

ارزیابی شاخص ایمنی و کالیبراسیون ضرایب بار و مقاومت تیرهای بتنی مسلح تحت اثر تلاش‌های خمشی، برشی و پیچشی

فائزه جعفری^۱، جلال اکبری^{۲*}، علیرضا جهانپور^۳

۱- کارشناس ارشد مهندسی سازه، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

۲- استادیار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

۳- استادیار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده

هدف از طراحی اعضای سازه‌ای، مقاومت در برابر بارهای وارده است به طوری که ایمنی سازه‌ی موردنظر با توجه به شرایط مختلف بارگذاری تأمین شود. روش موجود در آئین‌نامه طراحی بتن ایران و مبحث نهم استفاده از ضرایب ثابت بار و مقاومت بدون در نظر گرفتن ماهیت تصادفی پارامترهای طراحی می‌باشد. عدم قطعیت‌های موجود در پارامترهای طراحی نظیر بار و مقاومت موجب تغییر ایمنی سازه شده و استفاده از ضرایب ثابت در حالت‌های مختلف بارگذاری گاهی طراحی را غیر ایمن و غیراقتصادی می‌سازد. در مقاله حاضر به طراحی احتمالاتی تیرهای بتنی مسلح تحت اثر هم‌زمان تلاش‌های خمشی، برشی و پیچشی پرداخته شده است. برای این منظور روابط تحلیلی توابع حالت حدی برای ترکیب تلاش‌های مختلف استخراج شده‌اند. با استفاده از این روش، طراح می‌تواند بر اساس اهمیت سازه و سطح ایمنی موردنیاز اقدام به طراحی نماید؛ یعنی برای سطح ایمنی موردنیاز مالک یا کارفرما، طراحی اعضای بتنی انجام می‌گیرد. در ادامه مقاله ضرایب بار و مقاومت در شاخص‌های مختلف ایمنی محاسبه شده و تأثیرپذیری آئین‌نامه از ضرایب بار و مقاومت بررسی شده است. به کمک روش ارائه شده در این تحقیق، طراح قادر است با تغییر شرایط حاکم بر مسئله نظیر ابعاد، بار وارده و خصوصیات مقطع با توجه به ایمنی سازه به طراحی اقدام نماید. برای انجام کار، یک برنامه کامپیوتری در محیط متلب نوشته شده است که روش مورد استفاده در محاسبه شاخص‌های ایمنی روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد.

کلمات کلیدی: تابع حالت حدی، تحلیل قابلیت اعتماد، شاخص ایمنی، ضرایب بار و مقاومت، شبیه‌سازی مونت کارلو.

*نویسنده مسئول: جلال اکبری

پست الکترونیکی: jalal.akbari@gmail.com & akbari@malayeru.ac.ir

DOI: 10.22065/jsce.2016.41237
<http://dx.doi.org/10.22065/jsce.2016.41237>

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۱/۱۷، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۱۰/۰۶

فهرست علائم:

γ_D	ضریب افزایش بار مرده	M_r	لنگر خمشی مقاوم مقاطع
γ_L	ضریب افزایش بار زنده	V_r	نیروی برشی مقاوم مقاطع
M_s	لنگر خمشی ناشی از بارگذاری	T_r	لنگر پیچشی مقاوم مقاطع
V_s	نیروی برشی ناشی از بارگذاری	A_s	مساحت فولادهای طولی
T_s	لنگر پیچشی ناشی از بارگذاری	A_v	مساحت فولادهای عرضی
β	شاخص ایمنی	f_y	مقاومت جاری شدن فولاد
μ_R	میانگین عامل مقاوم (ظرفیت)	f_c	مقاومت فشاری بتن ۲۸ روزه
μ_S	میانگین عامل محرک (نیاز)	b, b_w	عرض مقاطع
σ_R	انحراف معیار عامل مقاوم (ظرفیت)	d	عمق مقاطع
σ_S	انحراف معیار عامل محرک (نیاز)	c	فاصله تار خنثی در ناحیه کششی
G	تابع حالت حدی	l	ممان اینرسی مقاطع
ratio	نسبت بار مرده به زنده	ϕ_c	ضریب کاهش مقاومت بتن
t	وضعیت بارگذاری	ϕ_s	ضریب کاهش مقاومت فولاد

۱- مقدمه

استفاده از روش‌های نوین طراحی بر مبنای قابلیت اعتماد توسط الینگوود و آنگ [۱] در سال ۱۹۷۴ وارد مباحث طراحی در مهندسی عمران گردید و پس از آن تحقیقات فراوانی برای ارتقای روش‌های قابلیت اعتماد صورت گرفت. چراکه عدم قطعیت‌های موجود در پارامترهای طراحی و استفاده از ضرایب ثابت در آئین‌نامه‌ها گاهی طراحی را تحت‌الشعاع قرار می‌داد؛ بنابراین، استفاده از روش‌های قابلیت اعتماد بر مبنای حالت حدی حاکم بر مسئله و توجه به پارامترهای آماری برای هر متغیر طراحی نظیر میانگین، انحراف معیار و توزیع آماری در آئین‌نامه‌های طراحی در کشورهای مختلف توسعه یافته است. به‌عنوان نمونه لو و همکاران [۲] در سال ۱۹۹۴ به بررسی قابلیت اعتماد در یک تیر بتنی پرداخته‌اند. تیر در نظر گرفته شده تحت اثر برش خمش و پیچش طراحی شده است. سطح شکست برای سه حالت برش - خمش - پیچش با توجه به روش مرتبه‌ی اول (FORM) در نظر گرفته شد و نشان‌دهنده‌ی این واقعیت بود که شاخص ایمنی نسبت به مقدار بار زنده، مقادیر پارامترهای مؤثر در مقاومت تیر و همچنین عدم قطعیت مدل وابسته می‌باشد. اوان و همکاران در سال ۲۰۰۶ [۳] با به‌کارگیری تئوری جدید روش‌های قابلیت اعتماد برای محاسبه‌ی نیروی برشی بتن مسلح برای تیر بتنی با آئین‌نامه‌ی ACI پرداخته است. تحقیقات انجام شده نشان‌دهنده‌ی این مهم بود که عوامل مؤثری در شکست تیر بتنی از جمله: نسبت طول دهانه بر عمق مؤثر؛ مقدار فولاد طولی، شرایط تکیه‌گاهی؛ شرایط بارگذاری و نوع مصالح در مسئله تأثیرگذارند.

شاو و لی [۴] در سال ۲۰۰۷ به بررسی مدیریت ریسک در مسائل قابلیت اعتماد در سازه‌های بتنی پرداختند. تحقیق ایشان به بهینه‌سازی هزینه‌ی مصرفی برای نگهداری این‌گونه زیرساخت‌ها در طول عمر مفید بهره‌برداری از آن شده است. نوواک و همکاران [۵] در سال ۲۰۱۱ به بررسی شاخص‌های قابلیت اعتماد در تیرها و ستون‌های طراحی با آئین‌نامه‌ی ACI-318 و همچنین سازه‌های طراحی شده پرداختند و نشان دادند که ساختمان‌های طراحی شده نسبت به شاخص‌های به‌دست‌آمده از ایمنی پایین‌تری برخوردارند که دلیل این مهم توجه به اقتصادی بودن سازه‌ی طراحی شده بدون در نظر گرفتن شاخص ایمنی می‌باشد. پورکو و همکاران [۶] در سال ۲۰۱۳، به بررسی برش پانچ با استفاده از روش قابلیت اعتماد در دال تخت پرداختند. تحقیق آن‌ها به بررسی مقاومت فشاری دال تخت و عوامل مؤثر بر آن معطوف بوده است. همچنین، جنسن [۷] در سال ۲۰۱۴ به تحقیقی برای به دست آوردن شاخص قابلیت اعتماد برای تلاش برشی و تقویت پل‌های بتنی

پرداخته است. او نشان داد که استفاده از این روش باعث شده است طراحی تا حدود ۱۰ تا ۱۵ درصد سبک تر شود. به روزترین تحقیق در این زمینه توسط بیکرز و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۴ به منظور بررسی تحلیل قابلیت اعتماد پل بتنی انجام شده است که سازه در نظر گرفته شده تحت اثر همزمان لنگر خمشی و نیروی برشی بوده است. در زمینه کالیبره نمودن ضرایب بار و مقاومت نیز تحقیقاتی در دنیا انجام شده است. تروس و توماس [۹] در سال ۲۰۰۲ به بررسی لرزه‌های آئین‌نامه‌ی یونان با هدف کالیبره نمودن آئین‌نامه برای اعضای تیر-ستون و تیر پرداختند. هدف از تحقیق آن‌ها بررسی ظرفیت لرزه‌ای تیر-ستون و ظرفیت برشی تیر بود که مقدار شاخص ایمنی را با توجه به پارامترهای آماری مؤثر در تحقیق خود پیشنهاد دادند. همچنین سرزن و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۳ اقدام به کالیبره نمودن ضرایب بار و مقاومت برای طراحی سازه‌ها نموده‌اند. پایک و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۸ به بررسی تأثیر کالیبره کردن آئین‌نامه و عملکرد استفاده از تئوری احتمالاتی در طراحی پل‌های بتنی نمودند. آن‌ها پس از مطالعه‌ی میدانی داده‌های احتمالاتی به کالیبراسیون آئین‌نامه‌های طراحی پل‌های بتنی در کشور کره پرداختند. مطابق با توصیه‌های صورت گرفته در تحقیق میرزا و همکاران [۱۲] و سایر تحقیقات آماری انجام شده توسط محققانی مانند گالامبوس و مک گروگر [۱۳-۱۴]، شاخص ایمنی برای بار مرده + زنده برای خمش ۳ و برای برش و پیچش ۲ می‌باشد که در تحقیق حاضر فاصله‌ی شاخص ایمنی تا مقدار پیشنهادی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

