

## اثر نویز بر شناسایی سازه‌های تیرها به روش خروجی-تنها

سید رسول نبویان<sup>۱</sup>، محمد رضا داودی<sup>۲\*</sup>، بهرام نوائی نیا<sup>۳</sup>، سید امین مصطفویان<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکترای مهندسی سازه، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

۲- دانشیار گروه مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

۳- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

### چکیده

شناسایی سازه‌ای از روش‌های خروجی-تنها با استفاده از داده‌های خروجی سازه انجام می‌شود. این داده‌ها معمولاً شامل پاسخ سازه به همراه مقداری نویز است. موفقیت روش‌های خروجی-تنها در تعیین پارامترهای ارتعاشی یک سازه، به نسبت سیگنال به نویز داده‌های خروجی وابسته است. در این مقاله پارامترهای ارتعاشی (فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی) یک تیر یک سر گیردار با استفاده از داده‌های خروجی‌ای که نسبت‌های سیگنال به نویز مختلفی دارند، بدست آمده است. پارامترهای ارتعاشی این تیر با استفاده از روش آنالیز مودال تعیین شده و به عنوان مشخصات ارتعاشی مبنای آن تیر در نظر گرفته شد. ورودی مناسبی به این تیر اعمال شده و سیگنال شتاب نقاط مختلف آن بدست آمد. برای ایجاد داده‌های نویزی، نویزهایی با توان‌های مختلف نسبت به توان سیگنال‌ها تولید شده و به آنها اضافه گردید. پارامترهای ارتعاشی این تیر به کمک دو روش خروجی-تنهای جستار قله و شناسایی زیرفضای تصادفی شناسایی شدند. پارامترهای ارتعاشی شناسایی شده با استفاده از این داده‌های آلوده به نویز با نسبت‌های سیگنال به نویز بزرگتر یا مساوی ۰.۲۵، مطابقت خوبی با مشخصات ارتعاشی مبنای تیر یک سر گیردار دارند. در محدوده نسبت سیگنال به نویز ۰.۲۵ تا ۲۵ پارامترهای ارتعاشی مربوط به مود اول این تیر قابل شناسایی نبودند، ولی پارامترهای ارتعاشی مربوط به مودهای بالاتر شناسایی شدند.

کلمات کلیدی: شناسایی سازه‌ای، روش خروجی-تنها، تیر یکسر گیردار، نسبت سیگنال به نویز، جستار قله، شناسایی زیرفضای تصادفی

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
10.22065/jsce.2018.130329.1555	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت	
doi: 10.22065/jsce.2018.130329.1555	۱۳۹۹/۰۴/۰۱	۱۳۹۹/۰۴/۰۱	۱۳۹۷/۰۷/۱۰	۱۳۹۷/۰۵/۰۱	۱۳۹۷/۰۲/۲۰	
محمد رضا داودی				*نویسنده مسئول:		
davoodi@nit.ac.ir				پست الکترونیکی:		

## Effect of noise on output-only structural identification of beams

Seyed Rasoul Nabavian<sup>1</sup>, Mohammad Reza Davoodi<sup>2\*</sup>, Bahram Navayi Neya<sup>2</sup>, Seyedamin Mostafavian<sup>3</sup>

1- Ph.D. Student, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

2- Associate Professor, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

3- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran

### ABSTRACT

Output-only structural identification is conducted by output data of the structure. These data usually include structural response together with some noise. Success of output-only methods in determining the vibration parameters of a structure depends on the signal to noise ratio (SNR) of the output data. In this paper, the vibration parameters (Natural frequency and Mode shape) of a cantilever beam have been obtained using output data which have different signal to noise ratios. The vibration parameters of the beam were determined using modal analysis of finite element model and considered as reference parameters. Then, appropriate input was applied to the beam and the acceleration signal was obtained. To generate noisy data, noise with different powers compared to signal powers were added to acceleration signal. The modal parameters of the beam were obtained using two output-only methods, Peak Picking (PP) and Stochastic Subspace Identification (SSI). The vibration parameters having signal-to-noise ratios greater than 25 (lower noise level) for all considered modes were identified properly. At a signal-to-noise ratio of 0.25 to 25 (higher noise level), it was not possible to identify the modal parameters of the first mode of the beam, but the parameters of the higher modes were identified with good accuracy.

### ARTICLE INFO

Receive Date: 10 May 2018

Revise Date: 23 July 2018

Accept Date: 02 October 2018

### Keywords:

Structural identification  
Output-only method  
Cantilever beam  
Signal to noise ratio  
Peak picking  
Stochastic subspace  
identification

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/jsce.2018.130329.1555

\*Corresponding author: Mohammad Reza Davoodi  
Email address: davoodi@nit.ac.ir

## ۱- مقدمه

شناسایی سازه‌ای، به تعیین پارامترهای ارتعاشی سازه یعنی فرکانس‌های طبیعی، شکل‌های مودی و نسبت‌های میرایی اطلاق می‌گردد [۱]. شناسایی سازه‌ای در سازه‌های بزرگ مهندسی به دلیل محدودیت‌های روش‌های ورودی-خروجی، از طریق روش‌های خروجی-تنها صورت می‌پذیرد [۲-۵]. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش جستار قله<sup>۱</sup> (PP) و روش شناسایی زیرفضای تصادفی<sup>۲</sup> (SSI) اشاره نمود. در روش PP فرکانس‌های طبیعی سازه با استفاده از قله‌های نمودار میانگین چگالی طیفی توانی نرمال شده بدست می‌آیند. شکل‌های مودی نیز با توجه به مقدار دامنه توابع انتقال در فرکانس‌های طبیعی سازه تعیین می‌شوند [۶-۷]. اولین بار Felber [۸] چگونگی استفاده از این روش را در کارهای عملی ارائه داده و آن را در مورد پل‌ها به کار گرفت. روش SSI از جمله دقیق‌ترین و کامل‌ترین روش‌های شناسایی سازه‌ای خروجی-تنها می‌باشد که اولین بار توسط De Moor و Overschee ارائه شد [۹]. Bart Peeters [۱۰] از روش SSI برای شناسایی پارامترهای ارتعاشی سازه‌های مهندسی استفاده نمود. همچنین Brincker و Andersen [۱۱] تلاش نمودند تا مفاهیم ریاضی به کار رفته در روش SSI را با زبانی ساده‌تر بیان نمایند. در این روش معادله تعادل دینامیکی سازه بصورت معادلات فضای حالت بازنویسی می‌شود. سپس با استفاده از تکنیک‌های عددی مانند جداسازی QR، تجزیه مقادیر ویژه و یا روش حداقل مربعات، ماتریس‌های سیستم بدست می‌آیند. پارامترهای ارتعاشی سازه با استفاده از این ماتریس‌ها تعیین می‌شوند [۱۲].

