Analysis of Contact Problems with Friction on Nano-indentation by a Modified Augmented Lagrangian Optimization Approach, In Persian", Mechanical Aerospace Journal, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12, 2011.
- [36] Begley, MR., Evans, AG. and Hutchinson, JW., "Spherical Impression of Thin Elastic Films on Elastic-Plastic Substrates", Int. J. Solids Struct., Vol. 36, pp. 2773-2788, 1999.
- [37] Wen, W., Beker, A.A. and Sun, W., "Determination of Material Properties of Thin Films and Coatings Using Indentation Tests: a review", Faculty of Engineering, University of Nottingham, University Park, Nottingham NG7 2RD, UK, Springer, 2017.
- [38] Vlachos, D.E., Markopoulos, Y.P. and Kostopoulos, V., "3D Modelling of Nanoindentation Experiment on a Coating-Substrate System", Computational Mechanics, Vol. 27, pp. 138-144, 2001.
- [39] "Analysis User's Guide, Dassault Systems, ABAQUS 6.14", 2014.