هدف از ارائه‌ی تحقیق حاضر بررسی شاخص ایمنی آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای سه حالت حدی برش - خمش - پیچش و ترکیب حالت‌های حدی فوق می‌باشد. در تحقیق حاضر، با پیشنهاد روابط حدی جدید، سطوح ایمنی و ضرایب بار و مقاومت برای تمامی حالت‌های مطرح شده محاسبه گردیده است. با توجه به تحقیقات صورت گرفته فوق، در تحقیق حاضر به کمک روش مونت کارلو [۱۵] بعد از بررسی متغیرهای دارای عدم قطعیت در یک تیر متأثر از اثر خمش، برش و پیچش با توجه به توابع حدی مؤثر در طراحی به برآورد سطح ایمنی آئین‌نامه بتن ایران پرداخته شده است. به منظور دستیابی به این مهم پارامترهای موجود دارای عدم قطعیت در مسئله شناسایی شده است. سپس حالات متفاوت تابع حدی نظیر (شکست برشی، پیچشی و خمشی) در نظر گرفته شده است. تمام مراحل ذکر شده در قالب یک برنامه کامپیوتری در محیط MATLAB توسط نویسنده اول مقاله نوشته شده است.

۲- طراحی تیرهای بتنی تحت تلاش‌های خمشی، برشی و پیچشی

به منظور محاسبه شاخص ایمنی باید توابع حدی مورد نیاز که تلاش‌های سازه‌ای را نشان می‌دهد، به دست آورد. در روابط (۱) تا (۳) به ترتیب لنگر مقاوم، نیروی برشی و لنگر پیچشی برای مقاطع مستطیلی ارائه شده است.

$$M_r = A_s \Phi_s f_y \left(d - \frac{A_s \Phi_s f_y}{2\alpha_1 \Phi_c f_c b} \right) \quad (1)$$

$$V_r = \underbrace{0.2 \phi_c b_w d \sqrt{f_c}}_{V_c} + \underbrace{\phi_s f_y A_v \frac{d}{s}}_{V_s} \quad (2)$$

$$T_r = 2\phi_s A_0 A_t \frac{f_y}{s} \quad (3)$$

در روابط فوق، M_r لنگر مقاوم مقطع، V_r نیروی برشی مقاوم مقطع و T_r لنگر پیچشی مقطع می‌باشد. همچنین پارامترهای A_v, A_s, f_y, f_c, b, d به ترتیب عمق مقطع، عرض مقطع، مقاومت فشاری بتن، مقاومت کششی فولاد مصرفی و مقدار مساحت فولاد طولی و عرضی مورد نیاز در مقطع اشاره می‌کنند. به کمک روابط فوق به صورت جداگانه برای حالت برش، خمش و پیچش با توجه به تلاش‌های وارده بر مقاطع به محاسبه مقادیر اسمی فولاد مصرفی به کمک آئین‌نامه پرداخته می‌شود [۱۶]. به منظور طراحی خمشی تمامی مقاطع از فولاد فشاری استفاده شده است. در مورد مقاطع L شکل و T شکل از روابط پیشنهادی آئین‌نامه برای به دست آوردن لنگر مقاوم مقطع استفاده شده است که تمامی روابط استفاده شده در مرجع [۱۶] موجودند. برای حالت‌های برشی و پیچشی تیر سطح مقطع کامل تیر (L, T و مستطیلی شکل) در نظر گرفته شده است. ضرایب در نظر گرفته شده در آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای افزایش ضریب بار و کاهش مقاومت جهت طراحی به ترتیب ضرایب

بار مرده و زنده در حالت حدی $\gamma_L=1.50, \gamma_D=1.25$ می‌باشند. همچنین، ضرایب کاهش مقاومت فولاد و بتن در مرحله طراحی حالت حدی به صورت $\phi_s=0.85, \phi_c=0.65$ می‌باشند. در جدول ۱ اطلاعات آماری مورد نیاز تحقیق برای طراحی بر اساس قابلیت اعتماد ارائه شده است.

جدول ۱: مشخصات آماری پارامترهای بکار گرفته شده در تحقیق برای طراحی مقاطع بتن آرمه [۱۳-۱۴]

انحراف معیار	مقدار متوسط	تابع چگالی	مقدار اسمی	متغیر تصادفی
۰/۱۸	۱۹/۳	نرمال	۲۱	f'_c (Mpa)
۰/۱۲	۳۱۷	نرمال	۴۲۰	f_y (Mpa)
b/۱۰ h/۱۷ d/۱۵	b h d	نرمال	b h d	Dimension (mm)
۰/۰۳ ۰/۰۳ ۰/۰۳	A_s A_v A_t	نرمال	A_s A_v A_t	Area (mm ²)
۰/۱ ۰/۴۰-۰/۲۵	1.05D L	نرمال گامبل	D L	Loading

۳- فرمول بندی توابع حدی و شاخص ایمنی

برای طراحی تمام احتمالاتی تیرهای بتنی تحت اثر هم‌زمان تلاش‌های خمشی، برشی و پیچشی توابع حدی باید دارای شرایط زیر باشند:

$$\begin{aligned} M_r &\leq M_s \\ V_r &\leq V_s \\ T_r &\leq T_s \end{aligned} \quad (۴)$$

در رابطه (۴) مقادیر حدی T_r, V_r, M_r تلاش‌هایی هستند که تیر می‌تواند تحمل کند (ظرفیت مقطع). همچنین پارامترهای T_s, V_s, M_s به تلاش‌های حاصل از بارگذاری (نیاز) اشاره می‌کنند. برای برآورد شاخص ایمنی ابتدا مقدار فولاد مورد نیاز مقطع برای سه تلاش ذکر شده محاسبه شده، سپس به کمک رابطه هاسوفر لیند [۱۷]، شاخص ایمنی مطابق رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$\beta = (\mu_R - \mu_s) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_s^2} \quad (۵)$$

که در آن $\sigma_s, \sigma_R, \mu_s, \mu_R$ به ترتیب میانگین تلاش مقاوم، میانگین تلاش محرک، انحراف معیار تلاش مقاوم و انحراف معیار تلاش محرک می‌باشند. در تحقیق حاضر، مقدار شاخص ایمنی β با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی مونت کارلو برای حالت‌های مختلف حدی در تیرهای بتنی با ابعاد مختلف ارزیابی می‌شود.

۳-۱- رابطه سطح ایمنی برش + پیچش

بر اساس مطالعات انجام شده [۲] می‌توان با محدود کردن رابطه (۶) به یک مقدار مشخص به ترکیب هم‌زمان تلاش‌های برشی و پیچشی در مقاطع مختلف بتنی اشاره نمود.

$$\sqrt{\underbrace{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u P_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2}_{TV}} \leq 0.275 \Phi_c f_c \quad (6)$$

که در آن پارامترهای d, b_w به عرض و ارتفاع مقطع اشاره می‌کنند. همچنین پارامترهای P_h, A_{oh} به ترتیب بیانگر سطح محصور توسط خط مرکزی بیرونی‌ترین خاموت‌های بسته پیچشی و محیط تنگ بسته پیچشی می‌باشند. برآورد سطح ایمنی آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای برش و پیچش به شرح ذیل است:

با توجه به مقطع در نظر گرفته شده و رابطه (۲) مقدار فولاد برشی محاسبه می‌شود. روش محاسبه به این صورت است که با فرض مقدار بار مرده مشخص و قرار دادن پارامتر $ratio=(1-t)/t$ و تغییر t بین $0/4$ تا 1 مقدار بار زنده محاسبه می‌گردد. مقدار نیروی برشی از جمع بار زنده + مرده حاصل می‌گردد و در نهایت با توجه به روابط (۲) فولاد برشی مورد نیاز به دست می‌آید. با اعمال مقدار لنگر وارده بر تیر (لنگر بار مرده + لنگر بار زنده) و رابطه (۳) به محاسبه فولاد پیچشی مورد نیاز در تیر پرداخته می‌شود. روش محاسبه‌ی مجموع لنگرهای وارده بر تیر مشابه حالت برشی و در نظر گرفتن نسبت پیشنهادی توسط مراجع [۱۱] برای مقدار t می‌باشد. تابع حدی (G) در نظر گرفته شده برای حل مسئله با در نظر گرفتن روابط ارائه شده در آئین‌نامه برای برش، پیچش و ترکیب برش- پیچش به ترتیب مطابق روابط (۷) تا (۹) می‌باشد.

$$G = \frac{V_r}{b_w d} - \frac{V_s}{b_w d} \quad (7)$$

$$G = T_R - T_S \quad (8)$$

$$G = (TV)_R - (TV)_S \quad (9)$$

در معادلات فوق اندیس S برای تلاش‌های وارده بر مقطع (نیاز) و اندیس r به مقاومت مقطع (ظرفیت) در برابر بارهای وارده اشاره می‌کند. در بخش‌های ۲-۳ تا ۲-۶ سطوح مختلف آیین‌نامه‌ای برای ترکیب مختلف تلاش‌ها ارائه شده است.