در روش‌های فوق و نیز دیگر روش‌های خروجی-تنها، شناسایی موفقیت آمیز پارامترهای ارتعاشی سازه منوط به تامین دو شرط زیر است:

- سازه بوسیله یک ورودی مناسب تحریک شود.
- پاسخ‌های خروجی ثبت شده دارای کیفیت مناسبی باشند.

ورودی مناسب برای تحریک سازه آنست که تقریباً خصوصیات نویز سفید را دارا بوده و انرژی لازم برای تحریک تمامی فرکانس‌های مورد نظر را تامین نماید [۷]. به عبارت دیگر تمامی مودهای مورد نظر سازه باید به اندازه کافی تحریک شوند تا سهم آنها در پاسخ‌های خروجی قابل دست‌یابی باشد [۱۳].

داده‌های خروجی ثبت شده شامل پاسخ سازه به ورودی‌ها که به آن سیگنال گفته می‌شود، به همراه یک سری از اطلاعات ناخواسته که نویز خروجی نامیده می‌شود، می‌باشد [۱۴]. داده‌های خروجی باید دارای نسبت سیگنال به نویز مناسبی باشند تا روش‌های خروجی-تنها موفق به شناسایی درست پارامترهای ارتعاشی سازه شوند [۱۵]. برای دست‌یابی به نسبت سیگنال به نویز مناسب معمولاً تلاش می‌شود از روش‌های مختلفی توان نویز را کاهش دهند. بدین منظور از تکنیک‌هایی برای اندازه‌گیری و جمع‌آوری اطلاعات خروجی استفاده می‌شود تا سهم نویز در پاسخ اندازه‌گیری شده کاهش یابد [۱۶-۱۸]. پس از ثبت داده‌ها نیز، به منظور کاهش اثرات نویز از روش‌هایی مانند فیلتر کردن و میانگین‌گیری استفاده می‌شود [۱۹-۲۱]. Bonness و Jenkins [۲۲] روش جدیدی را برای حذف نویزهای ناخواسته از سیگنال در روش‌های خروجی-تنها ارائه کرده‌اند. آنها با نصب چند سنسور نویز در بدنه سیلندر و اصلاح روابط آماری همبستگی و توابع طیفی، تعداد نامحدودی از نویزهای همبسته را از مجموعه داده‌های اندازه‌گیری شده حذف نمودند. Jiang و Adeli [۲۳] نیز با ارائه تکنیک Discrete Wavelet Packet Transform به حذف نویز از داده‌های جریان ترافیک پرداختند.

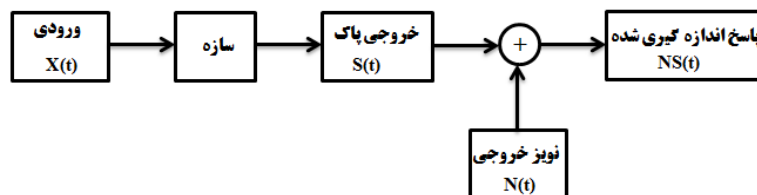
علیرغم همه تلاش‌های فوق، بدلیل عدم قطعیت‌هایی که در مورد منابع و مقدار نویز در واقعیت وجود دارد، امکان حذف کامل نویز و دسترسی به اطلاعات تمیز (سیگنال) وجود ندارد [۲۴-۲۵]. لذا همه محاسبات انجام شده در روش‌های شناسایی سازه‌ای برای تعیین پارامترهای ارتعاشی بر اساس یک سری اطلاعات آلوده به نویز صورت می‌پذیرد. این پارامترها در پایش سلامت سازه‌ای، بروز کردن مدل اجزای محدود و تشخیص آسیب به کار می‌رود. در اکثر این کاربردها پارامترهای ارتعاشی مربوط به چند مود اول سازه‌ها استفاده می‌شود.

1 Peak Picking  
2 Stochastic Subspace Identification

در این تحقیق این فرضیه که دقت و امکان شناسایی پارامترهای ارتعاشی چند مود اول یک سازه، از مقدار نسبت سیگنال به نویز اطلاعات خروجی تاثیرپذیر است، مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور پارامترهای ارتعاشی یک تیر یکسر گیردار با استفاده از داده‌های خروجی‌ای که نسبت‌های سیگنال به نویز مختلفی دارند، تعیین شدند. پس از مدلسازی اجزای محدود یک تیر یکسرگیردار، ورودی مناسبی که بتواند چند مود اول این تیر را تحریک نماید، به آن اعمال و شتاب‌های نقاط مختلف تیر (سیگنال‌ها) با استفاده از تحلیل تاریخیچه زمانی بدست آمد. سپس به کمک این سیگنال‌ها و نیز روش‌های PP و SSI مشخصات مودال تیر شناسایی شده و با پارامترهای ارتعاشی مبنا که از نتایج آنالیز مودال مدل اجزای محدود بدست آمده، مقایسه شده است. برای تولید خروجی‌های آلوده به نویز، نویزهایی با توان‌های متفاوت ایجاد و به سیگنال‌ها اضافه شد. بدلیل ماهیت تصادفی نویز، تولید خروجی‌های نویزی ۱۰۰ مرتبه تکرار شده است. با استفاده از این خروجی‌ها و از دو روش فوق پارامترهای ارتعاشی تیر بازای نسبت‌های مختلف سیگنال به نویز بدست آمد.

## ۲- نسبت‌های مختلف سیگنال به نویز در اطلاعات خروجی

شناسایی پارامترهای سازه‌ای از روش خروجی-تنها صرفاً بر مبنای پاسخ‌های اندازه‌گیری شده از سازه انجام می‌شود. فرآیند شکل‌گیری این پاسخ‌ها بصورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شکل  $X(t)$  بار اعمالی به سازه می‌باشد که شرایط مناسب ورودی برای آنالیز مودال خروجی-تنها را داراست. پاسخ سازه به این ورودی که سیگنال نامیده می‌شود با  $S(t)$  نمایش داده شده است. داده‌هایی که در عمل اندازه‌گیری می‌شوند  $(NS(t))$  شامل پاسخ سازه به بار ورودی  $(S(t))$  به همراه نویز خروجی  $(N(t))$  می‌باشد. نویز خروجی به سیگنال‌های نامطلوبی گفته می‌شود که در اثر دستگاه‌های اندازه‌گیری، سنسورها و غیره به سیگنال اضافه می‌شود [۲۶]. روش‌های شناسایی خروجی-تنها به کمک توابع همبستگی و یا چگالی طیفی که بر اساس روابط بین پاسخ‌های  $NS(t)$  تشکیل می‌شوند، پارامترهای سازه‌ای را تعیین می‌کنند [۱۵]. مقدار زیاد این نویزها ممکن است عملیات شناسایی را تحت تاثیر قرار دهد [۲۷]. شناسایی موفقیت آمیز و یا دقت پارامترهای شناسایی شده به نسبت سیگنال به نویزی که در خروجی وجود دارد، وابسته است [۲۸].



