

ارزیابی عملکرد توابع چندجمله‌یی متعامد مفسر مرزی در مقایسه باروش اجزاء محدود در تحلیل صفحات نازک مستطیلی دارای بازشو

علی نیکخو^{۱*}، میلاد رهبردهقان^۲، علی فرازنده^۳

۱-دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران
۲-کارشناس ارشد سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران
۳-کارشناس ارشد سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، از طریق مقایسه کارایی توابع چندجمله‌یی متعامد مفسر مرزی در برابر روش اجزاء محدود، به تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی صفحات نازک مستطیلی دارای بازشو پرداخته شده است. در همین راستا، رفتار صفحات تحت شرایط مرزی مختلف و با ابعاد متفاوت بازشو مورد بررسی قرار گرفته است. در تحلیل استاتیکی، پارامترهای جابجایی و لنگر خمشی و در تحلیل دینامیکی، بسامدهای ارتعاش آزاد صفحه مورد بحث واقع شده است. نتایج به دست آمده حاکی از سادگی، تطابق با شرایط مرزی هندسی، همگرایی سریع، سهولت و دقت بالای توابع چندجمله‌یی متعامد مفسر مرزی برای تعیین پارامترهای استاتیکی و دینامیکی صفحات در حالات مختلف است. هرچند که سرعت تحلیل در روش اجزاء محدود نسبت به استفاده از توابع چندجمله‌یی متعامد مفسر مرزی بیشتر است اما سهولت و دقت استفاده از این توابع در تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات دارای بازشو با مرزهای خطی و به ویژه مرزهای منحنی (صفحات و بازشوهای دایروی، بیضوی، مستطیلی و ...) می‌تواند به عنوان معیار برتری کاربردی چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی نسبت به روش کلاسیک اجزاء محدود مطرح شود. لازم به ذکر است با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی می‌توان هرگونه تغییر در شرایط سازه و بازشوها را به سرعت و سهولت اعمال نمود، در صورتیکه در استفاده از روش کلاسیک اجزاء محدود اینگونه نیست و این تغییرات هزینه‌های محاسباتی زیادی به همراه دارد.

کلمات کلیدی: چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی، روش اجزاء محدود، صفحات نازک دارای بازشو، تحلیل استاتیکی، تحلیل دینامیکی

سابقه مقاله:

شناسه دیجیتال:					
10.22065/JSCE.2018.105304.1381	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
doi: 10.22065/JSCE.2018.105304.1381	۱۳۹۸/۰۹/۰۱	۱۳۹۷/۰۲/۲۷	۱۳۹۶/۰۲/۲۷	۱۳۹۷/۰۱/۲۵	۱۳۹۶/۰۸/۲۰

علی نیکخو

nikkho@usc.ac.ir

*نویسنده مسئول:

پست الکترونیکی:

Accuracy Evaluation of Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials (BCOPs) in Determining Static and Dynamic Responses of Thin Rectangular Plates with Openings

Ali Nikkhoo^{1*}, Milad Rahbar Dehghan^{2*}, Ali Farazandeh³

1- Associate Professor, Faculty of Civil Engineering, Science and Culture University, Tehran, Iran
2- M.Sc. in Structural Engineering, Faculty of Civil Engineering, Science and Culture University, Tehran, Iran
3- M.Sc. in Structural Engineering, Faculty of Civil Engineering, Science and Culture University, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this article, the efficiency of Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials (BCOPs) in analyzing the static and dynamic behavior of thin rectangular plates with openings versus the Finite Element Method (FEM) and the analytical solutions (if they exist), is investigated. Despite this simple procedure, according to the obtained results, the accuracy of BCOPs in most of the studied cases compared to the analytical solutions or those obtained via FEM is acceptable. Besides, different sizes for the openings are assumed and in one case a steel strip is used to stiffen the plate around the opening. Maximum deflection of the plate is the core parameter to be compared seeking the convergence rate of the employed method. Furthermore, natural frequencies of the plate are obtained and compared to assess the capability of BCOPs in dynamic analysis of thin plates. In all of the studied cases, the efficiency of the BCOPs is evident based on its simplicity in comparison with conventional FEM or other competitive methods.

ARTICLE INFO

Received: 11/11/2017
Revised: 14/04/2018
Accepted: 17/05/2018

Keywords:

Boundary Characteristic, Orthogonal Polynomials, Finite Element Method, Thin plate with opening, Static analysis, Dynamic analysis.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2018.105304.1381

*Corresponding author: Ali Nikkhoo
Email address: nikkhoo@usc.ac.ir

۱- مقدمه

همواره پژوهشگران به دنبال یافتن روش‌های دقیق‌تر و راه‌حل‌های ساده‌تر برای بررسی و تحلیل مسائل مربوط به ارتعاش سازه‌های مختلف نظیر تیرها و صفحات می‌باشند. امروزه روش اجزاء محدود به‌عنوان یک روش عددی قابل اطمینان از لحاظ دقت شناخته شده است. با این وجود ممکن است در برخی حالات بتوان از روش‌های ساده‌تری نیز بهره جست. با توجه به این موضوع، در این پژوهش امکان استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی به‌عنوان یک ابزار در تحلیل رفتار ارتعاشی صفحات نازک سنجیده می‌شود. در این روش همانطور که از نام آن مشخص است، از چندجمله‌یی‌هایی استفاده می‌شود که در آن‌ها خاصیت تعامد برقرار بوده و به دلیل حذف عبارات اضافی موجب می‌شود تا معادلات پایانی به مقدار قابل ملاحظه‌یی ساده گردند. یکی دیگر از خصوصیات این توابع، ارضای کامل شرایط مرزی مسئله می‌باشد. برای مثال در روش اجزاء محدود به‌منظور گیردار کردن لبه مرزی یک صفحه، با افزودن تعداد گره‌های موجود بر لبه، عمل گیرداری تکمیل می‌گردد، اما در روش حاضر، تمام محدوده لبه مرزی به طور یکپارچه گیردار می‌شود.

برای اولین بار در سال ۱۹۸۵، با به‌کارگیری یک گروه از چندجمله‌یی‌های متعامد در روش رایلی-ریتز، مطالعه‌یی به‌منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی صفحات مستطیلی انجام شد که در آن مواردی به‌عنوان برتری این روش نسبت به سایر روش‌ها مطرح گردید [۱]. چندی بعد، برخی از پژوهشگران با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد توانستند بسامدهای ارتعاشی یک صفحه مستطیلی با شرایط مرزی دلخواه را به‌دست آورند [۲].

در سال‌های بعد، پژوهشگران دیگری توانستند چندجمله‌یی‌های متعامد دو بُعدی تولید کرده و از آن برای مطالعه مسائل ارتعاش صفحات در یک بازه هندسی (مانند: مستطیل و مربع) استفاده کنند. ایشان در مطالعه خود، این چندجمله‌یی‌ها را با عنوان چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی^۱ نام‌گذاری کردند [۳ و ۴].

در مطالعه دیگری، پژوهشگران با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی دو بُعدی بسامدهای ارتعاش آزاد طبیعی صفحات دایروی و بیضوی را مورد بررسی قرار دادند [۵]. همچنین دیگر پژوهشگران در بررسی ارتعاش یک تیر ارتجاعی-مغناطیسی^۲ با شرایط مرزی عمومی، تحت بارگذاری محوری و نیروهای خارجی از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی استفاده کردند [۶]. برخی از پژوهشگران در محاسبات ارتعاش آزاد درون صفحه صفحات دایروی حلقوی روش چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی را به‌کار بردند [۷]. همچنین برخی دیگر، با استفاده از این روش به مطالعه ارتعاش جانبی صفحات مستطیلی ناهمگن دارای تغییرات غیرخطی ضخامت پرداختند [۸].

اخیراً نیز، با به‌کارگیری و بسط توابع چندجمله‌یی متعامد مفسر، مطالعات متنوعی در زمینه تبیین رفتار دینامیکی سازه‌های مختلف تیر و صفحه تحت اثر بارهای متحرک صورت گرفته است که همگی نشان از کارایی و دقت این روش در حل مسایل ارتعاش سازه‌های گوناگون است [۹-۱۲].