۲-۳- رابطه سطح ایمنی خمش + پیچش

برای بررسی سطح ایمنی آئین‌نامه ایران با استفاده از روابط (۱) تا (۳) به محاسبه‌ی مقدار فولاد برشی و خمشی مقطع پرداخته می‌شود. پس از محاسبه‌ی مقدار لنگر مقاوم وارد بر مقطع و مقدار بارهای وارده یک تابع حدی مانند رابطه (۱۰) و (۱۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$M_r = A_s \Phi_s f_y \left(d - \frac{A_s \Phi_s f_y}{2 \alpha_1 \Phi_c f_c b} \right) - M_s \quad (10)$$

$$G = \left(\frac{M_r c}{I} + \frac{2T_r (b_w + d)}{(b_w d)^2} \right) - \left(\frac{M_s c}{I} + \frac{2T_s (b_w + d)}{(b_w d)^2} \right) \quad (11)$$

در معادلات فوق، تلاش حاصل‌شده از بارهای وارده (زنده + مرده) با اندیس S و همچنین مقاومت مقطع بر اثر بارهای وارده با توجه به خصوصیت مقطع ساخته شده با اندیس r نشان داده شده است. همچنین پارامتر I بیانگر ممان اینرسی و c فاصله تار خنثی در ناحیه کششی مقطع می‌باشد.

۳-۳- رابطه سطح ایمنی خمش + برش

در مراحل پیشین، مقدار فولاد مورد نیاز مقطع محاسبه شده است. همچنین مقدار نیروهای وارد بر مقطع و مقاومت مقطع برای سه حالت حدی برشی - پیچش و خمشی به‌دست‌آمده است. برای ترکیب خمش - برش از رابطه‌ی حدی زیر استفاده می‌شود.

$$G = \left(\frac{V_r}{b_w d} + \frac{M_r c}{I} \right) - \left(\frac{V_s}{b_w d} + \frac{M_s c}{I} \right) \quad (12)$$

۳-۴- رابطه سطح ایمنی خمش + برش + پیچش

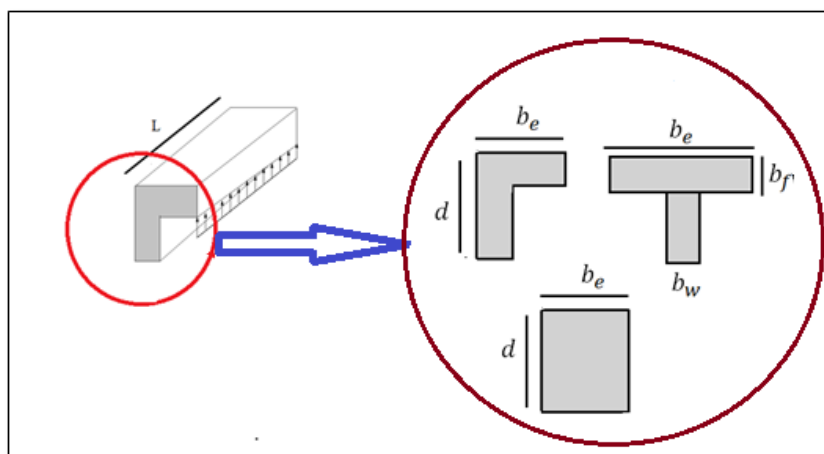
برای برآورد سطح ایمنی آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای سه تلاش هم‌زمان برشی - خمشی - پیچشی، تابع حالت حدی مانند رابطه (۱۳) در نظر گرفته شده است.

$$G = \left(\frac{M_r c}{I} + (TV)_R \right) - \left(\frac{M_s c}{I} + (TV)_S \right) \quad (13)$$

در تابع حدی فوق، تأثیر تلاش‌های برشی - خمشی - پیچشی هم‌زمان دیده شده است و با در نظر گرفتن حالات حدی اشاره شده به برآورد سطح ایمنی پرداخته می‌شود. برای بررسی مقدار تأثیر بار مرده بر سطح ایمنی، مقادیر عددی بار مرده تغییر داده می‌شوند.

۴- نتایج تحقیق

برای بررسی شاخص ایمنی تیرهای بتنی مطابق شکل ۱ مقطعی با مشخصات هندسی داده شده در نظر گرفته شده است. بار مرده گسترده (q_D) برابر ۲۵ کیلو نیوتن بر متر بر تیر وارد شده است. بار زنده ratio * M_D می‌باشد که ratio = (1-t)/t می‌باشد. مقاطع تیرهای مورد بررسی در این تحقیق به صورت L شکل، مستطیلی و T شکل می‌باشند.



شکل ۱: مشخصات هندسی و ابعاد مقاطع مورد مطالعه در این تحقیق

در جدول ۲ مشخصات مصالح و خواص هندسی مقاطع مورد مطالعه نشان داده شده است. در این جدول مقدار پارامتر t بین ۰/۴ تا ۱ تغییر می‌کند. نکته قابل ذکر این است که مقادیر عددی پارامترهای ارائه شده در جدول به صورت اسمی می‌باشند.

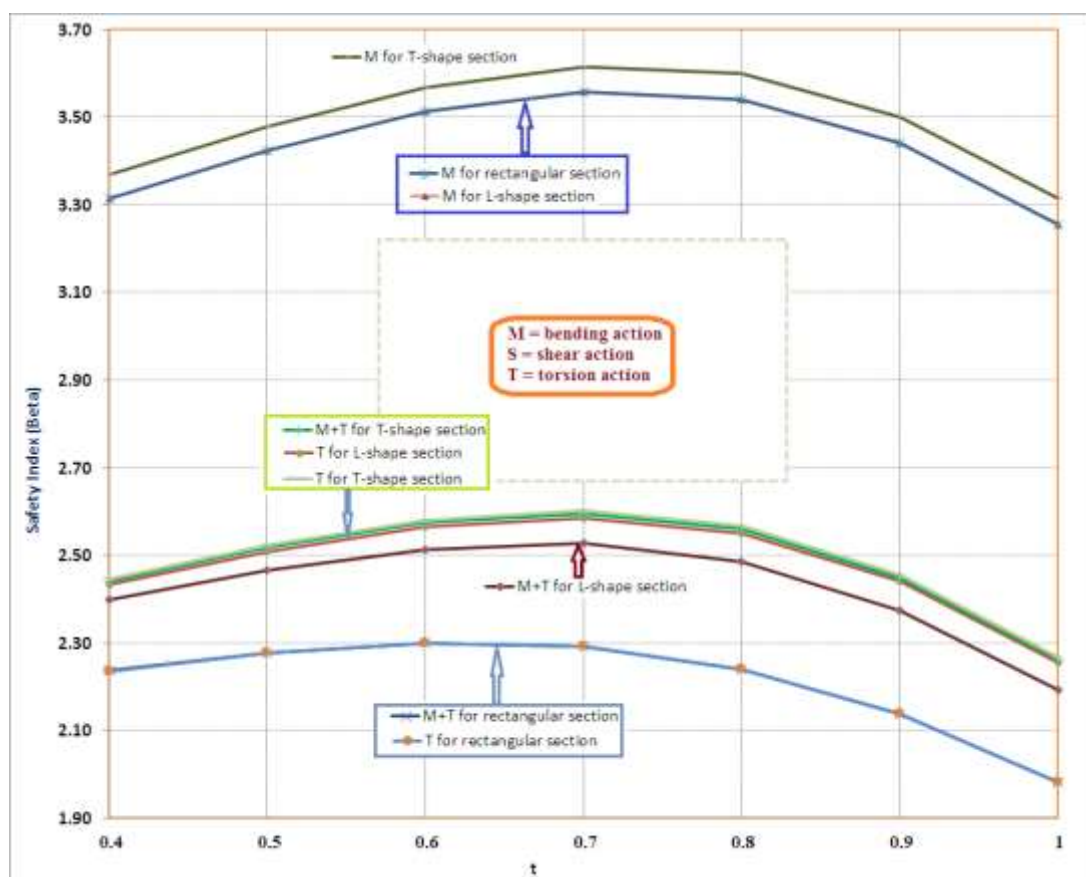
جدول ۲: مقادیر اسمی پارامترهای به کار گرفته شده در مقاطع مورد مطالعه

f _y (Mpa)	b _e (mm)	f' _c (Mpa)	q _D (kN/m)	b _w (mm)
۴۲۰	۸۰۰	۲۱	۲۵	۴۰۰
L (mm)	d (mm)	b _f (mm)	M _L = M _D (1-t)/t	
۲۰۰۰	۴۰۰	۲۰۰	۰/۴-۱	

با در نظر گرفتن توابع حدی اشاره شده در بند ۳ و مقادیر آماری ارائه شده در جدول ۱ شاخص ایمنی برای تلاش‌های مختلف و مقاطع مورد بررسی محاسبه می‌شود. برای این منظور، مقادیر اسمی پارامترها نظیر ابعاد تیر، مقدار فولاد مصرفی، مقادیر بارهای وارده بر مقطع، مقاومت فشاری بتن، تنش جاری شدن فولاد و غیره به‌عنوان متغیرهای تصادفی با توجه به جدول ۱ در نظر گرفته شده‌اند. سپس با استفاده از مقادیر آماری داده‌شده نظیر (میانگین، انحراف معیار و توزیع آماری) به محاسبه‌ی مقادیر نیروهای داخلی در مقاطع مورد مطالعه پرداخته می‌شود. روش برآورد مقادیر نیروهای داخلی قابل تحمل توسط مقاطع تولید اعداد تصادفی به تعداد زیاد به ازای هر دور چرخه‌ی مونت کارلوی نوشته شده در برنامه MATLAB [۱۸] می‌باشد. روش به کار گرفته شده برای محاسبات قابلیت اعتماد روش مونت کارلو می‌باشد که در ابتدای چرخه مقادیر هر متغیر به ازای هر دور چرخه تولید شده سپس مقدار لنگر و نیروهای مقاوم (R) محاسبه و در انتهای هر دور چرخه مقادیر تلاش‌های وارد بر مقطع (S) محاسبه خواهد شد. در نهایت به کمک رابطه (۵) به برآورد شاخص ایمنی در مقطع برای نسبت‌های باری مختلف پرداخته می‌شود.