شکل ۱: فرآیند شکل‌گیری پاسخ‌های اندازه‌گیری شده.

نسبت سیگنال به نویز (SNR) در اطلاعات خروجی را می‌توان بصورت رابطه (۱) نشان داد:

$$SNR = P_{signal} / P_{noise} \quad (1)$$

که  $P_{signal}$  و  $P_{noise}$  به ترتیب برابر توان سیگنال و توان نویز می‌باشد. منظور از توان در رابطه (۱)، میانگین مربع داده‌ها بوده که بصورت رابطه (۲) می‌باشد.

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (2)$$

$x_i$  در رابطه (۲) نشان دهنده مقدار هر یک از داده‌ها و  $n$  تعداد کل آنهاست.

برای تولید خروجی با نسبت‌های مختلف سیگنال به نویز ابتدا ورودی  $X(t)$  به یک سازه مشخص اثر کرده و پاسخ متناظر آن به عنوان  $S(t)$  محاسبه می‌شود. سپس نویز بصورت ضریبی از  $S(t)$  به آن اضافه می‌شود. برای تولید نویز  $N(t)$  از معادله (۳) استفاده شده است [۲۹-۳۰]:

$$N(t) = RMS(S(t)) \times LN \times I(t) \quad (3)$$

در این معادله  $RMS(S(t))$  جذر توان سیگنال  $(\sqrt{P_{signal}})$ ،  $LN$  سطح نویز انتخابی و  $I(t)$  یک تابع تصادفی هم بعد با  $S(t)$  می‌باشد که بدلیل ماهیت تصادفی نویز در رابطه (۳) وجود دارد. این تابع دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف استاندارد یک می‌باشد [۳۱]. فرض می‌شود که:

$$S(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad N(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}, \quad I(t) = \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix}$$

به کمک فرضیات فوق معادله (۳) بصورت معادله (۴) در خواهد آمد:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = RMS(S(t)) \times LN \times \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

معادله (۴) منجر به تشکیل معادلات (۵) می‌شود.

$$\begin{cases} y_1 = RMS(S(t)) \times LN \times z_1 \\ \vdots \\ y_n = RMS(S(t)) \times LN \times z_n \end{cases} \quad (5)$$

هریک از طرفین معادلات (۵) را به توان ۲ رسانده و سپس با میانگین‌گیری، معادله (۶) بدست می‌آید:

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} = [RMS(S(t))]^2 \times (LN)^2 \times \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{n} \quad (6)$$

از آنجا که  $RMS(S(t)) = \sqrt{P_{signal}}$ ،  $P_{noise} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n}$ ، معادله (۶) بصورت معادله (۷) در خواهد آمد:

$$P_{noise} = P_{signal} \times (LN)^2 \times \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{n} \quad (7)$$

با توجه به اینکه تابع  $I(t)$  دارای میانگین صفر و انحراف استاندارد یک است، لذا مقدار  $\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{n}$  در معادله (۷) برابر واریانس تابع تصادفی  $I(t)$  یعنی مساوی یک می‌باشد. لذا معادله (۷) تبدیل به معادله (۸) می‌شود:

$$P_{noise} = P_{signal} \times (LN)^2 \quad (8)$$

با توجه به معادله (۸)، توان نویز تولید شده به نسبتی از توان سیگنال بوده که این نسبت برابر مربع سطح نویز انتخابی است. نسبت سیگنال به نویز نیز در این حالت برابر معکوس مربع سطح نویز انتخابی می‌باشد که در معادله (۹) قابل مشاهده است.

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{1}{(LN)^2} \quad (9)$$

پس از تولید نویز و با اضافه کردن آن به سیگنال مطابق رابطه (۱۰)، سیگنال نویزی بوجود می‌آید [۳۲].

$$NS(t) = S(t) + N(t) \quad (10)$$

### ۳- مدل سازی

برای بررسی اثر نسبت سیگنال به نویز بر شناسایی سازه‌ای، یک تیر یکسرگیردار همانند شکل ۲ در نظر گرفته شد. از نرم افزار اجزای محدود ANSYS V.17 جهت مدل سازی و بدست آوردن پاسخ‌های سازه استفاده شد. این تیر به طول یک متر و مقطع مربعی به ضلع یک سانتیمتر از جنس فولاد با مدول الاستیسیته  $E=200000 \text{ MPa}$  و چگالی  $7850 \text{ kg/m}^3$  و نسبت پواسن 0.3 در نظر گرفته شد. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر به گونه‌ای انتخاب شد که پنج فرکانس اول مورد بررسی به اندازه کافی تنگ باشند. تیر با ده المان BEAM 188 به طول ده سانتیمتر مدل شده است. این المان دارای شش درجه آزادی شامل سه درجه آزادی انتقالی در راستای X، Y و Z و سه درجه آزادی دورانی حول محورهای X، Y و Z می‌باشد [۳۳].



شکل ۲: مدل اجزای محدود تیر یکسر گیردار.

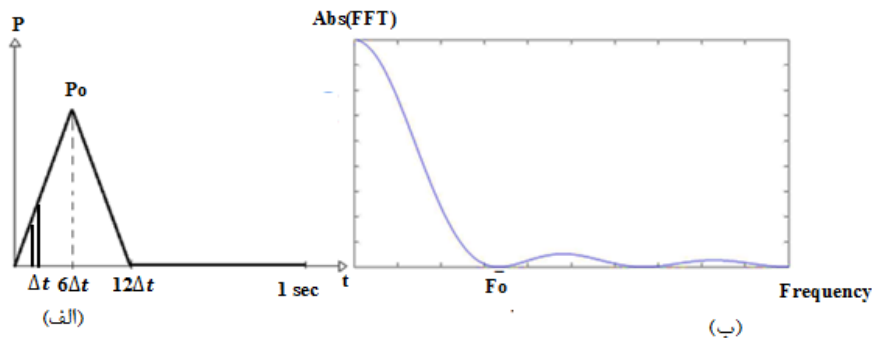
پارامترهای ارتعاشی این تیر با استفاده از آنالیز مودال اجزای محدود بدست آمده و به عنوان پارامترهای ارتعاشی مبنا در نظر گرفته شد. ۵ فرکانس طبیعی اول تیر در جدول ۱ نشان داده شده است. همچنین به منظور صحت سنجی نتایج بدست آمده، مقادیر فرکانس‌های طبیعی از حل معادله دینامیکی تحلیلی تیر یکسرگیردار [۳۴] نیز بدست آمده و در جدول ۱ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود اختلاف مقادیر فرکانس‌های طبیعی بین دو روش آنالیز مودال و تحلیلی در مدهای بالاتر بیشتر است که به دلیل محدودیت مش بندی مدل اجزای محدود می‌باشد.