از چندجمله‌یی‌ها متعامد مفسر مرزی در سال‌های اخیر در محاسبات گوناگونی از جمله: فرکانس ارتعاش آزاد صفحات FGM^۳ [۱۳]، ارتعاش آزاد تیرهای نانو اولر برنولی غیریکنواخت [۱۴ و ۱۵]، ارتعاش آزاد پوسته‌های سیلندری متقارن با مرزهای دلخواه [۱۶] و بهبود این روش و استفاده از این چندجمله‌یی‌ها به طوری که نه تنها جمله اول بلکه تمام جملات شرایط هندسی و طبیعی را ارضا کنند و جواب-های با دقت بیشتری را ارائه دهند [۱۷] استفاده شده است.

از جمله مزایای مطرح شده برای این روش در پژوهش‌های صورت گرفته تاکنون می‌توان به راحتی کار با آن، قدرت تغییرپذیری، توانایی مدل‌سازی بازشوهای منحنی و هزینه محاسباتی کم اشاره نمود. همچنین با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی می‌توان اثرات مربوط به وجود بازشو در صفحات، تقویت آن‌ها و نیز اثرات ناشی از تغییر ضخامت صفحات را به راحتی لحاظ نمود. در این نوشتار، با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی به محاسبه و تعیین مقادیر جابجایی، لنگر خمشی و بسامد ارتعاشی صفحات با و

¹ Boundary characteristic orthogonal polynomials

² Elasto-Magnetic

³ Functionally graded materials

بدون بازشو تحت شرایط مرزی مختلف و همچنین صفحات بازشودار تقویت شده اقدام می‌گردد. از سوی دیگر، ضمن مقایسه نتایج حاصل از روش فوق با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود به تبیین میزان کارایی روش حاضر پرداخته می‌شود.

۲- تحلیل صفحات با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

به کارگیری چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی در مطالعات مربوط به تحلیل صفحات طی سه مرحله انجام می‌گیرد. در مرحله یک، اولین تابع چندجمله‌یی با توجه به شکل هندسی صفحه و ارضای شرایط مرزی حدس زده می‌شود. در مرحله دو، توابع بعدی براساس تابع اولیه و با استفاده از رابطه‌ی شناخته‌شده‌ی گرم-اشمیت^۴ تولید می‌گردند. سپس در مرحله آخر، از این توابع در تعیین ماتریس‌های سختی، جرم و نیرو استفاده می‌شود [۳].

۲-۱- چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی در دو بُعد

چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی برای هر هندسه دلخواه با توابع مستقل خطی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند (حدس اولین تابع چندجمله‌یی):

$$F_i(x, y) = g(x, y) f_i(x, y); \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

که در آن $g(x, y)$ عبارت ارضاکنده شرایط مرزی و $f_i(x, y)$ تابع خطی مستقل است. حال برای تولید توابع متعامد $\phi_i(x, y)$ با استفاده از رابطه گرم-اشمیت از روابط زیر استفاده می‌گردد (تولید توابع متعامد بر پایه تابع اولیه):

$$\phi_1(x, y) = F_1(x, y) \quad (2)$$

$$\phi_i(x, y) = F_i(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \phi_j(x, y); \quad i = 2, 3, 4, \dots; \quad j = 1, 2, 3, \dots, (i-1) \quad (3)$$

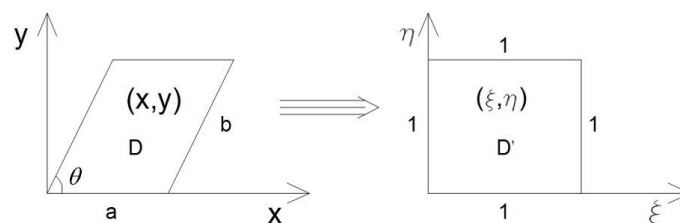
$$\gamma_{ij} = \frac{\langle F_i(x, y), \phi_j(x, y) \rangle}{\langle \phi_j(x, y), \phi_j(x, y) \rangle} \quad (4)$$

۲-۲- چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی در صفحات متوازی الاضلاع شکل

یک محیط متوازی الاضلاع با سه پارامتر a ، b و θ مطابق شکل ۱ تعریف می‌شود. محیط متوازی الاضلاع کلی D در دستگاه مختصات (x, y) با استفاده از روابط زیر به ناحیه D' که یک مربع واحد در دستگاه مختصات (ξ, η) است، تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} x = a\xi(b \cos \theta)\eta \\ y = (b \sin \theta)\eta \end{cases} \quad (5)$$

لازم به ذکر است، چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی ابتدا در دستگاه (ξ, η) به دست آمده و سپس به دستگاه (x, y) انتقال داده می‌شوند.



شکل ۱: تبدیل محدوده متوازی الاضلاع به مربع واحد

⁴ Gram-Schmidt

در یک محیط مربعی یا متوازی الاضلاع چهار لبه وجود دارد. هر لبه با توجه به شرایط مرزی می تواند گیردار، ساده و یا آزاد در نظر گرفته شود که در این صورت، معادلات لبه های مرزی در دستگاه مختصات (ξ, η) به شرح زیر نوشته می شود:

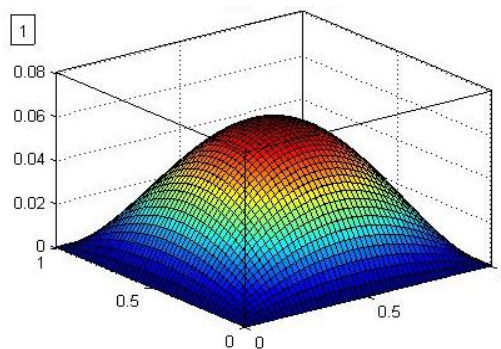
$$\xi = 0, \xi = 1, \eta = 0, \eta = 1 \quad (6)$$

جهت اعمال شرایط مرزی لبه ها در این روش از پارامترهای p, q, r, s به صورت توان به ترتیب برای لبه های $\xi, \eta, \xi-1, \eta-1$ و $1-\eta$ و $1-\xi$ استفاده می گردد. پارامترهای p, q, r, s می توانند مقادیر ۲ (اتصال گیردار)، ۱ (اتصال مفصلی) و صفر (انتهای آزاد) را با توجه به شرایط مرزی مورد نظر به خود اختصاص دهند. برای مثال، $p=2$ نشان می دهد لبه $\xi=0$ گیردار است. تابع $g(\xi, \eta)$ برای یک صفحه چهارضلعی به شکل زیر بیان می گردد:

$$g(\xi, \eta) = \xi^p (1-\xi)^q \eta^r (1-\eta)^s \quad (7)$$

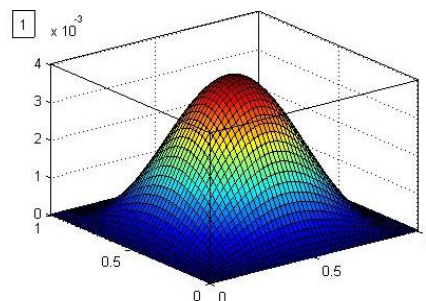
۲-۳- توابع شکل

در این بخش با توجه به روابط ارائه شده در قسمت های ۲-۱ و ۲-۲ برای صفحات نازک مستطیلی، نمودار توابع شکل برای صفحات با شرایط مرزی چهار طرف ساده (SSSS) و چهار طرف گیردار (CCCC) ارائه می شود. بدین ترتیب، مطابق شکل ۲، تابع شکل اول برای صفحه ای که در هر چهار لبه دارای تکیه گاه مفصلی است، به صورت معادله $xy(x-1)(y-1)$ در نظر گرفته می شود.



شکل ۲: تابع شکل اول صفحه با شرایط مرزی SSSS

از طرفی، همانطور که در شکل ۳ نمایش داده شده است، تابع شکل اول برای صفحه ای که در هر چهار لبه، دارای تکیه گاه گیردار است، به صورت معادله $x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2$ در نظر گرفته می شود.