۴-۱- سطح ایمنی حالت خمش + پیچش

به کمک روابط ارائه شده در بخش ۳-۲ شاخص ایمنی برای ترکیب بارگذاری خمش-پیچش محاسبه شده است. در شکل ۲ مقادیر شاخص ایمنی برای مقاطع مختلف با توجه به برنامه کامپیوتری نوشته شده ارائه شده است.



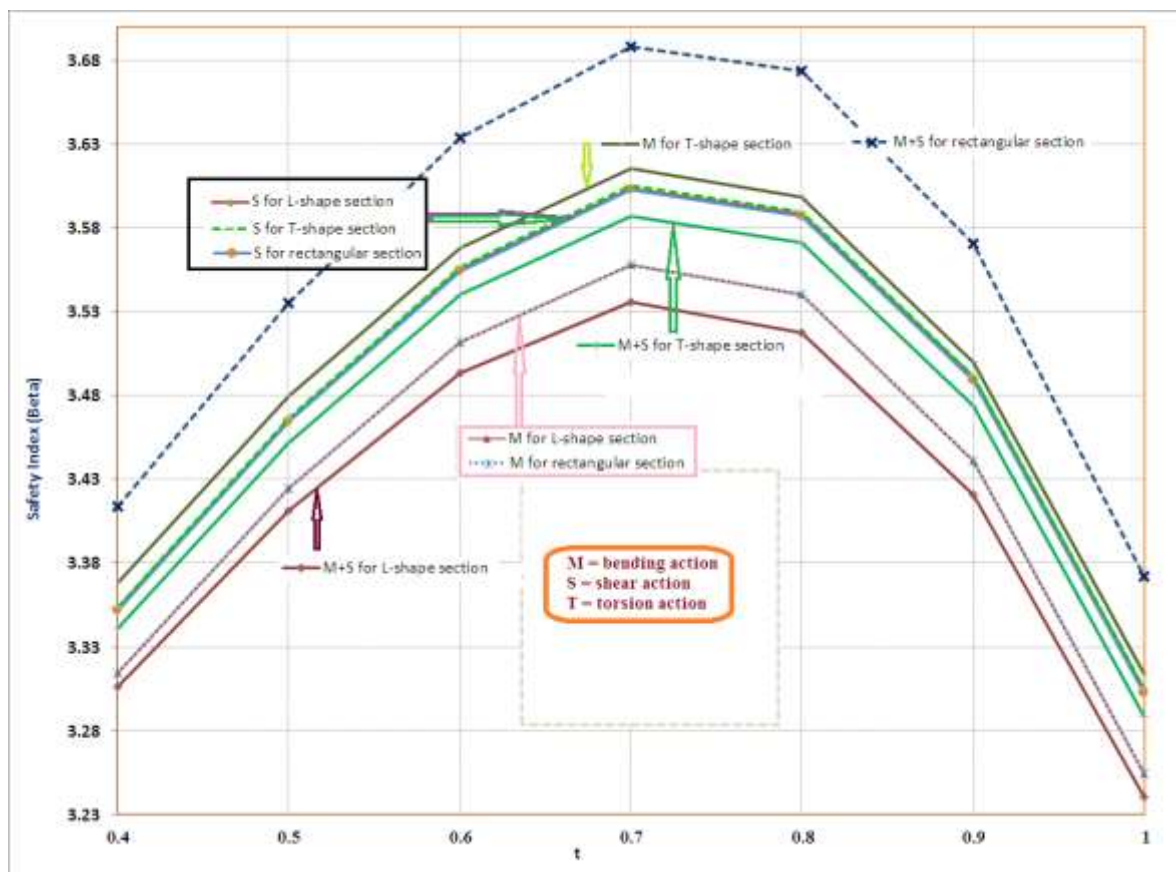
شکل ۲: سطح ایمنی آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای ترکیب خمش + پیچش.

با توجه به شکل ۲) میانگین سطح ایمنی برای خمش تمام مقاطع حدود ۳/۵ می‌باشد. در خمش برای مقاطع مستطیلی و L شکل شاخص‌ها برای تمام مقادیر t یکسان می‌باشند. شاخص‌ها برای مقاطع T شکل کمی بیشتر از مقاطع شکل و مستطیلی می‌باشد. همچنین، شاخص ایمنی برای پیچش مقاطع در حد ۲/۵ برآورد می‌شود. مقاطع مستطیلی کمترین شاخص ایمنی را برای پیچش و ترکیب پیچش و خمش دارند. حداکثر شاخص ایمنی برای مقاطع مختلف در $t = 0.7$ رخ می‌دهد.

از پائین ترین منحنی شکل (۲) مشاهده می‌شود که پیچش در مقاطع مستطیلی اهمیت بیشتری نسبت به خمش در طراحی‌ها داشته و شاخص ایمنی نسبت به پیچش اهمیت بیشتری دارد تا خمش؛ بنابراین باید طراحی سازه‌های بتنی طوری باشد تا حتی‌المقدور پیچش ایجاد نشود؛ زیرا همان‌گونه که منحنی‌ها مشاهده می‌شود، حضور تلاش پیچشی شاخص‌های ایمنی را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش داده است. به‌طور متوسط شاخص‌ها در حالت خمش از $\frac{3}{5}$ به $\frac{2}{5}$ در حالت خمش - پیچش کاهش یافته‌اند.

۲-۴- سطح ایمنی حالت خمش + برش

در شکل ۳ سطوح ایمنی برای ترکیب خمش- برش نشان داده شده است. شکل نشان می‌دهد که برای تلاش برشی خالص نوع مقطع تأثیری در شاخص‌های ایمنی ندارد و منحنی‌های شاخص‌ها برهم منطبق می‌باشند. لیکن، در ترکیب خمش- برش مقطع مستطیلی بیشترین ایمنی و مقطع L شکل کمترین شاخص را دارا می‌باشد. برای مقاطع T شکل شاخص‌های ایمنی بین مقطع مستطیلی و L شکل می‌باشند. ترکیب خمش- برش برخلاف حالت خمش + پیچش شاخص‌های ایمنی را چندان تحت تأثیر قرار نداده است. با توجه به شکل وجود هم‌زمان تلاش‌های خمشی و برشی حدود $\frac{0}{2}$ شاخص‌ها را کاهش داده است. نکته جالب توجه در شکل فوق با توجه به بالاترین منحنی شکل در این است که در مقطع مستطیلی ترکیب خمش+ برش باعث بهبود شاخص‌های ایمنی شده است؛ مانند ترکیب خمش + پیچش حداکثر شاخص در تمام حالات در $t=0.7$ رخ داده است.

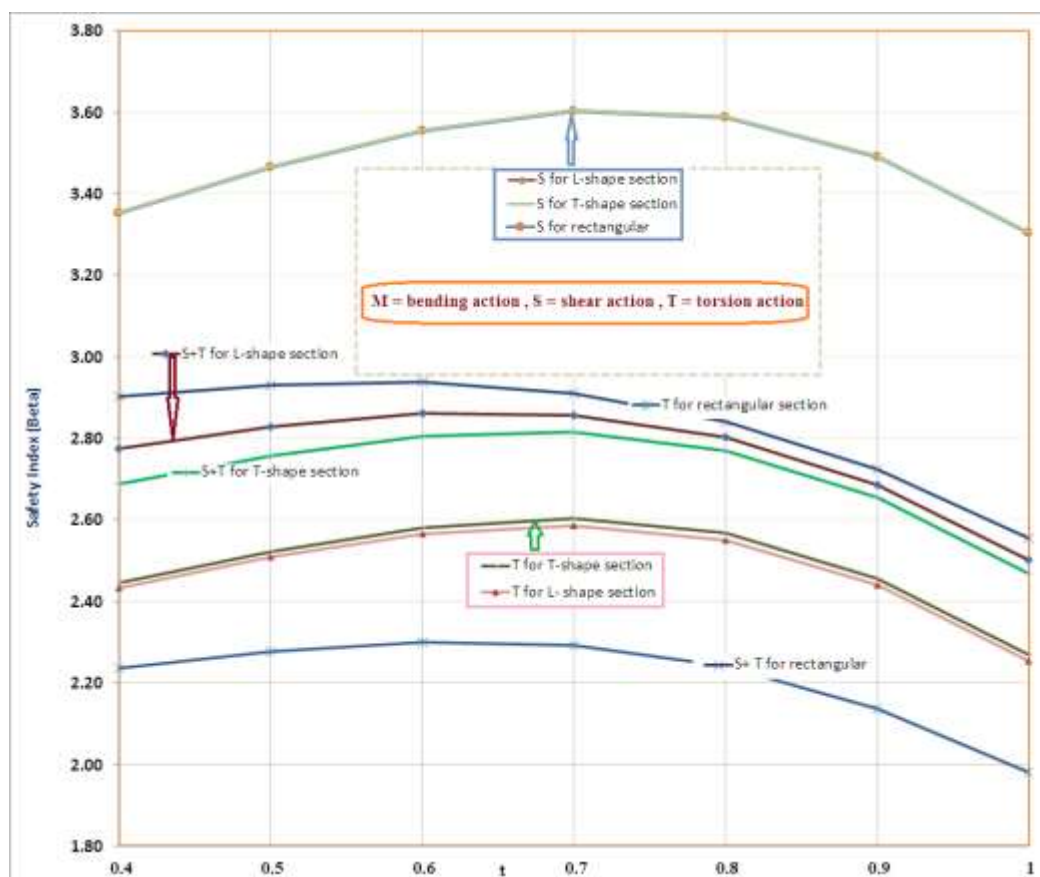


شکل ۳: سطح ایمنی آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای خمش- برش.