جدول ۱: پنج فرکانس اول تیر مورد بررسی

فرکانس طبیعی (Hz)		شماره مود
روش تحلیلی	آنالیز مودال	
۸,۱۶	۸,۱۶	مود اول
۵۲,۱۲	۵۲,۲۰	مود دوم
۱۵۱,۲۲	۱۵۲,۳۷	مود سوم
۳۱۵,۷۱	۳۱۸,۹۶	مود چهارم
۵۶۳,۲۵	۵۷۷,۲۷	مود پنجم

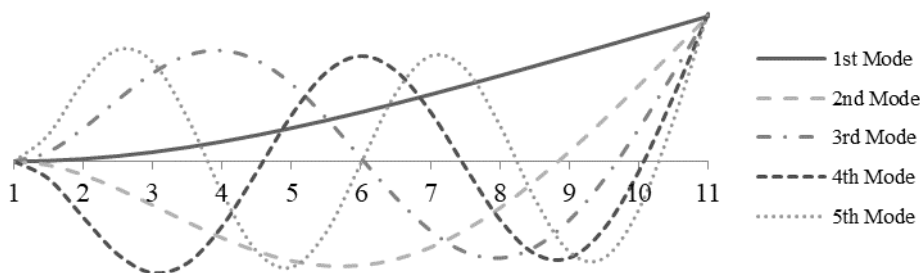
برای تعیین پارامترهای ارتعاشی پنج مود اول تیر از روش خروجی-تنها، محتوی فرکانسی بار اعمالی می‌بایست به گونه‌ای باشد که بتواند همه این مودها را تحریک نماید. برای این منظور بار نشان داده شده در شکل ۳- الف در نظر گرفته شده که در آن بار از مقدار صفر در لحظه  $t=0$  شروع و به صورت خطی به مقدار  $P_0$  در زمان  $6\Delta t$  رسیده و در زمان  $12\Delta t$  به صفر بر می‌گردد و سپس تا زمان یک

ثانیه با مقدار صفر ادامه می‌یابد که  $\Delta t$  گام زمانی می‌باشد. تابع تبدیل سریع فوریه این بار در شکل ۳-ب نشان داده شده است (بدلیل تقارن فقط یک نیمه از تابع نشان داده شده است). مقدار  $P_0$  در محتوی فرکانسی بار اعمالی تاثیرگذار نبوده و برابر ۰٫۳ نیوتن در نظر گرفته شده است. شرط اینکه بار ورودی بتواند همه پنج مود اول تیر مورد نظر را تحریک نماید آنست که اولین فرکانسی که مقدار تابع تبدیل فوریه در آن برابر صفر می‌شود ( $F_0$  در شکل ۳-ب)، بزرگتر از فرکانس طبیعی مود پنجم آن تیر باشد. مقدار  $F_0$  با مقدار  $\Delta t$  نسبت معکوس دارد. برای رسیدن به  $F_0$  مناسب بایستی  $\Delta t$  به اندازه کافی کوچک باشد. مقدار  $\Delta t$  بار اعمال شده به تیر،  $\frac{1}{10000}$  در نظر گرفته شد که مقدار  $F_0$  متناظر آن از نمودار تبدیل فوریه برابر ۱۶۶۷ هرتز بوده که از بزرگترین فرکانس طبیعی در جدول ۱ یعنی ۵۷۷٫۲۷ هرتز بزرگتر است.



شکل ۳: (الف) تابع تحریک و (ب) تبدیل فوریه سریع آن.

علاوه بر مناسب بودن محتوی فرکانسی بار اعمالی، محل اعمال بار نیز باید به گونه ای انتخاب شود که هیچ یک از مقادیر ۵ شکل مود اول تیر مورد نظر در محل اعمال بار برابر صفر نشود [۳۵]. در شکل ۴ پنج شکل مود اول تیر نشان داده شده است. یک محل مناسب برای تحریک این تیر گر ۱۱ می‌باشد که در شکل نشان داده شده است. بار نشان داده شده در شکل ۳-الف در جهت قائم در گر مورد نظر به تیر اعمال و شتاب قائم هر یک از گرها بدست آمد.



شکل ۴: پنج شکل مود اول تیر

#### ۴- شناسایی سازه‌های تیر با داده‌های آلوده به نویز

مقادیر شتاب بدست آمده عاری از نویز و یا داده‌های با سطح نویز صفر بوده و در اینجا سیگنال نامیده می‌شوند. با داشتن سیگنال‌ها (توابع  $S(t)$ ) و به ازای سطوح مختلف نویز (LN) مطابق جدول ۲، توابع نویز ( $N(t)$ ) مطابق رابطه (۳) تولید گردیدند. با اضافه

نمودن توابع  $N(t)$  به سیگنال‌ها مطابق رابطه (۱۰)، داده‌های نویزی  $(NS(t))$  تولید گردیدند. نسبت سیگنال به نویز هر یک از این داده‌های نویزی به ازای سطوح مختلف نویز در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲: سطوح مختلف نویز به همراه مقادیر SNR

نسبت سیگنال به نویز (SNR)	سطح نویز (LN)
400	5%
100	10%
25	20%
4	50%
1.78	75%
1	100%
0.25	200%

فرآیند افزودن نویز به سیگنال‌ها به لحاظ آماری غیر همبسته هستند. لذا بدلیل ماهیت تصادفی نویز فرآیند اضافه کردن آن بایستی تکرار شود [۳۰]. برای تیر مورد نظر این فرآیند ۱۰۰ بار تکرار شد. یعنی در هر سطح نویز مشخص، ۱۰۰ تابع  $N(t)$  مختلف و در نتیجه ۱۰۰ داده نویزی  $(NS(t))$  متفاوت تولید شد. سپس ۵ شکل مود اول با استفاده از داده‌های نویزی  $(NS(t))$  تعیین شدند. مقادیر MAC بین هر یک از این شکل مودها و شکل مودهای مبنای متناظر آن که از آنالیز مودال مدل اجزای محدود بدست آمده بود، تعیین شدند (مقادیر MAC بین صفر و یک متغیر بوده که مقدار یک بیانگر انطباق کامل دو شکل مود است [۳۶]). کمترین، میانگین و انحراف استاندارد مقادیر MAC در ۱۰۰ تکرار در جدول ۳ ارائه شده است. در این جدول، پایین ترین مقدار MAC انحراف استاندارد مقادیر MAC شکل مودهای مربوط به مود اول تا سطح نویز ۲۰٪ و در سایر مودها در تمامی سطوح نویز به ترتیب بسیار نزدیک به یک و بسیار نزدیک به صفر می‌باشد که نشان می‌دهد شکل مودهای تیر با دقت مناسبی شناسایی شده‌اند. در این جدول پایین ترین مقدار MAC بین شکل مودهای شناسایی شده و شکل مود مبنای در سطح نویز ۵٪ در همه مودها برابر یک شده است. در نتیجه در این درصد نویز، میانگین مقادیر MAC در ۱۰۰ تکرار نیز برابر یک و مقدار انحراف استاندارد این مقادیر برابر صفر می‌باشد. یعنی در درصد نویز پایین شکل مودهای شناسایی شده با شکل مود مبنای انطباق کامل دارد. با توجه به مقادیر MAC با افزایش سطح نویز از دقت شکل مودهای شناسایی شده کم و مقدار انحراف استاندارد بیشتر می‌شود. داده‌های نویزی که دارای کمترین مقدار MAC بودند، در ادامه برای تعیین پارامترهای ارتعاشی تیر مورد استفاده قرار گرفتند.