شکل ۳: تابع شکل اول صفحه با شرایط مرزی CCCC

۲-۴- تحلیل استاتیکی صفحه ارتجاعی کیرشهف^۵ با استفاده از چند جمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

۲-۴-۱- جابجایی و لنگر نقطه دلخواه از صفحه تحت اثر بار استاتیکی متمرکز و گسترده

جهت محاسبه جابجایی‌ها در ابتدا می‌بایست ماتریس‌های سختی (\mathbf{K}) و نیرو (\mathbf{f}) را با استفاده از روابط کلاسیک صفحه‌های مستطیلی نازک [۱۸] به دست آورد که بر این اساس داریم:

$$\mathbf{K}_{ij} = \iint D \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + \nu D \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + D \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} Gh^3 \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (8)$$

که در آن D ضریب صلیبیت و G مدول برشی صفحه می‌باشد و به ترتیب برابرند با:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

E : مدول ارتجاعی صفحه

h : ضخامت صفحه نازک مورد نظر

ν : ضریب پواسون

و همچنین:

$$\mathbf{f}_j = P \times \phi_j(x_0, y_0) \quad (10)$$

که در آن P بار متمرکز و (x_0, y_0) مختصات محل اعمال بار است. پس می‌توان نوشت:

$$\mathbf{f}_j = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} P \times \phi_j dx dy \quad (11)$$

که در آن $(x_0 : y_0)$ و $(x_1 : y_1)$ محدوده اعمال بار گسترده می‌باشد.

نهایتاً تغییر مکان نقطه مورد نظر (یعنی: $w(x_d, y_d)$) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$w(x_d, y_d) = \sum \phi_i(x_d, y_d) \Delta_i \quad (12)$$

که در آن:

$$\Delta_i = \mathbf{K}^{-1}_{ij} \times \mathbf{f}_i \quad (13)$$

لنگر نقطه دلخواه از صفحه مورد نظر را می‌توان با استفاده از روابط کلاسیک صفحه‌های مستطیلی نازک محاسبه نمود: [۱۸]

$$\begin{cases} M_x = -\left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -\left(\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_{xy} = -\frac{1}{6} Gh^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (14)$$

۲-۴-۲- تحلیل دینامیکی

در این بخش، جهت محاسبه بسامد ارتعاشی صفحات مورد نظر در حالت ارتعاش آزاد نیاز به تعیین ماتریس جرم بوده که براساس

ماتریس سختی به دست آمده در قسمت قبل، ماتریس جرم صفحات به صورت زیر به دست خواهد آمد:

⁵ Kirchhoff

$$\mathbf{M}_{ij} = \iint \rho v \phi_i \phi_j dx dy \quad (15)$$

که در آن چگالی و حجم صفحه است. بسامدهای ارتعاشی در حالت ارتعاش آزاد و بدون میرایی از حل مسئله مقدار ویژه طبق معادله زیر برای صفحه مورد نظر به دست می آید:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (16)$$

که ω فرکانس ارتعاشی صفحه است. لازم به ذکر است، مقادیر دقیق بسامدها برای صفحه‌ای با لبه‌های مرزی مفصلی، جهت مقایسه با مقادیر به دست آمده از رابطه ۱۶، بر اساس رابطه ۱۷ قابل حصول است: [۱۹]

$$\omega_{ij} = \pi^2 \left[\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (17)$$

که در آن a و b به ترتیب طول صفحه در راستای x و y می‌باشند. در این مطالعه، جهت بی‌تعد کردن بسامد ارتعاشی به منظور انجام یک مقایسه صحیح از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\lambda^2 = \frac{a^4 \omega^2 \rho h}{D} \quad (18)$$

۳- صحت سنجی

در منابع [۲۰ و ۲۱] پاسخ‌های تحلیلی برای برخی از حالات ارزیابی شده است. در این منابع، جابه‌جایی یک نقطه از صفحه در راستای قائم تحت اثر بار متمرکز P و تحت اثر بار گسترده Q به ترتیب با استفاده از رابطه‌های $\alpha Pa^2 / D$ و $\alpha Qa^4 / D$ بیان شده است. همچنین، لنگر خمشی ایجاد شده در یک نقطه از صفحه تحت اثر بار گسترده طبق رابطه‌ی βQa^2 بیان شده است. که a بُعد صفحه مورد نظر در راستای محور x و y است. همچنین ضرایب α و β در جداولی به صورت ضرایب ثابت برخی حالات موجود، در منابع ذکر شده بیان گردیده است.

با توجه به روابط بالا و ثابت بودن تمامی مقادیر به جز ضرایب α و β ، در این پژوهش مقایسه‌ها روی این دو ضریب صورت گرفته است. بدین صورت که پس از محاسبه جابجایی‌ها و لنگرهای خمشی در حالات مختلف با استفاده از چند جمله‌ی‌های متعامد مفسر مرزی و روش اجزاء محدود با توجه به روابط تحلیلی ارائه شده، ضرایب α و β محاسبه گردیده و با مقادیر موجود در جداول ذکر شده مورد مقایسه و صحت سنجی قرار گرفته است.

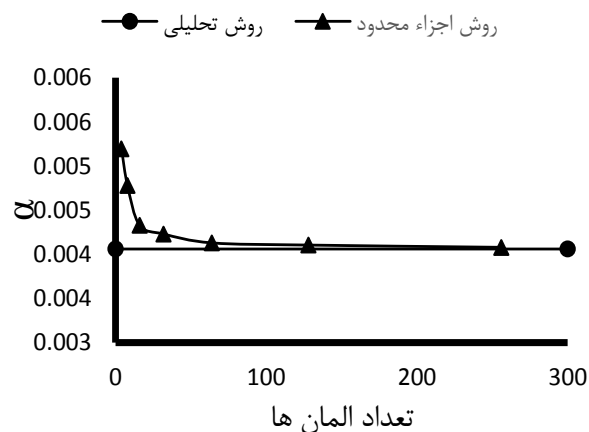
۴- مطالعات پارامتریک

در ادامه و در این بخش از مقاله به بررسی عددی و پارامتریک مثال‌های مختلف پرداخته شده است. در دو قسمت اول به بررسی جابجایی نقطه مرکزی صفحه نازک مستطیلی بدون بازشو با شرایط مرزی مختلف در راستای قائم تحت انواع بارگذاری پرداخته شده است، در قسمت سوم جابجایی یک نقطه از صفحه نازک مستطیلی بازشودار به ابعاد مختلف با شرایط مرزی ساده تحت بارگذاری گسترده در راستای قائم مورد ارزیابی قرار گرفته است، قسمت‌های چهارم و پنجم به بررسی لنگر خمشی یک نقطه از صفحه نازک مستطیلی بدون بازشو و بازشودار با شرایط مرزی مختلف تحت انواع بارگذاری اختصاص یافته است، در قسمت ششم جابجایی یک نقطه از صفحه نازک مستطیلی بازشودار تقویت شده با شرایط مرزی ساده و تحت بارگذاری گسترده در راستای قائم و میزان تقویت انجام شده مورد بررسی قرار گرفته است، در نهایت، قسمت هفتم به مقایسه و ارزیابی فرکانس‌های ارتعاشی صفحه نازک مستطیلی بدون بازشو با شرایط مرزی ساده اختصاص یافته است. لازم به ذکر است در استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد مفسر مرزی و روش FEM بررسی تمام حالات شرایط مرزی

و انواع مختلف بارگذاری و بازشودار بودن صفحات نازک مستطیلی قابل انجام می‌باشد که در این مقاله حالاتی انتخاب شده است که تا حد امکان جواب‌های تحلیلی آن در منابع جهت مقایسه نتایج موجود باشد و صحت سنجی به درستی صورت گیرد.

۴-۱- مثال ۱. مقایسه ضریب α در مرکز صفحه چهار طرف ساده

در این مثال به مقایسه ضریب α در مرکز یک صفحه نازک چهار طرف مفصل و به ترتیب تحت بار گسترده در تمام سطح صفحه و بار متمرکز در مرکز صفحه پرداخته شده است. همچنین صفحه مذکور بدون بازشو بوده و نسبت طول به عرض آن برابر یک می‌باشد. در این حالت جابه‌جایی در راستای قائم مرکز صفحه که بیش‌ترین مقدار جابه‌جایی در آن محل رخ می‌دهد مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است.