۳-۴- سطح ایمنی حالت برش + پیچش

در شکل (۴) سطوح ایمنی برای ترکیب برش + پیچش نمایش داده شده است. در حالتی که فقط تلاش برشی تنها مطرح است، نوع مقطع تأثیری در مقادیر شاخص‌ها ندارد. در این حالت متوسط شاخص ایمنی حدود $\frac{3}{5}$ برآورد شده است. در حالتی که پیچش تنها مورد مطالعه

باشد، رفتار مقاطع L و T یکسان بوده و مقاطع مستطیلی عملکرد بهتری دارند. در ترکیب برش + پیچش مقطع L بهترین عملکرد و مقاطع مستطیلی ضعیف ترین عملکرد را دارند. وجود تلاش پیچشی میانگین شاخص ایمنی را از $\frac{3}{5}$ در حالت برش تنها به $\frac{2}{3}$ در ترکیب برش + پیچش برای مقاطع مستطیلی کاهش داده است. حداکثر شاخص ها برای همه مقاطع مورد مطالعه در $t = 0.7$ رخ داده است.

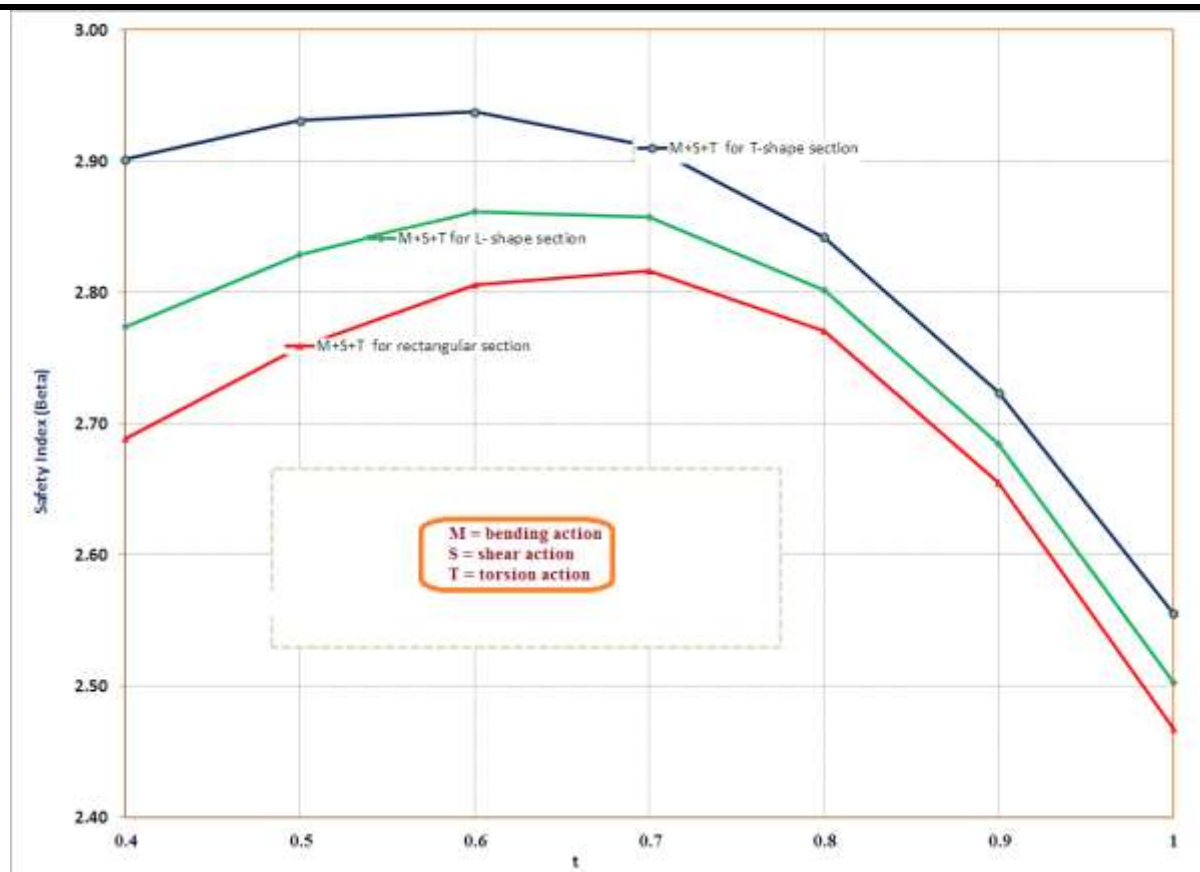


شکل ۴: سطح ایمنی آئین نامی بتن ایران برای برش - پیچش.

با توجه به شکل ۴ بیشترین شاخص ایمنی برای برش مقطع T شکل و کمترین شاخص مربوط به پیچش مقاطع مستطیلی است. لیکن برای ترکیب برش و پیچش مقاطع، بیشترین شاخص مربوط به مقطع مستطیلی و کمترین آن مربوط به مقاطع T شکل است. هرچند با افزایش مقدار اختلاف شاخص ایمنی برای مقاطع مختلف کاهش می یابد.

۴-۴ - سطح ایمنی خمش + برش + پیچش

به کمک روابط موجود در بند ۳ برآورد سطوح ایمنی در ترکیب خمش + برش + پیچشی انجام شده است. همان طور که از روی شکل ۵ مشخص است، بیشترین شاخص ایمنی برای همه مقادیر مربوط به مقطع T شکل و کمترین شاخص مربوط به مقطع مستطیلی می باشد. با افزایش مقدار t شاخص ایمنی برای همه مقاطع کاهش می یابد. شاخص مقاطع T شکل بین $\frac{2}{95}$ و کمترین مقدار $\frac{2}{55}$ می باشد. برای مقاطع L شکل شاخص ایمنی بین $\frac{2}{85}$ تا $\frac{2}{50}$ می باشد. همچنین برای مقاطع مستطیلی حداکثر مقدار شاخص $\frac{2}{82}$ و کمترین مقدار $\frac{2}{47}$ می باشد. در هر سه مقطع مورد مطالعه حداکثر شاخص در t بین $\frac{0}{6}$ تا $\frac{0}{7}$ رخ داده است.



شکل ۵: سطح ایمنی آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای خمش - برش - پیچش.