جدول ۳: کمترین، میانگین و انحراف استاندارد مقادیر MAC در ۱۰۰ تکرار

		سطح نویز						
		200%	100%	75%	50%	20%	10%	5%
مود اول	پایین ترین مقدار MAC	0.00	0.59	0.77	0.88	0.98	0.99	1.00
	میانگین در ۱۰۰ تکرار	0.50	0.82	0.90	0.96	0.99	1.00	1.00
	انحراف استاندارد ۱۰۰ تکرار	2.17	0.64	0.31	0.15	0.03	0.01	0.00
مود دوم	پایین ترین مقدار MAC	0.95	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	میانگین در ۱۰۰ تکرار	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	انحراف استاندارد ۱۰۰ تکرار	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
مود سوم	پایین ترین مقدار MAC	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	میانگین در ۱۰۰ تکرار	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	انحراف استاندارد ۱۰۰ تکرار	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
مود چهارم	پایین ترین مقدار MAC	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	میانگین در ۱۰۰ تکرار	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	انحراف استاندارد ۱۰۰ تکرار	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
مود پنجم	پایین ترین مقدار MAC	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	میانگین در ۱۰۰ تکرار	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	انحراف استاندارد ۱۰۰ تکرار	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



۴-۱- شناسایی فرکانس‌های طبیعی:

پنج فرکانس طبیعی اول تیر با استفاده از دو روش PP و SSI تعیین و در جدول ۴ ارائه شده است. ستون دوم این جدول مقادیر نسبت سیگنال به نویز را برای سطوح مختلف نویز نشان می‌دهد. دلیل تفاوت این مقادیر با مقادیر متناظر آن در جدول ۲ به ماهیت تابع  $I(t)$  در رابطه ۳ بر می‌گردد. برای تولید  $I(t)$  از تابع  $\text{randn}$  در نرم افزار متلب استفاده شده است. از آنجا که اطلاعات تصادفی تولید شده دارای میانگین دقیقاً برابر صفر و انحراف استاندارد دقیقاً برابر یک نبوده، مقادیر بدست آمده اندکی تفاوت دارند. به عنوان مثال برای سطح نویز ۵٪ مقدار SNR به جای عدد ۴۰۰، مقدار ۴۰۵٫۲۲ آمده است که ۱٫۳ درصد خطا نشان می‌دهد. در جدول ۴ پنج فرکانس طبیعی اول تیر با داده‌های بدون نویز (فقط سیگنال) در سطر LN=0 ارائه شده است. با توجه به صفر بودن نویز در این حالت مقدار SNR برابر بی نهایت می‌شود. علامت تیره در این جدول نشان دهنده عدم شناسایی فرکانس‌های طبیعی با نسبت سیگنال به نویز مربوطه است.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که شناسایی فرکانس طبیعی مود اول از روش‌های PP و SSI به ترتیب در سطح نویز بالاتر از ۲۰٪ و ۵٪ مقدور نمی‌باشد. فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم تا سطح نویز ۲۰٪ از هر دو روش شناسایی شدند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به هر مود در روش PP بازای درصدهای مختلف نویز تغییری نمی‌کند که با نتایج Gkoktsi و همکاران [۳۷] مطابقت دارد. زیرا در روش‌های حوزه فرکانس، فرکانس‌های طبیعی مقادیر نشان دهنده قله‌های نمودار PSD هستند و با اعمال نویزهایی با درصدهای مختلف نمودار PSD تغییر کرده ولی محل قله‌ها تغییری نمی‌کنند.

جدول ۴: فرکانس‌های شناسایی شده مربوط به داده‌های نویزی

مود اول (Hz)		مود دوم (Hz)		مود سوم (Hz)		مود چهارم (Hz)		مود پنجم (Hz)		SNR	سطح نویز (LN)
SSI	PP	SSI	PP	SSI	PP	SSI	PP	SSI	PP		
571.1	571.0	317.8	318.0	152.2	152.0	52.1	52.0	8.1	8.0	$\infty$	0
571.1	571.0	317.1	318.0	152.2	152.0	52.2	52.0	8.3	8.0	405.22	5%
570.9	571.0	317.8	318.0	152.2	152.0	52.0	52.0	-	8.0	102.37	10%
571.1	571.0	317.8	318.0	152.2	152.0	52.4	52.0	-	8.0	24.84	20%
571.1	571.0	317.8	318.0	152.3	152.0	55.8	52.0	-	-	4.03	50%
571.0	571.0	317.8	318.0	152.5	152.0	54.1	52.0	-	-	1.76	75%
571.3	571.0	318.2	318.0	152.5	152.0	55.4	52.0	-	-	1.01	100%
571.5	571.0	317.4	318.0	150.9	152.0	55.7	52.0	-	-	0.25	200%

در جدول ۵ مقادیر درصد خطای نسبی فرکانس‌های شناسایی شده از روش‌های خروجی-تنها نسبت به فرکانس‌های طبیعی مبنا نشان داده شده است. در حالت بدون نویز (LN=0) میزان خطای فرکانس‌های طبیعی مودهای اول تا سوم شناسایی شده از روش PP نسبت به روش دیگر بیشتر می‌باشد. به عنوان مثال درصد خطای نسبی فرکانس اول شناسایی شده روش‌های PP و SSI به ترتیب برابر ۲٫۴٪ و ۱٫۲٪ می‌باشد.

ردیف میانگین خطاها در جدول ۵ مربوط به میانگین درصد خطای نسبی هر کدام از روش‌ها در هر مود است. درصد خطای نسبی میانگین فرکانس‌های شناسایی شده به روش PP در مودهای اول و سوم بیشتر از روش دیگر است. این نتیجه گیری برای داده‌های بدون نویز نیز وجود داشته است. ردیف‌های خالی این جدول بدلیل عدم شناسایی فرکانس طبیعی می‌باشد که تعداد این ردیف‌ها در روش PP نسبت به روش دیگر کمتر است.