شکل ۴: مقایسه ضریب α در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود



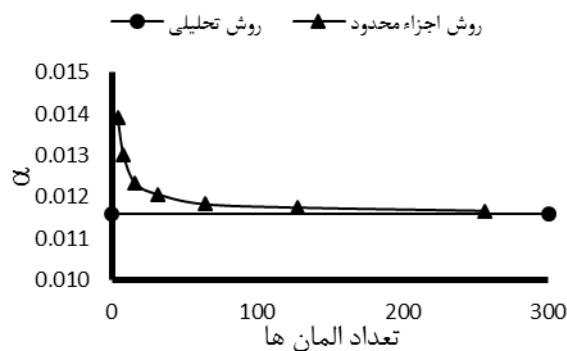
شکل ۵: مقایسه ضریب α در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده شده است که استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی در این حالت (بارگذاری گسترده) عملکرد بهتری به لحاظ سرعت همگرایی به جواب تحلیلی (با ۹ تابع شکل اول به جواب تحلیلی همگرا شده است)، سهولت و دقت از خود نشان داده است. زمان تحلیل توسط کامپیوتر در این حالت ۱۰,۴۹ ثانیه با در نظر گیری ۹ تابع شکل در استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی و ۱,۳۵ ثانیه با در نظر گیری ۶۴ المان در روش اجزاء محدود می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود سرعت تحلیل کامپیوتری در این حالت در روش اجزاء محدود بیشتر می‌باشد، اما در مرحله آماده سازی و همبست المانها زمان بسیار بیشتری را به

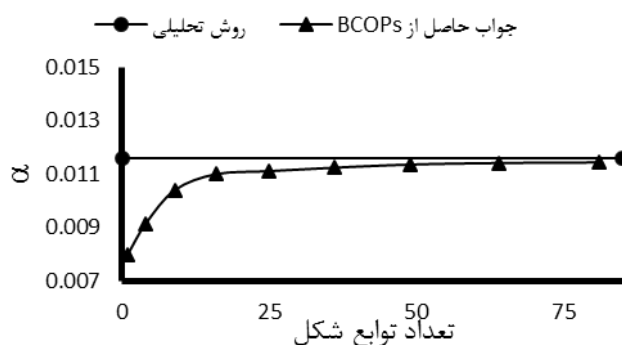
خود اختصاص داده است. لازم به توضیح می باشد، انجام عملیات همبست المانها و تشکیل ماتریس های سختی، نیرو و جرم در روش اجزاء محدود سبب پیچیدگی و زمانبر شدن این روش (به خصوص در تعداد المان های بالا) در مرحله کد نویسی می گردد. در حالیکه در روش چندجمله ای های متعامد مفسر مرزی این پیچیدگی وجود نداشته و به راحتی با تشکیل تابع شکل اول بر اساس شرایط هندسی صفحه و تغییر کران های انتگرال های مورد نظر می توان صفحه را مدل سازی نمود، در این صورت از پیچیدگی روش حل کمتر شده و در زمان صرفه جویی قابل توجهی حاصل می شود. همچنین در صورت لزوم ایجاد هرگونه تغییر در نوع و شرایط صفحه مورد نظر می توان آن را به راحتی و با صرف زمان کم اعمال نمود، در صورتیکه در روش اجزاء محدود باید المان بندی از سر گرفته شود.

همانطور که مشاهده می شود دقت در روش اجزاء محدود به شدت تابع تعداد المان می باشد، مثلا در مدل سازی شرایط مرزی در این روش به تعداد گره هایی که در مرزها قرار دارند شرایط مرزی قابل مدل سازی می باشد ولی در روش چندجمله ای های متعامد مفسر مرزی این موضوع به راحتی طبق فرمول های ارائه شده با تخصیص اعداد ۰،۱،۲، در تشکیل تابع اولیه به مرز مورد نظر آن را کاملا گیردار، ساده و یا آزاد مدل سازی می کند که این موضوع سبب افزایش دقت این روش در تعداد توابع شکل پایین نیز می گردد.

در نتیجه در روش اجزاء محدود جهت دستیابی به دقت مورد نظر مجبور به در نظر گیری تعداد المان های بیشتر بوده که طبق آنچه گفته شد این موضوع پیچیدگی و زمان حل را در فاز کد نویسی بیشتر می کند، در حالیکه در صورت استفاده از چندجمله ای های متعامد مفسر مرزی این طور نیست. اما در فاز دوم زمان تحلیل توسط نرم افزار در روش اجزاء محدود با هر تعداد المان کم بوده در حالیکه با بکار گیری چندجمله ای های متعامد مفسر این زمان در تعداد توابع شکل پایین کم ولی در تعداد توابع شکل بالا و حالت بازشودار زیاد می باشد.



شکل ۶: مقایسه ضریب α در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار متمرکز در همان نقطه - روش اجزاء محدود



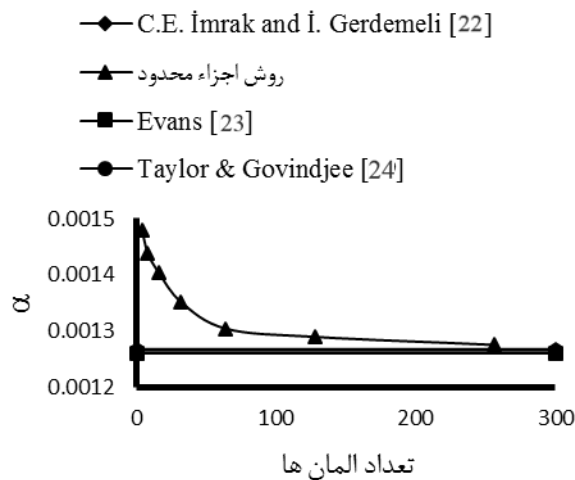
شکل ۷: مقایسه ضریب α در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار متمرکز در همان نقطه - جواب حاصل از چندجمله ای های متعامد مفسر مرزی

همچنین با توجه به شکل های ۶ و ۷ دقت و همگرایی یکسانی در هر دو روش نسبت به جواب تحلیلی مشاهده شده است، اما همچنان استفاده از چندجمله ای های متعامد مفسر مرزی به لحاظ سهولت عملکرد بهتری از خود نشان داده است. زمان تحلیل توسط

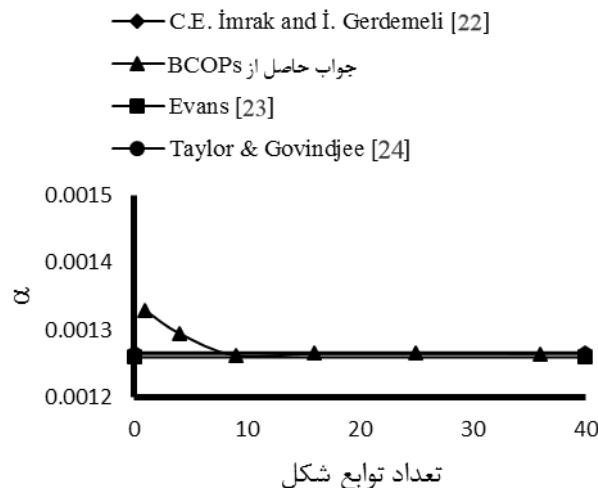
کامپیوتر در این حالت ۱۳۴,۱۳ ثانیه با در نظر گیری ۲۵ تابع شکل در استفاده از چند جمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی و ۲,۳۵ ثانیه با در نظر گیری ۶۴ المان در روش اجزاء محدود می‌باشد.

۲-۴-۲. مثال ۲. مقایسه ضریب α در مرکز صفحه چهار طرف گیردار

در این مثال به مقایسه ضریب α در مرکز یک صفحه نازک چهار طرف گیردار تحت بار گسترده پرداخته شده است. همچنین صفحه مذکور بدون باز شو بوده و نسبت طول به عرض آن برابر یک می‌باشد. در این حالت شرایط مرزی از حالت ساده به گیردار تغییر داده شده است تا اثر شرایط تکیه گاهی در نتایج، مورد ارزیابی قرار گیرد. لازم به ذکر است در این حالت جواب‌های تحلیلی در منابع مختلف، خود با اختلاف اندک بیان گردیده‌اند [۲۲-۲۴].