۴-۵- برآورد ضرایب بار و مقاومت در حالات حدی مختلف

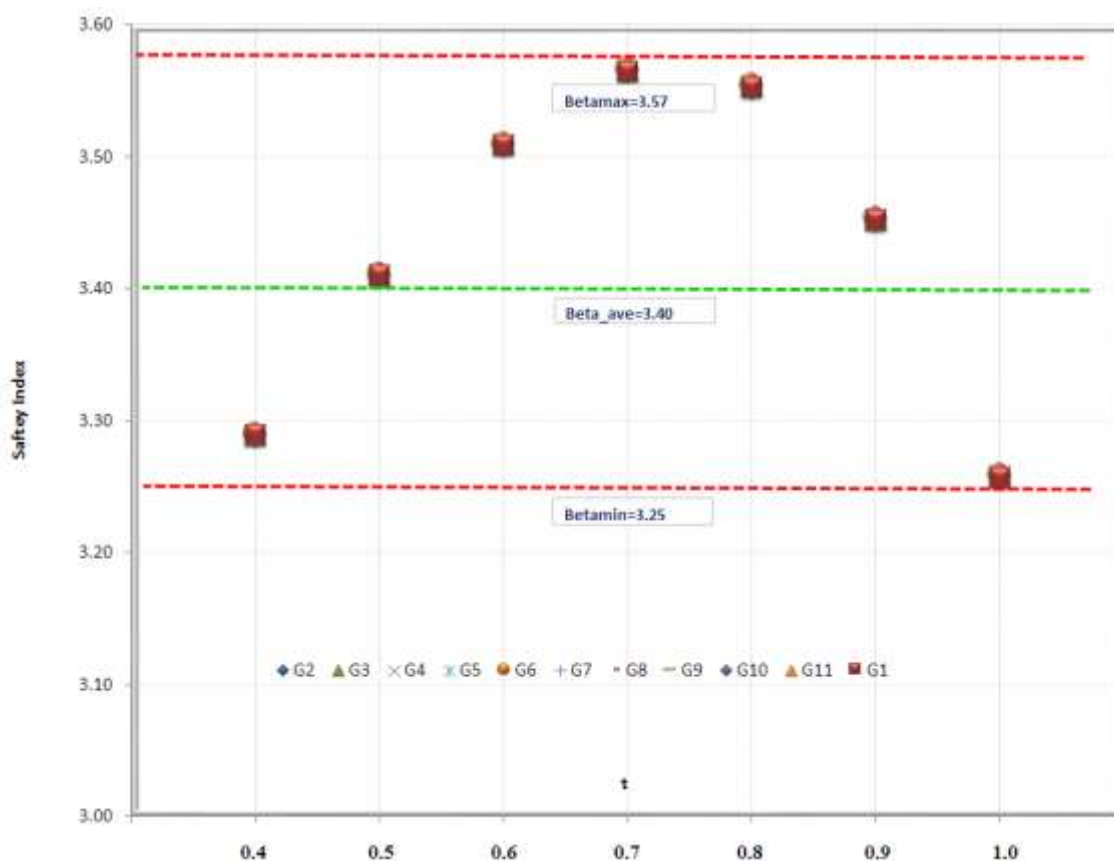
برآورد ضرایب بار و مقاومت به کمک برنامه نوشته شده فقط برای مقطع مستطیلی ارائه شده‌اند. نحوه محاسبه ضرایب به این صورت می‌باشد که در ابتدا به برنامه‌ی نوشته شده محدود‌های از ضرایب داده می‌شود. سپس با استفاده از روابط موجود در آئین‌نامه بتن ایران و ضرایب اعمالی، مقادیر اسمی فولاد محاسبه خواهد شد. سپس بدون اعمال هیچ کدام از ضرایب موجود در آئین‌نامه و به کمک چرخه‌ی مونت کارلو شاخص ایمنی با توابع حدی در نظر گرفته شده محاسبه می‌گردند. مطابق جدول ۳ یازده گروه از ضرایب بار و مقاومت به برنامه کامپیوتری به‌عنوان ورودی داده شده است که این ضرایب از گروه ۱ تا ۱۱ به تدریج افزایش پیدا کرده‌اند. ضرایب گروه ۱ (G_1) همان مقادیری هستند که در آئین‌نامه بتن ایران برای طراحی سازه‌های بتنی اعمال می‌شوند.

جدول ۳: مقادیر ضرایب بار و مقاومت اعمال شده در برنامه کامپیوتری

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11
ϕ_C	۰/۶۰	۰/۶۱	۰/۶۲	۰/۶۳	۰/۶۴	۰/۶۵	۰/۶۶	۰/۶۷	۰/۶۸	۰/۶۹	۰/۷۰
ϕ_S	۰/۸۵	۰/۸۶	۰/۸۷	۰/۸۸	۰/۸۹	۰/۹۰	۰/۹۱	۰/۹۲	۰/۹۳	۰/۹۴	۰/۹۵
γ_D	۱/۲۵	۱/۲۶	۱/۲۷	۱/۲۸	۱/۲۹	۱/۳۰	۱/۳۱	۱/۳۲	۱/۳۳	۱/۳۴	۱/۳۵
γ_L	۱/۵۰	۱/۵۱	۱/۵۲	۱/۵۳	۱/۵۴	۱/۵۵	۱/۵۶	۱/۵۷	۱/۵۸	۱/۵۹	۱/۶۰

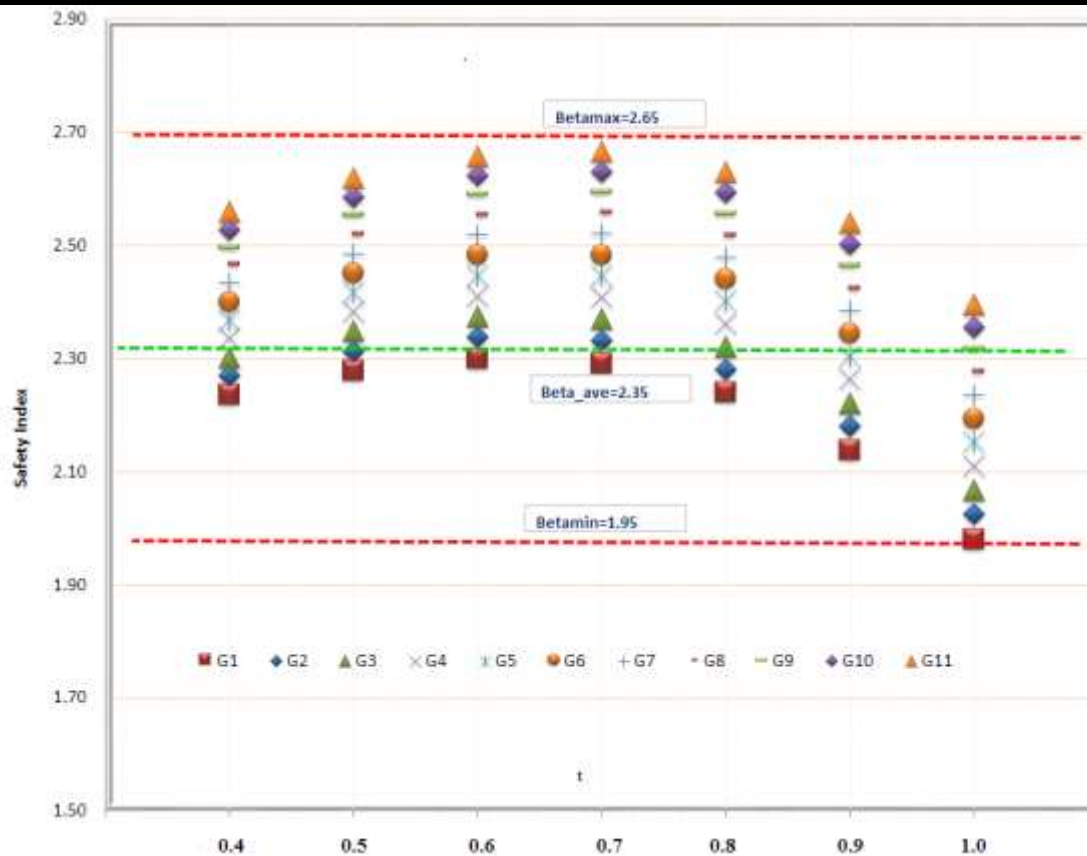
در شکل‌های ۶ تا ۹ مقادیر ضرایب بار و مقاومت برای تغییرات بارگذاری t در برابر تغییرات شاخص ایمنی β برای گروه‌های مختلف ضرایب G_i محاسبه شده است. در صورتی که طراح بخواهد برای یک ضریب ایمنی معلوم و با بارگذاری مشخص طراحی تیر را انجام دهد، می‌تواند برای طراحی اقتصادی و تمام احتمالاتی ضرایب کاهش مقاومت و افزایش بار را با مشاهده شکل و از جدول ۳ این ضرایب را استخراج نماید. در نمودارهای ارائه شده t تغییرات بارگذاری زنده و مرده می‌باشد. افزایش مقدار t به این معنی است که مقادیر بار مرده در مقایسه با بار

زنده زیاد است یا شدت بار مرده قابل توجه می‌باشد. عدد $t = 0/4$ یعنی اینکه تمام بارگذاری به صورت بار زنده و $t = 1/0$ یعنی مقدار بار زنده صفر می‌باشد. در بقیه حالات ترکیب بار مرده و زنده وجود دارد.



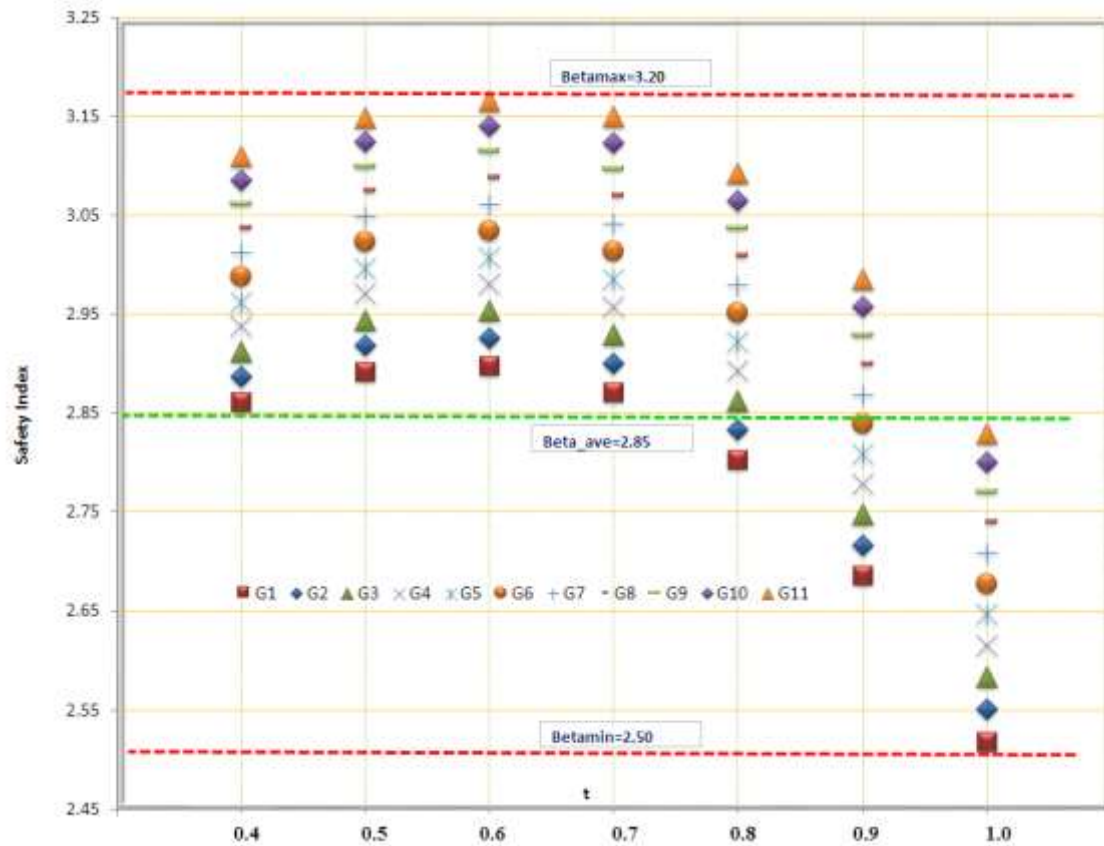
شکل ۶: تغییرات ضرایب بار و مقاومت در برابر مقادیر شاخص ایمنی (β) برای مقادیر مختلف نسبت بارگذاری (t) برای ترکیب خمشی و برشی.