جدول ۵: مقادیر اختلاف مقدار فرکانس طبیعی شناسایی شده نسبت به مقدار مینا (درصد)

سطح نویز	روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم
0%	PP	2.4	0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI	1.2	0.2	0.1	0.4	1.1
5%	PP	2.4	0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI	1.2	0.0	0.1	0.6	1.1
10%	PP	2.4	0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI		0.4	0.1	0.4	1.1
20%	PP	2.4	0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI		0.4	0.1	0.4	1.1
50%	PP		0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI		6.9	0.1	0.4	1.1
75%	PP		0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI		3.6	0.1	0.4	1.1
100%	PP		0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI		6.1	0.1	0.3	1.0
200%	PP		0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI		6.7	1.0	0.5	1.0
میانگین خطا	PP	2.4	0.4	0.3	0.3	1.1
	SSI	1.2	3.0	0.2	0.4	1.1

## ۲-۴- شناسایی شکل مودها:

شکل مود اول این تیر از روش‌های PP و SSI بدست آمد. مقادیر MAC بین این شکل مودها و شکل مود متناظر مبنایشان در هر یک از ۸ سطح نویز در جدول ۶ نشان داده شده است. عدد ۱ در ردیف‌های مربوط به سطح نویز 0% که مربوط به حالت بدون نویز است، نشان دهنده تطابق خوب بین شکل مودهای شناسایی شده و شکل مود مبنای متناظر آنها است.

مقادیر پایین MAC مربوط به شکل مود اول نشان می‌دهند این روش‌ها قادر به شناسایی شکل مود اول تیر در سطوح نویز بالا

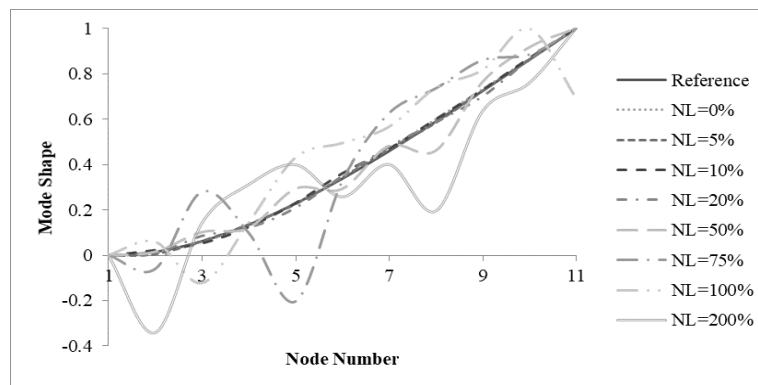
نیستند.

جدول ۶: مقادیر MAC شکل مودهای شناسایی شده نسبت به شکل مود متناظر مینا

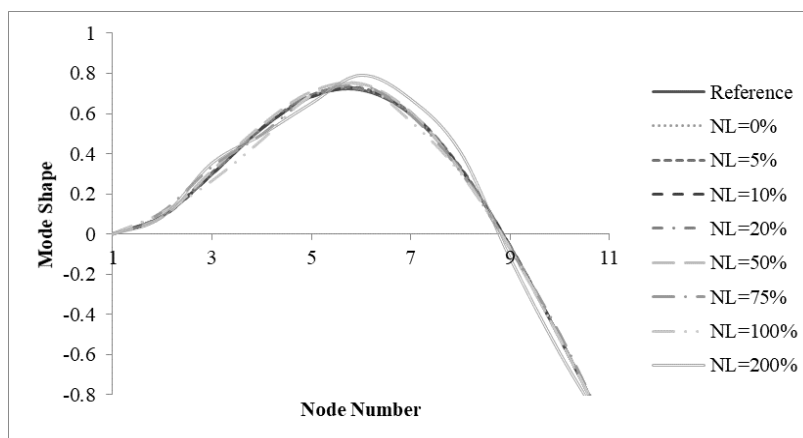
شماره مود	سطح نویز		روش
	SSI	PP	
مود اول	1	1	0%
	0.98	1	5%
	0.86	0.99	10%
	0.84	0.98	20%
	0.65	0.88	50%
	0.58	0.77	75%
	0.34	0.59	100%
	0.12	0	200%
مود دوم	1	1	0%
	1	1	5%
	1	1	10%
	0.99	1	20%
	0.99	1	50%
	0.98	0.99	75%
	0.97	0.99	100%
	0.95	0.95	200%
مود سوم	1	1	0%
	1	1	5%
	1	1	10%
	1	1	20%
	1	1	50%
	1	1	75%
	0.99	1	100%
	0.99	0.99	200%
مود چهارم	1	1	0%
	1	1	5%
	1	1	10%
	1	1	20%
	1	1	50%
	1	1	75%
	1	1	100%
	1	1	100%

0.99	1	200%	
1	1	0%	
1	1	5%	
1	1	10%	
1	1	20%	
1	1	50%	مود پنجم
1	1	75%	
0.99	1	100%	
0.98	0.99	200%	

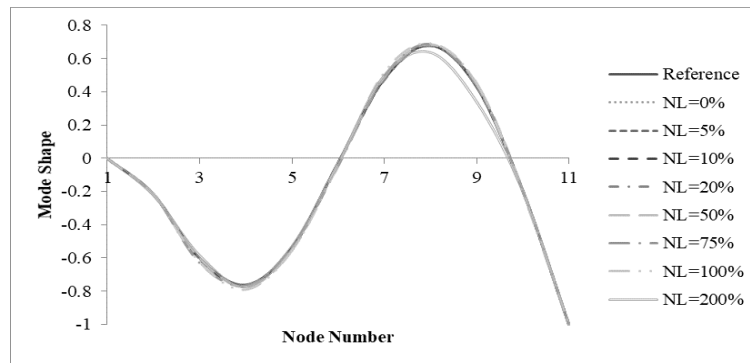
به منظور نشان دادن تاثیر نويز بر شكل‌های مودی، پنج شكل مود اول شناسایی شده از روش PP به همراه اشكال مودی متناظر مینای آنها در شكل‌های ۵ الی ۹ ارائه شده است. در این شكل‌ها، شكل مود مینا بدست آمده از آنالیز مودال مدل اجزای محدود با Reference و شكل مودهای مربوط به داده‌های نويزی با سطح نويزشان نامگذاری شده‌اند. با توجه به شكل ۵ شكل مودهای بدست آمده تا سطح نويز ۲۰٪ تخمین مناسبی از شكل مود اول را نشان می‌دهد. مطابق شكل‌های ۶ الی ۹، شكل مودهای دوم تا پنجم شناسایی شده این تیر در تمامی سطوح نويز انطباق قابل قبولی با شكل مودهای متناظر مینا دارند. در جدول ۶ برای مود اول تیر CF مقدار MAC مربوط به سطوح نويز تا ۲۰٪ که شكل مود آنها به خوبی شناسایی شده‌اند، بسیار نزدیک به یک است. که این نتیجه در مورد مودهای دوم تا پنجم در همه سطوح نويز نیز در این تیر برقرار است. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان گفت اگر مقدار MAC مربوط به یک مود بسیار نزدیک به یک (بزرگتر یا مساوی ۰٫۹۵) باشد، آن شكل مود قابل قبول می‌باشد که با نتایج مرجع [۲۰] همخوانی دارد. به عنوان مثال شكل‌های مودی مربوط به مودهای دوم تا پنجم به ازای همه سطوح نويز انتخابی به خوبی شناسایی شدند که مقدار MAC آنها نیز در جدول ۶ همگی بالای ۰٫۹۵ بدست آمده است.