شکل ۸: مقایسه ضریب α در مرکز صفحه CCCC تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود



شکل ۹: مقایسه ضریب α در مرکز صفحه CCCC تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چند جمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

با توجه به شکل‌های ۸ و ۹ مشاهده شده است که با استفاده از ۹ تابع شکل اول چند جمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی دقت خوبی در نتایج حاصل شده است، در حالیکه روش اجزاء محدود در صورت استفاده از ۲۵۶ المان به جواب دقیق همگرا شده است. زمان تحلیل

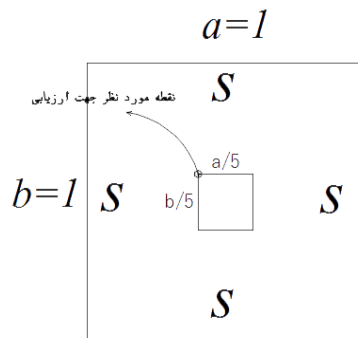
توسط کامپیوتر در این حالت ۲۳,۹۶ ثانیه با در نظر گیری ۹ تابع شکل در استفاده از چند جمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی و ۳,۹۴ ثانیه با در نظر گیری ۱۲۸ المان در روش اجزاء محدود می‌باشد.

۳-۴-۳. مقایسه ضریب α در کنج صفحه چهار طرف ساده

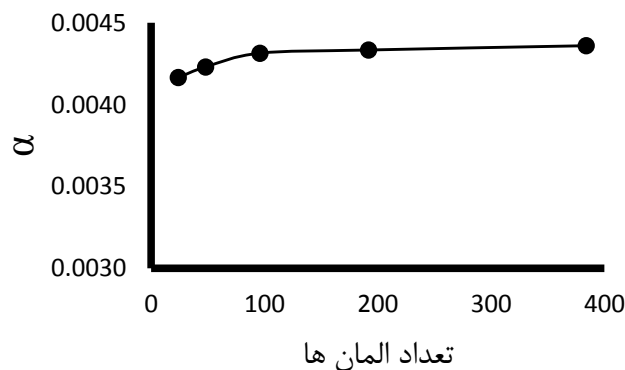
در این مثال به مقایسه ضریب α در کنج باز شو یک صفحه نازک مستطیلی چهار طرف مفصل تحت بار گسترده پرداخته شده است. همچنین صفحه مذکور دارای باز شو با ابعاد مختلف بوده و نسبت طول به عرض آن برابر یک می‌باشد (شکل ۱۰). در این حالت جابجایی در راستای قائم کنج باز شو مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است (شکل ۱۰). مدل سازی باز شوها با توجه به استفاده از روش چند جمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی به راحتی امکان پذیر شده است، همچنین یک تغییر افزایشی در ابعاد باز شو ایجاد شده است تا اثر ابعاد باز شو در همگرایی نتایج روش مورد نظر به دست آید.

۳-۴-۱- حالت اول :

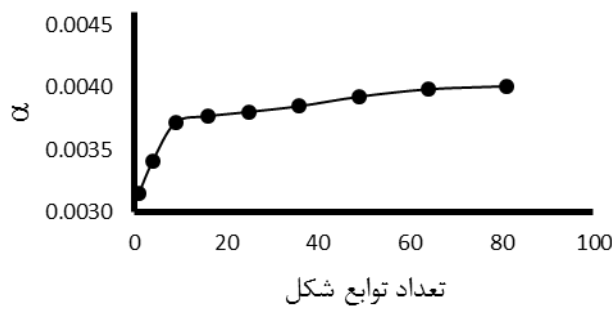
در این حالت صفحه مذکور دارای باز شویی به مساحت ۴ درصد از مساحت کل صفحه در مرکز صفحه و متقارن می‌باشد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰: شرایط مرزی صفحه چهار طرف ساده، دارای باز شو به اندازه ۴ درصد مساحت کل صفحه



شکل ۱۱: تغییرات ضریب α در کنج باز شو ۴ درصد صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود

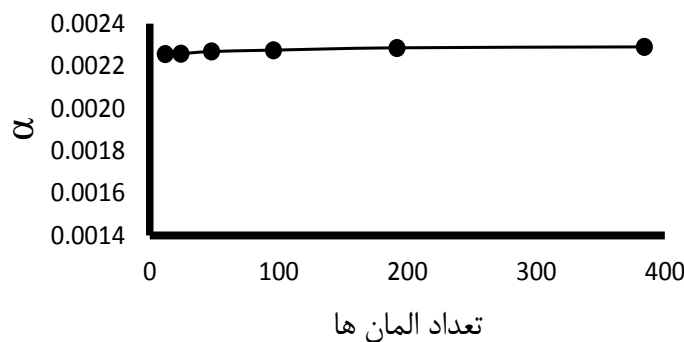


شکل ۱۲: تغییرات ضریب α در کنج باز شو ۴ درصد صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

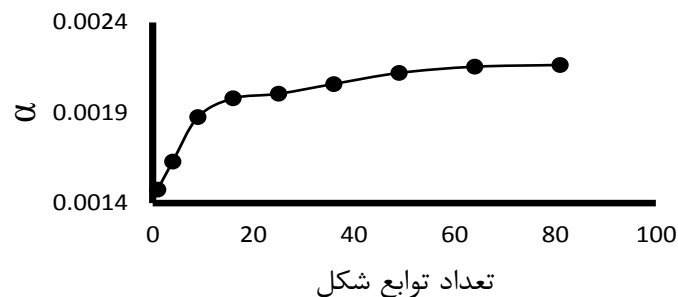
همانطور که از شکل‌های ۱۱ و ۱۲ مشاهده می‌کنیم اختلافی در جواب نهایی روش اجزاء محدود و چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی به اندازه ۸,۰۱ درصد به وجود آمده است. این اختلاف بدلیل ایجاد باز شو در صفحه در استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی نسبت به روش اجزاء محدود بوجود آمده است. در روش اجزاء محدود درجات آزادی به دقت روی مرزهای باز شو قرار داده می‌شوند و شرایط مرزی باز شو را ارضا می‌کنند، درحالی‌که در استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی شرایط مرزی باز شو به خوبی رعایت نگردیده و اختلاف مشاهده شده ایجاد می‌گردد.

۴-۳-۲- حالت دوم:

در این حالت صفحه با مشخصات عنوان شده در حالت اول دارای بازشویی به مساحت ۲۵ درصد از مساحت کل صفحه در مرکز صفحه و متقارن می‌باشد.



شکل ۱۳: تغییرات ضریب α در کنج باز شو ۲۵ درصد صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود

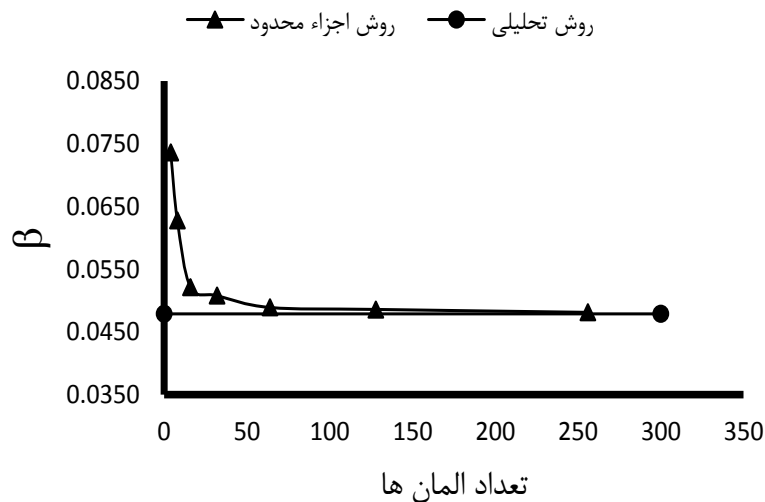


شکل ۱۴: تغییرات ضریب α در کنج باز شو ۲۵ درصد صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