در شکل ۶ ضرایب برای حالت ترکیب خمشی و برشی ارائه شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است حداکثر شاخص ایمنی $\beta=3.6$ در $t = 0/7$ رخ داده است و حداقل شاخص ایمنی $\beta=3.25$ در $t = 0/4$ ، $1/0$ حاصل شده است. همچنین نکته جالب برای ترکیب خمشی و برشی این است که برای یک بارگذاری مشخص، برای تمام گروه‌های ضرایب بار و مقاومت، شاخص ایمنی ثابتی به دست آمده است. به عبارت دیگر ضرایب بار و مقاومت فقط تابع مقدار بارگذاری می‌باشند نه چیز دیگر. از نظر طراحی این مسئله به این مفهوم است که به کارگیری بتن با کیفیت بالا و فولاد با مقاومت بالا (بالا بردن ضرایب کاهش مقاومت) اثر چندانی بر طراحی تیرها نخواهد گذاشت. در آئین‌نامه مقادیر شاخص ایمنی به صورت کلی عدد سه گزارش شده است. با توجه به شکل فوق در تمام حالات بارگذاری شاخص ایمنی بیشتر از سطح متوسط مقدار آئین‌نامه می‌باشد و از نظر طراحی این ترکیب تلاش‌ها بحرانی نمی‌باشد. در شکل (۷) برای ترکیب خمشی و پیچش تغییرات ضرایب در برابر تغییرات بارگذاری t ارائه شده است.



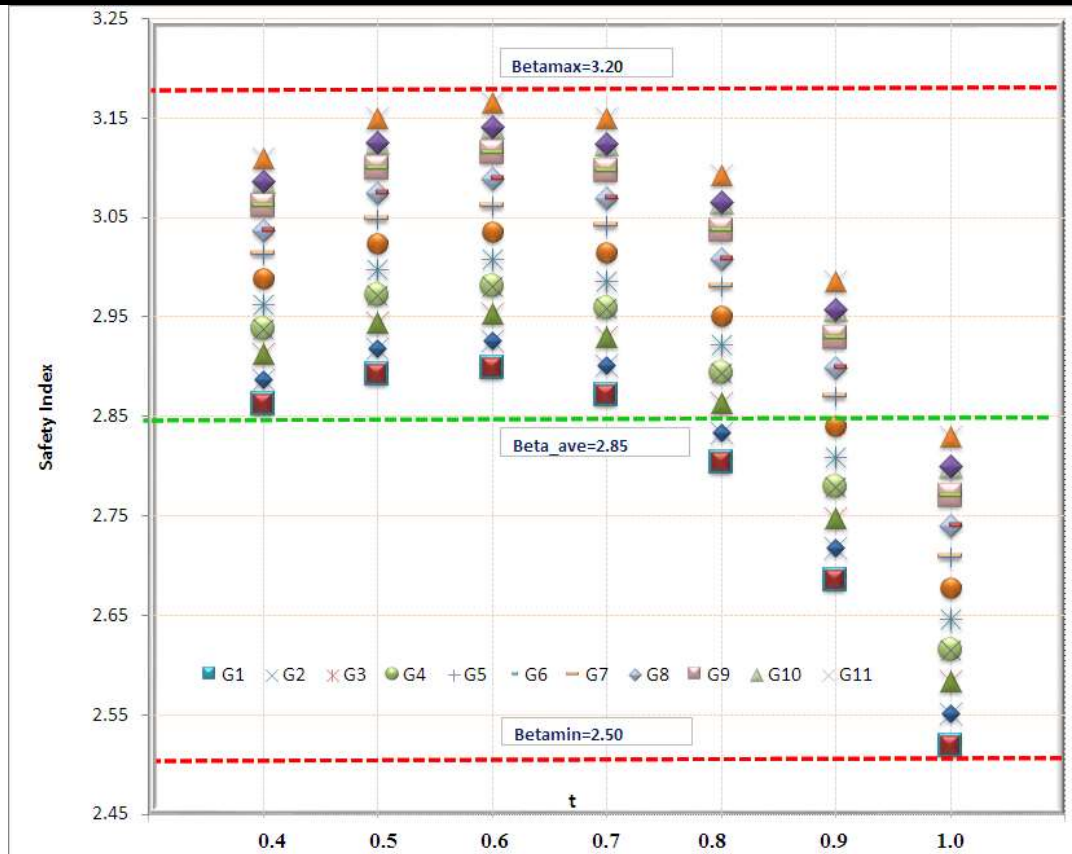
شکل ۷: تغییرات ضرایب بار و مقاومت در برابر مقادیر شاخص ایمنی (β) برای مقادیر مختلف نسبت بارگذاری (t) برای ترکیب خمش و پیچش.

همان طور که از شکل فوق قابل مشاهده است، حداکثر شاخص ایمنی $\beta \approx 2.7$ در $t = 0.7$ رخ داده است و حداقل مقدار شاخص ایمنی یعنی $\beta \approx 2$ در $t = 1.0$ حاصل شده است. برای ترکیب خمش و پیچش شاخص کلی ایمنی برای همه گروه‌های ضرایب بار و مقاومت در مقایسه با حالت ترکیب خمش و برش کاهش قابل توجهی داشته است. همچنین برای یک بارگذاری مشخص، برای گروه‌های مختلف ضرایب بار و مقاومت (G_i)، شاخص‌های ایمنی برخلاف حالت خمش و برش مقادیر متفاوتی به دست آمده است. همان طور که ذکر شد در آئین‌نامه مقادیر کلی شاخص ایمنی در حدود عدد سه گزارش شده است. با توجه به شکل فوق در تمام حالات بارگذاری، شاخص ایمنی کمتر از عدد متوسط آئین‌نامه می‌باشد و از نظر طراحی این ترکیب بحرانی و کنترل‌کننده می‌باشد. لذا در مناطقی که تغییرات شدید بار زنده وجود داشته و یا امکان وارد شدن ناگهانی بار زنده مانند سالن‌های ورزشی وجود دارد، باید با در نظر گرفتن این عدم قطعیت‌ها به طراحی تیرها اقدام نمود.



شکل ۸: تغییرات ضرایب بار و مقاومت در برابر مقادیر شاخص ایمنی (β) برای مقادیر مختلف نسبت بارگذاری (t) برای ترکیب برش و پیچش.

برای ترکیب برش و پیچش حداکثر شاخص ایمنی $\beta \approx 3.20$ در $t = 0.7$ رخ داده است و حداقل شاخص ایمنی $\beta \approx 2.5$ در $t = 1.0$ حاصل شده است که شاخص‌ها تا حدی از مقادیر حالت خمش + پیچش بیشتر می‌باشند. متوسط مقادیر شاخص ایمنی در حدود $\beta \approx 2.9$ می‌باشد که نزدیک حد آئین‌نامه است. برای یک بارگذاری مشخص، برای گروه‌های ضرایب بار و مقاومت شاخص ایمنی مانند حالت خمش و پیچش مقادیر متفاوتی به دست آمده است. با توجه به شکل فوق در برخی حالات بارگذاری شاخص ایمنی کمتر از عدد متوسط آئین‌نامه می‌باشد و از نظر طراحی این ترکیب گاهی بحرانی و کنترل‌کننده می‌باشد. هرچند نسبت به حالت خمش + پیچش وضعیت ایمنی عضو بهتر می‌باشد، لیکن مقادیر شاخص ایمنی کمتر از سه نیز می‌باشند. همچنین برای ضرایب استاندارد آیین‌نامه یعنی G_1 در تمام حالات بارگذاری شاخص ایمنی کمترین مقدار می‌باشد. مقایسه شکل ۷ و ۸ نشان می‌دهد که در یک بارگذاری مشخص محدود تغییرات شاخص ایمنی ($\Delta\beta$) برای ترکیب خمش + پیچش در حدود 0.4 ولی برای ترکیب خمش برش در حدود 0.2 می‌باشد که این امر نشان‌دهنده اهمیت تلاش پیچشی و حساسیت طراحی اعضا در برابر پیچش می‌باشد.