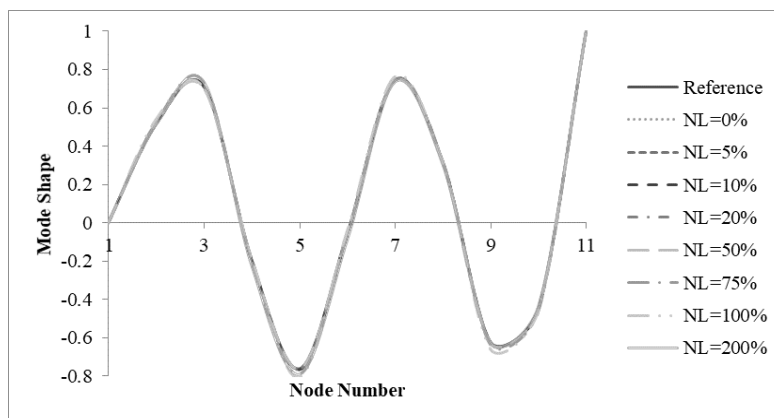
شكل ۵: شكل مود اول شناسایی شده برای داده‌های با سطوح مختلف نويز.



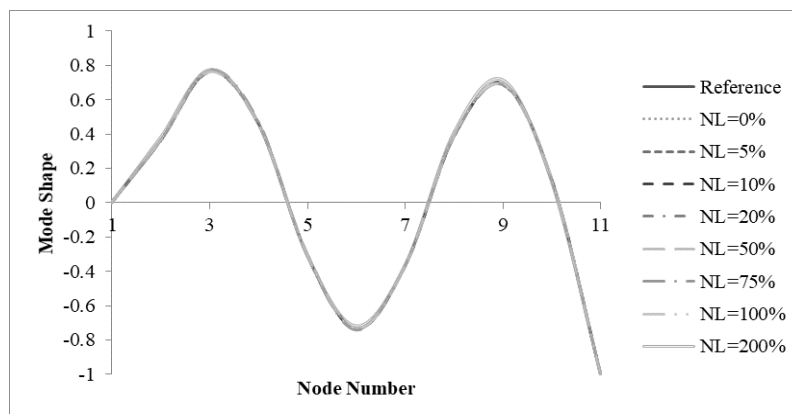
شكل ۶: شكل مود دوم شناسایی شده برای داده‌های سطوح مختلف نويز.



شکل ۷: شکل مود سوم شناسایی شده برای داده‌های سطوح مختلف نویز.



شکل ۸: شکل مود چهارم شناسایی شده برای داده‌های سطوح مختلف نویز.



شکل ۹: شکل مود پنجم شناسایی شده برای داده‌های سطوح مختلف نویز.

## ۵- نتیجه گیری

برای بررسی اثر نویز بر پارامترهای ارتعاشی، یک تیر یکسر گیردار در نظر گرفته شد. سیگنال‌های شتاب نقاط مختلف تیر از آنالیز تاریخیچه زمانی بدست آمدند. داده‌های نویزی با SNR های مختلف، ۱۰۰ بار تولید گردیدند. شناسایی پارامترهای ارتعاشی بر اساس آن داده نویزی که در بین ۱۰۰ تکرار منجر به پایین ترین مقدار MAC بین شکل مودهای شناسایی شده و شکل مودهای متناظر مینا شده است، انجام گرفت و نتایج زیر حاصل شد:

در حالت بدون نویز، روش‌های شناسایی خروجی-تنها توانستند فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی را با دقت مناسبی شناسایی کنند. همچنین مقادیر فرکانس‌های طبیعی اول با فرکانس طبیعی مینا اختلاف بیشتری نسبت به سایر فرکانس‌ها نشان می‌دهد. مقدار MAC بین شکل مودهای شناسایی شده و شکل مودهای مینای متناظر آن برابر یک بدست آمده است که نشان دهنده تطابق خوب میان این شکل مودهای بدست آمده و شکل مودهای مینای متناظر است.

وجود نویز در پاسخ‌های خروجی باعث می‌شود که بعضی از فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی تیر با دقت مناسبی شناسایی نشود. دو روش خروجی-تنها PP و SSI توانسته اند فرکانس‌های طبیعی را به ترتیب تا سطح نویز ۲۰٪ و ۵٪ با دقت مناسبی شناسایی نمایند. ولی در سطوح نویز بالاتر این روش‌ها نتوانسته‌اند فرکانس‌های طبیعی مربوط به مود اول را شناسایی کنند. فرکانس‌های طبیعی مودهای دوم تا پنجم تا سطح نویز ۲۰٪ (SNR=0.25) شناسایی شده‌اند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی شناسایی شده از روش PP برای حالت داده‌های نویزی نسبت به حالت داده‌های بدون نویز تغییری نداشته است. روش PP روش قدرتمندتری برای شناسایی فرکانس‌های طبیعی با داده‌های آلوده به نویز است. زیرا فرکانس‌های بیشتری را در سطوح نویز بالاتر نسبت به روش دیگر شناسایی نموده است. همه نتایجی که برای شناسایی فرکانس‌های طبیعی بدست آمده، برای شکل مودهای متناظر نیز صادق است. یعنی شکل مودی از تیر به خوبی شناسایی شده که فرکانس طبیعی آن نیز شناسایی شده باشد. مقدار MAC شکل مودهای شناسایی شده قابل قبول نسبت به شکل مود مینا بزرگتر یا مساوی 0.95 بدست آمده است. میانگین و انحراف استاندارد مقادیر MAC شکل مود شناسایی شده قابل قبول نسبت به شکل مود مینا در ۱۰۰ تکرار به ترتیب بسیار نزدیک به یک (مساوی یا بزرگتر از ۰.۹۵) و صفر (مساوی یا کوچکتر از ۰.۰۳) بدست آمده است.