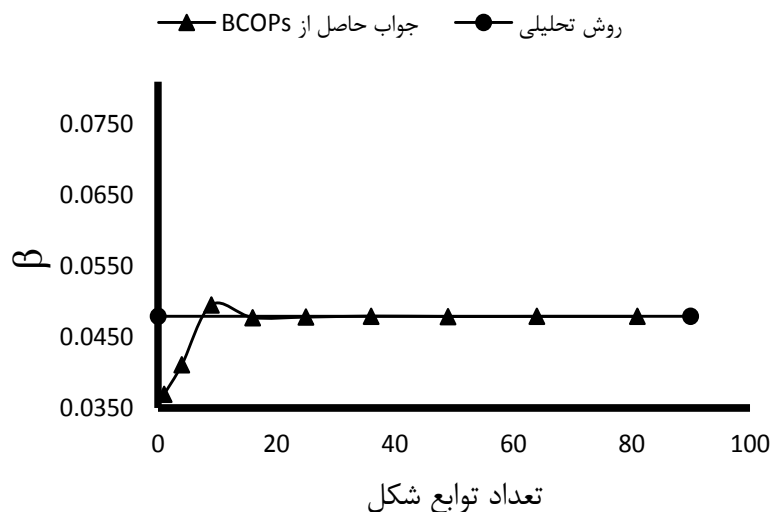
در این حالت با توجه به شکل‌های ۱۳ و ۱۴ اختلاف جواب نهایی روش اجزاء محدود و چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی به ۵٫۵۰ درصد کاهش یافته است که نشان دهنده افزایش دقت استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی با بالا رفتن ابعاد بازشو می‌باشد. اما به طور کلی وجود بازشو از دقت استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر کاسته و همگرایی نیز در روش اجزاء محدود سریعتر حاصل شده است.

۴-۴-۴. مقایسه ضریب β در مرکز صفحه چهار طرف ساده

در این بخش به بررسی لنگر مرکزی β به وجود آمده در یک صفحه نازک چهار طرف مفصل و به ترتیب تحت بار گسترده و متمرکز اعمال شده در مرکز صفحه پرداخته شده است. همچنین صفحه مذکور بدون بازشو بوده و نسبت طول به عرض آن برابر یک می‌باشد.

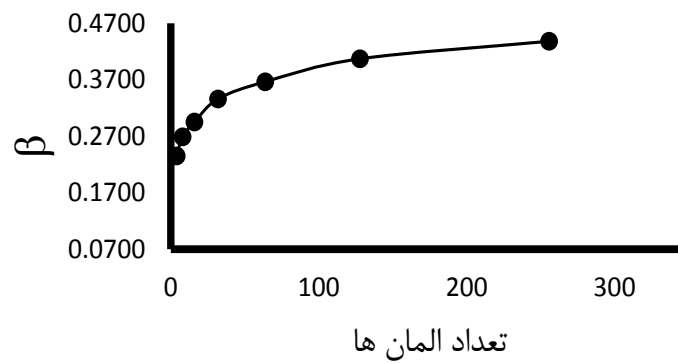


شکل ۱۵: مقایسه ضریب β در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود

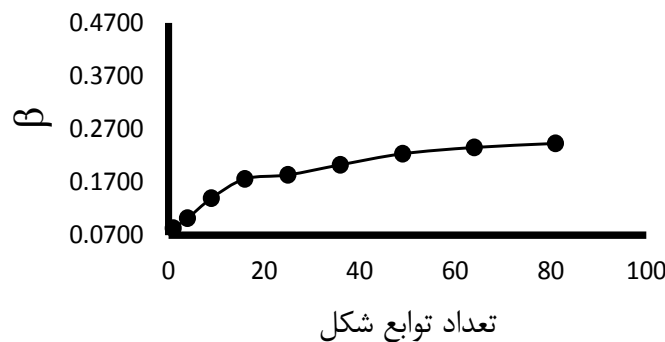


شکل ۱۶: مقایسه ضریب β در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

زمان تحلیل توسط کامپیوتر در این حالت ۵۲٫۲۸ ثانیه با در نظر گیری ۱۶ تابع شکل در استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی و ۶٫۰۱۹ ثانیه با در نظر گیری ۱۲۸ المان در روش اجزاء محدود می‌باشد.



شکل ۱۷: تغییرات ضریب β در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار متمرکز در مرکز صفحه - روش اجزاء محدود

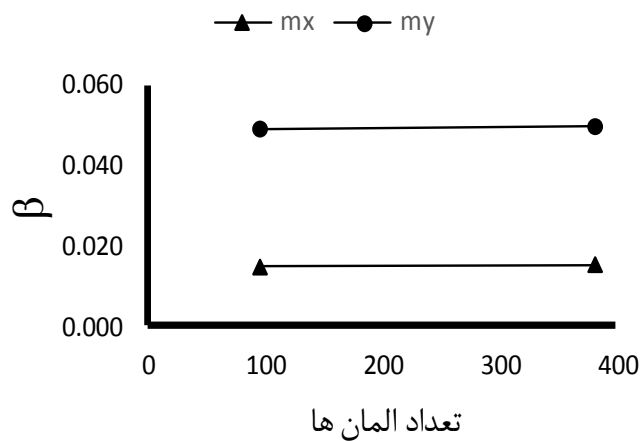


شکل ۱۸: تغییرات ضریب β در مرکز صفحه SSSS تحت اثر بار متمرکز در مرکز صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

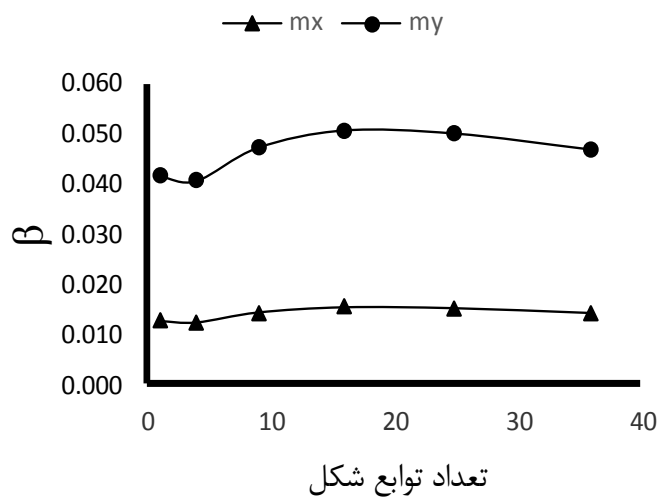
با توجه به شکل‌های ۱۵ تا ۱۸ مشاهده شده است که در حالت مقایسه لنگرها در بارگذاری گسترده استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی عملکرد بهتری از خود نشان داده است. اما در بارگذاری نقطه‌ای اختلاف جواب‌های نهایی ۴۴,۵۹ درصد می‌باشد که عدم دقت روش چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی را در این حالت نشان می‌دهد.

۴-۵- مثال ۵. مقایسه ضریب β در مرکز لبه مرزی بالایی صفحه چهار طرف گیردار

در این بخش به بررسی لنگر β لبه مرکزی و مرزی بالایی به وجود آمده در یک صفحه نازک چهار طرف گیردار و تحت بار گسترده پرداخته شده است. همچنین در این حالت صفحه مذکور دارای بازشویی به مساحت ۴ درصد از مساحت کل صفحه بوده و نسبت طول به عرض آن برابر یک می‌باشد.



شکل ۱۹: مقایسه ضریب β در مرکز لبه بالایی صفحه CCCC تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود



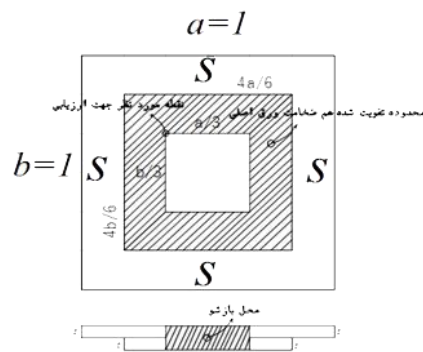
شکل ۲۰: مقایسه ضریب β در مرکز لبه بالایی صفحه CCCC تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

با توجه به شکل‌های ۱۹ و ۲۰ مشاهده شده است نتایج در هر دو روش یکسان (با اختلاف اندک ۵٫۸ درصد) بوده و تغییر شرایط مرزی در حالت لنگرهای ایجاد شده در صفحه نیز اثر محسوسی در همگرایی نتایج نداشته است. در این حالت به دلیل اینکه نقطه مورد بررسی در لبه صفحه مورد نظر بوده است مقادیر لنگر در راستای x و y با هم متفاوت بوده و دو نمودار برای هر کدام در هر دو روش بیان شده است.