شکل ۹: تغییرات ضرایب بار و مقاومت در برابر مقادیر شاخص ایمنی (β) برای مقادیر مختلف نسبت بارگذاری (t) برای ترکیب خمش، برش و پیچش. برای ترکیب سه تلاش همزمان خمش، برش و پیچش حداکثر شاخص ایمنی $\beta \approx 3.20$ در $t = 0.7$ رخ داده است و حداقل شاخص ایمنی $\beta \approx 2.5$ در $t = 1.0$ حاصل شده است که شاخص‌ها همانند برش + پیچش می‌باشند. همچنین برای ضرایب استاندارد آیین‌نامه یعنی G_1 در تمام حالات بارگذاری شاخص ایمنی کمترین مقدار می‌باشد. مقایسه اشکال ۸ و ۹ نشان می‌دهد که تلاش‌های برشی و پیچشی همانند تلاش‌های سه‌گانه خمشی، برشی و پیچشی تعیین‌کننده و با اهمیت هستند. به عبارت دیگر در طراحی تیرهای بتنی با محوریت خمش تأثیر تلاش پیچشی مهم‌تر از اثر تلاش برشی می‌باشد؛ زیرا در شکل ۸ شاخص‌های ایمنی برای ترکیب خمش و پیچش همان است که در شکل ۹ شاخص‌های ایمنی برای ترکیب همزمان خمش، برش و پیچش.

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر به بررسی سطح ایمنی آیین‌نامه‌ی بتن ایران برای ترکیبات حدی مختلف پرداخته شد. برای محاسبه‌ی شاخص ایمنی از روش مونت‌کارلو استفاده شده است. انجام محاسبات به کمک یک برنامه کامپیوتری که توسط نویسنده اول مقاله تهیه شده، صورت گرفته است. در این مقاله شاخص ایمنی مقاطع بتنی مستطیلی، L شکل و T شکل برای هر نسبت بار مرده و زنده برای طراحی احتمالاتی و اقتصادی قابل تعیین است. همچنین برای مقاطع مستطیلی برای شاخص ایمنی موردنظر طراح، ضرایب مقاومت و بار مناسب برای نسبت بارگذاری مشخص قابل تعیین است. با توجه به مطالعه انجام شده مهم‌ترین یافته‌های ذیل قابل استخراج می‌باشد.

❖ میانگین سطح ایمنی برای خمش تمام مقاطع حدود $3/5$ می‌باشد که بالاتر از سطح آیین‌نامه بتن ایران می‌باشد. شاخص‌ها برای مقاطع T شکل کمی بیشتر از مقاطع L شکل و مستطیلی می‌باشند. همچنین، شاخص ایمنی برای پیچش مقاطع در حد $2/5$ برآورد می‌شود که پایین‌تر از متوسط آیین‌نامه بتن ایران می‌باشد. مقاطع مستطیلی کمترین شاخص ایمنی را برای پیچش و ترکیب پیچش و خمش دارند.

پیچش در مقاطع مستطیلی اهمیت بیشتری نسبت به خمش در طراحی‌ها داشته و شاخص ایمنی نسبت به پیچش اهمیت بیشتری دارد؛ بنابراین باید طراحی سازه‌های بتنی طوری باشد تا حتی‌المقدور پیچش در آن‌ها ایجاد نشود.

❖ برای تلاش برشی خالص نوع مقطع تأثیری در شاخص‌های ایمنی ندارد. لیکن، در ترکیب خمش + برش مقطع مستطیلی بیشترین ایمنی و مقطع L شکل کمترین شاخص ایمنی را دارا می‌باشد. برای مقاطع T شکل شاخص‌های ایمنی بین مقطع مستطیلی و L شکل می‌باشند. ترکیب خمش + برش برخلاف حالت خمش + پیچش، شاخص‌های ایمنی را چندان تحت تأثیر قرار نداده است. بیشترین شاخص ایمنی برای برش مقطع T شکل و کمترین شاخص مربوط به پیچش مقاطع مستطیلی است. لیکن برای ترکیب برش + پیچش مقاطع، بیشترین شاخص مربوط به مقطع مستطیلی و کمترین آن مربوط به مقاطع T شکل است.

❖ در ترکیب خمش + برش + پیچش بیشترین شاخص ایمنی برای همه مقادیر مربوط به مقطع T شکل و کمترین شاخص مربوط به مقطع مستطیلی می‌باشد.

❖ برای ترکیب خمش و برش در یک بارگذاری مشخص، برای تمام گروه‌های ضرایب بار و مقاومت، شاخص ایمنی ثابتی به دست آمده است. به عبارت دیگر ضرایب بار و مقاومت فقط تابع مقدار بارگذاری می‌باشند. از نظر طراحی این مسئله به این مفهوم است که به کارگیری بتن با کیفیت بالا و فولاد با مقاومت بالا (بالا بردن ضرایب کاهش مقاومت) اثر چندانی بر طراحی تیرها نخواهد.

❖ برای ترکیب خمش + پیچش شاخص کلی ایمنی برای همه گروه‌های ضرایب بار و مقاومت در مقایسه با حالت ترکیب خمش و برش کاهش قابل توجهی داشته است. در آئین‌نامه مقادیر کلی شاخص ایمنی در حدود عدد ۳ گزارش شده است. برای این ترکیب در تمام حالات بارگذاری، شاخص ایمنی کمتر از عدد متوسط آئین‌نامه می‌باشد و از نظر طراحی این ترکیب بحرانی و کنترل‌کننده می‌باشد. لذا در مناطقی که تغییرات شدید بار زنده وجود داشته و یا امکان وارد شدن ناگهانی بار زنده مانند سالن‌های ورزشی وجود دارد، باید با در نظر گرفتن این عدم قطعیت‌ها به طراحی تیرها اقدام نمود.

برای ترکیب برش + پیچش برای یک بارگذاری مشخص، در برخی حالات بارگذاری شاخص ایمنی کمتر از عدد متوسط آئین‌نامه می‌باشد و از نظر طراحی این ترکیب گاهی بحرانی و کنترل‌کننده می‌باشد. هرچند نسبت به حالت خمش + پیچش وضعیت ایمنی عضو بهتر می‌باشد. محدوده تغییرات شاخص ایمنی ($\Delta\beta$) برای ترکیب خمش + پیچش در حدود ۰/۴ ولی برای ترکیب خمش + برش در حدود ۰/۲ می‌باشد که این امر نشان‌دهنده اهمیت تلاش پیچشی و حساسیت طراحی اعضا در برابر پیچش می‌باشد.

مراجع و منابع تحقیق

- [1] Ellingwood, B. R., & Ang, A. H. (1974). *Risk-based evaluation of design criteria*. Journal of the Structural Division, 100(Proc. Paper 10778).
- [2] Lu, R., Luo, Y., & Conte, J. P. (1994). *Reliability evaluation of reinforced concrete beams*. Structural Safety, 14(4), 277-298.
- [3] Bentz, E. C., Vecchio, F. J., & Collins, M. P. (2007). *Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements*. 378-379
- [4] Shao, L., & Li, C. Q. (2007). *Reliability based asset management strategy for concrete infrastructure*. International Journal of Materials and Structural Reliability, 5(1), 13-28.
- [5] Nowak, A., & Kaszyńska, M. (2011). *Target reliability for new, existing and historical structures*.
- [6] Porco, F., Uva, G., Sangirardi, M., & Casolo, S. (2013). *About the Reliability of Punching Verifications in Reinforced Concrete Flat Slabs*. Open Construction and Building Technology Journal, 7, 74-87.
- [7] Jensen, D. F. (2014). *Reliability Analysis For Shear In Lightweight Reinforced Concrete Bridges Using Shear Beam Database*.
- [8] Backes, M. R., Fernández Ruiz, M., & Muttoni, A. (2014). *Interaction between in-plane shear forces and transverse bending moments in concrete bridge webs*. In Proc. of the 10th fib International PhD Symposium in Civil Engineering, Quebec (No. EPFL-CONF-200971, pp. 403-408). Proc. of the 10th fib International PhD Symposium in Civil Engineering, Quebec.
- [9] Trezos, C. G., & Thomos, G. C. (2002). *Reliability Based Calibration of the Greek Seismic Code*.
- [10] Szerszen, M. M., & Nowak, A. S. (2003). *Calibration of design code for buildings (ACI 318): Part 2—Reliability analysis and resistance factors*. Structural journal, 100(3), 383-391.
- [11] Paik, I., Shin, S., & Shim, C. (2008). *Reliability-based code calibration and features affecting probabilistic performance of concrete bridge*.

- [12] Mirza, S. A., & MacGregor, J. G. (1979). *Variations in dimensions of reinforced concrete members*. *Journal of the Structural Division*, 105(4), 751-766.
- [13] MacGregor, J. G. (1983, July). *Load and resistance factors for concrete design*. In *Journal Proceedings* (Vol. 80, No. 4, pp. 279-287).
- [14] Galambos, T. V., Ellingwood, B., MacGregor, J. G., & Cornell, C. A. (1982). *Probability based load criteria: assessment of current design practice*. *Journal of the Structural Division*, 108(5), 959-977.
- [15] Paxton, P., Curran, P. J., Bollen, K. A., Kirby, J., & Chen, F. (2001). *Monte Carlo experiments: Design and implementation*. *Structural Equation Modeling*, 8(2), 287-312.
- [16] *National Building Regulations of Iran*- part 9, design and construction of concrete buildings, 2011
- [17] Choi, S. K., Grandhi, R. V., & Canfield, R. A. (2006). *Reliability-based structural design*. Springer Science & Business Media.
- [18] MATLAB, "*The Language of Technical Computing*", (2008), Version 7.6.0. The Math-works Inc.: Natick, MA