## مراجع

- [1]. Sirca, Jr. and Adeli, H. (2012). System identification in structural engineering. *Scientia Iranica*, 19 (6), 1355-1364.
- [2]. Mbarek, A., Del Rincon, A.F., Hammami, A., Iglesias, M., Chaari, F., Viadero, F., Haddar, M., (2018). Comparison of experimental and operational modal analysis on a back to back planetary gear. *Mechanism and Machine Theory*, 000, 1-22.
- [3]. Giraldo, D.F., Song, W., Dyke, S.J. and Caicedo, J.M. (2009). Modal identification through ambient vibration: comparative study. *J. Eng. Mech.*, 135, 759-770.
- [4]. Brincker, R. and Kirkegaard, P.H. (2010). Special issue on operational modal analysis. *Mech. Syst. Signal Process.*, 24, 1209-1212.
- [5]. Orlowitz, Esben and Brandt, Anders. (2017). Comparison of experimental and operational modal analysis on a laboratory test plate. *Measurement*, 102, 121-130.
- [6]. Peeters, B., Cornelis, B., Janssens, K. and Van Der Auweraer, H. (2007). Removing disturbing harmonics in operational modal analysis. In *Proceedings of International Operational Modal Analysis Conference*, Copenhagen, Denmark.
- [7]. Brincker, R. (2014). Some elements of operational modal analysis. *Shock Vib.*, 2014, 1-11.
- [8]. Felber, A.J. (1994). *Development of a hybrid bridge evaluation system*. Ph.D. Dissertation, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- [9]. Zhang, G., Tang, B. and Tang, G. (2012). An improved stochastic subspace identification for operational modal analysis. *Measurement*, 45(5), 1246-1256.
- [10]. Peeters, B. and De Roeck, G., 2001. Stochastic system identification for operational modal analysis: a review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4), 659-667.

- [11]. Brincker, R. and Andersen, P. (2006). Understanding stochastic subspace identification. *Proc. 24th IMAC*, St. Louis, Missouri, United States, 279–311.
- [12]. Reynders, E., Maes, K., Lombaert, G. and De Roeck, G. (2016). Uncertainty quantification in operational modal analysis with stochastic subspace identification: validation and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66, 13-30.
- [13]. Brincker, R. and Ventura, C. (2015), *Introduction to Operational Modal Analysis*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, United Kingdom.
- [14]. Mellinger, P., Döhler, M. and Mevel, L. (2016). Variance estimation of modal parameters from output-only and input/output subspace-based system identification. *Journal of Sound and Vibration*, 379, 1-27.
- [15]. Rainieri, C. and Fabbrocino, G. (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Springer, New York.
- [16]. Brincker R, Lago TL, Andersen P, Ventura CE. (2005). Improving the classical geophone sensor element by digital correction. In: *Proc XXIII International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL.
- [17]. Cyrille, S. (2012). Sensor placement for modal identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 27, 461–470.
- [18]. Wang, L., Song, R., Wu, Y., and Hu, W. (2016). Statistically Filtering Data for Operational Modal Analysis under Ambient Vibration in Structural Health Monitoring Systems. In *MATEC Web of Conferences*, Vol. 68, 14010.
- [19]. Alamdari, M. M., Li, J. and Samali, B. (2014). FRF-based damage localization method with noise suppression approach. *Journal of Sound and Vibration*, 333(14), 3305-3320.
- [20]. Brandt, A. (2019). A signal processing framework for operational modal analysis in time and frequency domain. *Mechanical Systems and Signal Processing* 115, 380–393.
- [21]. Rainieri, C. and Fabbrocino, G., (2010). Automated output-only dynamic identification of civil engineering structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(3), 678-695.
- [22]. Bonness W.K., Jenkins D.M. (2015) Removing Unwanted Noise from Operational Modal Analysis Data. In: Mains M. (eds) *Topics in Modal Analysis*, Volume 10. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer, Cham
- [23]. Jiang, X. and Adeli, H. (2004). Wavelet packet-autocorrelation function method for traffic flow pattern analysis. *Comput. Civ. Infrastruct. Eng.*, 19, 324–337.
- [24]. Reynders, E. and De Roeck, G. (2008). Reference-based combined deterministic-stochastic subspace identification for experimental and operational modal analysis. *Mech. Syst. Signal Process.*, 22, 617–637.
- [25] Au, S.K., Brownjohn, J.M.W., Mottershead, J.E., (2018). Quantifying and managing uncertainty in operational modal Analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* 102, 139–157.
- [26]. Zhang, J., Prader, J., Grimmelsman, K. A., Moon, F., Aktan, A. E., and Shama, A. (2012). Experimental vibration analysis for structural identification of a long-span suspension bridge. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(6), 748-759.
- [27]. Adeli, H., & Jiang, X. (2006). Dynamic fuzzy wavelet neural network model for structural system identification. *Journal of Structural Engineering*, 132(1), 102-111.
- [28]. Moaveni, B., & Asgari, E. (2012). Deterministic-stochastic subspace identification method for identification of nonlinear structures as time-varying linear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 31, 40-55.
- [29]. Perry, M.J. and Koh, C.G. (2008). Output-only structural identification in time domain: Numerical and experimental studies. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, 37, 517–533.
- [30]. Makki Alamdari, M., Samali, B., Li, J., Kalhori, H., and Mustapha, S. (2015). Spectral-based damage identification in structures under ambient vibration. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 30(4), 04015062.
- [31]. Moaveni, B., Barbosa, A. R., Conte, J. P. and Hemez, F. M. (2014). Uncertainty analysis of system identification results obtained for a seven-story building slice tested on the UCSD-NEES shake table. *Struct. Control Heal. Monit.*, 21, 466–483.
- [32]. Wu, Z., and Huang, N. E. (2009). Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method. *Advances in adaptive data analysis*, 1(01), 1-41.
- [33]. ANSYS Documentation, Mechanical APDL, Element Reference, Element Library, BEAM 188.
- [34]. Chopra, A.K. (2001). *Dynamics of structures : theory and applications to earthquake engineering*, Prentice Hall, USA.
- [35]. Mostafavian, S. A., Davoodi, M. R., Vaseghi Amiri, J. (2012). Ball joint behavior in a double layer grid by dynamic model updating. *Journal of Constructional Steel Research*, 76, 28–38.
- [36]. Allemang, R. J. (2003). The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, 37(8), 14-23.
- [37]. Gkoktsi, K., Giaralis, A., and TauSiesakul, B. (2016). Sub-Nyquist signal-reconstruction-free operational modal analysis and damage detection in the presence of noise. In *SPIE Smart Structures and Materials+ Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, International Society for Optics and Photonics, 980312-980312.