۴-۶-۶. مثال ۶. مقایسه ضریب α در حالت تقویت صفحه

در این مثال به مقایسه ضریب α در کنج یک بازشوی مرکزی تقویت شده (مطابق شکل ۲۶) به مساحت ۱۱ درصد از مساحت کل یک صفحه نازک چهار طرف مفصل تحت بار گسترده پرداخته شده است. همچنین نسبت طول به عرض صفحه مذکور برابر یک می‌باشد (شکل ۲۱).

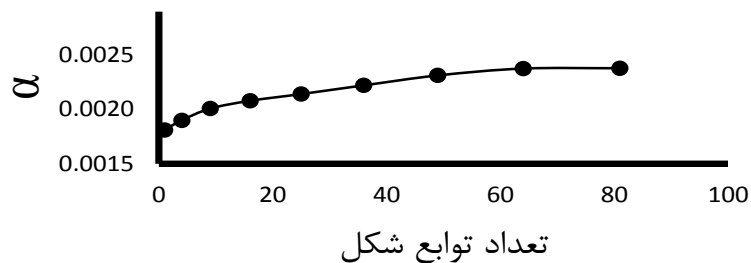
در این حالت اثر تقویت انجام شده و روند همگرایی نتایج در استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی و روش اجزاء محدود مشاهده و مورد بررسی قرار داده شده است.



شکل ۲۱: شرایط مرزی صفحه چهار طرف ساده، تقویت

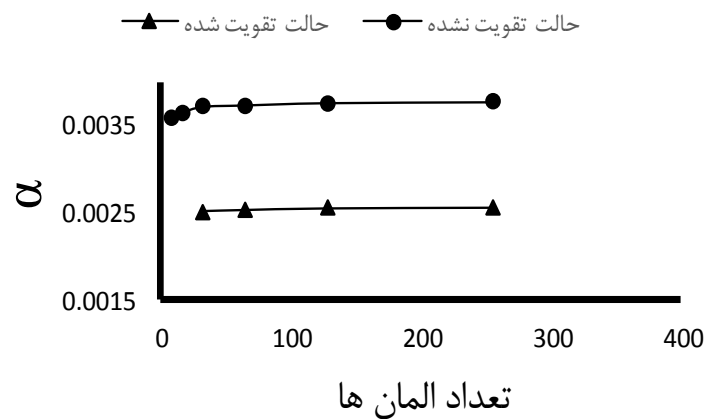


شکل ۲۲: تغییرات ضریب α در کنج باز شو ۱۱ درصد صفحه SSSS تقویت شده تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - روش اجزاء محدود

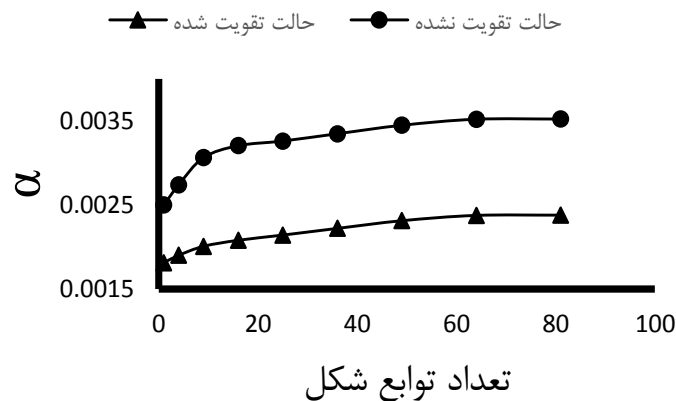


شکل ۲۳: تغییرات ضریب α در کنج باز شو ۱۱ درصد صفحه SSSS تقویت شده تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه - جواب حاصل از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی

با توجه به شکل‌های ۲۲ و ۲۳ در این حالت اختلافی در جواب نهایی روش اجزاء محدود و چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی به اندازه ۶,۷ درصد به وجود آمده است. در ادامه به بررسی صحت و عملکرد تقویت انجام شده پرداخته شده است.



شکل ۲۴: مقایسه ضریب α در کنج باز شو تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه برای حالت های تقویت شده و تقویت نشده - روش اجزاء محدود



شکل ۲۵: مقایسه ضریب α در کنج باز شو تحت اثر بار گسترده در تمام صفحه برای حالت های تقویت شده و تقویت نشده - جواب حاصل از چند جمله بی های متعامد مفسر مرزی

با مقایسه و بررسی شکل های ۲۴ و ۲۵ مشاهده شده است که با انجام این تقویت ضریب α به 0.0025 رسیده است که از مقدار 0.0037 (حالت بازشودار بدون تقویت) و حتی از مقدار 0.0028 (بدون باز شو) کمتر شده است و این نتایج عملکرد صحیح تقویت انجام شده را بیان کرده است.

۷-۴- مثال ۷. مقایسه فرکانس ارتعاشی (ضریب λ) صفحه چهار طرف مفصل

در این حالت فرکانس ارتعاشی یک صفحه نازک در حالت چهار طرف مفصل و بدون باز شو با استفاده از چند جمله بی های متعامد مفسر مرزی و روش اجزاء محدود مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است.

جدول ۱: فرکانس های ارتعاشی صفحه SSSS - روش اجزاء محدود

جدول نتایج محاسبات روش اجزاء محدود				
تعداد المان های در نظر گرفته شده				
۳۲	۱۶	۸	۴	
۱۹,۳۵	۱۹,۱۵	۱۸,۳۴	۱۷,۸۴	فرکانس ارتعاشی بی بعد اول
۷۳,۶۲	۷۱,۷۱	۴۹,۹۷	۴۳,۰۹	فرکانس ارتعاشی بی بعد چهارم
۱۵۴,۳۵	۱۴۹,۱۳	۱۰۸,۲۱	۹۵,۹۷	فرکانس ارتعاشی بی بعد نهم
۲۲۹,۹۷	۲۲۴,۵۴	۱۹۹,۵۳	۲۲۳,۹۹	فرکانس ارتعاشی بی بعد شانزدهم
۳۱۵,۶۹	۲۹۷,۴۵	۴۳۸,۲۴	-	فرکانس ارتعاشی بی بعد بیست و پنجم
	۲۵۶	۱۲۸	۶۴	
	۱۹,۷۰	۱۹,۶۴	۱۹,۵۸	فرکانس ارتعاشی بی بعد اول
	۷۸,۳۲	۷۷,۵۳	۷۶,۵۹	فرکانس ارتعاشی بی بعد چهارم
	۱۶۷,۲۰	۱۶۵,۸۰	۱۶۶,۱۷	فرکانس ارتعاشی بی بعد نهم
	۲۵۵,۸۰	۲۵۳,۶۰	۲۵۵,۵۹	فرکانس ارتعاشی بی بعد شانزدهم
	۳۸۹,۹۲	۳۷۰,۳۱	۳۶۷,۱۵	فرکانس ارتعاشی بی بعد بیست و پنجم

جدول ۲: فرکانس های ارتعاشی صفحه SSSS - جواب حاصل از چند جمله ای های متعامد مفسر مرزی

جدول نتایج محاسبات استفاده از چند جمله ای های متعامد مفسر مرزی					
تعداد المان های در نظر گرفته شده					
۲۵	۱۶	۹	۴	۱	
۱۹,۷۴	۱۹,۷۴	۱۹,۷۴	۲۰,۳۷	۲۰,۹۸	فرکانس ارتعاشی بی بعد اول
۷۹,۰۷	۷۹,۴۰	۹۲,۵۶	۱۳۹,۷۸	-	فرکانس ارتعاشی بی بعد چهارم
۱۷۴,۳۶	۱۷۴,۵۱	۲۸۳,۴۱	-	-	فرکانس ارتعاشی بی بعد نهم
۳۶۶,۱۵	۸۶۵,۹۰	-	-	-	فرکانس ارتعاشی بی بعد شانزدهم
۱۳۶۹,۳۵	-	-	-	-	فرکانس ارتعاشی بی بعد بیست و پنجم
	۸۱	۶۴	۴۹	۳۶	
	۱۹,۷۴	۱۹,۷۴	۱۹,۷۴	۱۹,۷۴	فرکانس ارتعاشی بی بعد اول
	۷۸,۹۶	۷۸,۹۶	۷۸,۹۶	۷۸,۹۶	فرکانس ارتعاشی بی بعد چهارم
	۱۶۷,۷۸	۱۶۷,۷۹	۱۶۷,۷۹	۱۶۸,۰۰	فرکانس ارتعاشی بی بعد نهم
	۲۵۶,۶۱	۲۵۶,۶۴	۲۵۷,۷۴	۲۷۶,۵۵	فرکانس ارتعاشی بی بعد شانزدهم
	۳۹۵,۸۹	۳۹۹,۴۴	۴۴۳,۶۰	۶۸۳,۲۷	فرکانس ارتعاشی بی بعد بیست و پنجم

جدول ۳: فرکانس های ارتعاشی صفحه SSSS - جواب های تحلیلی

جواب های تحلیلی	
۱۹,۷۴	فرکانس ارتعاشی بی بعد اول
۷۸,۹۶	فرکانس ارتعاشی بی بعد چهارم
۱۷۷,۶۵	فرکانس ارتعاشی بی بعد نهم
۳۱۵,۸۳	فرکانس ارتعاشی بی بعد شانزدهم
۴۹۳,۴۸	فرکانس ارتعاشی بی بعد بیست و پنجم

با توجه به نتایج جدول‌های ۱ تا ۳، همگرایی خوب هر دو روش در فرکانس‌های ارتعاشی اولیه و عدم همگرایی مناسب در فرکانس‌های ارتعاشی بالاتر نسبت به جواب‌های تحلیلی مشاهده گردیده است.

۵- نتیجه‌گیری

به طور کلی با توجه به مقایسه‌های انجام شده در بخش‌های (۴-۱ و ۴-۲) در برآورد جابه‌جایی‌ها و اعمال بار گسترده بر صفحات نازک مستطیلی بدون بازشو و با هر شرایط مرزی تکیه‌گاهی استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی منجر به بالا رفتن سرعت همگرایی به جواب مورد نظر شده است. همچنین سهولت استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی نسبت به روش اجزاء محدود بسیار قابل توجه بوده و در برآورد لنگرها در بخش‌های (۴-۴ و ۴-۵) در بارگذاری گسترده عدم همگرایی قابل توجهی در نتایج مشاهده نگردیده است. اما در بارگذاری نقطه‌ای، دقت مطلوب در نتایج با استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی مشاهده نشده است. با اعمال بازشو در صفحات مورد نظر در بخش (۴-۳) کمی از دقت استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی کاسته شده است که قابل صرف نظر کردن می‌باشد و همچنین سهولت و دقت استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات نازک با شرایط مرزی مستقیم و به خصوص غیرمستقیم می‌تواند به عنوان برتری کاربرد چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی نسبت به روش کلاسیک اجزاء محدود باشد. در مسائل دینامیکی در بخش (۴-۷)، در صورت افزایش تعداد درجات آزادی آن هم به واسطه افزایش ابعاد سازه استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی سرعت اجرای کامپیوتری بالاتری را نسبت به روش اجزاء محدود خواهد داشت. همچنین در بخش (۴-۶) علاوه بر مزایای ذکر شده در استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی، کارایی و هماهنگی آن در مسائل گوناگون و پیچیده مورد ارزیابی قرار گرفته که به خوبی از عهده آن برآمده است. یکی دیگر از مزایای استفاده از چندجمله‌یی‌های متعامد مفسر مرزی نسبت به روش مودهای فرضی که بر اساس حل مسئله مقدار ویژه صفحه می‌باشد، امکان تحلیل صفحات برای تمامی شرایط مرزی دلخواه است و این در حالیست که در روش مودهای فرضی برای تعداد محدودی از شرایط مرزی توابع شکل تحلیلی وجود دارد.

مراجع

- [1] Bhat, R. (1985). Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), 493-499.
- [2] Liew, K., Lam, K., & Chow, S. (1990). Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function. *Computers & Structures*, 34(1), 79-85.
- [3] Chakraverty, S. (1992). Numerical solution of vibration of plates. PhD Thesis. University of Roorkee (Now IIT, Roorkee), Roorkee, India.
- [4] Singh, B., & Chakraverty, S. (1994). Boundary characteristic orthogonal polynomials in numerical approximation. *Communications in numerical methods in engineering*, 10(12), 1027-1043.
- [5] Chakraverty, S., Bhat, R., & Stiharu, I. (2000). Vibration of annular elliptic orthotropic plates using two dimensional orthogonal polynomials. *Applied Mechanics and Engineering*, 5(4), 843-866.
- [6] Liu, M.-F., & Chang, T.-P. (2005). Vibration analysis of a magneto-elastic beam with general boundary conditions subjected to axial load and external force. *Journal of Sound and Vibration*, 288(1), 399-411.
- [7] Bashmal, S., Bhat, R., & Rakheja, S. (2009). In-plane free vibration of circular annular disks. *Journal of Sound and Vibration*, 322(1), 216-226.
- [8] Lal, R., & Kumar, Y. (2012). Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials in the Study of Transverse Vibrations of Nonhomogeneous Rectangular Plates with Bilinear Thickness Variation. *Shock and Vibration*, 19(3), 2010-0635.
- [9] Niaz, M., & Nikkhoo, A. (2015). Inspection of a rectangular plate dynamics under a moving mass with varying velocity utilizing BCOPs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(2), 317-332.
- [10] Jafari, R., Farazandeh, A., Nikkhoo, A., & Rofooei, F. (2015). Vibration Assessment Of The Beams Via Characteristic Orthogonal Polynomials, *Sharif Journal of Civil Engineering*, 31.2(3.1), 83-92.

- [11] Nikkhoo A, Farazandeh A, Ebrahimzadeh Hassanabadi M, Mariani S. (2015). Simplified modeling of beam vibrations induced by a moving mass by regression analysis. *Acta Mechanica*, 226(7), 2147-2157.
- [12] Nikkhoo A, Farazandeh A, Ebrahimzadeh Hassanabadi M. (2016). On the computation of moving mass/beam interaction utilizing a semi-analytical method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(3), 761-771.
- [13] Mahi, A., & Tounsi, A. (2015). A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling*, 39(9), 2489-2508.
- [14] Chakraverty, S., & Behera, L. (2015). Free vibration of non-uniform nanobeams using Rayleigh–Ritz method. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 67, 38-46.
- [15] Behera, L., & Chakraverty, S. (2016). Effect of scaling effect parameters on the vibration characteristics of nanoplates. *Journal of Vibration and Control*, 22(10), 2389-2399.
- [16] Song, X., Han, Q., & Zhai, J. (2015). Vibration analyses of symmetrically laminated composite cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh–Ritz method. *Composite Structures*, 134, 820-830.
- [17] Bhat, R. B. (2015). Vibration of beams using novel boundary characteristic orthogonal polynomials satisfying all boundary conditions. *Advances in Mechanical Engineering*, 7(4), 1687814015578355.
- [18] Reddy, J. N. (1993). An introduction to the finite element method. Vol. 2. New York: McGraw-Hill.
- [19] Pouladkhan, A. R., Emadi, J., Safamehr, M., & Habibolahiyani, H. (2011). The Vibration of Thin Plates by Using Modal Analysis. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 59.
- [20] Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. McGraw-hill.
- [21] Alinia, m. (2000). Theory of plates & shells. Ashtian Publishers.
- [22] İmrak, C., & Gerdemeli, İ. (2007). An exact solution for the deflection of a clamped rectangular plate under uniform load. *Applied mathematical sciences*, 1(43), 2129-2137.
- [23] Evans, T. H. (1939). Tables of moments and deflections for a rectangular plate fixed on all edges and carrying a uniformly distributed load. *ASME J. Appl. Mech*, 6(1).
- [24] Taylor, R. L., & Govindjee, S. (2004). Solution of clamped rectangular plate problems. *Communications in numerical methods in engineering*, 20(10), 757-765.